

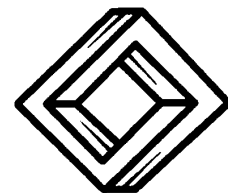
**Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana**

**El anillo de cobordismo
de Thom**

**Juan Antonio Pérez
Maribel de Ávila**

www.smm.org.mx

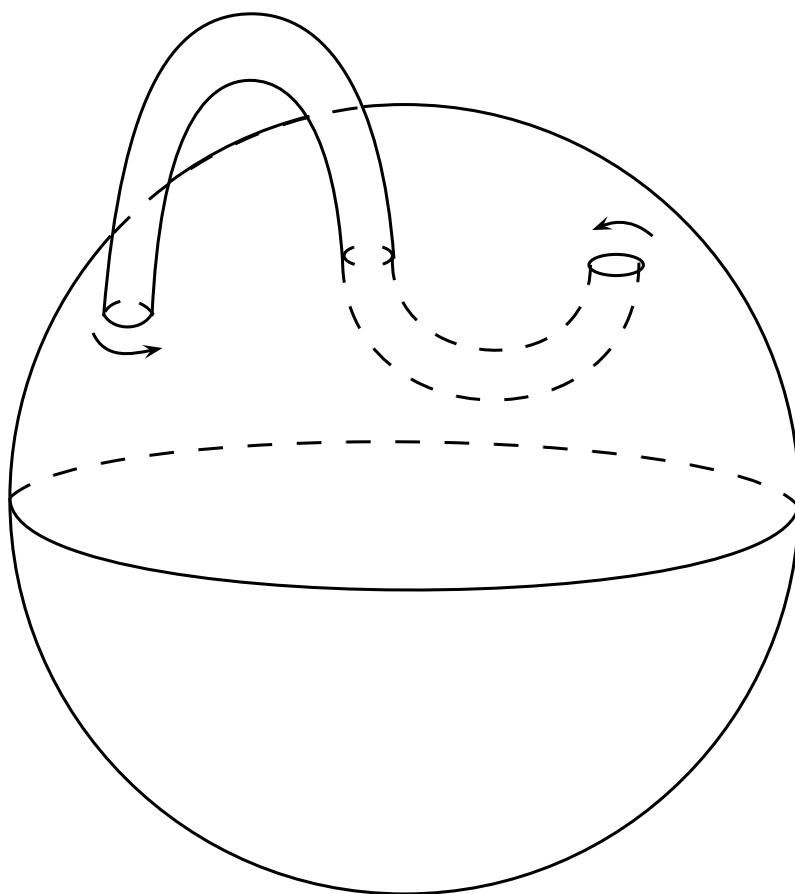
Serie: Cursos. Vol. 1 (2012)



El anillo de cobordismo de Thom

Juan Antonio Pérez y Maribel de Avila
Escuela de Primavera de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

25 - 29 de abril de 2011



Índice

1. Preliminares	5
2. Variedades	9
3. Variedades con frontera	11
4. Cirugía	14
5. Cobordismo	15
6. Variedades de dimensión 1	19
7. Los grupos Ω_0 y Ω_1	21
8. Complejos simpliciales	22
9. Gráficas y complejos duales	26
10. Clasificación de superficies	28
11. El teorema de Thom	33
12. Homología extraordinaria	37

El presente material fue usado como texto para un minicurso de cuatro sesiones, durante la **I Escuela de Primavera**, organizada por el Programa de Maestría en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas, perteneciente a la Universidad Autónoma de Zacatecas *Francisco García Salinas*. La Escuela de Primavera tuvo lugar en la ciudad de Zacatecas, en abril de 2011.

El propósito de estas notas, del curso y de la Escuela de Primavera es introducir a los jóvenes estudiantes de Licenciatura en Matemáticas a tópicos avanzados que no forman parte de los planes de estudio, pero que son temas activos de investigación en el seno de la comunidad matemática.

Con el mismo propósito, ponemos estas notas al servicio de los jóvenes con curiosidad e iniciativa suficientes, como para interesarse en temas de Matemática Básica, deseando que les reporten alguna utilidad.

Zacatecas, julio de 2012

Juan Antonio Pérez
Maribel de Avila

El cobordismo es básicamente una relación de equivalencia entre variedades compactas. Se dice que dos variedades son cobordantes si su unión ajena es la frontera de una tercera variedad también compacta. Como veremos, la frontera de una variedad de dimensión $n + 1$ es una variedad de dimensión n , y la frontera de una variedad con frontera es una variedad sin frontera, lo que permite la construcción de una bella teoría de homología.

El francés Henri Poincaré [1854 - 1912], en su intento por obtener una clasificación de los espacios topológicos, define el grupo fundamental, la homología simplicial y el cobordismo [3]. El grupo fundamental se conoce también como el *primer grupo de homotopía*, a partir de que la construcción básica de Poincaré es generalizada a dimensiones superiores. En tanto, la homología simplicial fue llamada inicialmente *topología combinatoria*.

El cobordismo fue rescatado por Lev Pontryagin [13] e introducido formalmente en la literatura científica. El cobordismo se convirtió en una de las llamadas teorías cohomológicas extraordinarias, junto con la K -teoría algebraica. Su enorme potencial se hizo pronto evidente, jugando un rol protagónico en el desarrollo de la Topología al inicio de la segunda mitad del siglo XX. Es entonces que aparece en resultados como el Teorema de Hirzebruch-Reimann-Roch y el Teorema de Atiyah-Singer-Patodi.

El poderío del cobordismo se expresa en muchos resultados matemáticos, como en el hecho consignado por Michael Atiyah [1], en el sentido de que una Teoría Cuántica de Campos topológica no es sino un functor de la categoría de las n -variedades donde los morfismos son relaciones de cobordismo, en la categoría de los espacios vectoriales, donde los morfismos son transformaciones lineales.

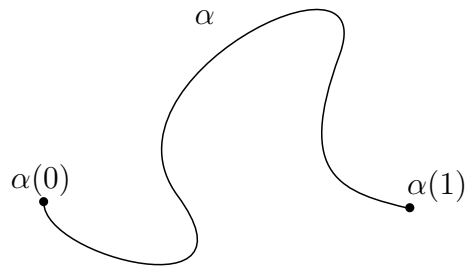
Las presentes notas constituyen una introducción a la Teoría de Cobordismo no orientado, que, en realidad, no es más poderosa que la cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$, pero que sin embargo, nos permite ver con claridad las construcciones básicas del cobordismo, así como apreciar los métodos de la Topología Algebraica.

1. Preliminares

Una *separación* de un espacio topológico es un par (A, B) donde A y B son subespacios abiertos, ajenos y no vacíos cuya unión es el espacio X . Nótese que si ambos subespacios son abiertos, dado que son complementarios, entonces son también ambos cerrados. Un espacio topológico es *conexo* si no

admite una separación. Un espacio es *localmente conexo* si tiene una base de abiertos conexos.

Equivalentemente, un espacio X es conexo si los únicos abiertos que también son cerrados son los triviales, es decir, son \emptyset y X . Los intervalos son conexos, hecho cuya demostración se considera un ejercicio para el lector. De hecho, los intervalos son el paradigma de una versión más estricta de la conexidad. En adelante $I = [0, 1]$.



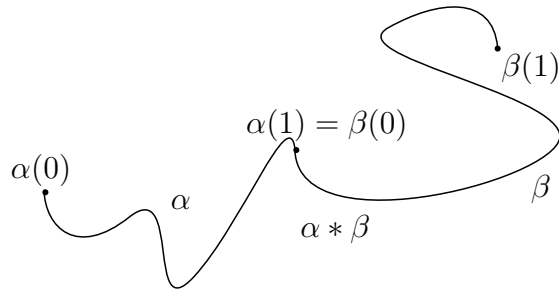
Una *trayectoria* sobre un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : I \rightarrow X$. Un espacio se dice *trayectoconexo* si dados dos puntos $x_0, x_1 \in X$ cualesquiera, existe una trayectoria α en X tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$.

Proposición 1. *Todo espacio trayectoconexo es conexo.*

Demostración. Si X es trayectoconexo y (A, B) es una separación de X , elíjanse $a \in A, b \in B$, además de una trayectoria $\alpha : I \rightarrow X$ con $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$, entonces $(\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B))$ es una separación de I . \square

El recíproco se satisface bajo condiciones locales adecuadas. Un espacio se dice *localmente trayectoconexo* si admite una base de abiertos trayectoconexos. Dadas dos trayectorias $\alpha, \beta : I \rightarrow X$, definimos una nueva trayectoria $\alpha * \beta : I \rightarrow X$ mediante:

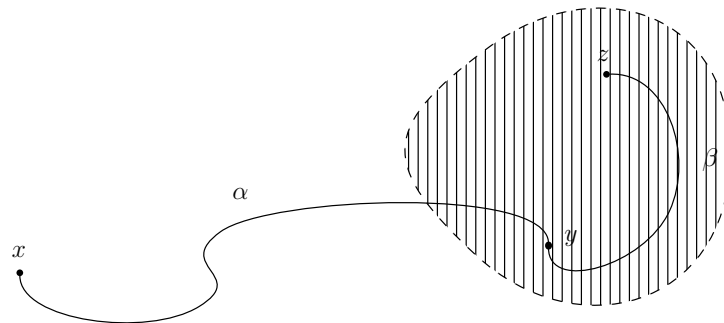
$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



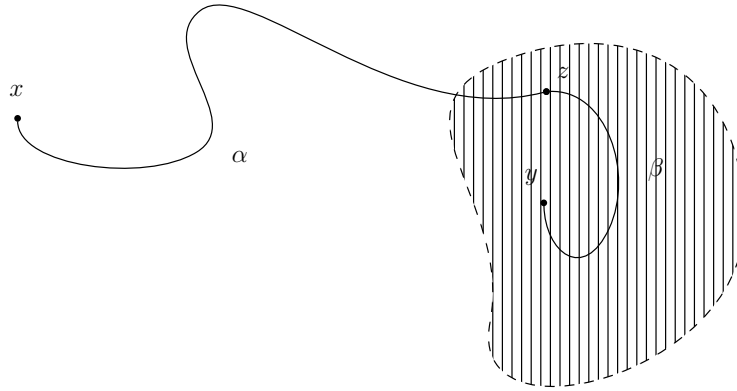
Debe demostrarse la continuidad de $\alpha * \beta$, lo que se considera un ejercicio para el lector.

Proposición 2. *Un espacio conexo y localmente trayectoconexo es trayectoconexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto arbitrario, considerando el conjunto $P \subseteq X$ de todos los puntos de X que son “conectables” con x , dado que $x \in P$ y en consecuencia $P \neq \emptyset$, bastará demostrar que es abierto y cerrado, pues entonces necesariamente $P = X$. Sean $y \in P$, U una vecindad abierta trayectoconexa de y y $z \in U$.



Sean α una trayectoria de x a y , y β una trayectoria de y a z contenida en U , entonces $\alpha * \beta$ es una trayectoria de x a z , y se tiene $U \subseteq P$, con lo que P es vecindad de cada uno de sus puntos, y por tanto es abierto. Sean ahora $y \in \overline{P}$, U una vecindad abierta trayectoconexa de y , y $z \in P \cap U$, si α es una trayectoria de x a z y β es una trayectoria de z a y contenida en U , entonces $\alpha * \beta$ es una trayectoria de x a y .



Tenemos con ello que $y \in P$, de donde entonces $\overline{P} \subseteq P$ y P es cerrado, como se quería demostrar. \square

Una *cubierta* de un espacio X es una colección $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ tal que $X = \cup \mathcal{A}$, si los elementos de una cubierta son abiertos, se dice que \mathcal{A} es una *cubierta abierta*. Una *subcubierta* de \mathcal{A} es una subcolección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ que también es cubierta. Un espacio topológico se dice *compacto* si toda cubierta abierta admite una subcubierta finita.

Proposición 3. *Un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sean X de Hausdorff, $K \subseteq X$ compacto, y $x \notin K$. Para cada $x \in K$ tómnese dos abiertos ajenos U_x y V_x alrededor de x y alrededor de y respectivamente. La colección $\mathcal{U} = \{U_x | x \in K\}$ es una cubierta abierta de K que admite por compacidad una finita, digamos $\mathcal{U}_0 = \{U_1, \dots, U_n\}$, siendo las vecindades de y correspondientes $\mathcal{V}_0 = \{V_1, \dots, V_n\}$. Entonces claramente $\bigcap \mathcal{V}_0 \subseteq \bigcup (\mathcal{U}_0)^c \subseteq K^c$. \square

Proposición 4. *Un subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

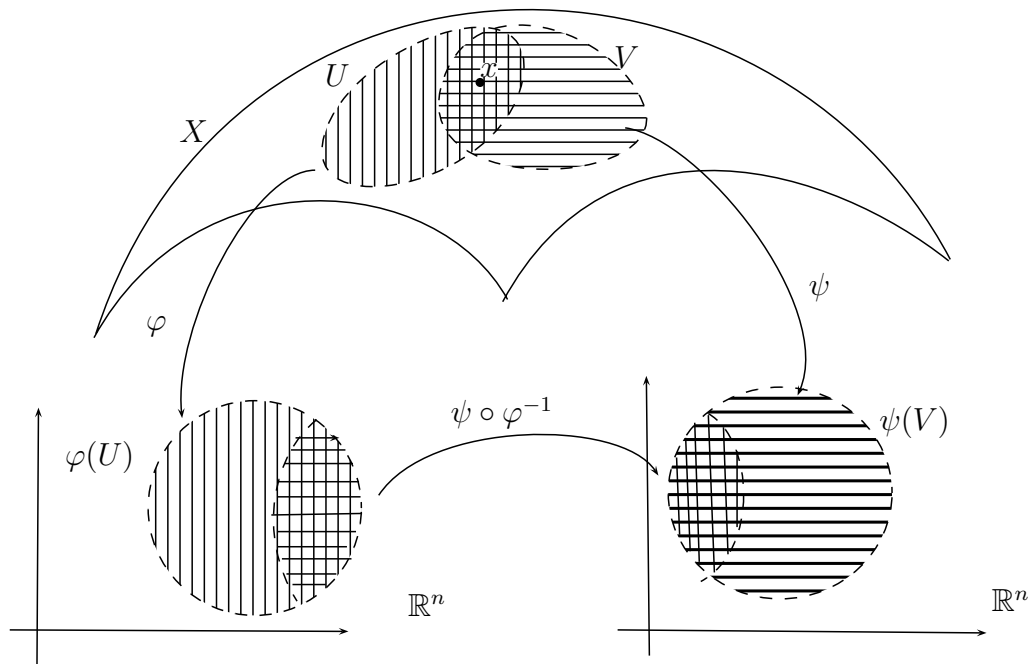
Demostración. Sean X compacto, $F \subseteq X$ cerrado, y \mathcal{U} una cubierta abierta para F , entonces $\mathcal{U} \cup \{F^c\}$ es una cubierta abierta para X , reduciendo esta última a una finita \mathcal{U}_0 se obtiene una finita $\mathcal{U}_0 - \{F^c\}$. \square

2. Variedades

Si X es un espacio topológico y $x \in X$, denotamos por $\mathcal{N}(x)$ el sistema de vecindades de x . Se dice que X es de Hausdorff, si para dos puntos distintos cualesquiera existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.



Un espacio topológico se dice que es 1°-numerable si $\mathcal{N}(x)$ admite una base local numerable para todo $x \in X$, y se dice que es 2°-numerable si su topología admite una base numerable.



Una *variedad* X es un espacio topológico de Hausdorff y 2° -numerable, en el que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad homeomorfa con un abierto de un espacio euclidiano. Esta vecindad U se llama *vecindad coordinada*, y cada homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es una *carta coordinada*. El homeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U \subseteq X$ se llama *parametrización local*.

Supóngase que U y V son dos vecindades coordinadas en una variedad X tales que $U \cap V \neq \emptyset$, con cartas coordinadas φ y ψ respectivamente, el homeomorfismo

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

se llama *cambio de cartas*. Si los cambios de cartas en una variedad son diferenciables, de clase C^n , suaves, ó analíticas, la variedad se dice que es correspondientemente diferenciable, de clase C^n , suave, ó analítica.

Sean X una variedad y $x \in X$, si U es una vecindad coordinada alrededor de x homeomorfa con un abierto de \mathbb{R}^n , claramente otra vecindad cualquiera, que sea homeomorfa con un abierto de un espacio euclidiano, es también homeomorfa con un abierto de \mathbb{R}^n para el mismo valor de n . Decimos entonces que la *dimensión local* de X en x es n , lo que se denota mediante $\dim(x) = n$. Queda entonces definida la *función dimensión* por

$$\dim : X \longrightarrow \mathbb{N}$$

que asigna a cada punto de X su dimensión local.

Proposición 5. *La función dimensión es continua.*

Demostración. La función dimensión es localmente constante en cada vecindad coordinada conexa. Como \mathbb{N} es discreto, entonces $\{n\} \subset \mathbb{N}$ es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $\dim^{-1}(n)$ es la unión de todas las vecindades coordinadas de X con dimensión local n . Cada vecindad coordinada es abierta, de modo que $\dim^{-1}(n) \subseteq X$ es abierto, con lo que queda establecida la continuidad. \square

Proposición 6. *La función dimensión es constante en cada componente conexa.*

Demostración. Dado que \dim es continua y $\{n\} \subset \mathbb{N}$ es cerrado, entonces $\dim^{-1}(n) \subseteq X$ es cerrado, por tanto, si X es conexa y $\dim^{-1}(n) \neq \emptyset$, debe tenerse $\dim^{-1}(n) = X$. \square

Tenemos ahora la garantía de que la dimensión está unívocamente definida sobre variedades conexas, que son realmente las que consideraremos. El hecho de que una variedad sea localmente euclidiana garantiza que, si es conexas, es trayectoconexa, dado que es localmente trayectoconexa.

Proposición 7. *Toda variedad conexas es trayectoconexa.*

Proposición 8. *El producto de dos variedades es una variedad.*

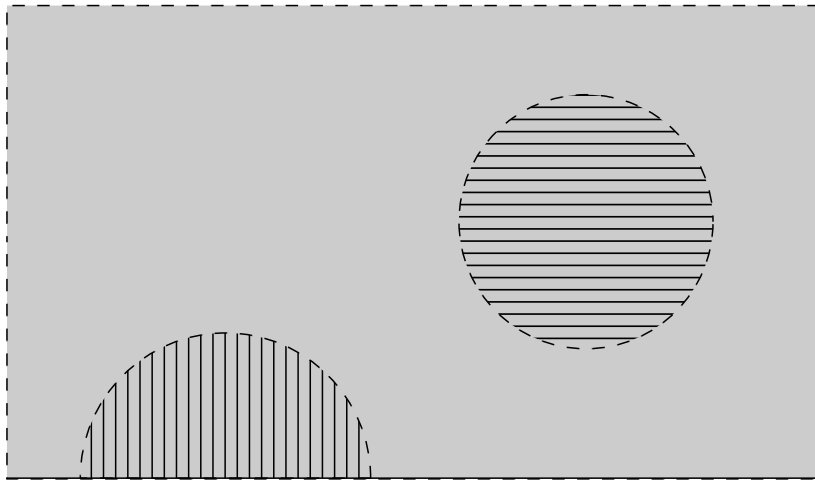
Demostración. El producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff, y el producto de dos espacios 2° -numerables es también 2° -numerable. Finalmente, si U es homeomorfo con un abierto de \mathbb{R}^n y V es un homeomorfo con un abierto de \mathbb{R}^m , entonces $U \times V$ es homeomorfo con un abierto de \mathbb{R}^{m+n} . \square

3. Variedades con frontera

De la misma manera que el modelo para la construcción de las variedades son los espacios euclidianos, el análogo para la construcción de las variedades con frontera es el semiespacio euclidiano superior

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\},$$

como se describe a continuación.



Una *variedad con frontera* X es un espacio de Hausdorff, segundo numerable y localmente homeomorfo a H^n , es decir, tal que las vecindades

coordenadas son homeomorfos con abiertos de H^n . Un punto $x \in X$ es un *punto frontera* si toda vecindad de x es homeomorfa con un abierto de H^n que no es abierto en \mathbb{R}^n , la *frontera* de X es el subespacio de sus puntos frontera, y se denota por ∂X .

Al igual que en las variedades, el modelo H^n determina su dimensión, la cual es constante sobre componentes conexas, además claramente

$$\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in H^n \mid x_n = 0\},$$

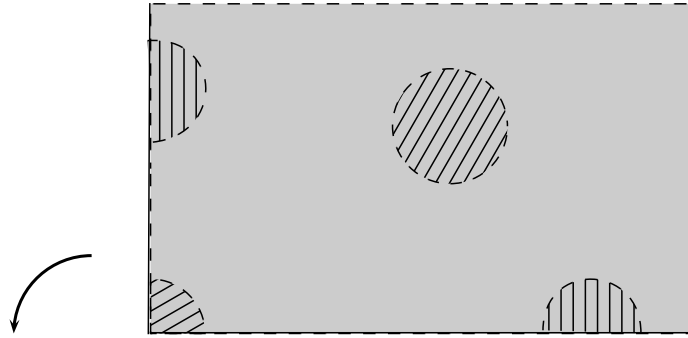
que es evidentemente homeomorfo con \mathbb{R}^{n-1} . En adelante denotaremos $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$. Notemos por otra parte, que para todo subespacio $A \subseteq \mathbb{H}^n$, se satisface $\partial A = A \cap (\partial H^n)$.

Proposición 9. *Si X es una variedad con frontera de dimensión n , entonces ∂X es una variedad de dimensión $n - 1$.*

Demostración. Las propiedades de Hausdorff y 2° -numerable son hereditarias, de manera que resta verificar la propiedad de ser localmente euclidiano. Si $x \in \partial X$, U es una vecindad coordinada alrededor de x , $\varphi : U \rightarrow V \subseteq H^n$, la restricción $\partial\varphi : \partial U \rightarrow \partial V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ es un homeomorfismo, de forma que el par $(\partial U, \partial\varphi)$ es una carta coordinada. \square

Trataremos exclusivamente con variedades compactas, y dado que la frontera es cerrada, la frontera de una variedad compacta es también una variedad compacta. Nos interesa además conocer la naturaleza de un producto de variedades con frontera. Notemos en primer lugar que el producto $H^m \times H^n$ es homeomorfo con H^{m+n} , para ello, bastará notar que $[0, \infty) \times [0, \infty)$ y H^2 son homeomorfos.

Cada punto del producto $[0, \infty) \times [0, \infty)$ puede verse como un número complejo de la forma $re^{i\alpha}$ donde $r \geq 0$ y $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Por su parte, cada punto de H^2 puede verse como un número complejo de la forma $re^{i\alpha}$ donde $r \geq 0$ y $0 \leq \alpha \leq \pi$. Bajo estas condiciones, el homeomorfismo entre estos dos espacios puede interpretarse como $z \mapsto z^2$.



Proposición 10. *El producto de dos variedades con frontera es una variedad con frontera.*

Demostración. Basta observar que si $U \subseteq H^m$ y $V \subseteq H^n$ son abiertos, entonces $U \times V$ es abierto en $H^m \times H^n$ que es a su vez, por la discusión anterior, homeomorfo con H^{m+n} . \square

Proposición 11. *Dadas dos variedades compactas X, Y , entonces*

$$\partial(X \times Y) = (X \times \partial Y) \cup (\partial X \times Y).$$

Demostración. Supongamos que U y V son vecindades coordinadas en X y en Y respectivamente, supóngase además que $\dim X = n$ y $\dim Y = m$, entonces $U \times V$ es una vecindad coordinada de un punto (x, y) en la frontera de $X \times Y$, entonces es homeomorfa con un abierto de H^{n+m-1} . Bajo estas condiciones, se tiene que $x \in \partial U$, que $y \in \partial V$, o ambos. \square

El resultado anterior nos presenta al operador frontera como una derivación sobre variedades compactas, dada su analogía con la regla de Leibniz. Nos permite además definir una *variedad cerrada* como una variedad compacta y sin frontera, es decir, una variedad X para la cual $\partial X = \emptyset$, o como denotaremos en lo sucesivo $\partial X = 0$.

Continuando con la analogía, podríamos decir que la variedad compacta X es una *variedad exacta* si existe una variedad compacta Y tal que $\partial Y = X$.

Ejemplo 1. *El disco de dimensión n es el espacio $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ y claramente*

$$\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},$$

la esfera de dimensión $n - 1$.

Ejemplo 2. La esfera de dimensión n es una variedad cerrada, dado que $\partial S^n = \emptyset$.

Ejemplo 3. Denotemos por T^2 el toro de dimensión 2, es decir, el producto $S^1 \times S^1$. Es claro que $\partial(S^1 \times D^2) = T^2$.

De la definición de frontera se sigue que las fronteras no tienen frontera, es decir, que todas las fronteras son variedades cerradas. El hecho relevante es que

$$\partial^2 X = \emptyset$$

para toda variedad compacta X . Esto nos permite construir una teoría de homología extraordinaria sobre la categoría de las variedades compactas.

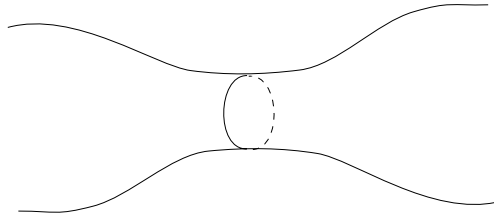
4. Cirugía

Sean X, Y dos espacios topológicos compactos, sean además $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subespacios cerrados. Dada una aplicación continua y suprayectiva $f : A \rightarrow B$, definimos el espacio de adjunción $X \cup_f Y$ como el cociente de $X \cup Y$, módulo la relación de equivalencia $a \sim f(a)$ para $a \in A$. Si A y B son subespacios homeomorfos y f es un homeomorfismo, denotamos $X \cup_f Y$ simplemente como $X \cup_A Y$ considerando $A = B$.

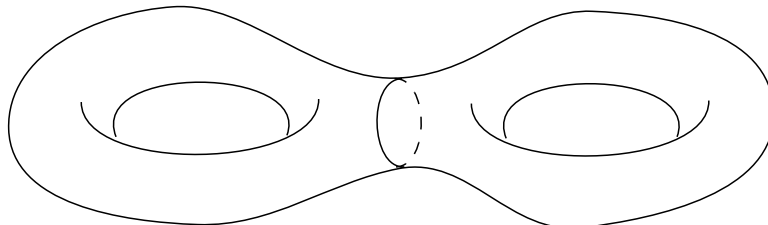
Tomemos ahora dos variedades M y N de la misma dimensión n , y sean $D_M^n \subseteq M$ y $D_N^n \subseteq N$ subvariedades, ambas homeomorfas con un n -disco D^n , de manera entonces que sus respectivas fronteras son ambas homeomorfas con la $(n-1)$ -esfera S^{n-1} . Denotemos ahora $D_M = D_M^n - \partial D_M^n$ y correspondientemente $D_N = D_N^n - \partial D_N^n$, definimos la *suma conexa* de M y N como

$$M \# N = (M - D_M) \cup_{S^{n-1}} (N - D_N)$$

donde consideramos $\partial D_M^n = \partial D_N^n = S^{n-1}$.



Ejemplo 4. Claramente $T^2 \# T^2$ es el doble toro, es decir, la superficie orientable de género 2. Además, Si M es una variedad de dimensión n , entonces $M \# S^n = M$.



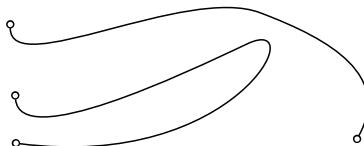
5. Cobordismo

Dos variedades M y N se dice que son *cobordantes* si existe una tercera variedad W , cuya frontera es la unión ajena de M y N , es decir, W es tal que

$$\partial W = M \sqcup N.$$

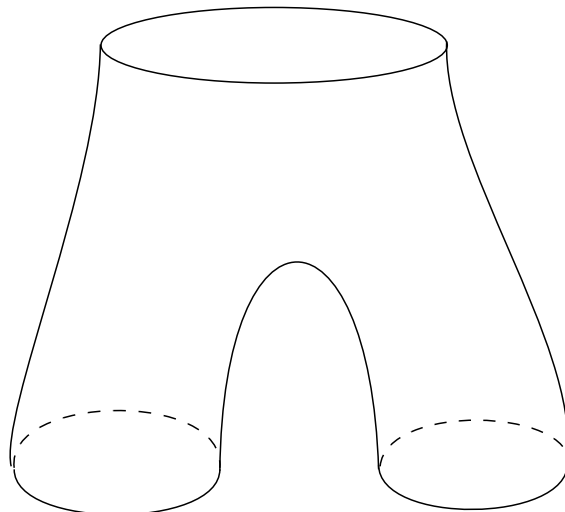
Se dice entonces que W es un *cobordismo* entre M y N , y que la terna $(W; M, N)$ es un *cobordismo*.

Ejemplo 5. Un punto es cobordante con un conjunto de tres puntos.



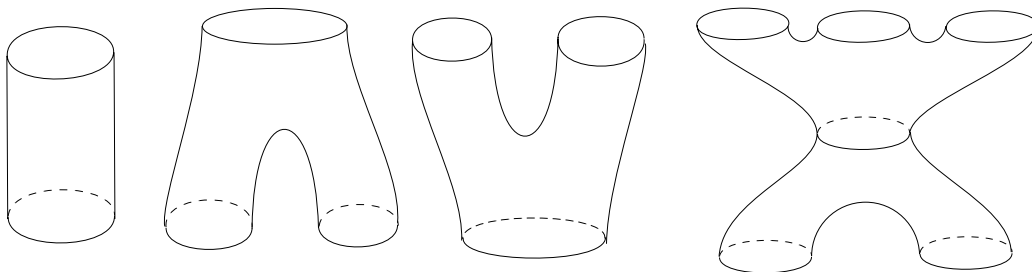
Sobre la esfera S^n , consideremos la relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son las parejas de puntos antipodales, es decir, donde $[x] = \{\pm x\} = [-x]$. El espacio de tales clases de equivalencia es el *espacio proyectivo* de dimensión n , que se denota mediante $\mathbb{R}P^n$. El *plano proyectivo* puede verse también como $D^2 \cup_{S^1} M$ donde M es la banda de Möbius. La *recta proyectiva* $\mathbb{R}P^1$ es homeomorfa con S^1 , y finalmente, el *espacio proyectivo de dimensión cero* $\mathbb{R}P^0$ es un espacio consistente en un único punto. En adelante usaremos la útil pedantería de llamar el proyectivo de dimensión cero a un espacio que consta de un único punto.

Ejemplo 6. *Un círculo es cobordante con la unión ajena de dos círculos.*



Proposición 12. *La relación de cobordismo es una relación de equivalencia.*

Demostración. La terna $(M \times I; M, M)$ es claramente un cobordismo para toda variedad compacta M . Si $(W; M, N)$ es un cobordismo, entonces también lo es $(W; N, M)$. Finalmente, supóngase que $(W; M, P)$ y $(Z; P, N)$ son cobordismos, entonces $(W \cup_P Z; M, N)$ es también un cobordismo. \square



La relación de cobordismo es entonces una relación de equivalencia. Si M y N son cobordantes escribimos $M \sim N$, y si $[M]$ representa la *clase de cobordismo* de la variedad M , entonces $[M] = [N]$. Una variedad que es cobordante con la variedad vacía \emptyset se dice que es *0-cobordante*, de forma entonces que toda frontera es 0-cobordante. Denotamos $[\emptyset] = 0$. Si M y N son cobordantes, entonces $[M \sqcup N] = 0$. Las clases de equivalencia bajo la relación de cobordismo se llaman *clases de cobordismo*.

Ejemplo 7. Las esferas son las fronteras de los discos, de forma que son 0-cobordantes. El proyectivo $\mathbb{R}P^0$ no es 0-cobordante como veremos en la siguiente sección. Dado que $\mathbb{R}P^1 = S^1$, entonces $[\mathbb{R}P^1] = 0$. Demostraremos más adelante que $\mathbb{R}P^2$ no es 0-cobordante.

Lema 13. Una variedad es una frontera si y sólo si es 0-cobordante.

Demostración. Es suficiente notar que $\partial M = \partial M \sqcup \emptyset$ se satisface para toda variedad compacta M . \square

Denotemos por Ω_n la colección de todas las clases de cobordismo de variedades cerradas de dimensión n , y sobre Ω_n definamos la suma mediante

$$[M] + [N] = [M \sqcup N],$$

lo que provee de estructura algebraica a las clases de cobordismo en una dimensión dada.

Proposición 14. La operación de adición sobre Ω_n está bien definida.

Demostración. Supongamos que $[M] = [M_1]$ y $[N] = [N_1]$, sean además $(W; M, M_1)$ y $(Z; N, N_1)$ cobordismos dados, entoces claramente

$$(W \sqcup Z; M \sqcup N, M_1 \sqcup N_1)$$

es también un cobordismo, de donde $[M \sqcup N] = [M_1 \sqcup N_1]$. \square

Proposición 15. El par $(\Omega_n, +)$ es un grupo abeliano para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La operación es obviamente conmutativa. Claramente además, la clase de cobordismo de la variedad vacía es un elemento neutro para la operación de adición definida. Por otra parte, dado que M es cobordante consigo misma, entonces $M \sqcup M$ es una frontera y en consecuencia 0-cobordante, es decir $0 = [M \sqcup M] = [M] + [M]$ de donde $-[M] = [M]$. Basta observar finalmente que la operación de unión ajena es asociativa. \square

Corolario 16. El grupo Ω_n es un $\mathbb{Z}/2$ -módulo.

Consideremos ahora el grupo graduado

$$\Omega_O = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k,$$

y sobre él el producto graduado dado por

$$[M] \cdot [N] = [M \times N],$$

para variedades compactas M y N de dimensiones m y n respectivamente. La gradación radica en que la dimensión del producto es la suma de las dimensiones de los factores.

Proposición 17. *El producto sobre Ω_O está bien definido.*

Demostración. El producto de variedades compactas es, por el teorema de Tychonoff, una variedad compacta, una demostración puede consultarse en [8]. Además, el producto de variedades cerradas es claramente una variedad cerrada. Por otra parte, si $(W; N, N_1)$ es un cobordismo, entonces

$$\partial(M \times W) = (\partial M \times W) \cup (M \times \partial W) = M \times \partial W,$$

para toda variedad cerrada M , dado que entonces $\partial M = \emptyset$. Tenemos así que

$$\partial(M \times W) = M \times (N \sqcup N_1) = (M \times N) \sqcup (M \times N_1),$$

de manera entonces que $(M \times W; M \times N, M \times N_1)$ es un cobordismo para toda variedad cerrada M . Análogamente, si $(Z; M, M_1)$ es un cobordismo, entonces $(Z \times N_1; M \times N_1, M_1 \times N)$ es un cobordismo para toda variedad cerrada N_1 . La transitividad garantiza entonces que la multiplicación propuesta está bien definida. \square

Proposición 18. *La terna $(\Omega_O, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo graduado con unidad.*

Demostración. La gradación es evidente, así como que la clase de cobordismo de $[\mathbb{R}P^0]$ cumple el rol de identidad multiplicativa. La conmutatividad y la asociatividad salvo homeomorfismo del producto cartesiano, garantizan la conmutatividad y la asociatividad del producto de clases de cobordismo. Finalmente, dado que el producto cartesiano se distribuye respecto de la unión ajena, entonces el producto de clases de cobordismo se distribuye respecto de la correspondiente adición. \square

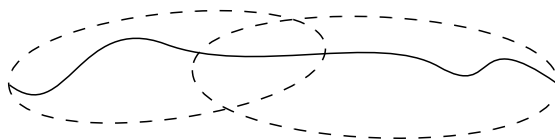
6. Variedades de dimensión 1

La presente sección está dedicada a la demostración del teorema de clasificación de las 1-variedades compactas.

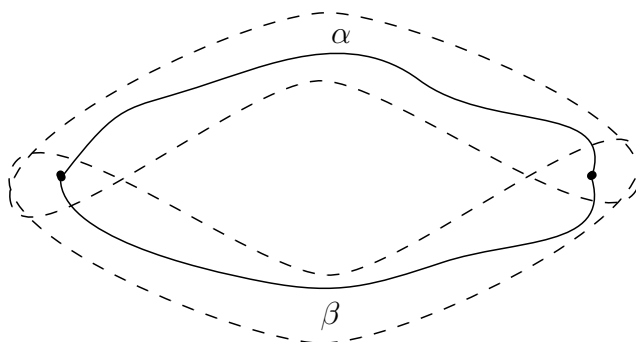
Teorema 19. *Toda variedad compacta y conexa de dimensión 1 es homeomorfa con I ó con S^1 .*

Demostración. Sea M una 1-variedad compacta y conexa. Tomemos un atlas $\mathcal{C} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ tal que U_α es conexo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, de manera que entonces, U_α es homeomorfo a un intervalo abierto en \mathbb{R} . Tomemos una subcubierta finita \mathcal{C}_1 , con la que puede construirse una cubierta finita $\mathcal{C}_2 = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ tal que $U_i \not\subseteq U_j$ para $i \neq j$.

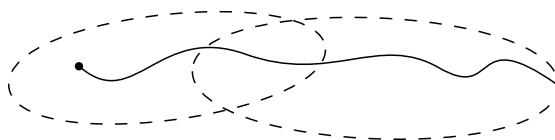
Si $\partial X = \emptyset$ tomemos $U_1, U_2 \in \mathcal{C}_2$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, reordenando si es necesario. Supongamos primero que $U_1 \cap U_2$ es conexo, entonces es homeomorfo a un intervalo abierto de \mathbb{R} . Además, como $V_3 = U_1 \cup U_2$ es un abierto conexo, también es homeomorfo con un intervalo abierto. Tenemos entonces que $\mathcal{C}_2 = \{V_3, U_3, \dots, U_n\}$ es una cubierta abierta de cardinalidad $n - 1$ para M .



Si suponemos que cada intersección de la forma $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ es conexa, reordenando cada que sea necesario, encontramos una cubierta abierta finita de conexos $\mathcal{C}_n = \{V_n, U_n\}$. Si $V_n \cap U_n$ es conexo, entonces $M = V_n \cup U_n$ es abierto y conexo, por lo que es homeomorfo con un intervalo abierto contradiciendo la compacidad. Sea entonces (A, B) una separación de $V_n \cap U_n$, y tomemos $a \in A$ y $b \in B$. Sean α una trayectoria entre a y b contenida en V_n , y β una trayectoria entre a y b contenida en U_n . Sin perder generalidad, puede suponerse que α y β no tienen más puntos en común que los extremos, de manera que entonces $M = S^1$.



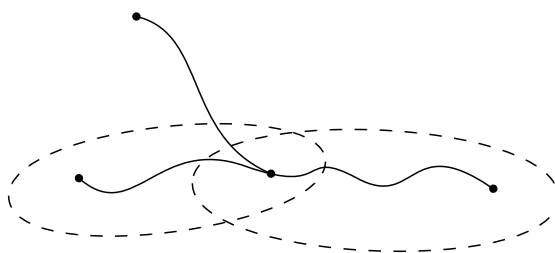
Por otra parte, si $\partial X \neq \emptyset$, entonces por compacidad es un conjunto finito de puntos. Si $\#(\partial M) = 1$, por una construcción semejante al caso anterior, obtenemos que M es homeomorfa con un intervalo de la forma $[a, b)$, lo que contradice la compacidad.



Supongamos ahora que $\#(\partial M) > 2$, y sean $x_1, x_2, x_3 \in \partial M$. Sean α una trayectoria de x_1 a x_2 , y β una trayectoria de x_3 a x_2 , y definamos

$$t_0 = \min\{t \in I \mid \beta(t) \in \alpha(I)\},$$

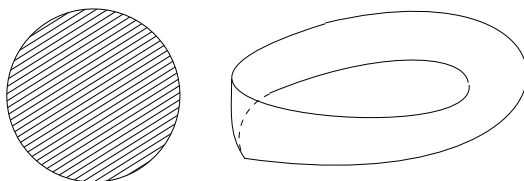
que existe por compacidad existe t_0 y además claramente $\beta(t_0) \notin \{x_1, x_2\}$, puesto que por hipótesis los tres puntos dados son puntos frontera.



No hay entonces una vecindad de $\beta(t_0)$ homeomorfa con un intervalo abierto, lo que contradice la estructura de variedad. Necesariamente entonces $\#(\partial M) = 2$, y por consiguiente M es homeomorfa con I . \square

Corolario 20. *Toda variedad cerrada y conexa de dimensión 1 es homeomorfa con S^1 .*

Como hemos observado antes, el círculo es frontera, pues de hecho, si M representa la banda de Möbius, entonces $\partial D^2 = S^1 = \partial M$. Recuérdese que la banda de Möbius es una superficie no orientable.



7. Los grupos Ω_0 y Ω_1

Con las herramientas desarrolladas tenemos la posibilidad de calcular los dos primeros grupos de cobordismo no orientado. Ha de notarse que toda 0-variedad es, por definición, un espacio topológico discreto, y en consecuencia, toda 0-variedad compacta es un conjunto finito de puntos. Es decir, toda variedad compacta es una unión ajena finita de copias de S^0 y de $\mathbb{R}P^0$.

Proposición 21. $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}/2$, y tiene como generador a $[\mathbb{R}P^0]$.

Demostración. La esfera S^0 es 0-cobordante, de manera que todo conjunto par de puntos es 0-cobordante. En consecuencia, un punto es cobordante con todo conjunto impar de puntos. Las clases de cobordismo en Ω_0 son, entonces, $0 = [\emptyset] = [S^0]$ y $1 = [\mathbb{R}P^0]$. \square

Ya hemos ilustrado el hecho de que un círculo es cobordante con una unión ajena de dos círculos, formalizaremos ahora la clase de cobordismo de S^1 . Notemos en primer lugar que toda variedad cerrada de dimensión 1 es una unión ajena finita de copias de S^1 .

Proposición 22. $\Omega_1 = 0$.

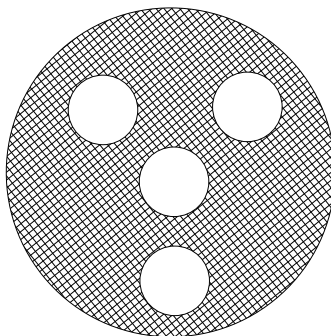
Demostración. Dado que $S^1 = \partial D^2$, entonces S^1 es 0-cobordante. Sean $x_1, \dots, x_n \in D^2 - S^1$, y sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{B_\varepsilon(x_i)} \cap \overline{B_\varepsilon(x_j)} = \emptyset$$

para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces

$$D^2 - (B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n))$$

es un cobordismo entre S^1 y una unión ajena de n copias de S^1 .

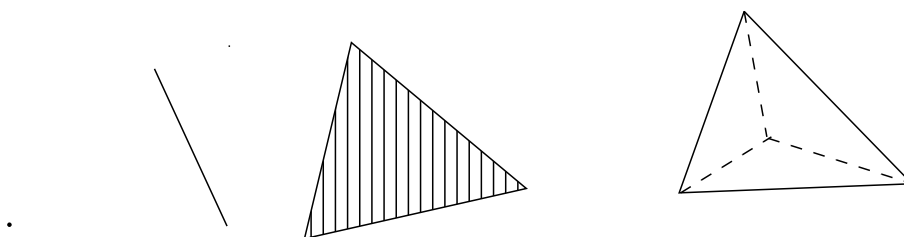


Tenemos entonces que toda 1-variedad cerrada es 0-cobordante. □

8. Complejos simpliciales

El propósito de la presente sección es proporcionar un esbozo, lo más detallado posible en el breve espacio disponible, de la demostración de que toda variedad cerrada de dimensión 2 admite la estructura de un complejo simplicial, coloquialmente, que toda superficie es triangulable.

La *cerradura convexa* de un conjunto A se define como la intersección de todos los convexos que contienen a A . Un *simplejo* de dimensión k es la cerradura convexa de $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^{k+1}$ tales que $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ son linealmente independientes. Un simplejo de dimensión k se llama también *k-simplejo*. La figura que sigue muestra simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3.



Si un k -simplejo σ es la cerradura convexa de v_0, v_1, \dots, v_k , denotamos $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$. Una m -cara de σ es la cerradura convexa de un subconjunto de $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ con m elementos, donde, por supuesto $m \leq k$.

Un *complejo simplicial* K es básicamente la unión de una colección \mathcal{K} de simplejos, de forma que dos simplejos coinciden sólo en caras comunes. Si \mathcal{K} es finito, decimos que K es finito. Trataremos exclusivamente con complejos simpliciales finitos.

Más formalmente, un *conjunto simplicial* es un conjunto finito de simplejos \mathcal{K} tal que:

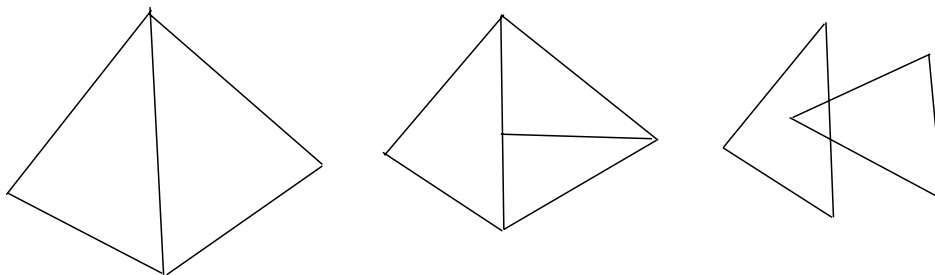
1. Si $\sigma \in \mathcal{K}$ y τ es una cara de σ , entonces $\tau \in \mathcal{K}$.
2. Si $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ y $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara común a σ y τ .

Dado un conjunto simplicial \mathcal{K} , la unión $K = \bigcup \mathcal{K}$ es un *complejo simplicial* si su topología es la topología inicial inducida por las inclusiones de sus simplejos. No es complicado percatarse de que con esta topología K es un espacio de Hausdorff y compacto.

El *k -esqueleto* de un complejo simplicial K es el subcomplejo $K^{(k)}$ consistente en las caras de K cuya dimensión no excede a k . La dimensión de K es el máximo de las dimensiones de sus simplejos.

Si K es un complejo simplicial de dimensión n , entonces está dado por una *filtración* de complejos simpliciales: la filtración de sus esqueletos.

$$K^{(0)} \subseteq K^{(1)} \subseteq \dots \subseteq K^{(n)} = K$$



La figura de la izquierda muestra un complejo simplicial, caso contrario de las dos figuras siguientes. Un espacio topológico X se dice que es *triangulable* si es homeomorfo con un complejo simplicial K . Un homeomorfismo $f : K \rightarrow X$ se dice que es una *triangulación* de X .

Una *curva de Jordan* es una 1-variedad cerrada. Un *arco de Jordan* es una 1-variedad compacta con frontera. Un *dominio de Jordan* es un espacio

homeomorfo con D^2 y cuya frontera es claramente una *curva de Jordan*. Se dice que es *regular* si su cerradura está contenida en un conjunto homeomorfo con una bola abierta.

Una *cubierta triangulable* de una 2-variedad es una cubierta abierta finita, constituída por dominios de Jordan regulares, tales que las fronteras de dos cualesquiera de ellos se intersectan en, a lo sumo, un conjunto finito de puntos.

Proposición 23. *Si una superficie tiene una cubierta triangulable, entonces es triangulable.*

Demostración. Sea M una superficie conexa, y sea $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ una cubierta triangulable, tal que ninguno de sus elementos está contenido en otro. Denotemos $\gamma_k = \partial D_k$, la cual es una curva de Jordan, y denotemos también por $\gamma_k^* = D_k^c$ el exterior del dominio dado.

Supongamos primero que $\gamma_k^* \subseteq D_j$ para $1 \leq j, k \leq n$, dados, entonces γ_k es la frontera de dos discos con interiores ajenos, de manera que $M = S^2$, que es claramente triangulable.

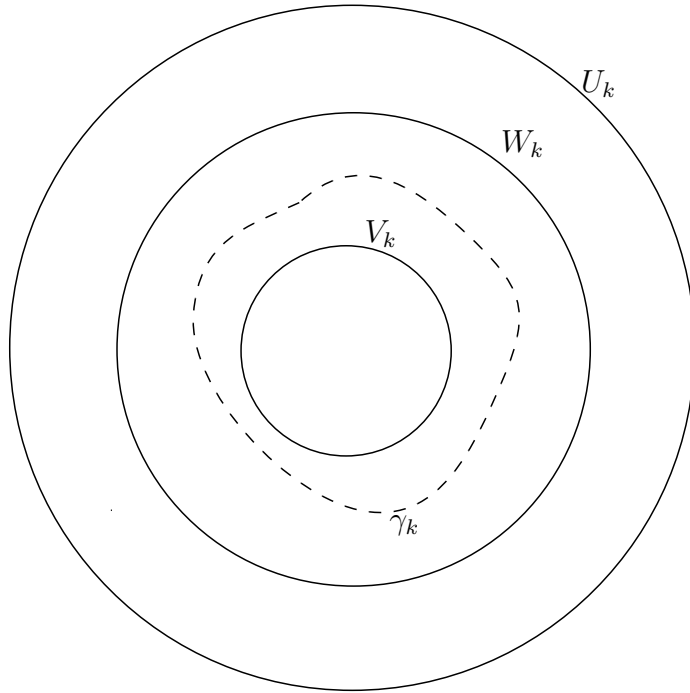
Supongamos pues que no se da la inclusión anterior, si $\gamma_k \cap D_j \neq \emptyset$, entonces esta intersección es una colección finita de arcos de Jordan cuyos extremos se encuentran sobre γ_k . Estos extremos dividen a cada curva de Jordan en un conjunto finito de arcos de Jordan. La superficie queda así dividida en una colección finita de dominios de Jordan con interiores ajenos, cada uno de los cuales es triangulable, haciendo triangulable la superficie. \square

Recordemos que una variedad cerrada es una variedad compacta y sin frontera, luego, una superficie cerrada es una 2-variedad compacta y sin frontera.

Teorema 24. *Toda superficie cerrada es triangulable.*

Demostración. Debido a la discusión anterior, basta demostrar que toda superficie cerrada admite una cubierta triangulable. Sea M una superficie compacta, para cada $x \in M$ elíjanse vecindades homeomorfas con bolas abiertas concéntricas U_x , W_x y V_x tales que

$$x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_x.$$



Reduzcamos la cubierta $\{V_x | x \in M\}$ a una subcubierta finita $\{V_1, \dots, V_n\}$. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas de Jordan con $\gamma_k \subseteq W_k - V_k$ y de manera que cada curva corta a cada otra curva en una cantidad finita de puntos. Para cada $k = 1, \dots, n$ elíjase un homeomorfismo $\varphi_k : U_k \rightarrow D^2$, y sean x_k y y_k puntos en el interior de γ_k , de forma que

1. $\varphi_k(x_k)$ y $\varphi_k(y_k)$ se encuentran sobre radios distintos R_k y S_k .
2. x_k y y_k no estén sobre ningún γ_j para $j = 1, \dots, n$.
3. El segmento de recta que une los puntos $\varphi_k(x_k)$ y $\varphi_k(y_k)$ sobre el disco no tenga puntos en común con $\varphi(\overline{V_k})$.

La cubierta $\{V_1, \dots, V_n\}$ es claramente triangulable. □

Más detalles sobre esta demostración puede encontrarse en [6]. El siguiente paso, el cual también daremos en forma de esbozo es la clasificación de las superficies cerradas, siguiendo la idea de que las clases de homeomorfismo son determinadas por la característica de Euler. Seguimos básicamente la secuencia de ideas contenidas en [11].

La *dimensión de un complejo simplicial* es la dimensión máxima de sus caras. Sea K un complejo simplicial de dimensión n , y supóngase que $a_k(K)$ es el número de caras de dimensión k en el complejo K , definimos la *característica de Euler* de K como la suma alternada de sus caras, según su dimensión.

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k(K)$$

Un poliedro admite más de una triangulación, y el hecho de que la característica de Euler es un invariante del espacio, con independencia de la triangulación es un descubrimiento de Poincaré, consignado en [12] y sus complementos 1, 2 y 5.

9. Gráficas y complejos duales

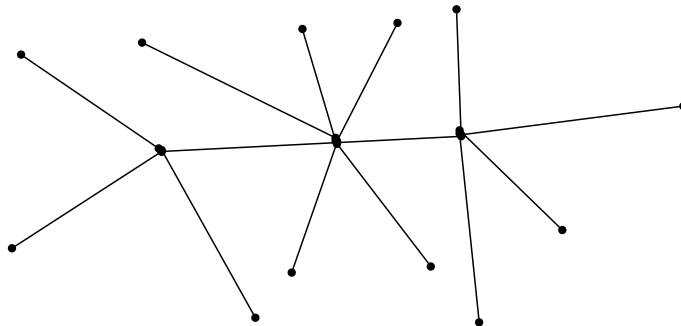
Una *gráfica* G es un complejo simplicial de dimensión 1, y un *árbol* es una gráfica que no contiene ningún subespacio homeomorfo con S^1 , es decir un árbol es una gráfica que carece de ciclos. Sólo consideraremos *gráficas conexas*.

Las 0-caras de una gráfica se llaman *vértices*, en tanto que las 1-caras se llaman *aristas*. Si v es un vértice de una gráfica G , se dice que el *grado* de v es $n \in \mathbb{N}$, si v es una 0-cara de exactamente n aristas distintas. Si un vértice v es una 0-cara de una arista A , decimos que A *incide* en v .

Si $A = \langle u, v \rangle$ es una arista de G , entonces los vértices u y v son *vértices adyacentes*. Dos aristas son *aristas adyacentes* si tienen un vértice en común. Nótese que con las definiciones adoptadas, dos vértices adyacentes definen una única arista, y cada arista tiene necesariamente dos vértices distintos, es decir, nuestras gráficas no admiten, ni aristas múltiples ni lazos.

Proposición 25. *En todo árbol hay por lo menos un vértice de grado 1.*

Demostración. Sean v_0 y v_1 dos vértices arbitrarios, por conexidad elíjase una trayectoria α entre ellos. Si v_0 tiene grado 1, no hay nada que demostrar, en caso contrario, iníciase una trayectoria distinta β , por una arista distinta a la inicial de α . Si en cada vértice puede continuarse, por tratarse de un conjunto finito de vértices, en algún momento β arribará a un vértice de α , obteniendo así un ciclo. \square



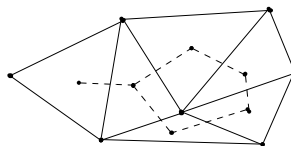
Proposición 26. Si A es un árbol, entonces $\chi(A) = 1$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de vértices, siendo claro para un árbol con un único vértice. Supóngase cierto para árboles con n vértices. En un árbol con $n + 1$ vértices, elimínese un vértice de grado 1, lo que no altera la característica de Euler, ni la conexidad, obteniendo un árbol con n vértices. \square

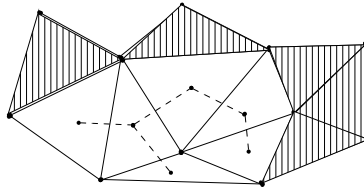
Proposición 27. Si G es una gráfica que contiene al menos un ciclo, entonces $\chi(G) < 1$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de aristas, siendo claro para un ciclo con tres aristas. Supóngase cierto para gráficas con n aristas. En una gráfica con $n + 1$ aristas, elimínese una arista perteneciente a un ciclo, se obtiene así una nueva gráfica G_0 tal que $\chi(G_0) - 1 = \chi(G)$. La nueva gráfica es un árbol o tiene un ciclo, pero en cualquier caso $\chi(G) < 1$, usando la hipótesis de inducción. \square

Nótese que el 1-esqueleto de un 2-complejo es una gráfica. El 2-complejo dual K^* de un complejo dado K es una gráfica que tiene una cara por cada vértice de K y un vértice por cada cara, además de una arista por cada arista común a dos caras.

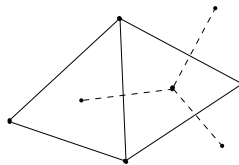


Un *árbol dual* en un 2-complejo K es un árbol A^* cuyos vértices y aristas están contenidos en K^* . El *complemento* K_A^* de un árbol dual en K es el subcomplejo que contiene a las 2-caras que no intersectan a A^* .



Proposición 28. *El complemento de un árbol dual es conexo.*

Demostración. Sea K un 2-complejo y A^* un árbol dual, basta demostrar que dos vértices cualesquiera de K pueden conectarse a través de aristas de K_A^* . Procederemos por inducción sobre el número de aristas de A^* . Si $n = 0$, entonces A^* tiene un único vértice dual y la proposición es obvia. Supóngase que la proposición se satisface para A^* con n aristas, y supóngase que A^* tiene $n + 1$ aristas. Sea v un vértice de grado 1 en A^* , por hipótesis, el complemento de $A^* - v$ es conexo. Notemos que K_A^* se obtiene al eliminar el triángulo dual de v del complemento de $A^* - v$, lo que no desconecta. \square



Un árbol dual se dice que es un *árbol dual maximal* si no está propiamente contenido en otro árbol dual.

Proposición 29. *Un árbol dual maximal contiene a todos los vértices duales.*

Demostración. Sea A^* un árbol dual maximal, y supóngase la existencia de un vértice dual v^* que no es vértice de A^* . Si hay un vértice u^* de A^* vecino de v^* , la arista $\langle v^*, v^* \rangle$ es una nueva arista de A^* , lo que contradice la maximalidad. Si no es el caso, constrúyase una nueva arista $\langle v^*, v_1^* \rangle$, donde claramente v_1^* no es un vértice de A^* . El procedimiento puede continuarse hasta un vértice de A^* , lo que no hace un ciclo, pues ninguno de los vértices anteriores estaba en A^* . Se contradice nuevamente la maximalidad. \square

10. Clasificación de superficies

Proposición 30. *Si M es una superficie compacta y conexa, entonces $\chi(M) \leq 2$.*

Demostración. Sean M una superficie, K un complejo simplicial homeomorfo con M , A^* un árbol dual maximal en K y K_A^* el complejo complemento de A^* . Dado que A^* tiene todos los vértices duales, entonces K_A^* no contiene triángulos. Nótese que:

1. Todos los vértices de K son vértices de K_A^* :

$$a_0(K) = a_0(K_A^*).$$

2. El número de aristas de K es el número de aristas de A^* más el número de aristas de K_A^* :

$$a_1(K) = a_1(A^*) + a_1(K_A^*).$$

3. K tiene tantas caras como vértices tiene A^* :

$$a_2(K) = a_0(A^*).$$

Tenemos entonces que

$$\chi(K) = a_0(K_A^*) - a_1(A^*) - a_1(K_A^*) + a_0(A^*) = \chi(A^*) + \chi(K_A^*) = 1 + \chi(K_A^*),$$

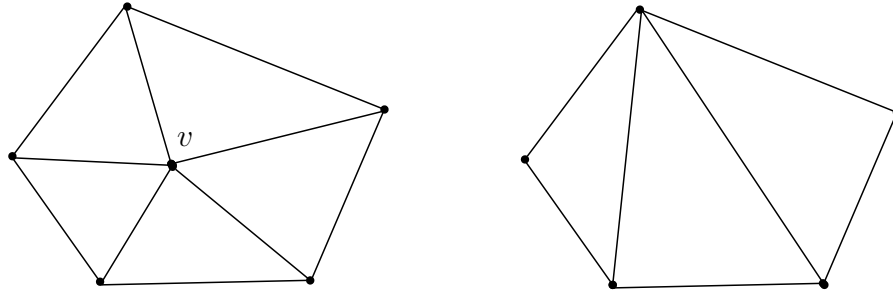
y puesto que $\chi(K_A^*) \leq 1$, entonces

$$\chi(M) = \chi(K) \leq 2$$

como se quería demostrar. □

No es ocioso hacer notar que toda gráfica es un complejo simplicial de dimensión 1 y viceversa. Sean G una gráfica y v un vértice de G , la *estrella* de v , que denotamos por $st(v)$ es la unión de la colección de todas las aristas que *inciden* en v , junto con el vértice v . Nótese que $st(v)$ no es una subgráfica de G , a menos que v sea un vértice aislado. No obstante, $G - st(v)$ si es una subgráfica de G , la que denotaremos mediante $G - v$.

Supongamos que $G = K^{(1)}$ para algún 2-complejo K . Denotemos por $P(v)$ la mínima subgráfica de $G - v$ que contiene a todos los vértices *adyacentes* con v , y notemos que, claramente, $P(v)$ es un ciclo, digamos (v_1, \dots, v_n) . Definiendo las aristas $\langle v_1, v_i \rangle$ para $3 \leq i \leq n - 2$, obtenemos un nuevo complejo J homeomorfo con K , y tal que $a_0(J) = a_0(K) - 1$, $a_1(J) = a_1(K) - 3$ y $a_2(J) = a_2(K) - 2$, con lo que es claro que $\chi(J) = \chi(K)$.



Proposición 31. *Una superficie M es homeomorfa con una esfera si y sólo si $\chi(M) = 2$.*

Demostración. Sea K una triangulación de S^2 , la mínima posible tiene cuatro vértices y claramente satisface $\chi(K) = 2$. Procediendo por inducción sobre el número de vértices de K , elijamos un vértice v de K y construyamos el 2-complejo J como en la discusión previa, el cual claramente es también homeomorfo con S^2 . Por hipótesis de inducción $\chi(J) = 2$, de donde $\chi(K) = 2$. Supóngase recíprocamente que $\chi(K) = 2$, y que es una superficie, entonces es claro que la mínima configuración posible es la del tetraedro, y procederemos nuevamente por inducción sobre el número de vértices. Tómese una triangulación con $n + 1$ vértices, de forma que $\chi(K) = 2$, nuevamente, al eliminar un vértice v , construyendo el 2-complejo J , no se altera la característica de Euler, de forma que $\chi(J) = 2$ y es por tanto una esfera, y como es homeomorfo con K , el complejo original K es también homeomorfo con S^2 . \square

Sea M una superficie cerrada y conexa, si γ es una curva de Jordan sobre M , y se toma una *vecindad tubular* T sobre M alrededor de γ , entonces T es homeomorfo con un cilindro o con una banda de Möbius. Una superficie se dice *orientable* si no contiene subespacios homeomorfos con una banda de Möbius, en caso contrario se dice *no orientable*. Consideremos entonces M cerrada y orientable, además de una curva de Jordan γ sobre M , y una vecindad tubular abierta T alrededor de γ . Supóngase que $\partial(M - T) = S^1 \sqcup S^1$, y colóquese un 2-disco en cada uno de los círculos, obteniendo una nueva superficie cerrada y orientable M_0 , luego de la cirugía, la que en realidad podría llamarse más propiamente *descirugía*. Notemos que

$$\chi(M_0) = \chi(M) + 2,$$

de manera que cada cirugía incrementa la característica de Euler en 2, y al cabo de una cantidad finita g de cirugías obtendremos una superficie de

característica 2 que es S^2 . Decimos que el número de cirugías g es el *género* de M .

Proposición 32. *Si M es una superficie cerrada y orientable de género g , entonces*

$$2 - 2g = \chi(M).$$

Ahora bien, si M es no orientable, y γ es una curva de Jordan sobre M tal que una vecindad tubular T alrededor de γ es una banda de Möbius, $\partial(M - T) = S^1$, colocando un disco en el orificio obtenido obtenemos una nueva superficie M_0 . Notemos ahora que

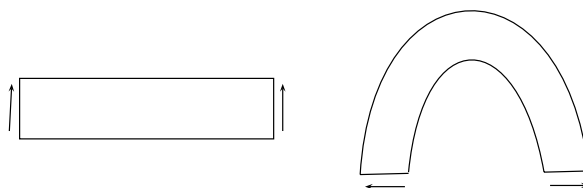
$$\chi(M_0) = \chi(M) + 1,$$

de manera que cada una de estas cirugías incrementa la característica de Euler en 1, si suponemos que la superficie M sólo admite cirugías de este tipo, y que admite g de ellas, su característica de Euler satisface

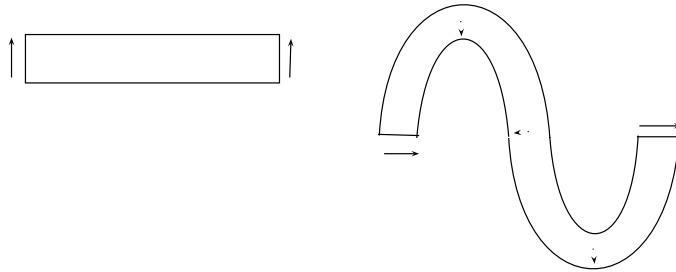
$$2 - g = \chi(M),$$

dado que al cabo de g cirugías obtendremos una superficie homeomorfa con S^2 . En realidad, resta verificar que toda superficie pertenece a una de estas dos clases: una esfera con asas si es orientable, y una esfera con bandas de Möbius si no lo es. Para ello es necesario observar cuidadosamente la orientación de las cirugías.

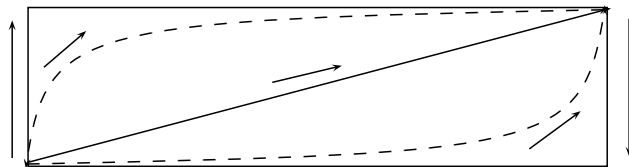
Notemos, por principio, que al “pegar” un asa, ambos extremos del cilindro correspondiente tienen la misma orientación, pero se pegan a círculos con orientaciones opuestas.



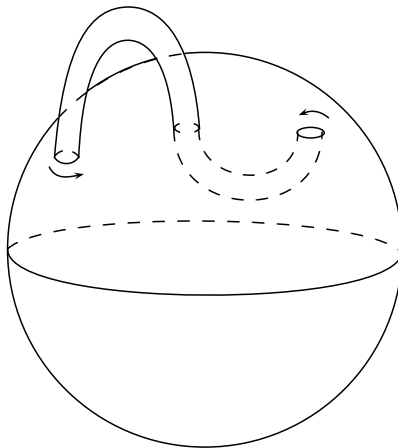
Pegar un “asa no orientable” es equivalente, como veremos, a “pegar” dos bandas de Möbius. Un asa no orientable es un cilindro cuyos extremos se identifican con círculos que tienen la misma orientación.



Consideremos una esfera con exactamente un asa y una banda de Möbius, es decir, una superficie de género orientable 1 y de género no orientable 1. El asa se pega sobre dos círculos que tienen orientaciones opuestas. Deslicemos uno de tales círculos hasta la banda de Möbius, donde cambia su orientación.



En la ilustración anterior, el rectángulo representa una banda de Möbius, y la diagonal el círculo “deslizado”. Los trazos discontinuos muestran el cambio de orientación, de manera que una vez deslizado, obtenemos una botella de Klein como la de la figura que sigue.



Es decir, hemos obtenido una superficie no orientable de género 2. Podemos efectuar el mismo procedimiento con cantidades arbitrarias finitas de asas y bandas de Möbius. Con ello hemos concluido la demostración de los dos resultados siguientes.

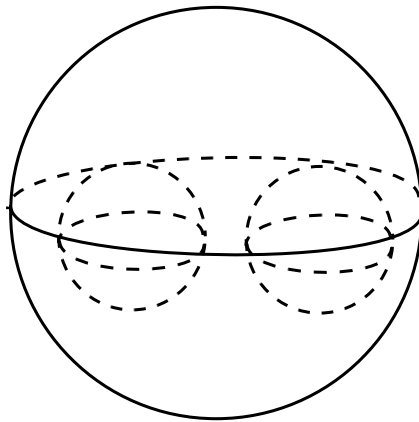
Teorema 33. *Una variedad cerrada y conexa de dimensión 2 es homeomorfa con una 2-esfera, una suma conexa de toros, ó una suma conexa de planos proyectivos.*

Proposición 34. *Si M es una 2-variedad cerrada, conexa y no orientable, entonces*

$$2 - g = \chi(M).$$

11. El teorema de Thom

Como hemos observado la esfera S^2 es 0-cobordante, dado que es la frontera del disco D^3 , es decir $S^2 = \partial D^3$. Es además claro también que la 2-esfera es cobordante con cualquier colección finita de 2-esferas. Tomemos por ejemplo el “pantalón tridimensional” que se muestra en la ilustración de abajo.



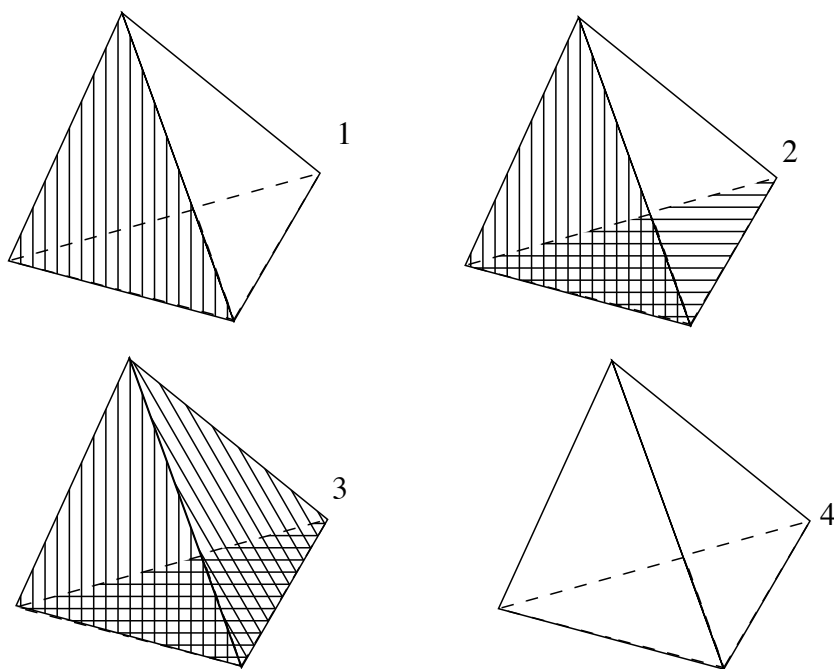
Si D_1, \dots, D_n son discos abiertos de dimensión 3 contenidos en el interior de D^3 , y $D = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_n$, entonces la 4-variedad $D^3 - D$ es un cobordismo entre una 2-esfera y una unión ajena de 2-esferas. Construcciones semejantes muestran que todas las superficies orientables son 0-cobordantes, de forma que pertenecen a la misma clase de cobordismo.

Proposición 35. *Las fronteras de dimensión 1 tienen característica de Euler 0.*

Demostración. Cada 1-frontera es una unión ajena de copias de S^1 , cada una de las cuales tiene característica de Euler cero, y es claro que la característica de Euler de una unión ajena es la suma de las características individuales. \square

Proposición 36. *Las fronteras de dimensión 2 tienen característica de Euler par.*

Demostración. Demostraremos la proposición en el caso de espacios triangulables y conexos, procediendo por inducción sobre el número de 3-simplejos. Sea entonces K un 3-complejo simplicial, nos interesa la paridad de $\chi(\partial K)$. Si K consta de un único 3-simplejo, entonces ∂K es un 2-simplejo con cuatro vértices, seis aristas y cuatro caras, de donde $\chi(\partial K) = 2$. Supongamos que la proposición se satisface para 3-complejos conexos con n 3-simplejos, y sea K un 3-complejo conexo con $n + 1$ 3-simplejos. Sea σ un 3-simplejo cualquiera de K y consideremos el 3-complejo $K_0 = K - \sigma$. Tenemos entonces cuatro posibilidades para σ , de acuerdo con el número de sus 2-caras que coinciden con las 2-caras de K_0 en la construcción de K .



Si σ coincide en una 2-cara con K_0 , tenemos que, al construir K se elimina una cara de K_0 y se agregan tres caras nuevas, de forma que $a_2(K) = a_2(K_0) + 2$. Además es claro que $a_1(K) = a_1(K_0) + 3$ y $a_0(K) = a_0(K_0) + 1$, de donde

$$\chi(K) = [a_2(K_0) + 2] - [a_1(K_0) + 3] + [a_0(K_0) + 1] = \chi(K_0).$$

Si σ coincide en dos 2-caras con K_0 , tenemos que se eliminan dos caras de K_0 y se agregan dos caras nuevas, de forma que $a_2(K) = a_2(K_0)$. Además es claro que $a_1(K) = a_1(K_0)$ pues se elimina una arista agregando una nueva y no hay modificación con los vértices, de donde claramente también $\chi(K) = \chi(K_0)$.

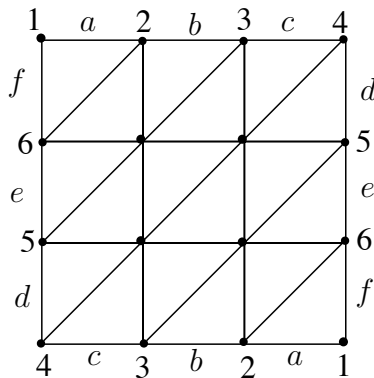
Si σ coincide en tres 2-caras con K_0 tenemos que se eliminan tres caras de K_0 y se agregan una cara nueva, además de que no hay modificación en vértices y aristas. Luego

$$\chi(K) = [a_2(K_0) - 2] - a_1(K_0) + a_0(K_0) = \chi(K_0) - 2,$$

conservando la paridad.

Si todas las caras coinciden con K_0 , se eliminan cuatro caras y no hay modificación en vértices y aristas, por tanto $\chi(K) = \chi(K_0) - 4$, con lo que se completa la demostración. \square

La que sigue es una triangulación del plano proyectivo con 10 vértices, 27 aristas y 18 caras. Nótese que las aristas y los vértices de la periferia están duplicados en la representación gráfica.



De la triangulación anterior se sigue que $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$.

Proposición 37. *No existe una 3-variedad M tal que $\partial M = \mathbb{R}P^2$.*

Demostración. La característica de Euler del plano proyectivo no es par. \square

Corolario 38. $\Omega_2 \cong \mathbb{Z}/2$, y tiene como generador a $[\mathbb{R}P^2]$.

En [2] puede encontrarse la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 39. *Sea M una C^2 -variedad compacta con frontera, entonces*

$$\chi(\partial M) = \begin{cases} 2\chi(M) & \text{si } \dim(M) \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } \dim(M) \text{ es par.} \end{cases}$$

En [15] hallamos el resultado que se consigna a continuación.

Teorema 40. $\Omega_O \cong \mathbb{Z}/2[x_k | k \neq 2^m - 1]$, para $k, m \in \mathbb{N}$.

Del teorema de Thom se sigue que el anillo de cobordismo no tiene generadores en dimensión $7 = 2^3 - 1$, sin embargo tiene un generador en dimensión 2 y otro en dimensión 5. El producto de estos generadores es entonces cero, de donde tenemos que el anillo de cobordismo admite divisores de cero.

Corolario 41. *El anillo de cobordismo no es un dominio entero.*

Corolario 42. *El espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{2^n-1}$ es 0-cobordante para $n \in \mathbb{N}$.*

La construcción que sigue conduce los generadores del anillo de cobordismo de Thom, descubiertos por Albretch Dold [4] en 1956. Sean $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, y $\mathbb{T} < \mathbb{C}$ el grupo del círculo, es decir, el grupo multiplicativo cuyo conjunto subyacente es S^1 . Tenemos entonces una acción

$$\mathbb{T} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$$

por multiplicación compleja. El espacio de órbitas S^{2n+1}/\mathbb{T} es el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$, cuya dimensión como variedad es $2n$.

Denotemos por C_2 el grupo cíclico de orden 2, y consideremos la esfera S^n como C_2 -espacio, donde la acción es la antipodal, consideremos además a $\mathbb{C}P^n$ como C_2 -espacio donde la acción está dada por conjugación compleja. El producto $S^n \times \mathbb{C}P^n$ es de forma natural un C_2 -espacio, a través de la acción diagonal dada por $g(x, y) = (gx, gy)$. Denotemos por

$$P(m, n) = \frac{S^m \times \mathbb{C}P^n}{C_2}$$

el espacio de órbitas bajo esta acción. El resultado que sigue, originalmente publicado en [4], puede también consultarse en [14].

Teorema 43. Si x_k es un generador para Ω_O , entonces $x_k = [P(k, 0)]$ si k es par y $x_k = [P(2^r - 1, 2^{r-1}s)]$ si $k = 2^r(2s + 1) - 1$.

El espacio $P(m, n)$ es una variedad de dimensión $m + 2n$, de manera que, por ejemplo, el generador x_5 es la clase de cobordismo de $P(1, 2)$, que es el espacio de C_2 -órbitas de $S^1 \times \mathbb{C}P^2$. El célebre resultado de Dold recupera el hecho de que x_2 es la clase de cobordismo del plano proyectivo.

12. Homología extraordinaria

Un *complejo de cadenas* es un par de la forma (C, ∂) donde C es un grupo abeliano graduado,

$$C = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

y $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ es un homomorfismo de *grado* -1 , que satisface $\partial^2 = 0$. Se dice que C_k es el k -ésimo grupo de cadenas. El homomorfismo ∂ se conoce como *operador frontera*. El *grupo de ciclos* es el subgrupo graduado $Z < C$, donde

$$Z_k = \text{Im } \partial \cap C_k$$

es el *grupo de k -ciclos*. Análogamente, el *grupo de fronteras* es el subgrupo graduado $B < C$ donde

$$B_k = \ker \partial \cap C_k$$

es el *grupo de k -fronteras*. Claramente toda frontera es un ciclo, de manera que

$$B_k < Z_k < C_k$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. El cociente

$$H_k = Z_k / B_k$$

es el k -ésimo *grupo de homología* del complejo de cadenas dado. Los elementos de H_k son las *clases de homología* del complejo. Dos ciclos son *ciclos homólogos* si representan a la misma clase de homología, o equivalentemente, si su diferencia es una frontera.

Consideremos el grupo abeliano $(C\Omega, \sqcup)$ de las variedades compactas, el cual es claramente un grupo graduado por la dimensión, es decir, que el k -ésimo grupo de variedades cerradas $C\Omega_k$ tiene por elementos a las variedades compactas de dimensión $k \in \mathbb{N}$.

Por lo discutido anteriormente, $(C\Omega, \partial)$ es un complejo de cadenas, y claramente

$$H_k(C\Omega, \partial) = \Omega_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Es decir, las clases de homología de este *complejo de cobordismo* son las clases de cobordismo, en el que dos ciclos son homólogos si y sólo si son cobordantes.

Tenemos entonces que el cobordismo puede entenderse como una teoría de homología, la que se dice que es una homología extraordinaria, en el sentido de que no se asocia a un espacio, sino a un fenómeno que ocurre entre espacios. Dicho más técnicamente, es una teoría de homología que no satisface el axioma de dimensión, de entre los axiomas de Eilenberg-Stendod [5].

Referencias

- [1] M. Atiyah. “The impact of Thom’s Cobordism Theory”, *Bull. of the Amer. Math. Soc.* 41 (2004) 337-440.
- [2] Y. D. Chai, S. P. Hong. “The Euler characteristic of a manifold with boundary”, *J. Korean Math. Soc.* **31** No. 1 (1994) 49-56.
- [3] J. A. Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Birkhäuser, Boston 1989.
- [4] A. Dold. “Erzeugende der Thomschen Algebra \mathcal{N} ”, *Math. Z.* 65 (1956) 25-35.
- [5] S. Eilenberg, N. E. Steenrod. “Axiomatic approach to homology theory”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 31 (1945) 117-120.
- [6] C. Ivorra Castillo. *Topología Algebraica*. Notas de clase, Universidad Católica de Chile, Santiago 2010.
- [7] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. Cornell University, New York, 2001.
- [8] J. L. Kelley. *General Topology*. Van Nostrand, Netherlands 1955.
- [9] J. W. Keese. *An introduction to Algebraic Topology*. Brooks-Cole Publishing Company, California 1970.
- [10] A. L. Liulevicius. “A proof of Thom’s Theorem”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. **37**, no. 1 (1962) 121-131.
- [11] E. Micha. *Introducción a la Topología Algebraica. Clasificación de Superficies*. Notas del 3er coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV, La Trinidad, Tlaxcala, México 1983.
- [12] H. Poincaré. “Analysis Situs”. *Journal de la Ecole Polytechnique* vol. **I**, no. 2 (1895) 1-123.
- [13] L. Pontryagin. “Smooth manifolds and their applications in homotopy theory”, *American Mathematical Society Translations*, Ser. 2, Vol 11 (1959) 1-114.

- [14] R. E. Stong. *Notes on Cobordism Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1968.
- [15] R. Thom. “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **28**(1954) 17-86.
- [16] C. Thomassen. “The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces”, *The American Mathematical Monthly*, 99 (1992) 116-130.