Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Los Números Complejos

Emilio Lluis Riera

www.smm.org.mx

Serie: Cursos. Vol. 3 (2014)

Los números complejos
6

Emilio Lluis

Serie: Temas básicos
Área: Matemáticas

EDITORIAL TRILLAS

Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, 1972

Segunda edición, enero 1989*
(Primera publicada por Editorial Trillas, S. A. de C. V.)
ISBN 968-24-2832-7

Impreso en México

Printed in Mexico

Presentación

El estudiante de bachillerato cuenta con diferentes opciones (Preparatoria, CCH, Colegio de Bachilleres) para formarse e ingresar en el ciclo de licenciatura y continuar sus estudios en los distintos niveles del posgrado. En los programas de enseñanza de este nivel educativo, se han establecido temas comunes, o subsistemas, que se imparten de manera permanente. La correlación de estos subsistemas ha generado efectos de distinto tipo, entre los cuales destaca el aumento de la demanda de materiales de apoyo didáctico.

Para contribuir a la solución de esta demanda, ANUIES ha creado la serie *Temas básicos*, considerando la calidad científica de la enseñanza media superior y la diversidad de asignaturas. Por ello, en el programa editorial de esta serie se ha concedido particular importancia a la actualidad del desarrollo científico, a la consistencia metodológica y a la claridad en la comunicación, con el fin de que los estudiantes de uno u otro subsistema puedan satisfacer lo esencial de sus requerimientos educativos. Por otra parte, la presente serie no sólo está destinada a proveer de elementos de estudio a los alumnos, sino también de textos concisos que abrevien esfuerzos de investigación a los profesores.

La serie está estructurada en 10 áreas: *Lenguaje y literatura, Taller de lectura y redacción, Filosofía, Ciencias sociales, Lenguas extranjeras, Historia universal, Química, Matemáticas, Física y Biología*. Su publicación es congruente con los estatutos y acuerdos de la ANUIES, que señalan compromisos para promover la investigación en el campo educativo. Los *Temas básicos* se sitúan en este contexto y tienen la finalidad de difundir lo fundamental de las disciplinas que se imparten en la educación media superior.

Los módulos de la serie *Temas básicos* mantienen una dinámica propia que se renueva permanentemente y brinda una aportación didáctica y adecuada a las demandas actuales del sistema educativo de México. Este trabajo de actualización de contenidos es el fruto de los esfuerzos de sus autores, que revelan un efectivo dominio en el campo específico de sus conocimientos.

Las obras que constituyen la serie *Temas básicos*, escritas como unidades o módulos, forman parte de los programas vigentes de enseñanza. El enfoque que se les ha dado, la amplitud de su desarrollo y la seriedad con que han sido tratados, permiten afirmar que su edición y reimpresión, en función de los actuales planes y programas de enseñanza, serán de utilidad para sus usuarios.

Asociación Nacional de Universidades
e Institutos de Enseñanza Superior

Introducción

Generalmente, el nombre que se asigna a un objeto refleja algo de su naturaleza. Así, el nombre con que se conocen los números complejos da la idea de que están compuestos de varias partes; y efectivamente, así es. Como veremos más adelante, cada número consta de dos partes o componentes. Una de ellas es un número real. A la otra se acostumbra llamarla "parte imaginaria".

Ahora bien, con respecto al nombre de "componente imaginaria" con que se conoce a la segunda parte de cada complejo, podemos afirmar que ésta, más que su naturaleza, refleja su historia. En efecto, al no poder encontrar soluciones de ciertas ecuaciones, se empezó, no sin cierta desconfianza, a hablar de ciertos "números imaginarios" que representaran las soluciones de esas ecuaciones. Por tal motivo, estos números, aun cuando no tengan nada de "imaginario" ni de misterioso, pasaron a la historia con este nombre.

Para nosotros, los números complejos serán simplemente los puntos del plano con dos operaciones convenientemente definidas.

Índice de contenido

1

Estructuras numéricas ya estudiadas

Con el fin de ubicar los números complejos en el lugar que les corresponde, conviene antes revisar las estructuras numéricas con las que ya estamos familiarizados. Hasta ahora hemos estudiado las siguientes:

Los números *naturales*

$$\mathbf{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$$

Los números *enteros*

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Los números *racionales*; éstos se pueden escribir como cocientes de dos enteros:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Al escribir éstos en forma decimal, se obtienen decimales con un número finito de cifras, o bien, decimales periódicos. Por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = 0.25; \ \frac{2}{3} = 0.666 \ldots = 0.\overline{6}; \ \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Finalmente, tenemos los números *reales*. Éstos pueden escribirse como números decimales $A.\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ (finitos o no, periódicos o no). El conjunto de números reales está en correspondencia biyectiva con los puntos de la recta; esto significa que a cada número real le corresponde un punto y sólo uno de la recta, y que a números reales distintos les corresponden puntos distintos de la recta. En esta forma, los números reales pueden identificarse con los puntos de la recta.

Figura 1.1.

En estos cuatro conjuntos de números hay dos operaciones: la adición y la multiplicación. Por eso se acostumbra decir que son *estructuras numéricas.*

En general, cuando en un conjunto A se tienen una o varias operaciones, se habla de una *estructura algebraica.* Las estructuras numéricas son estructuras algebraicas de tipos especiales.

Las estructuras algebraicas reciben distintos nombres según las propiedades que sus operaciones satisfacen. Así, se habla de *grupos*, *anillos*, *campos*, *álgebras*, etc. En particular, $\mathbf{Z}$ *es un anillo* y $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ *son campos.*

En el capítulo 10 hablaremos de una estructura algebraica formada con matrices. Ésta será un *anillo.*

Regresemos a las estructuras numéricas que conocemos. Sabemos ya que cada una de ellas es una extensión de la anterior:

Los números naturales son enteros: los enteros no negativos.

Los números enteros son racionales; aquellos que se pueden escribir en la forma $\frac{m}{1}$ con m entero.

Los números racionales son reales. Son aquellos que se pueden representar como decimales periódicos.

La estructura numérica de los números complejos que vamos a construir, y que denotaremos con $\mathbf{C}$, contendrá a la de los números reales. Así tendremos las contenciones

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$$

Como $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ será también un campo. Por ello hablaremos del *campo de los números complejos.*

2

¿Por qué los números complejos?

¿Cuál es la razón por la que se necesita extender el campo de los números reales?

Más adelante veremos que los números complejos resuelven el problema de encontrar las soluciones de algunas ecuaciones que no tienen solución en **R**.

Pero antes conviene que examinemos las razones por las cuales se necesita extender cada una de las estructuras numéricas de las que hablamos en el párrafo anterior.

La estructura numérica más simple, y la que apareció primero en la historia del conocimiento humano, es la de los números naturales

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Éstos responden a la simple necesidad de contar. También las operaciones de adición y multiplicación de números naturales responden a la misma necesidad.

Pero a pesar de su gran utilidad, la estructura de los números naturales es bastante pobre. Son muy pocas las ecuaciones que se pueden resolver con esos números. Por ejemplo, la ecuación

$$x + 7 = 5$$

no tiene solución en **N**. Es decir, no hay ningún número natural n tal que $n + 7 = 5$, pues si $n \in \mathbf{N}$, $n + 7 > 7 > 5$ y, por lo tanto, $n + 7 \neq 5$.

En general, si p y q son números naturales, la ecuación

$$x + p = q$$

tiene solución en $\mathbf{N}$ solamente cuando $p < q$. (La solución, en este caso, es el número natural $q - p$, pues $(q - p) + p = q$.)

Para poder resolver este tipo de ecuaciones, sin ninguna restricción para p y q, se extendió la estructura de los números naturales y se creó la de los números enteros

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$$

Con estos números, cualquier ecuación de la forma

$$x + p = q$$

con p y q naturales y, aún más, con p y q enteros, tiene por solución un número entero. Así, por ejemplo, la solución de $x + 7 = 5$ es el entero -2, porque $(-2) + 7 = 5$; la solución de $x + (-3) = -8$ es -5, pues $(-5) + (-3) = -8$. En general, la solución de $x + p = q$ (con p y q enteros) es el entero $q - p$.

Ahora bien, tampoco en $\mathbf{Z}$ se pueden resolver muchas ecuaciones. Ni siquiera muchas de primer grado. Por ejemplo, la ecuación

$$2x + 5 = 0$$

no tiene solución en $\mathbf{Z}$, porque si $m \in \mathbf{Z}$, entonces $2m$ es un número par, de donde $2m + 5$ es impar y, por tanto, $2m + 5 \neq 0$.

Para poder resolver este tipo de ecuaciones, es necesario extender la estructura de los números enteros y crear el campo de los números racionales

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$$

En los racionales se pueden resolver todas las ecuaciones

$$ax + b = 0$$

con a, b enteros y $a \neq 0$. Y no sólo eso, sino que se pueden resolver todas las ecuaciones del tipo anterior con a y b racionales ($a \neq 0$). Por ejemplo, la solución de

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{7} = 0$$

es el número racional $-\frac{6}{7}$. Efectivamente,

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{6}{7}\right) + \frac{2}{7} = -\frac{6}{3 \cdot 7} + \frac{2}{7} = -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 0$$

En general, si a y b son racionales y $a \neq 0$, la solución de la ecuación de primer grado

$$ax + b = 0$$

es el número racional $-\frac{b}{a}$.

La introducción del campo de los números reales **R**, como extensión del campo de los números racionales **Q**, obedece a razones de otra índole que aquí no trataremos. Pero sí mencionaremos que en **R** todas las ecuaciones de primer grado $ax + b = 0$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) tienen solución. Ésta es el número real $-\frac{b}{a}$.

¿Qué ocurre con las ecuaciones de segundo grado en **R**? Veremos que muchas de ellas no tienen solución en ese campo. Por ejemplo, consideremos la ecuación de segundo grado

$$x^2 + 1 = 0$$

Supongamos que a es un número real. Entonces, $a^2 \geq 0$ y, por tanto, $a^2 + 1 > 0$; esto implica que cualquiera que sea el número real a, tenemos que

$$a^2 + 1 \neq 0$$

es decir, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en **R**.

Además, como demostraremos más adelante, una ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)$$

tiene solución en **R** si y solamente si el discriminante

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Por tanto, cuando $b^2 - 4ac$ es menor que cero, la ecuación no tiene solución en **R**.

3

Adición en C

Denotaremos ahora con **C** al producto cartesiano de **R** por **R**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (a, b) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$$

Es decir, **C** consta de todas las parejas ordenadas (a, b) de números reales.

Teniendo en cuenta las operaciones que definiremos entre elementos de **C**, a éstos los llamaremos *números complejos*. Así,

$$(1, 0), (0, 1), (1, 1), (3, -7), (-2, -1),$$
$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (1/2, 1/3)$$

son números complejos. Las operaciones que entre ellos se definen son tales que con esos números se resuelve el problema planteado en el párrafo anterior.

Antes de hablar de las operaciones conviene representar geométricamente a los números complejos. Esto es muy fácil si, como de costumbre, elegimos un sistema de coordenadas formado por dos rectas perpendiculares entre sí, adoptamos una unidad de medida y a cada número complejo $u = (a, b)$ asociamos el punto del plano que tiene como abscisa a y como ordenada b:

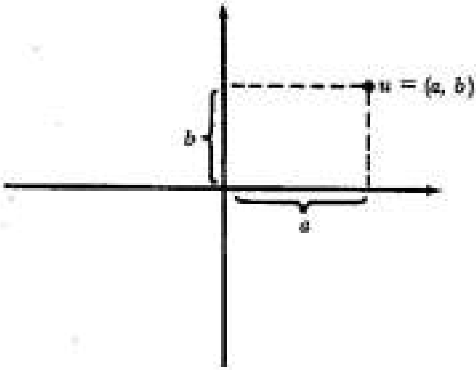


Figura 3.1.

Ejemplo 1. En la siguiente figura se han marcado varios números complejos.

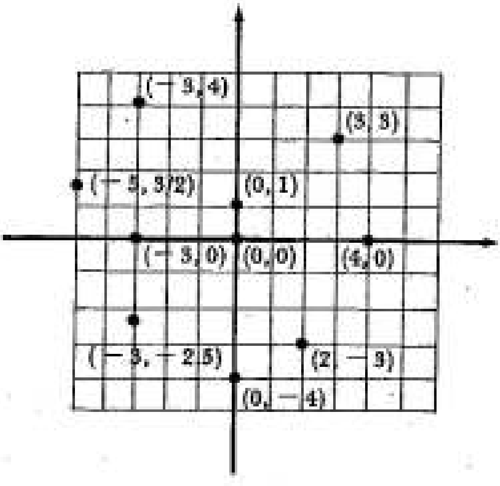


Figura 3.2.

Ejercicio 1.

¿Qué números complejos representan los puntos indicados en la siguiente figura?

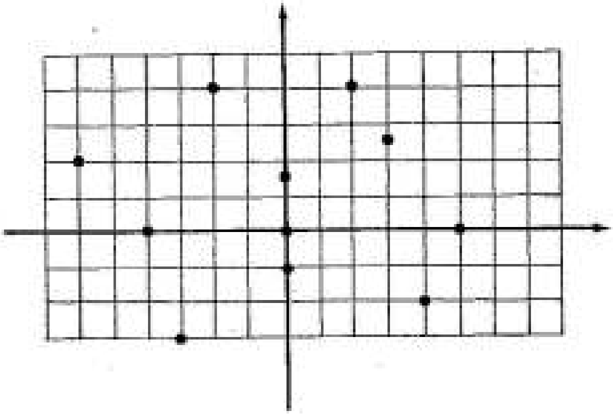


Figura 3.3.

Ejercicio 2.

En un sistema cartesiano de coordenadas, represente los siguientes números complejos:

$o = (0, 0)$	$u_2 = (-1, 1)$	$v_4 = (-4, 4)$
$e_1 = (1, 0)$	$u_3 = (-1, -1)$	$w_1 = \left(-2, -\frac{5}{2}\right)$
$e_2 = (0, 1)$	$u_4 = (1, -1)$	$w_2 = (3, 4)$
$e_3 = (-1, 0)$	$v_1 = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$	$w_3 = (3, -4)$
$e_4 = (0, 1)$	$v_2 = (-2, 2)$	$w_4 = (3, 0)$
$u_1 = (1, 1)$	$v_3 = (-3, 3)$	$w_5 = \left(\frac{5}{3}, -3\right)$

Ejercicio 3.

En el eje de las abscisas están representados todos los números complejos de la forma $(a, 0)$. ¿De qué forma son todos los números complejos que están en el eje de las ordenadas? ¿Qué número complejo representa el origen del sistema de coordenadas?

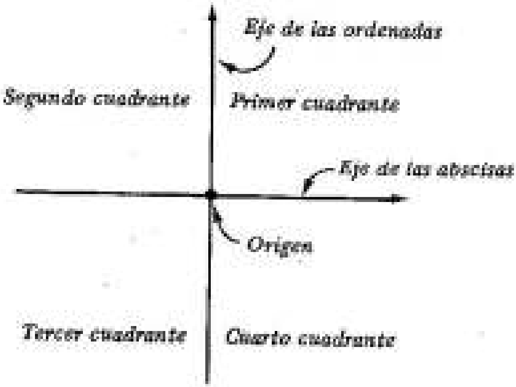


Figura 3.4.

Ejercicio 4.

En el primer cuadrante están representados todos los números complejos (a, b) tales que, $a \geq 0$, $b \geq 0$. O sea,

Primer cuadrante $= \{(a, b) \mid a \geq 0, b \geq 0\}$

El segundo cuadrante es

Segundo cuadrante $= \{(a, b) \mid a \leq 0, b \geq 0\}$

Describa en forma análoga los cuadrantes tercero y cuarto (vea la figura anterior).

La adición de números complejos se define de la siguiente manera:

Definición. *La suma de dos números complejos* (a, b), *y* (c, d) *es el número complejo* $(a + c, b + d)$. *O sea,*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned}(1, 2) + (3, 4) &= (4, 6)\\(-1, 3) + (2, -2) &= (1, 1)\\(2, 1) + (-2, -1) &= (0, 0)\\(0, 0) + (1, 2) &= (1, 2)\\(a, b) + (0, 0) &= (a, b)\\(3, 0) + (0, 7) &= (3, 7)\\(a, 0) + (0, b) &= (a, b)\\(2a, 3b) + (-2a, -3b) &= (0, 0)\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

Encuentre las sumas de los siguientes números complejos:

$(3, 1) + (7, 2)$	$(a, b) + (0, 0)$	$(2x, 3y) + (3x, 7y)$
$(-5, 4) + (5, 4)$	$(1, 0) + (0, 1)$	$(a, b) + (x, y)$
$(-5, 4) + (5, -4)$	$(a, b) - (1, 1)$	$(a, b) + (-a, -b)$

La suma de números complejos se interpreta geométricamente como sigue

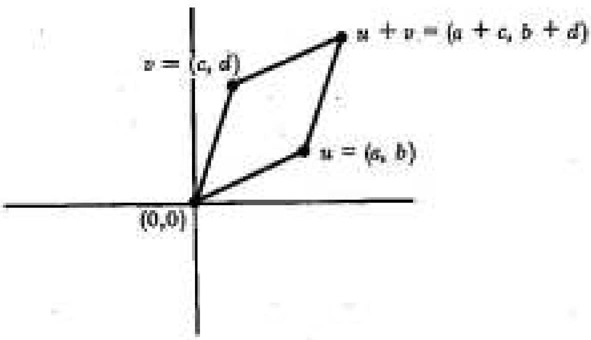


Figura 3.5.

Es decir, $u + v$ es el cuarto vértice del paralelogramo determinado por u, v y el origen.

Observemos que la adición de números complejos se ha definido utilizando la adición de números reales, efectuando ésta "coordenada por coordenada". Por eso es que muchas propiedades de la adición de números reales se transfieren a la adición en **C**. En efecto, la adición de números complejos satisface las siguientes propiedades básicas:

1. $u + v = v + u$ $(u, v \in \mathbf{C})$

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ $(u, v, w \in \mathbf{C})$

3. Existe un número complejo, el $(0, 0)$, tal que para todo $u \in \mathbf{C}$, $(0, 0) + u = u$.

4. Dado un número complejo u, existe un número complejo, denotado $-u$, tal que $u + (-u) = (0, 0)$.

La propiedad 1 es la propiedad *conmutativa*, y la 2, la *asociativa*. Al elemento $(0, 0)$ se le llama el *elemento neutro aditivo*, o simplemente, el *cero*. Al elemento $-u$ se le llama el *inverso aditivo* de u.

Demostraremos estas propiedades.

1. Sea $u = (a, b)$, $v = (c, d)$. Entonces

$$\begin{aligned} u + v &= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ v + u &= (c, d) + (a, b) = (c + a, d + b) \\ &= (a + c, b + d) \end{aligned}$$

(sabemos que $a + c = c + a$ y $d + b = b + d$, porque la adición de números reales es conmutativa). Por tanto, $u + v = v + u$, pues ambos son iguales a $(a + c, b + d)$.

Ejercicio 6.

Haciendo $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $w = (e, f)$ demuestre la propiedad 2 en forma similar a 1 (utilice la propiedad asociativa de la adición de números reales).

3. Que $(0, 0)$ tiene la propiedad indicada es fácil de comprobar:

Si $u = (a, b)$, entonces
$(0, 0) + u = (0, 0) + (a, b) = (a, b) = u$

4. Si $u = (a, b)$, entonces $-u = (-a, -b)$, puesto que $u + (-u) = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$. Por tanto, tenemos que

$$-(a, b) = (-a, -b)$$

La diferencia $u - v$ de dos números complejos, se define utilizando el inverso aditivo de v:

$$u - v = u + (-v)$$

Por ejemplo,

$$(1, 3) - (2, 4) = (1, 3) + (-2, -4) = (-1, -1)$$
$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$$

Ejercicio 7.

Si $u = (-1, 3)$, $v = (-4, -2)$, $w = (3, 0)$, encuentre

$$u - v \qquad u - w \qquad u - w - v \qquad u - (v + w)$$

$$v - u \qquad w - u \qquad v - w - u \qquad u - v + w$$

Resolveremos ahora algunas ecuaciones muy simples con números complejos.

Ejercicio 8.

Sea $u = (1, -2)$, $v = (2, 3)$, $w = (-1, 2)$

a) Encuentre $z \in \mathbf{C}$ tal que

$$u + z = w$$

Solución. Sea $z = (x, y)$ con x, y reales. Entonces, la ecuación planteada es

$$(1, -2) + (x, y) = (-1, 2)$$

Por tanto,

$$(1 + x, -2 + y) = (-1, 2)$$

de donde,

$$\begin{aligned} 1 + x &= -1, \qquad & -2 + y &= 2 \\ x &= -2, & y &= 4 \end{aligned}$$

Luego, la solución es $z = (-2, 4)$.

b) Encuentre $z \in \mathbf{C}$ tal que

$$u - v + z = v - w$$

c) Encuentre $z \in \mathbf{C}$ tal que

$$(z - v) - (w + u) = v$$

Ejercicio 9.

Pruebe que si u, v, w son números complejos y

$$u + v = u + w$$

entonces

$$v = w$$

Observación. Si en un conjunto **G** hay una operación que satisface las propiedades

1. Conmutativa
2. Asociativa
3. Existe en **G** un elemento neutro para la operación
4. Todo elemento de **G** tiene inverso con respecto a la operación

se dice que **G**, con esa operación, es un *grupo conmutativo*. Así, podemos decir que los números complejos, con la adición, es un grupo conmutativo.

4

Multiplicación en C

Definiremos ahora una operación entre números complejos, a la que llamaremos multiplicación. Esta definición puede parecer algo artificiosa, pero es precisamente esta operación la que, junto con la adición, hace de **C** la estructura algebraica que resuelve el problema de solución de ecuaciones que tratamos en los primeros párrafos.

Definición. *El producto de dos números complejos* (a, b) y (c, d) *es el número complejo* $(ac - bd, ad + bc)$. *Es decir,*

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

La siguiente figura puede ayudar a recordar la abscisa y la ordenada del producto:

Abscisa	$(a, b) \quad (c, d)$	$ac - bd$
Ordenada	$(a, b) \quad (c, d)$	$ad + bc$

Figura 4.1.

Observamos que para definir el producto de números complejos hemos utilizado las operaciones de adición y multiplicación de números reales.

Ejemplo 3.

a) $(1, 2)(3, 4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3)$
$= (3 - 8, 4 + 6) = (-5, 10)$
b) $(-1, 2)(3, -4) = [(-1)3 - 2(-4),$
$(-1)(-4) + 2 \cdot 3]$
$= (-3 + 8, 4 + 6)$
$= (5, 10)$
c) $(1, 0)(-2, -3) = [1(-2) - 0(-3), 1(-3)$
$+ 0(-2)]$
$= (-2 + 0, -3 + 0) = (-2, -3)$
d) $(1, 0)(0, b) = (1 \cdot 0 - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot 0)$
$= (0 - 0, b + 0) = (0, b)$
e) $(1, 0)(a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a)$
$= (a, b)$
f) $(0, 1)(2, 4) = (0 \cdot 2 - 1 \cdot 4, 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2)$
$= (-4, 2)$
g) $(0, 1)(a, b) = (0 \cdot a - 1 \cdot b, 0 \cdot b + 1 \cdot a)$
$= (-b, a)$
h) $(a, -b)(a, b) = (a^2 + b^2, ab - ab)$
$= (a^2 + b^2, 0)$

Ejercicio 10.

Encuentre el producto de los siguientes números complejos:

a) $(3, 4)(1, 2)$
b) $(3, -4)(-1, 2)$
c) $(-2, -3)(1, 0)$
d) $(0, b)(1, 0)$
e) $(a, b)\ (1, 0)$
f) $(2, 4)\ (0, 1)$
g) $(a, b)\ (0, 1)$
h) $(a, b)\ (a, -b)$

Si comparamos los resultados obtenidos en el ejemplo con los del ejercicio anterior, vemos que al intercambiar los factores se obtiene el mismo producto. Esto es cierto en general:

Si u y v son números complejos, entonces

$$uv = vu$$

Esta propiedad se llama *propiedad conmutativa de la multiplicación* de números complejos y su demostración es muy simple:

Sea $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$. Entonces,

$$uv = (a, b)\ (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

$$vu = (c, d)\ (a, b) = (ca - db,\ cb + da)$$

ahora bien, como $ac - bd = ca - db$ y $ad + bc = cb + da$, tenemos que $uv = vu$.

Ejercicio 11.

Si $u = (1, 2)$, $v = (3, -2)$, $w = (-2, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}[uv]\ w &= [(1, 2)(3, -2)](-2, 1)\\ &= (1 \cdot 3 - 2(-2),\ 1(-2) + 2 \cdot 3)(-2, 1)\\ &= (3 + 4,\ -2 + 6)(-2, 1)\\ &= (7, 4)(-2, 1) =\\ &= [7(-2) - 4 \cdot 1,\ 7 \cdot 1 + 4(-2)]\\ &= (-14 - 4,\ 7 - 8) = (-18, -1)\end{aligned}$$

Encuentre $u\,[vw] = (1, 2)\,[(3, -2)\,(-2, 1)]$ y compare los resultados.

En el ejercicio anterior vimos que para los números complejos que se dieron, se tiene que $[uv]\,w = u\,[vw]$. Esto es cierto en general, y se conoce como la *propiedad asociativa de la multiplicación* de números complejos:

Si u, v, w son números complejos, entonces

$$[uv]\ w = u\ [vw]$$

Esta propiedad permite escribir productos de tres o más factores sin necesidad de usar paréntesis. Así, podemos escribir uvw en lugar de $[uv]\, w$ o de $u\, [vw]$.

Ejercicio 12.

Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación de números complejos. Siga los pasos del ejercicio 11, haciendo, por ejemplo, $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $w = (e, f)$.

El cuadrado de un número complejo u se define como $u^2 = uu$ y, en general, si n es un número mayor que 1 se define

$$u^n = \underbrace{uu \cdot \cdot \cdot u}_{n \text{ factores}}$$

Esta definición se completa haciendo $u^1 = u$ y $u^0 = (1,0)$.

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}
(a, b)^2 &= (a, b)(a, b) = (a^2 - b^2, 2ab) \\
(a, b)^3 &= (a, b)^2\, (a, b) = (a^2 - b^2, 2ab)(a, b) \\
&= (a^3 - ab^2 - 2ab^2, a^2b - b^3 + 2a^2b) \\
&= (a^3 - 3ab^2, 3a^2b - b^3) \\
(0, 1)^2 &= (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) \\
(0, 1)^3 &= (0, 1)^2\, (0, 1) = (-1, 0)(0, 1) = (0, -1)
\end{aligned}$$

Ejercicio 13.

Encuentre

$(a, -b)^2$	$(0, 1)^4$	$(2, 0)^2$	$(2, 0)^4$	$(a, 0)^2$
$(a, -b)^3$	$(0, 1)^5$	$(a, 0)^3$	$(2, 0)^5$	$(a, 0)^n$

En uno de los ejemplos anteriores vimos que

$$(1, 0)\, (a, b) = (a, b)$$

(compruébelo nuevamente). Es decir, el número (1, 0) se comporta como el 1 en los números reales, por lo que se le acostumbra llamar el *elemento neutro multiplicativo.*

En **Q** y **R** sabemos que todo número distinto de cero tiene inverso multiplicativo. Es decir, si a es un número racional (respectivamente, real) distinto de cero, hay otro número racional (respectivamente, real), que se denota a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$. Por ejemplo, si $a = \frac{1}{2}$, $a^{-1} = 2$,

pues $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$; si $a = \frac{2}{5}$, $a^{-1} = \frac{5}{2}$, pues $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$;

si $a = \sqrt{2}$, $a^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, porque $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Veremos ahora que lo mismo ocurre con los números complejos.

Si u es un número complejo distinto de cero, existe otro número complejo, que se denota con u^{-1}, tal que

$$uu^{-1} = (1, 0)$$

(u^{-1} se llama el *inverso multiplicativo de u*).

En efecto, sea $u = (a, b) \neq (0, 0)$. Queremos encontrar $u^{-1} = (x, y)$ de tal manera que $uu^{-1} = (1, 0)$, es decir que

$$(a, b)(x, y) = (1, 0)$$

Tenemos que

$$(ax - by, ay + by) = (1, 0)$$

es decir que

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Como $(a, b) \neq (0, 0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$, por lo que el sistema anterior tiene solución. Ésta es (véase el ejercicio 5)

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \; y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \qquad (**)$$

Por tanto

$$u^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \qquad (***)$$

Ejercicio 14.

Demuestre que (**) es la solución del sistema (*).

Ejemplo 5. Encontrar el inverso multiplicativo de (3, 2).

Solución. Buscamos un número complejo (x, y) tal que

$$(3, 4)(x, y) = (1, 0)$$

Tenemos que

$$(3, 4)(x, y) = (3x - 4y, 3y + 4x) = (1, 0)$$

de donde,

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ 4x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3, y luego restamos de la segunda la primera:

$$\begin{array}{r} 12x - 16y = 4 \\ 12x + 9y = 0 \\ \hline 25y = -4 \end{array}$$

por lo que $y = -\dfrac{4}{25}$. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$4x + 3\left(-\frac{4}{25}\right) = 0$$

de donde,

$$4x = \frac{12}{25}, \; x = \frac{3}{25}$$

Por tanto, el inverso multiplicativo de (3, 2) es

$$\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right)$$

Ejercicio 15.

Procediendo como en el ejemplo anterior, encuentre los inversos multiplicativos de los siguientes números complejos:

(1, 0)	$(a, 0)$	(4, 3)	(−4, 3)
(0, 1)	$(0, a)$	(5, 13)	(1, 1)

(suponemos $a \neq 0$).

Ejercicio 16.

Utilizando la fórmula (***) compruebe los resultados obtenidos en el ejercicio anterior.

Así como para definir la diferencia de dos números complejos se usa el inverso aditivo, para definir el cociente se usa el inverso multiplicativo:

El cociente $\frac{u}{v}$ *de dos números complejos* u *y* v *(con* $v \neq 0$*) es, por definición, el número complejo* uv^{-1}:

$$\frac{u}{v} = uv^{-1}$$

Ejemplo 6. Encontrar el cociente

$$\frac{u}{v} \text{ con } u = (1, 2), \; v = (3, 4)$$

Solución. Sabemos, del ejemplo 3, que

$$v^{-1} = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right)$$

Por tanto,

$$\frac{u}{v} = uv^{-1} = (1, 2) \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{25} + \frac{8}{25}, -\frac{4}{25} + \frac{6}{25} \right) = \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right)$$

Ejercicio 17.

Encuentre $\frac{u}{v}$ para los siguientes valores de u, v (utilice los resultados del ejercicio 15):

$u = (3, 5)$, $v = (1, 1)$
$u = (a, 0)$, $v = (b, 0)(b \neq 0)$
$u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$
$u = (1, 1)$, $v = (-4, 3)$
$u = (2, 5)$, $v = (1, 0)$
$u = (a, b)$, $v = (c, 0)$

5

Propiedades del campo de los números complejos

En este capítulo haremos un resumen de lo que hemos aprendido en los capítulo 4 y 5.

Los números complejos constan del conjunto

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R} \}$$

en el que se definen las dos operaciones siguientes:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Estas operaciones satisfacen las propiedades siguientes:

a) $u + v = v + u$.
a') $uv = vu$.
b) $(u + v) + w = u + (v + w)$.
b') $(uv)\, w = u\, (vw)$.
c) En **C** hay un *neutro aditivo*. Éste es $(0, 0)$: $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.
c') En **C** hay un *neutro multiplicativo*. Éste es $(1, 0)$: $(a, b)(1, 0) = (a, b)$.
d) Todo número complejo tiene *inverso aditivo*. Si $u = (a, b)$, $-u = (-a, -b)$.
d') Todo número complejo distinto de cero tiene *inverso multiplicativo*. Si $u = (a, b) \neq (0, 0)$,

$$u^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

e) $u(v + w) = uv + uw$.

Las propiedades a) y a') se llaman *conmutativas;* b) y b'), *asociativas* y d), *distributiva.*

En los capítulos anteriores hemos demostrado todas estas propiedades, excepto la e), la cual demostraremos a continuación.

Sea $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $w = (e, f)$.

Entonces,

$$\begin{aligned} u(v + w) &= (a, b)\,[(c, d) + (e, f)] \\ &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

Como ejercicio, calcule $uv + uw$, y compruebe que se obtiene el mismo resultado. Con esto quedará demostrada la propiedad distributiva.

Cuando se tiene un conjunto con dos operaciones que satisfacen las condiciones acabadas de mencionar, se dice que esta estructura es un *campo.* Por esta razón, al hablar de los números complejos, nos referiremos a ellos como *el campo de los números complejos.*

Los números reales **R** también forman un campo, así como los números racionales **Q**.

Los números enteros **Z** no forman un campo, pues hay enteros que no tienen inverso multiplicativo en **Z**. Por ejemplo, 2 no tiene inverso multiplicativo en **Z**, pues no hay ningún entero n tal que $2n = 1$. En **Z** se satisfacen todas las propiedades anteriores, excepto d'). Cuando en un conjunto con dos operaciones se satisfacen las propiedades anteriores, excepto (posiblemente) la d'), se dice que es un *anillo conmutativo*. Así, **Z** es un anillo conmutativo (que no es campo).

En el capítulo 10 hablaremos de otro anillo, el anillo de las matrices cuadradas de dos por dos.

6

Inclusión de **R** en **C**

Consideraremos ahora al conjunto **R** de los números reales como un subconjunto de **C**, identificando cada número real a con el número complejo $(a, 0)$. Expresado con más precisión, establecemos una función de **R** en **C**, asociando a cada número real a el número complejo $(a, 0)$. Esta función es, evidentemente, inyectiva, lo que permite pensar en a y en $(a, 0)$ como un mismo número y escribir

$$a = (a, 0)$$

Podemos ilustrar esto así:

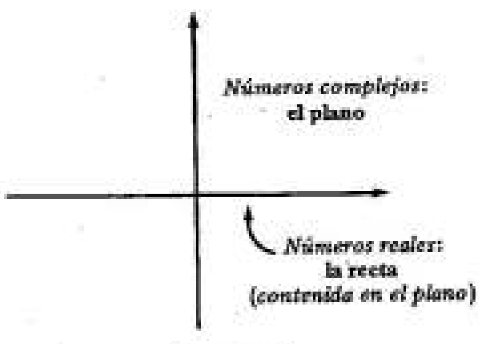


Figura 6.1.

Una vez hecha esta identificación, podemos decir que los números reales son complejos y que un número complejo es real si y sólo si su segunda coordenada es cero.

Por esa razón, al eje de las abscisas se le llama eje real.

Ahora bien, es importante que la identificación de cada real a como el complejo $(a, 0)$ sea compatible con la operación de sumar y con la de multiplicar, en el sentido siguiente.

Si tomamos dos números reales y los sumamos como tales, debemos obtener el mismo resultado que si los pensamos como complejos y los sumamos como tales (y lo mismo con el producto).

$$\begin{array}{ccc}
a & = & (a, 0) \\
b & = & (b, 0) \\
\hline
a + b & & (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \\
\textit{sumados como reales} & & \textit{sumados como complejos}
\end{array}$$

Obtenemos la misma suma, pues $a + b = (a + b, 0)$.

Lo mismo con la multiplicación:

$$\begin{array}{ccc}
a & = & (a, 0) \\
b & = & (b, 0) \\
\hline
ab & & (a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \\
\textit{multiplicados como reales} & & \textit{multiplicados como complejos}
\end{array}$$

y $ab = (ab, 0)$.

Conviene observar que podemos identificar de muchas otras formas a **R** como subconjunto de **C**. Sin embargo, como hemos dicho, lo que interesa es que la identificación sea compatible con las operaciones. Esto no ocurre con otras identificaciones. Por ejemplo, si identificáramos a cada real a con el complejo $(0, a)$, es decir, si hiciéramos $a = (0, a)$, todo iría bien con la suma, pues

$$\begin{array}{ccc}
a & = & (0, a) \\
b & = & (0, b) \\
\hline
a + b & & (0, a) + (0, b) = (0, a + b)
\end{array}$$

y $a + b = (0,\ a + b)$; pero no sería compatible con la multiplicación:

$$\begin{array}{ccc} a & = & (0,\ a) \\ b & = & (0,\ b) \\ \hline ab & & (-ab,\ 0) \end{array}$$

y, con esta identificación $ab = (0,\ ab) \neq (-ab,\ 0)$.

Ejercicio 18.

Como en el ejemplo anterior, compruebe que la inclusión de **R** en **C**, determinada al identificar a con $(a,\ a)$, es compatible con la adición, pero no con la multiplicación.

Con la identificación que hemos hecho, el neutro aditivo de **C** es el mismo que el neutro aditivo de **R**, pues $0 = (0,\ 0)$. Sucede análogamente con los neutros multiplicativos: $1 = (1,\ 0)$.

Esta forma de considerar a **R** como parte de **C**, permite escribir en otra forma cada número complejo.

$$\begin{aligned} (a,\ b) &= (a,\ 0) + (0,\ b) = (a,\ 0) + (b,\ 0)(0,\ 1) \\ &= a + b(0,\ 1). \end{aligned}$$

El número complejo $(0, 1)$ se acostumbra denotar con la letra i (inicial de "imaginario"). Tenemos, con esta notación, que

$$(a,\ b) = a + bi$$

(Aquí, bi es el producto de los números complejos $b = (b, 0)$ e $i = (0, 1)$, y el + denota la suma de los números complejos indicados.)

En particular, los números complejos de la forma $(0, b)$ se pueden escribir como bi; es decir,

$$(0,\ b) = bi.$$

A estos números se acostumbra llamarles imaginarios, y quedan representados por los puntos del eje de las ordenadas que, por eso, se llama el eje imaginario.

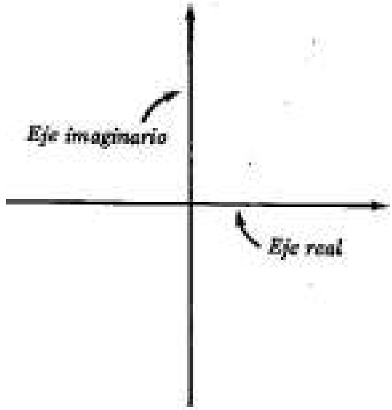


Figura 6.2.

Una observación más. Si a es un número complejo real y (c, d) es un complejo arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} a(c, d) &= (a, 0)(c, d) = (ac - 0d, ad + 0c) \\ &= (ac, ad) \end{aligned}$$

O sea,

$$a(c, d) = (ac, ad)$$

7

Resolución de la ecuación $Z^2 + 1 = 0$. Raíces cuadradas

Hasta aquí hemos creado un campo **C** que extiende al campo **R** de los números reales. ¿Habremos logrado que la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tenga solución en **C**?

Buscamos un número complejo $z = (x, y)$ tal que $z^2 + 1 = 0$; es decir, tal que

$$(x, y)(x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

Esto equivale a

$$(x^2 - y^2, 2xy) + (1, 0) = (0, 0)$$

o bien a

$$(x^2 - y^2 + 1, 2xy) = (0, 0)$$

Esto ocurre si y sólo si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ \qquad\quad 2xy = 0 \end{cases}$$

Como $2xy = 0$, o bien, $x = 0$, o bien $y = 0$ (pues x, y son reales y, en **R**, si un producto es cero, alguno de los factores lo es).

Supongamos primero que $x = 0$. Entonces, la primera ecuación queda $-y^2 + 1 = 0$, o sea, $y^2 = 1$, de donde $y = 1$, o bien $y = -1$. Así pues, en este caso, obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

o sea, obtenemos los números complejos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Si suponemos que $y = 0$, entonces la primera ecuación resulta $x^2 + 1 = 0$ y ésta no tiene solución, pues x debe ser un número real.

Podemos comprobar (ya se ha hecho en ejercicios anteriores) que $(0, 1)^2 = (0, -1)^2 = -1$.

De esta manera, hemos demostrado que la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tiene exactamente dos soluciones en $\mathbf{C}$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Al número complejo $(0, 1)$ se le denota, como mencionamos en el capítulo anterior, con i. O sea

$$i = (0, 1), \; -i = (0, -1)$$

Por tanto, la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tiene dos soluciones en $\mathbf{C}$, que son i y $-i$.

Puesto que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$, decimos que i y $-i$ son las dos raíces cuadradas de -1.

Recordemos que en $\mathbf{R}$ cada número real positivo tiene exactamente dos raíces cuadradas, una positiva y la otra negativa. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 4 son 2 y -2, las de 1 son 1 y -1. Si a es un número real positivo, a la raíz cuadrada positiva de a se le denota $\sqrt{a}$, y la negativa es $-\sqrt{a}$. Así, $\sqrt{4} = 2$ y $-\sqrt{4} = -2$ son las dos raíces cuadradas de 4.

Sabemos también que los números reales negativos no tienen raíces cuadradas en $\mathbf{R}$; en otras palabras, si a es un número real negativo, no hay ningún número real x tal que $x^2 = a$. (En particular, como ya vimos, $x^2 = -1$ no tiene solución en $\mathbf{R}$.)

En resumen, los números reales positivos tienen dos raíces en $\mathbf{R}$ (el 0 tiene una, 0) y los negativos no tienen raíces en $\mathbf{R}$.

A continuación examinaremos las raíces cuadradas de cualquier número complejo. Demostraremos que todo número complejo ($\neq 0$) tiene exactamente dos raíces complejas. En particular, los números reales negativos tienen dos raíces cuadradas en $\mathbf{C}$ (por ejemplo, -1 tiene dos raíces, i y $-i$).

Empezaremos con un ejemplo.

Ejemplo 7. Encontrar las raíces cuadradas del complejo $(12, -5)$.

Solución. Buscamos un número complejo (x, y) tal que

$$(x, y)^2 = (12, -5)$$

Tenemos que

$$(x, y)(x, y) = (x^2 - y^2\ 2xy) = (12, -5)$$

es decir, que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ \quad 2xy = -5 \end{cases}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 144 \\ \qquad\quad 4x^2y^2 = 25 \end{cases}$$

y sumando las ecuaciones obtenidas, llegamos a que

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 169$$

de donde,

$$x^2 + y^2 = 13$$

(Descartamos la posibilidad de que $x^2 + y^2 = -13$, pues $x, y \in \mathbf{R}$ y $x^2 + y^2 \geq 0$.) Sumando esta ecuación con $x^2 - y^2 = 12$ obtenemos $2x^2 = 25$ y restándolas, $2y^2 = 1$. Por tanto

$$x^2 = \frac{25}{2}, \ y^2 = \frac{1}{2}$$

por lo que

$$x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}, \ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $2xy = -5 < 0$, x y y no pueden ser ambos positivos ni ambos negativos. Entonces, las posibles soluciones son

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Obtenemos de esta manera los dos números complejos

$$z_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \qquad z_2 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Una comprobación directa demuestra que $z_1^2 = z_2^2 = (12, -5)$. Hemos demostrado así que $(12, -5)$ tiene exactamente dos raíces cuadradas.

Ejercicio 19.

Procediendo como en el ejemplo anterior, encuentre las raíces cuadradas de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{ccc} (3, \; 4) & (-3, 4) & i \\ (3, -4) & (-8, 6) & -i \end{array}$$

Ejercicio 20.

Compruebe que 1, i, -1 y $-i$ son raíces cuartas de 1.

Ejercicio 21.

Compruebe que 1, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ son raíces cúbicas de 1.

Siguiendo los pasos del ejemplo 1 y del ejercicio 1, podemos demostrar que todo número complejo distinto de cero tiene exactamente dos raíces cuadradas (el 0 tiene una sola raíz cuadrada, que es 0).

Sea $u = (c, d)$ un número complejo distinto de cero. Por comodidad, llamemos r al número real positivo $\sqrt{c^2 + d^2}$. Buscamos un número complejo (x, y) tal que

$$(x, y)^2 = (c, d)$$

Como antes, tenemos

$$(x, y)(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (c, d)$$

de donde,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c \\ \quad 2xy = d \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = c^2 \\ \qquad\qquad 4x^2y^2 = d^2 \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = c^2 + d^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = r$$

$$2x^2 = r + c \geq 0 \qquad\qquad 2y^2 = r - c \geq 0$$

(pues $r \geq$ c). Por tanto,

$$x = \pm \sqrt{\frac{r+c}{2}} \qquad\qquad y = \pm \sqrt{\frac{r-c}{2}}$$

Si d es positiva se obtienen dos soluciones $(+, +)$, $(-, -)$ y si d es negativa también se tienen dos soluciones $(+, -)$, $(-, +)$.

En el caso particular de que (c, d) sea un número real negativo, es decir, que $(c, d) = (-a, 0)$ con $a > 0$, las soluciones anteriores resultan ser como sigue:

$r = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(-a)^2 + 0^2} = a$ (pues $a > 0$), de donde,

$$x = \pm \sqrt{\frac{r + (-a)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{a-a}{2}} = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r - (-a)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{a+a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2a}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{a}$$

Por tanto, las raíces cuadradas del número real negativo $-a$, $(a > 0)$, son

$$(0, \sqrt{a}) \qquad\qquad (0, -\sqrt{a})$$

que se pueden escribir en forma

$$\sqrt{a}\, i \qquad\qquad -\sqrt{a}\, i$$

Observación. El uso del símbolo $\sqrt{}$ se reserva solamente para $\sqrt{a}$ con a real positivo, pues su uso descuidado, cuando a es un real negativo o, en general, un complejo cualquiera, puede conducir a confusiones. Por ejemplo, podemos equivocarnos al escribir

$$\begin{aligned} -1 = ii = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} &= \sqrt{(-1)(-1)} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

¿Puede usted decir qué propiedades estamos usando aquí que no hemos demostrado y que, en general, no son ciertas?

8

Ecuaciones de segundo grado

En cursos anteriores aprendimos a resolver ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales. Se dijo que las soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a,\ b,\ c \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$$

son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ahora bien, si $b^2 - 4ac$ es negativo, nos encontramos con la raíz cuadrada de un número negativo que, como sabemos, no existe en $\mathbf{R}$.

Por tanto, conviene examinar con más cuidado las ecuaciones de segundo grado y sus soluciones. Pero como ya disponemos de los números complejos, partiremos de una ecuación de segundo grado con coeficientes complejos, es decir, de

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a,\ b,\ c \in \mathbf{C},\ a \neq 0)$$

En particular, los coeficientes a, b y c pueden ser reales y, de esta manera, nuestro estudio abarcará el caso anterior.

Un número complejo x es solución de la ecuación anterior si y sólo si

$$ax^2 + bx + c = 0$$

es decir, si y sólo si

$$ax^2 + bx = -c$$

o bien, puesto que $a \neq 0$,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Esto equivale a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

o sea, a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Así pues, x es solución de la ecuación dada, si y solamente si $x + \frac{b}{2a}$ es una raíz cuadrada de $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Pueden ocurrir dos casos:

1. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ y por tanto, la única raíz cuadrada de este número es cero. Entonces, hay una sola solución de la ecuación dada por $x + \frac{b}{2a} = 0$, o bien, por

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

2. Si $b^2 - 4ac \neq 0$, entonces $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \neq 0$ y, según lo demostrado en el capítulo 7, este número tiene exactamente dos raíces. Si d es una de ellas, la otra es $-d$. Entonces, la ecuación tiene dos soluciones que se obtienen de

$$x + \frac{b}{2a} = d, \qquad x + \frac{b}{2a} = -d$$

Es decir, las soluciones son

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + d, \qquad x_2 = \frac{b}{2a} - d$$

Resumiendo, hemos demostrado que:

La ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbf{C}, a \pm 0)$$

tiene

1. *Una solución única* $x = -\dfrac{b}{2b}$ si $b^2 - 4ac = 0$.

2. *Dos soluciones si* $b^2 - 4ac \neq 0$ y éstas son

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + d, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - d$$

en donde d *y* $-d$ *son las dos raíces cuadradas de*

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Ejemplo 8. Resolvamos la ecuación

$$x^2 + (2, 2)x + (0, 2) = 0$$

o bien, escrita en otra forma,

$$x^2 + (2 + 2i)x + 2i = 0$$

Encontramos

$$b^2 - 4ac = (2, 2)^2 - 4(0, 2) = (0, 8) - (0, 8) = 0$$

es decir, estamos en el caso 1. Por tanto, hay una sola solución que es

$$x = -\frac{b}{2a} = -(1,\ 1)$$

o con la otra notación, $x = -(1 + i) = -1 - i$.

Ejemplo 9. Resolveremos la ecuación

$$x^2 + (1 - 2i)x + (1 + 5i) = 0$$

que, escrita en otra forma, es

$$x^2 + (1,\ -2)x + (1,\ 5) = 0$$

Encontramos

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (1,\ -2)^2 - 4(1,\ 5) = (-3,\ -4) - (4,\ 20) \\ &= (-7,\ -24) \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos soluciones. Para encontrarlas, calculamos primero las raíces cuadradas de

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(-\frac{7}{4},\ -\frac{24}{4}\right)$$

Hacemos

$$(y,\ z)^2 = (y^2 - z^2,\ 2yz) = \left(-\frac{7}{4},\ -\frac{24}{4}\right).$$

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = -\dfrac{7}{4} \\ 2yz = -\dfrac{24}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y^4 - 2y^2z^2 + z^4 = \dfrac{49}{16} \\ 4y^2y^2 = \dfrac{576}{16} \end{cases}$$

$$y^2 + 2y^2z^2 + z^4 = \frac{625}{16} \qquad y^2 + z^2 = \frac{25}{4}$$

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = -\dfrac{7}{4} \\ y^2 + z^2 = \dfrac{25}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y^2 = \dfrac{18}{4} \\ 2z^2 = \dfrac{32}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{9}{4} \\ z^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm\, \dfrac{3}{2} \\ z = \pm\, 2 \end{cases}$$

Como $yz < 0$, las raíces cuadradas son

$$d = \left(\frac{3}{2}, -2\right), \qquad -d = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + d = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) + \left(\frac{3}{2}, -2\right) = (1, -1)$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - d = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) + \left(-\frac{3}{2}, 2\right) = (-2, 3)$$

Expresadas en la notación $a + bi$, las soluciones son

$$1 - i, \qquad -2 + 3i$$

Ejercicio 22.

Encuentre las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - (14, 2)x + (48, 14) = 0$
respuesta: $(7, 1)$; $d = 0$
b) $x^2 + (6, -4)x + (-10, -4) = 0$
respuesta: $(1, 1)$, $(-7, 3)$; $d = (4, -1)$
c) $x^2 + (1, -4)x + (-9, -7) = 0$
respuesta: $(2, 3)$, $(-3, 1)$; $d = \left(\frac{2}{2}, -1\right)$

d) $x^2 - (10, 4)x + (21, 20) = 0$
respuesta: $(5, 2)$; $d = 0$

e) $x^2 + (-4, 0)x + (7, -4) = 0$
respuesta: $(3, 2)$ $(1, -2)$; $d = (1, -2)$

f) $(0, 1)x^2 + (0, -5)x + (0, 6) = 0$
respuesta: $(2, 0)$, $(3, 0)$; $d = \frac{1}{2}$

g) $^2 - (6, -1)x + (10, -6) = 0$
respuesta: $(4, 1)$, $(2, -2)$; $d = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

En el caso en que a, b y c son reales y que $b^2 - 4ac \geq 0$, recuperaremos la fórmula conocida. En efecto, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ tiene dos raíces reales (o una, si es cero), que son

$$d = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad -d = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, las soluciones son

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que, a veces, se escriben en una sola fórmula, así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

9

El campo de los números complejos es algebraicamente cerrado

Hasta aquí hemos construido un campo en el cual, según demostramos, toda ecuación de segundo grado tiene solución. Ahora bien, podemos preguntarnos qué ocurre con las ecuaciones de mayor grado; por ejemplo, las de tercer grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)$$

o las de cuarto grado

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (a \neq 0)$$

o, en general, con las de grado n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

Si nos viéramos obligados a extender de nuevo **C** con el fin de que las ecuaciones de tercer grado tuvieran solución, después volver a hacer lo mismo para las de cuarto grado, y así sucesivamente, el problema se complicaría mucho.

Sin embargo, se puede demostrar que no es éste el caso. Hay un resultado, que a veces llaman "teorema fundamental del álgebra", que dice:

Teorema. Toda ecuación con coeficientes complejos

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$(a_n \neq 0,\ n \geq 1)$$

tiene solución en **C**.

Es decir, toda ecuación con coeficientes complejos (o en particular, reales), sea el grado que sea, tiene solución en **C**.

Esta propiedad se menciona diciendo que el campo **C** de los números complejos es algebraicamente cerrado.

La demostración de este resultado es bastante difícil y no está, desde luego, dentro de las posibilidades de un folleto como el presente.

De hecho, el teorema implica que cada ecuación de grado n, con coeficientes en **C**, tiene n soluciones (contadas convenientemente). En esta forma, el campo de los números complejos acaba con el problema de encontrar extensiones del campo de los números reales, en las cuales todas las ecuaciones tengan solución.

Por ejemplo, la ecuación de tercer grado

$$x^3 - 1 = 0$$

tiene tres raíces:

$$1, \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

la ecuación de quinto grado

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

tiene cinco soluciones:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), -1,$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejercicio 23.

Compruebe las afirmaciones de los dos ejemplos anteriores.

Ejercicio 24.

Encuentre cuatro soluciones de la ecuación

$$x^4 - 1 = 0$$

Ejercicio 25.

Utilizando los resultados del ejercicio 24 y el hecho de que

$$(x - 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$= x^8 - 1$$

encuentre 7 soluciones de la ecuación

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

10

Representación matricial de los números complejos

Una matriz real de 2×2 está formada con cuatro números reales, dispuestos en dos renglones y dos columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

(a, b) es el primer renglón; (c, d), el segundo;

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ es la primera columna y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ la segunda.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

son matrices reales de 2×2.

Consideremos el conjunto M de todas las matrices reales de 2×2. En este conjunto se definen dos operaciones: adición de matrices y multiplicación de matrices. Con estas operaciones, este conjunto adquiere una estructura algebraica llamada *anillo*. Así pues, hablaremos del *anillo de* *las matrices reales de* 2×2. Las operaciones son las siguientes:

ADICIÓN DE MATRICES

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

La adición de matrices no presenta dificultad alguna, pues se hace "elemento con elemento".

Ejemplo 10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26.

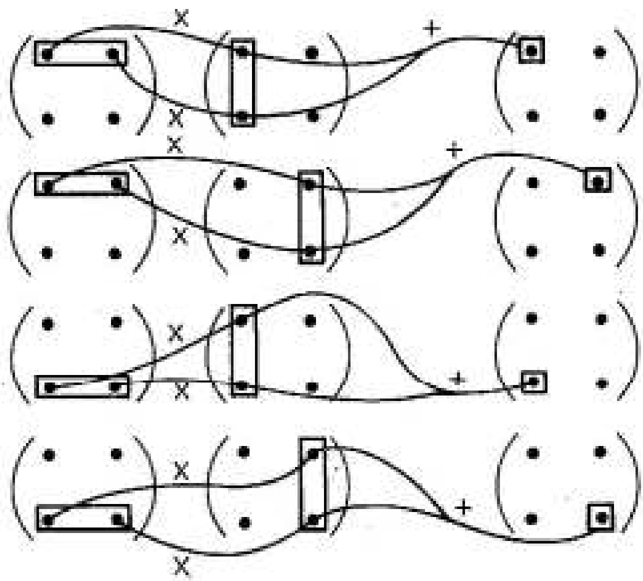
Sume las matrices indicadas

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

La forma de multiplicar dos matrices es algo más difícil de recordar. Puede ayudarnos un diagrama.



Ejemplo 11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1(-1) & 1(-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2(-1) & 1(-1) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2)(-2) & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1(-2) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27.

Encuentre los productos indicados.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La adición y la multiplicación de matrices tienen las propiedades siguientes:

1. $A + B = B + A \qquad (A, B \in M)$
2. $(A + B) + C = A + (B + C) \qquad (A, B, C \in M)$

2'. $(AB)C = A(BC)$

3. Existe en M un elemento neutro aditivo. Éste es

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $A + 0 = 0 + A = A$ para cualquier matriz A.

3'. Existe en M un elemento neutro multiplicativo. Éste es

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $AI = IA = A$ para cualquier matriz A.

4. Toda matriz A tiene inverso aditivo, que se denota con $-A$. Se tiene que $A + (-A) = 0$.
5. $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$.

Observaciones. La multiplicación de matrices *no es conmutativa*. Es decir, para algunas matrices A y B, $AB \neq BA$, como puede observarse al comparar algunos de los productos del ejemplo 11 con los del ejercicio 27.

Tampoco toda matriz tiene inverso multiplicativo. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no hay ninguna matriz A' tal que $AA' = I$. En efecto, si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tendríamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual no es posible, porque no puede ser que $a = 1$ y $a = 0$.

La propiedad distributiva debe enunciarse tanto por la derecha como por la izquierda, porque la multiplicación no es conmutativa.

Ahora demostraremos esas propiedades.

Demostración de 2'. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Tenemos

$$(AB)C = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (aa' + bc')a'' + (ab' + bd')c'' & (aa' + bc')b'' + (ab' + bd')d'' \\ (ca' + dc')a'' + (cb' + dd')c'' & ca'b'' + dc'b'' + cb'd'' + dd'd'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'a'' + bc'a'' + ab'c'' + bd'c'' & aa'b'' + bc'b'' + ab'd'' + bd'd'' \\ ca'a'' + dc'a'' + cb'c'' + dd'c'' & ca'b'' + dc'b'' + cb'd'' + dd'd'' \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28.

Calcule $A(BC)$ y compruebe que $(AB)C = A(BC)$.

Ejercicio 29.

Demuestre las propiedades 1 y 2.

Las propiedades 3 y 3' se han demostrado ya al resolver los ejemplos 10 y 11, y los ejercicios 26 y 27.

Para la 4, basta observar que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

pues $A + (-A) = 0$.

Ejercicio 30.

Demuestre la propiedad 5.

Ahora veremos en qué forma los números complejos pueden considerarse como matrices reales de 2×2. Esta idea es completamente análoga a la de identificar los números reales con algunos números complejos. (Recordemos que a cada número real a lo hemos identificado con el número complejo $(a, 0)$, y que esta identificación es compatible con las operaciones.)

Ahora consideremos al conjunto **C** de los números complejos como un subconjunto de M, identificando cada número complejo (a, b) con la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Expresado con más precisión, establecemos una función de **C** en M, asociando a cada número complejo (a, b) la matriz mencionada. Esta función es, evidentemente, inyectiva, lo que permite pensar en (a, b) y en

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

como un mismo objeto y escribir

$$(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Esta identificación de los números complejos con matrices es compatible con las operaciones de adición y multiplicación que hay, tanto en $\mathbb{C}$ como en M. En efecto,

$$
\begin{array}{ccc}
(a, b) & = & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
(c, d) & = & \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
\hline
(a+c, b+d) & = & \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Suma como complejos *Suma como matrices*

en donde vemos que los resultados obtenidos son iguales, según la identificación que hemos hecho.

Lo mismo ocurre con la multiplicación:

$$
\begin{array}{ccc}
(a, b) & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
(c, d) & & \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
\hline
(a, b)(c, d) & = & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
(ac - bd, ad + bc) & = & \begin{pmatrix} ac - bd & (ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Cuando se tiene una función de una estructura algebraica, con dos operaciones en M, que sea compatible con las operaciones, como en el caso de la identificación de complejos con matrices, se dice que se tiene una *representación* de dicha estructura por medio de matrices. Así, la función de $\mathbb{C}$ en M que identifica cada número complejo con la matriz respectiva es una *representación de los números complejos mediante matrices reales de* 2×2.

Índice analítico

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de enero de 1989
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

AT MAMR SR 100