Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Lógica Deductiva

Gonzalo Zubieta Russi

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Textos. Vol. 1 (2002)
ISBN 968-9161-00-8

Sociedad Matemática Mexicana
Publicaciones Electrónicas
Serie: Textos Vol. 1 (2002)

SOCIEDAD
MATEMÁTICA
MEXICANA

LÓGICA DEDUCTIVA
(nivel licenciatura)

Gonzalo Zubieta Russi

PRÓLOGO

La lógica deductiva tiene sus orígenes en la Grecia antigua en el trabajo de Aristóteles, quien presentó sus estudios sobre el razonamiento en su *lógica silogística*. La teoría del silogismo se ocupa de la caracterización de las inferencias válidas mediante esquemas de argumento, esto es, secuencias de enunciados formados por premisas y conclusión, de tal forma que se garantiza la verdad de la conclusión cuando se supone la verdad de las premisas. Estos estudios dieron lugar a una larga tradición filosófica que tomó un carácter más formal en el siglo XIX con los trabajos de Frege sobre la lógica de predicados, la cual ofrece un lenguaje simbólico mucho más poderoso que el de la lógica silogística aristotélica. Posteriormente en el siglo XX, el estudio de la lógica se matematizó a tal grado que constituyó el campo de la lógica matemática. Los dos enfoques predominantes de esta disciplina son el sintáctico y el semántico. El primero caracteriza las nociones de derivación formal, sistema axiomático y prueba. El segundo se ocupa de las nociones de verdad, interpretación y consecuencia lógica. Uno de los resultados más espectaculares de la lógica matemática del siglo XX es el de Gödel, quien demostró la equivalencia entre las nociones de derivabilidad formal y consecuencia lógica, esto es, entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal, con su *teorema de completud*, el cual dice en su versión original que toda fórmula universalmente válida es teorema (el reverso de este resultado ya era conocido como el *teorema de correctud*). Hoy en día, estos dos enfoques de la lógica matemática clásica constituyen disciplinas bien establecidas y con agendas propias, éstas son, la teoría de la demostración y la teoría de modelos. Por otro lado, estudios en lógicas no-clásicas han marcado una nueva tradición formal que tiene aplicaciones fuera de la matemática en campos como la computación y la lingüística formal.

En cuanto a la enseñanza de la lógica deductiva en un nivel introductorio, los profesores tenemos que escoger entre aquellos libros de texto que presentan la silogística aristotélica y los de corte matemático. Mientras que los primeros se dedican a presentar las motivaciones filosóficas de la lógica deductiva y exponen la teoría del silogismo aplicada a razonamientos cotidianos (Copi, 1968), los otros se ocupan de dar las bases de la axiomática y de la teoría de conjuntos, y con esto introducen al alumno a la lógica proposicional y de predicados moderna, ya sea con énfasis en el aspecto sintáctico (Suppes, 1979) o en el semántico (Enderton, 1987). La elección de enfoque está dada por la licenciatura en la cual se enseña esta materia. Por lo general, en las carreras humanísticas (principalmente en filosofía) se pasa totalmente desapercibido el aspecto matemático de la lógica moderna y en las carreras científicas (matemáticas y computación) no hay contacto alguno con la tradición aristotélica de esta disciplina.

El libro que el lector tiene frente a sus ojos es excepcional por varias razones. En primer lugar, combina la silogística aristotélica con la demostración formal basada en la axiomática matemática y de esta forma el autor no sacrifica ninguna de las caras de la lógica. Su enfoque original introduce al alumno a la lógica en su tradición sintáctica haciendo uso de las formas silogísticas aristotélicas demostrando la validez de las inferencias dentro del esquema de prueba formal deductiva, ofreciendo con esto una presentación de la lógica aristotélica de manera rigurosa. El autor ilustra diversas formas de demostración (directa, indirecta, por casos) con ejemplos cotidianos, lo cual conforma el contenido del capítulo I. El capítulo II presenta este enfoque en el álgebra de conjuntos y el capítulo III lo hace a través de los tipos y propiedades de la noción de función matemática, lo cual además es el ingrediente necesario para preparar al estudiante para el enfoque semántico de la lógica (lo cual no está cubierto en este libro). El último capítulo, el IV, está dedicado a presentar este enfoque en la geometría euclidiana, el sistema deductivo por excelencia.

En segundo lugar, este libro tiene la particularidad de poner en contacto al estudiante directamente con el lenguaje de la lógica de predicados, sin antes cubrir en su totalidad la lógica proposicional, como usualmente se hace. Esto se logra naturalmente porque la forma lógica de los enunciados que conforman los silogismos involucra cuantificadores. Sin embargo, cabe recordar que el lenguaje de la silogística aristotélica solo permite cuantificación simple, esto es, expresiones con un solo cuantificador. Aún así, es una virtud que en un texto introductorio de lógica se exponga al lector al lenguaje de la lógica de predicados.

En tercer lugar, este libro es único por la forma en que enseña la lógica. El tono en que está escrito invita al lector a reflexionar sobre la manera de hacer demostraciones formales. Su presentación es muy didáctica y recuerda a otros libros con enfoques poco comunes (e.g. Polya, 1986) donde se presenta a la matemática como una actividad dinámica y creativa en donde el énfasis está en la manera de hacer demostraciones más que en presentarlas como productos atemporales y acabados. Este tipo de presentación solo se logra después de muchos años de experiencia en la enseñanza de la lógica, lo cual podemos corroborar por los otros textos de lógica de este autor (el lector encontrará una lista de los títulos en la semblanza).

Este libro ofrece un muy buen balance para la enseñanza de la lógica, haciéndolo de utilidad tanto para estudiantes en licenciaturas humanísticas como científicas. El autor ofrece una guía de trabajo para que el profesor escoja los temas más apropiados de acuerdo al programa de licenciatura que tenga a su cargo así como del tiempo del cual disponga, ya que puede usarse tanto para un curso semestral como para uno anual. El material de este libro es una excelente introducción a la lógica, que bien puede ser puerta para textos mas avanzados tanto de lógica matemática, en los dos enfoques sintáctico y semántico (Suppes, 1979 y Enderton, 1987), así como de filosofía y lingüística formal (Gamut) o incluso para textos de lógica de corte computacional.

Atocha Aliseda
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

Copi, I. *Introducción a la Lógica.* EUDEBA. Buenos Aires, Argentina. 1972. (Traducción de la cuarta edición en inglés, 1972).

Enderton, H. Una introducción matemática a la lógica. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM. México. 1987. (Traducción de la edición en inglés, 1972).

Gamut, L.T.F. Introducción a la Lógica. EUDEBA. Buenos Aires, Argentina. 2002. (Traducción de la primera edición en inglés, 1991).

Polya, G. Cómo Plantear y Resolver Problemas. Trillas, México. 1986. (Traducción de la primera edición en inglés, 1944).

Suppes, P. Primer curso de logica matemática. Reverte, Barcelona, España. 1979. (Traducción de la primera edición en inglés).

INTRODUCCIÓN

Este curso se ocupa de las **cadenas deductivas**, dentro y fuera de las matemáticas, como un arte a practicar, no como una teoría. Es la única manera conocida de embarcar en el pensamiento deductivo a la mayoría de la clase.
En el primer capítulo se aprende a pensar matemáticamente sin pensar en matemáticas, gracias a las **afirmaciones sobre veraces y mitómanos**, y a los **silogismos categóricos**, que son los primeros teoremas que hay que saber demostrar, antes de demostrar en matemáticas.
El arte de demostrar no se aprende fácilmente dentro de las matemáticas, ya que toda demostración matemática es una disertación conducida por el autor, según cierta línea de pensamiento que suele no corresponder al esquema mental del lector, quien al sentirse marginado del tema se desconecta.
Eso no ocurrirá en las demostraciones de este curso ya que, desde la primera lección, sobre demostración indirecta, las inferencias se hacen según patrones establecidos, al alcance de todos los participantes, sin obligarlos a adoptar estilos ajenos. Su ensayo paciente y repetido hará que cada alumno capte la idea de demostración.
Para garantizar el éxito correspondiente, hay que concederle a cada tema el tiempo requerido para su maduración, según la tabla siguiente:

1. Demostración Indirecta (2 semanas)
2. Esquema Deductivo (Una clase)
3. Demostración Directa (3 semanas)
4. Otros Ejemplos (2 semanas)

Este intento debe desarrollarse en forma de taller, donde los alumnos participen activamente y el profesor se concrete a hacer preguntas como las siguientes:

– ¿Qué significa eso?

– ¿Adónde queremos llegar?
– ¿Qué sabemos al respecto?
– ¿Por qué ya está demostrada esa afirmación?

Para esta última pregunta, la respuesta obligada es:

– Porque hemos partido de la hipótesis, que es el paso tal,
y hemos llegado a la tesis, que es el paso tal.

O bien:

– Porque hemos partido de su negación, que es el paso tal,
y hemos llegado a una contradicción, que está en los pasos tal y tal.

Para imprimir dinamismo y gracia a las demostraciones hay que valerse de ciertas palancas, como **definir sobre la marcha** cuando se llegue a una existencial, **proceder por casos**, o **por exclusión**, cuando se llegue a una disyunción, y **demostrar sobre la marcha** cuando el paso considerado no se desprenda fácilmente de los pasos anteriores.
En los apartados 1, 2, 3, 4 se adquieren los hábitos y la disciplina que permiten avanzar en materia de demostraciones. De ahí se puede saltar al apartado 13, si se quiere, regresando a 8, 10 y 12, según se vayan necesitando. Los tiempos recomendados para estos temas son:

8. Negaciones (1 semana)
10. Demostración por Casos (2 semanas)
12. Definición de igualdad (2 clases)
13. Conjuntos (2 clases)
14. Unión e Intersección (2 semanas)

Aunque este libro contiene material suficiente para un curso anual de licenciatura, en el caso de un curso semestral debe optarse por alguna selección de temas. He aquí algunas recomendaciones:

Licenciatura en humanidades: capítulo I, completo.
Licenciatura en matemáticas: secciones marcadas con asterisco.
Licenciatura en ciencias: capítulo II, precedido de los asteriscos de I.

No importa tanto la cantidad de temas que se cubran, como la intensidad de las vivencias adquiridas. Hay que vivir las demostraciones, tal como se vive un relato agradable.
Los frutos de este curso no surgen tanto de la simple lectura de sus páginas, como de su mejor laboratorio, que es la participación de un grupo frente al pizarrón, en presencia del profesor. Esto aporta experiencias inéditas acerca del quehacer deductivo, y de sus múltiples tropiezos con el credo común.

SEMBLANZA DEL AUTOR

El conocimiento de la lógica teórica y el arte de bien conducir la razón. Así podríamos resumir la carrera de Gonzalo Zubieta Russi. No podemos precisar cual de estos dos aspectos predomina en su obra si nos limitamos al campo de la lógica. En el maestro Zubieta se combinan y coexisten en paz el investigador y el profesor universitario.

Gonzalo Zubieta Russi nació en el sureño estado de Tabasco. Miembro de una familia en la que el gusto por la ciencia y la buena conversación es una constante, decidió estudiar matemáticas en la recién formada Facultad de Ciencias de la UNAM, allá por los años 1940, cuando ésta se hallaba en el Palacio de Minería. Fue el inicio de una brillante trayectoria académica que lo llevó a ser investigador de tiempo completo del Instituto de Matemáticas desde 1971 y catedrático de la Facultad de Ciencias desde 1948. Además de la Lógica Matemática, otra de sus áreas de trabajo ha sido el Análisis Matemático.

Desde un principio, y guiado por su asombro ante la fuerza lógica de las demostraciones, su interés se dirigió hacia la lógica matemática. ¿Cómo es que el equilibrio de un trompo en su giro se puede explicar mediante un argumento racional? ¿Cómo es que podemos afirmar con absoluta certeza que la raíz cuadrada de dos no es racional? Muy pronto asistió a un seminario dirigido por Carlos Graef en 1942 sobre el famoso libro de Hilbert y Ackermann *Fundamentos de Lógica Teórica*.[1] Tiempo después participó en un seminario impartido por su hermano Francisco Zubieta en el Instituto Politécnico Nacional, cuando Don Manuel Sandoval Vallarta era director de dicha institución.

El joven Zubieta pronto se familiarizó con el libro Mathematical Logic de

[1] Grundzüge der Theoretischen logik, David Hilbert & Wilhelm Ackermann, Berlin, Springer 1928. Traducción al inglés: Principles of Mathematical Logic, Chelsea Pub. Co., 1950.

Willard Von Orman Quine[2] y estableció contactos con él, quien le sugirió un tema de tesis y valiosas orientaciones. En 1949 Quine estuvo en México y para principios de 1950, Zubieta presentó, avalado por Quine la tesis profesional "*Sobre el Cálculo Funcional de Primer Orden*".[3] En él, su autor presenta una prueba más rigurosa del teorema de completud de la lógica de primer orden de Gödel.

El trabajo de Zubieta pronto cruzó la frontera. Por sugerencia de Quine, éste fue enviado a Alonzo Church[4] quien a su vez invitó a Robert Feys, lógico de la universidad de Lovaina a presentar un comentario sobre el mismo en el Journal of Symbolic Logic, a la sazón la revista de mayor prestigio en el área de lógica. En 1953 Zubieta fue a Princeton para ocupar el cargo de ayudante de investigador de Alonzo Church quien alguna vez diría de Zubieta que era el *único lógico latino que escribía con rigor*. Church lo cita en la introducción de su libro[5] por sus observaciones y participación en el proyecto.[6]

Su estancia en los Estados Unidos habría de ser más prolongada, pues en Chicago trabajó con Halmos sobre Lógica Algebraica y de 1961 a 1962 lo hizo con Alfred Tarski en Berkeley, de quien aprendió la Teoría de Modelos recién desarrollada por éste. La versatilidad e insaciable curiosidad de Gonzalo Zubieta lo llevó a entablar vínculos académicos con Abraham Robinson quien por aquel entonces desarrollaba el análisis no estándar sobre la base del teorema de Compacidad. En ese tiempo Zubieta disfrutaba de una beca Guggenheim.

Cuando Gonzalo Zubieta regresó a México en 1963, en el medio matemático mexicano, nadie más conocía el tema de su interés, la lógica matemática. Además, por aquel entonces se consideraba que el tema era algo raro y de una dificultad excesiva, y en la carrera de matemáticas la lógica era un área optativa a la cual no se acercaban muchos estudiantes. Así, después de haber trabajado con varios de los lógicos más importantes del siglo XX, Zubieta decidió dedicarse al análisis matemático, otra área de su interés,

[2] Mathematical Logic.

[3] Sobre el cálculo funcional de primer orden, tesis por Gonzalo Zubieta Russi. Facultad de Ciencias, UNAM 1950.

[4] Church había dirigido la tesis doctoral del mexicano Enrique Bustamante Llaca, quien a su regreso a México trabajó en el Banco de México.

[5] Introduction to Mathematical Logic, Part I, Alonzo Church, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1944.

[6] Para más información sobre Church, véase Alonzo Church: His Life, His Work and Some of His Miracles, María Manzano, History and Philosophy of Logic 18, 1997 (211–232).

donde logró también importantes resultados.[7] Entre sus trabajos destaca uno sobre integrales de medida positiva.[8]

La otra faceta del maestro Zubieta, la de profesor, lo llevo a desarrollar sus ideas docentes no sólo en la Facultad de Ciencias de la UNAM, sino también en la Universidad Veracruzana, en la de Sinaloa, en la escuela Nacional Preparatoria, en el CCH y otras instituciones. Una de sus convicciones es que el estudio de cualquier disciplina matemática será más provechoso y ameno para los estudiantes cuando se les ha proporcionado el material necesario sobre técnicas de orden lógico, de manejo del lenguaje matemático y de los métodos de demostración.[9]

En sus estudiantes busca el compromiso serio con el tema, para lo cual vuelca su esfuerzo y experiencia en lograr que el alumno *evolucione y cambie de actitud para embarcarse en la materia*. En la Facultad de Ciencias enseña lógica a los estudiantes de primer ingreso, no como una teoría sino como un *quehacer*. Al respecto ha desarrollado un método de análisis lógico que expone admirablemente bien en un libro denominado *Taller de lógica*,[10] en el que combina la silogística aristotélica y la demostración matemática formal basada en el método axiomático.

Más allá del trabajo con los alumnos, el maestro Zubieta ha dirigido varias tesis y ha impartido una gran cantidad de cursos, talleres de didáctica y conferencias para profesores. La culminación de tan admirable labor docente es este libro sobre Lógica Deductiva, en el que recoge su enorme experiencia docente, poniéndola a disposición de todo aquel que desee adentrarse en el arte de transmitir las bases del razonamiento escrupuloso a los jóvenes. Quienes conocemos al maestro Zubieta desde tiempo atrás no podemos sino regocijarnos con su publicación y decir, como complemento a lo dicho por Church, que Gonzalo Zubieta no sólo escribe con rigor sino con claridad y asombrosa simplicidad.

Carlos Torres y José Alfredo Amor

[7] Differential notation for set functions, Anales del I. M. 1, 1961 (67–81).

[8] Integrales de medida positiva, Monografía No.3 del I.M. 1976 (157p.).

[9] Manual de lógica para estudiantes de matemáticas, Gonzalo Zubieta Russi, Trillas, 1968.

[10] Taller de Lógica Matemática (Análisis Lógico), Gonzalo Zubieta, McGraw Hill, 1993.

ÍNDICE DE MATERIAS

Capítulo I

EJEMPLOS COTIDIANOS

En toda condicional, la parte comprendida entre el **si** y el **entonces** se llama **hipótesis**. La parte que está después del **entonces** se llama **tesis**. Para negar una condicional se afirma la hipótesis y se niega la tesis. Ejemplos de condicionales:

Si x es socio de y entonces x cumple.
Si x no cumple entonces x no es socio de y.

Negaciones

x es socio de y y x no cumple.
x no cumple y x es socio de y.

Dos proposiciones que tienen la misma negación se llaman **giros**, la una de la otra. Así, las condiconales anteriores son giros, la una de la otra, porque tienen la misma negación, salvo por el orden.
Por definición, el que es **veraz** siempre dice la verdad, el que es **mitómano** siempre miente, y el que no es veraz ni mitómano es **normal**. Toda persona es veraz o mitómano o normal, pero sólo una de estas tres cosas.

Axiomas

Si x es veraz, y x dice que sucede tal cosa, entonces sucede tal cosa.
Definición de veraz

Si x es mitómano, y x dice que sucede tal cosa, entonces no sucede tal cosa.
Definición de mitómano

Estos axiomas son **válidos por definición**.

* 1 Demostración indirecta

Demostración indirecta de un enunciado es cualquier deducción que parte de su negación y termina en contradicción.

Ejemplos

A dice que B es veraz.
B dice que A es mitómano. **Datos**

***B* no es veraz:** Afirmación a demostrar

(1). B es veraz Negación
(2) B dice que A es mitómano Dato
(3) A es mitómano (1)(2) Definición de veraz
(4) A dice que B es veraz Dato
(5). B no es veraz (3)(4) Definición de mitómano

Se marcan con punto los pasos que se contradicen. Los **datos** son válidos por definición, luego son axiomas.

Si *B* es mitómano entonces A es normal:

(1) B es mitómano y A no es normal Negación
(2). B es mitómano (1) Descendente
(3) B dice que A es mitómano Dato
(4) A no es mitómano (2)(3) Def de mitómano
(5) A no es normal (1) Descendente
(6) A es veraz (4)(5) Def común
(7) A dice que B es veraz Dato
(8) B es veraz (6)(7) Def de veraz
(9). B no es mitómano (8) Def común

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.

2. Con los mismos datos demuestre que A no es veraz, y que si A es mitómano entonces B es normal.

Repertorio sobre veraces y mitómanos:

A dice que B es normal. B dice que A es normal.
Si A es mitómano entonces B es mitómano.
Si A no es mitómano entonces B no es mitómano:

A dice que B es normal. B dice que A no es normal.
Si A es mitómano entonces B es veraz.
Si A no es mitómano entonces B no es veraz:

A dice que B es veraz. B dice que A es normal.
A no es veraz. Si B es mitómano entonces A es mitómano:

A dice que B es mitómano. B dice que A no es normal.
A no es veraz. Si B es veraz entonces A es mitómano:

A dice que B es mitómano. B dice que A es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es mitómano entonces A es veraz:

A dice que B es veraz. B dice que A no es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es veraz entonces A es veraz:

A dice que B es mitómano. B dice que A no es mitómano.
A no es veraz. Si A es mitómano entonces B es normal.
B no es mitómano. Si B es veraz entonces A es normal.

3. Demuestre las afirmaciones del segundo grupo de este repertorio.
4. Demuestre las afirmaciones del cuarto grupo.
5. Demuestre las afirmaciones del sexto grupo.

* 2 Esquema deductivo

Deducción formal de P es una cadena $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de proposiciones, llamadas **pasos**, tales que P_n es P, y cada paso es un axioma o algo demostrado antes, o se infiere de pasos anteriores mediante un axioma o algo demostrado antes.

Son **axiomas ordinarios** las proposiciones que integran alguna definición implícita. Estos axiomas son **válidos por su contenido**.

Son **axiomas lógicos** los modos descendentes, los modos hipotéticos, las condicionales que van de una frase a su traducción, las que van de una frase a su giro, y las disyunciones de la forma P o no P. Tales axiomas son **válidos por su forma**.

Sólo se usarán cinco **modos descendentes**: de lo idéntico, de la conjunción a la parte, de la parte a la disyunción, de lo general a lo particular, y de lo específico a lo inespecífico. **Ejemplos**:

De lo idéntico:

Si x es socio de y entonces x es socio de y.

De la conjunción a la parte:

Si x es socio de y y y cumple entonces y cumple.

De la parte a la disyunción:

Si x llega hoy entonces x llega hoy o x llega mañana.

De lo general a lo particular:

Si, para todo x,	si x depende de y entonces x cumple,
entonces,	si y depende de y entonces y cumple.

En este ejemplo, lo que la hipótesis dice de todo x la tesis lo dice de y. Obsérvese la colocación dada a la tesis.

De lo específico a lo inespecífico:

Si x es socio de y y x no cumple
entonces existe z tal que
z es socio de y y z no cumple.

Aquí, lo que la hipótesis dice de x la tesis lo dice de algún z, sin especificar. Nótese la colocación de la tesis.

Sólo se usarán tres **modos hipotéticos**: reducción **por exclusión**, reducción **por contradicción**, y reducción **por casos**. Ejemplos:

Si P o Q,
y no P,
entonces Q. **Por exclusión**

Si, si P entonces Q,
y, si P entonces no Q,
entonces no P. **Por contradicción**

Si P o Q,
y, si P entonces R,
y, si Q entonces R,
entonces R. **Por casos**

EJERCICIO

Reproduzca esta sección en su totalidad.

* 3 Demostración directa

Demostración directa de una condicional es una deducción que parte de la hipótesis, en calidad de dato, y termina en la tesis. **Ejemplos**:

Si algún mago es poeta
y todo mago es actor
entonces algún actor es poeta: Disamis

(1) Algún mago es poeta Hipótesis
(2) Existe x tal que x es mago y x es poeta (1) Traducción
(3) F es mago y F es poeta Definición de F
(4) Todo mago es actor Hipótesis
(5) Para todo x, si x es mago entonces x es actor (4) Traducción
(6) Si F es mago entonces F es actor (5) De lo general
(7) F es mago (3) De la conjunción
(8) F es actor (7) por (6)
(9) F es poeta (3) De la conjunción
(10) F es actor y F es poeta (8)(9) De lo idéntico
(11) Existe x tal que x es actor y x es poeta (10) De lo específico
(12) Algún actor es poeta (11) Traducción

En esta demostración los pasos (1) y (4) son las partes de la hipótesis. El paso (3) consiste en **ponerle nombre** a lo mencionado por (2). Los pasos restantes se infieren de pasos anteriores.

Si ningún pasante es invitado
y algún alumno es invitado
entonces algún alumno no es pasante: Festino

(1)	Ningún pasante es invitado	Hpt
(2)	Para todo x, si x es pasante entonces x no es invitado	(1) Trad
(3)	Algún alumno es invitado	Hpt
(4)	Existe x tal que x es alumno y x es invitado	(3) Trad
(5)	y es alumno y y es invitado	Def de y
(6)	Si y es pasante entonces y no es invitado	(2) De lo gral
(7)	y es invitado	(5) De la conj
(8)	Si y es invitado entonces y no es pasante	(6) Giro
(9)	y no es pasante	(7) Por (8)
(10)	y es alumno	(5) De la conj
(11)	y es alumno y y no es pasante	(10)(9) De lo idént
(12)	Existe x tal que x es alumno y x no es pasante	(11) De lo esp
(13)	Algún alumno no es pasante	(12) Trad

Para girar una condicional se intercambian la hipótesis y la tesis, y se niegan ambas. Al traducir algún, o ningún, nótese que algún es existencial y que ningún es universal.

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores y practíquelas hasta poder repetirlas sin el modelo a la vista.

Repertorio de silogismos. Primera parte:

Si todo M es B
y alg A es M
ent alg A es B **Darii**

Si ning M es B
y alg A es M
ent alg A no es B **Ferio**

Si ning B es M
y alg A es M
ent alg A no es B **Festino**

Si todo B es M
y alg A no es M
ent alg A no es B **Baroco**

Si alg M es B
y todo M es A
ent alg A es B **Disamis**

Si todo M es B
y alg M es A
ent alg A es B **Datisi**

Si alg M no es B
y todo M es A
ent alg A no es B **Bocardo**

Si ning M es B
y alg M es A
ent alg A no es B **Ferison**

Si alg B es M
y todo M es A
ent alg A es B **Dimatis**

Si ning B es M
y alg M es A
ent alg A no es B **Fresiso**

2. Demuestre dos de estos silogismos, dándole valores de A, M y B, tomados de la siguiente tabla:

actor	avaro	apóstol	árabe	aviador	alumno
mago	socio	mártir	moro	marino	invitado
poeta	pobre	beato	beduino	buzo	pasante

* 4 Otros ejemplos

Si ningún mártir es beato
y todo apóstol es mártir
entonces ningún apóstol es beato: Celarent

(1) Ning mártir es beato Hpt
(2) Para todo x, si x es mártir ent x no es beato (1) Trad
(3) Todo apóstol es mártir Hpt
(4) Para todo x, si x es apóstol ent x es mártir (3) Trad
(5) Para todo y, si y es apóstol ent y no es beato:
  (a) y es apóstol Hpt
  (b) Si y es apóstol ent y es mártir (4) De lo gral
  (c) y es mártir (a) Por (b)
  (d) Si y es mártir ent y no es beato (2) De lo gral
  (e) y no es beato (c) Por (d)
(6) Ning apóstol es beato (5) Trad

Aquí el paso (5) se demuestra sobre la marcha.

Si todo pobre es socio
y ningún avaro es socio
entonces ningún avaro es pobre: Camestres

(1) Todo pobre es socio Hpt
(2) Para todo x, si x es pobre ent x es socio (1) Trad
(3) Ning avaro es socio Hpt
(4) Para todo x, si x es avaro ent x no es socio (3) Trad
(5) Para todo y, si y es avaro ent y no es pobre:
 (a) y es avaro Hpt
 (b) Si y es avaro ent y no es socio (4) De lo gral
 (c) y no es socio (a) Por (b)
 (d) Si y es pobre ent y es socio (2) De lo gral
 (e) Si y no es socio ent y no es pobre (d) Giro
 (f) y no es pobre (c) Por (e)
(6) Ning avaro es pobre (5) Trad

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.

Repertorio de silogismos. Segunda parte:

Si todo M es B
y todo A es M
ent todo A es B **Barbara**

Si ning M es B
y todo A es M
ent ning A es B **Celarent**

Si ning B es M
y todo A es M
ent ning A es B **Cesare**

Si todo B es M
y ning A es M
ent ning A es B **Camestres**

Si todo B es M
y ning M es A
ent ning A es B **Camenes**

2. Demuestre dos de estos silogismos, dándole valores a A, M y B.

5 Hipótesis adicional

Los siguientes silogismos requieren de una **hipótesis adicional** para su demostración.

Si todo M es B y todo M es A ent alg A es B	**Darapti**	Si todo B es M y todo M es A ent alg A es B	**Bamalip**
Si ning M es B y todo M es A ent alg A no es B	**Felapton**	Si ning B es M y todo M es A ent alg A no es B	**Fesapo**

Ejemplo

Si ningún marino es buzo
y todo marino es aviador
entonces algún aviador no es buzo: Felapton

(1)	Ning marino es buzo	Hpt
(2)	Para todo x, si x es marino ent x no es buzo	(1) Trad
(3)	Todo marino es aviador	Hpt
(4)	Para todo x, si x es marino ent x es aviador	(3) Trad
(5)	Existe x tal que x es marino	Hpt adicional
(6)	y es marino	Def de y
(7)	Si y es marino ent y es aviador	(4) De lo gral
(8)	y es aviador	(6) Por (7)
(9)	Si y es marino ent y no es buzo	(2) De lo gral
(10)	y no es buzo	(6) Por (9)
(11)	y es aviador y y no es buzo	(8)(10) De lo ident
(12)	Existe x tal que x es aviador y x no es buzo	(11) Desc
(13)	Algún aviador no es buzo	(12) Trad

Los silogismos categóricos suelen agruparse según su **figura**, como sigue:

1ª fig	2ª fig	3ª fig	4ª fig
MB	BM	MB	BM
AM	AM	MA	MA
AB	AB	AB	AB
Barbara	Cesare	Darapti	Bamalip
Celarent	Camestres	Felapton	Camenes
Darii	Festino	Disamis	Dimatis
Ferio	Baroco	Datisi	Fesapo
Barbari	Cesaro	Bocardo	Fresiso
Celaront	Camestros	Ferison	Camenos

El **término menor** A es el sujeto de la conclusión, el **término mayor** B es el predicado de la conclusión, y el **término medio** M no aparece en la conclusión. La **premisa menor** es la que contiene al término menor A y al término medio. La **premisa mayor** es la que contiene al término mayor B y al término medio.
El silogismo **Felapton** es de la tercera figura y del **modo** *eao*: premisa mayor e (**universal negativa**), premisa menor a (**universal afirmativa**) y conclusión o (**particular negativa**). Compruébelo.
Los silogismos Barbari, Celaront, Cesaro, Camestros y Camenos también requieren de una hipótesis adicional. Barbari empieza como Bárbara, pero su conclusión es i (**particular afirmativa**).

EJERCICIOS

1. Demuestre Darapti y Fesapo.
2. Demuestre Barbari y Camestros.
3. Demuestre Bamalip y Camenos.

6 Traducciones

En las demostraciones formales, cada inferencia debe basarse en el texto de una definición, o en un modo descendente, o en un modo hipotético. También puede basarse en un giro o en una traducción. Las traducciones más usuales son las que se exhiben a continuación.

(a) Todo pasa por y
(a') Para todo x, x pasa por y

(b) Todo camino pasa por y
(b') Para todo x, si x es camino entonces x pasa por y

(c) Algo pasa por y
(c') Existe x tal que x pasa por y

(d) Algún camino pasa por y
(d') Existe x tal que x es camino y x para por y

(e) x pasa por todo
(e') Para todo y, x pasa por y

(f) x pasa por todo punto
(f') Para todo y, si y es punto entonces x pasa por y

(g) x pasa por algo
(g') Existe y tal que x pasa por y

(h) x pasa por algún punto
(h') Existe y tal que y es punto y x pasa por y

(i) Nada pasa por y
(i') Para todo x, x no pasa por y

(j) Ningún camino pasa por y
(j') Para todo x, si x es camino entonces x no pasa por y

EJERCICIOS

1. Practique las diez traducciones anteriores, oralmente y por escrito, atendiendo al uso de las comas.

2. Reproduzca las siguientes traducciones:

(a) Todo socio de x es socio de y
(a') Para todo z, si z es socio de x entonces z es socio de y

(b) Algún socio de x es socio de y
(b') Existe z tal que z es socio de x y z es socio de y

(c) x es socio de todo socio de y
(c') Para todo z, si z es socio de y entonces x es socio de z

(d) x es socio de algún socio de y
(d') Existe z tal que z es socio de y y x es socio de z

3. Reproduzca las siguientes traducciones:

(a) x trabaja si y paga
(a') Si y paga entonces x trabaja

(b) x trabaja sólo si y paga
(b') Si y no paga entonces x no trabaja

(c) Sólo x trabaja para y
(c') El que no es x no trabajo para y
(c") Para todo z, si z no es x ent z no trabaja para y

(d) x sólo trabaja para y
(d') x no trabaja para el que no es y
(d") Para todo z, si z no es y ent x no trabaja para z

7 Paradojas

Paradoja es una afirmación contraria a la opinión común, cuya validez sólo se explica mediante una demostración formal.

Ejemplos

Si x paga por todos, y sólo y paga por x, entonces x es y:

(1) x paga por todos Hpt
(2) Para todo z, x paga por z (1) Trad
(3) Sólo y paga por x Hpt
(4) El que no es y no paga por x (3) Trad
(5) Para todo z, si z no es y ent z no paga por x (4) Trad
(6) Si x no es y ent x no paga por x (5) De lo gral
(7) x paga por x (2) De lo gral

(8) Si x paga por x ent x es y (6) Giro
(9) x es y (7) Por (8)

Si x paga por todo socio, y ningún socio paga por y, entonces, si x es socio entonces y no es socio:

(1) x paga por todo socio Hpt
(2) Para todo z, si z es socio ent x paga por z (1) Trad
(3) Ningún socio paga por y Hpt
(4) Para todo z, si z es socio ent z no paga por y (3) Trad
(5) Si x es socio ent y no es socio:

- (a) x es socio Hpt
- (b) Si x es socio ent x no paga por y (4) De lo gral
- (c) x no paga por y (a) Por (b)
- (d) Si y es socio ent x paga por y (2) De lo gral
- (e) Si x no paga por y ent y no es socio (d) Giro
- (f) y no es socio (c) Por (e)

EJERCICIO

Demuestre, de dos en dos, las paradojas siguientes:

Repertorio de paradojas:

Si x paga por todos, y sólo y paga por x, entonces x es y.
Si todos pagan por x, y x sólo paga por y, entonces x es y.

Si x aprende de todos, y ningún novato aprende de x, entonces x no es novato.
Si nadie aprende de x, y x aprende de todo novato, entonces x no es novato.

Si x paga por todo socio, y sólo y paga por x, entonces, si x es socio entonces x es y.
Si todo socio paga por x, y x sólo paga por y, entonces, si x es socio entonces x es y.

Si x aprende de todo socio, y ningún novato aprende de x, entonces, si x es socio entonces x no es novato.
Si ningún socio aprende de x, y x aprende de todo novato, entonces, si x es socio entonces x no es novato.

Si x paga por todo socio, y ningún socio paga por y, entonces, si x es socio entonces y no es socio.
Si ningún socio paga por x, y y paga por todo socio, entonces, si x es socio entonces y no es socio.

Si x paga por todo socio, y ningún novato paga por y, entonces, si x es novato entonces y no es socio.

Si ningún socio paga por x, y y paga por todo novato, entonces, si x es novato entonces y no es socio.

* 8 Negaciones

Como negación de una proposición se toma cualquier proposición que afirme lo contrario de ella. Ejemplos:

(a) Si x es socio de y entonces x cumple.
(a') x es socio de y y x no cumple.

(b) x es hermano de y y x es menor que y.
(b') Si x es hermano de y entonces x no es menor que y.

(c) x llega hoy o x llega mañana.
(c') x no llega hoy y x no llega mañana.

(d) x no llega hoy.
(d') x llega hoy.

(e) Para todo x, x es socio de y.
(e') Existe x tal que x no es socio de y.

(f) Existe x tal que x es hijo de y.
(f') Para todo x, x no es hijo de y.

Según los ejemplos anteriores, la negación de una condicional es la conjunción de la hipótesis y la negación de la tesis, la negación de una conjunción es la condicional que va de la primera parte a la negación de la segunda parte, la negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de las partes, la negación de una negación es la afirmación de la parte, la negación de una cuantificación universal es la cuantificación existencial de la negación de la parte, la negación de una cuantificación existencial es la cuantificación universal de la negación de la parte.

EJERCICIOS

1. Reproduzca los seis ejemplos anteriores.
2. Niegue:

(a) Para todo x, x depende de y
(b) Para todo x, si x es socio entonces x depende de y
(c) Existe x tal que x depende de y
(d) Existe x tal que x es socio y x depende de y
(e) Para todo y, x depende de y
(f) Para todo y, si y es socio entonces x depende de y
(g) Existe y tal que x depende de y
(h) Existe y tal que y es socio y x depende de y
(i) Para todo x, x no depende de y
(j) Para todo x, si x es socio entonces x no depende de y

3. Mediante traducción y negación demuestre que (a1) es giro de (a2), (b1) es giro de (b2) y (c1) es giro de (c2):

(a1) Lo que pesa no flota
(a2) Lo que flota no pesa

(b1) Lo que no sirve estorba
(b2) Lo que no estorba sirve

(c1) El que estudia aprende
(c2) El que no aprende no estudia

4. **Cuadro aristotélico de oposición:**

$$\begin{tikzcd}
\text{Todo } A \text{ es } B \arrow[dr, leftrightarrow] & \text{Algún } A \text{ es } B \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\text{Ning } A \text{ es } B & \text{Algún } A \text{ no es } B
\end{tikzcd}$$

compruebe oralmente, mediante traducción, que cada flecha conduce de una proposición a su negación.

9 Definiciones

Llámanse axiomas ordinarios las proposiciones que integran una definición implícita. He aquí una definición implícita de los términos veraz, mitómano y normal, integrada por seis axiomas:

I. Si x es veraz, y x dice que sucede tal cosa,
entonces sucede tal cosa.

II. Si x es mitómano, y x dice que sucede tal cosa,
entonces no sucede tal cosa.

III. Si x es veraz entonces x no es mitómano.
Si x es mitómano entonces x no es normal.
Si x es normal entonces x no es veraz.

IV. x es veraz o x es mitómano o x es normal.

Según estos axiomas, el que es veraz siempre dice la verdad, el que es mitómano siempre miente, y el que no es veraz ni mitómano es normal.
Cualquier giro de axioma se acepta también como axioma. A continuación aparecen girados los axiomas anteriores.

I'. Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa,
entonces x no es veraz.

II'. Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa,
entonces x no es mitómano.

III'. Si x es mitómano entonces x no es veraz.
Si x es normal entonces x no es mitómano.
Si x es veraz entonces x no es normal.

IV'. Si x no es veraz y x no es mitómano entonces x es normal.

IV". Si x no es veraz entonces x es mitómano o x es normal.

Según I, girado, el que dice alguna mentira no es veraz.
Según II, girado, el que dice alguna verdad no es mitómano.

EJERCICIOS

1. Reproduzca los seis axiomas.

2. Reproduzca los siete giros.

3. Escribe la negación de cada axioma, seguida de la negación del giro correspondiente.

4. Como definición implícita del término **hermano** se ofrecen los tres axiomas siguientes:

x no es hermano de x.
Si x es hermano de y entonces existe z tal que x es hijo de z y y es hijo de z.
Si x es hijo de t y y es hijo de t entonces x es hermano de y, o x es y.

Reproduzca estos axiomas.

* 10 Demostración por casos

Axiomas girados

Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa, entonces x no es veraz.
Def de veraz, girada

Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa, entonces x no es mitómano.
Def de mitómano, girada

Las afirmaciones sobre veraces y mitómanos, que fueron demostradas indirectamente en el apartado 1, pueden demostrarse directamente, **por casos** o **por exclusión**.

Ejemplos

A dice que B es veraz.
B dice que A es mitómano. Datos

***B* no es veraz:**

(1) B dice que A es mitómano Dato
(2) A es mitómano o A no es mitómano Axioma
(3) Si A es mitómano ent B no es veraz:
  (a) A es mitómano Hpt
  (b) A dice que B es veraz dato
  (c) B no es veraz (a)(b) Def de mit
(4) Si A no es mitómano ent B no es veraz:
  (a) A no es mitómano Hpt
  (b) B dice que A es mitómano Dato
  (c) B no es veraz (b)(a) Def de veraz, girada
(5) B no es veraz (2)(3)(4) Por casos

Si *B* es mitómano entonces *A* es normal:

(1) B es mitómano Hpt
(2) B dice que A es mitómano Dato
(3) A no es mitómano (1)(2) Def de mit
(4) A es veraz o A es normal (3) Def común

(5) A no es veraz:

(a) A dice que B es veraz   Dato
(b) B no es veraz   (1) Def común
(c) A no es veraz   (a)(b) Def de veraz, girada

(6) A es normal   (4)(5) Por exclusión

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.

2. A partir de los mismos datos, demuestre directamente que A no es veraz y que si A es mitómano entonces B es normal.

3. Demuestre directamente las afirmaciones del primer grupo del repertorio sobre veraces y mitómanos.

4. Demuestre directamente las afirmaciones del tercer grupo del repertorio sobre veraces y mitómanos.

11 Paradojas célebres

Paradoja del mentiroso Epiménides. Siglo VI, a.J.

Si x es cretense
y x dice que todo cretense es mitómano
entonces no todo cretense es mitómano:

(1) x es cretense
(2) x dice que todo cretense es mitómano   Hpt
(3) x es mitómano o x no es mitómano   Axioma
(4) Si x es mitómano ent no todo cretense es mitómano:

(a) x es mitómano   Hpt
(b) x dice que todo cretense es mitómano   (2) De lo ident
(c) No todo cretense es mitómano   (a)(b) Def de mit

(5) Si x no es mitómano ent no todo cretense es mitómano:

(a) x no es mitómano Hpt
(b) x es cretense y x no es mitómano (1)(a) De lo ident
(c) Existe y tal que y es cretense y y no es mitómano (b)
(d) Alg cretense no es mitómano (c) Trad
(e) No todo cretense es mitómano (d) Giro

(6) No todo cretense es mitómano (3)(4)(5) Por casos

Paradoja del barbero Bertrand Russell. 1872–1970

No existe x tal que, para todo y,
x rasura a y si, y sólo si, y no rasura a y:

(1) Existe x tal que, para todo y,
x rasura a y ssi y no rasura a y Neg
(2) Para todo y, B rasura a y
ssi y no rasura a y Def de B
(3) B rasura a B ssi B no rasura a B (2) De lo gral
(4) B rasura a B si B no rasura a B
(5) B rasura a B sólo si B no rasura a B (3) De la conj
(6). B rasura a B:

(a) B rasura a B o B no rasura a B Axioma
(b) Si B rasura a B ent B rasura a B Axioma
(c) Si B no rasura a B ent B rasura a B (4) Trad
(d) B rasura a B (a)(b)(c) Por casos

(7). B no rasura a B:

(a) B rasura a B o B no rasura a B Axioma
(b) Si B rasura a B ent B no rasura a B (5) Trad
(c) Si B no rasura a B ent B no rasura a B Axioma
(d) B no rasura a B (a)(b)(c) Por casos

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.
2. Si x es hermano de todo hermano de y entonces x no es hermano de y:

(1)	x es hno de todo hno de y	Hpt
(2)	Para todo z, si z es hno de y ent x es hno de z	(1) Trad
(3)	Si x es hno de y ent x es hno de x	(2) De lo gral
(4)	x no es hno de x	Def de hno
(5)	Si x no es hno de x ent x no es hno de y	(3) Giro
(6)	x no es hno de y	(4) Por (5)

Reproduzca esta demostración.

¿Cuándo x es hermano de todo hermano de y? Cuando el padre de x se casa con la madre de y, y de ese matrimonio nacen todos los hermanos que tiene y. También cuando x es y.

* 12 Definición de igualdad

Se dice que $x =$ y si, y sólo si, x y y son el mismo objeto. La negación de esta fórmula es $x \neq y$, es decir, x **es diferente de** y.

Leyes de la igualdad

$x = x$. **Reflexiva**
Si $x = y$ entonces $y = x$. **Simétrica**
Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$. **Transitiva**
Si $x = y$ entonces peso de $x =$ peso de y. **De monotonía**
Si x es hermano de y, $x = x'$, y $y = y'$, entonces x' es hermano de y'.
De sustitución

Estas leyes son válidas por definición: Son axiomas.
Según la **ley de monotonía**, dadas dos cosas iguales, al aplicarles la misma operación los resultados son iguales.
Según la **ley de sustitución**, se pasa de la hipótesis a la tesis sustituyendo iguales por iguales en la **proposición de base**. La proposición de base es una parte de la hipótesis que se parece a la tesis. La hipótesis consta de la proposición de base en conjunción con ciertas **igualdades anexas**.
A continuación se repite el ejemplo anterior, subrayando en la proposición de base lo que se sustituye:
Si $\underline{\boldsymbol{x}}$ es hermano de $\underline{\boldsymbol{y}}$, $x = x'$, y $y = y'$, entonces x' es hermano de y'.

EJERCICIOS

1. Si x fuma y y no fuma entonces $x \neq y$:

(1) x fuma y y no fuma y $x = y$ Neg
(2) x fuma (1) De la conj
(3) $x = y$ (1) De la conj
(4). y fuma (2)(3) Def de =
(5). y no fuma (1) De la conj

Reproduzca esta demostración. Escriba aparte la condicional de (2) y (3) a (4). Marque la proposición de base.

2. Si x es veraz y y es mitómano entonces $x \neq y$:

(1) x es veraz y y es mitómano y $x = y$ Neg
(2) x es veraz (1) De la conj
(3) $x = y$ (1) De la conj
(4). y es veraz (2)(3) Def de =
(5) y es mitómano (1) De la conj
(6). y no es veraz (5) Def común

Escriba la condicional de (2) y (3) a (4). Subraye en la proposición de base lo que se sustituye.

3. Si x es hermano de y entonces $x \neq y$:

(1) x es hno de y y $x = y$ Neg
(2). y es hno de y (1) Def de =
(3). y no es hno de y Def de hno

Escriba la condicional de (1) a (2). Subraye en la proposición de base lo que se sustituye.

4. Si x es diferente de todo socio de y entonces x no es socio de y:

Capítulo II

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El álgebra de conjuntos versa sobre las operaciones de unión, intersección, resta y producto cartesiano.
Al igual que en el primer capítulo, cada resultado se demuestra aquí por cuenta propia, a partir de los axiomas, sin tener que recurrir a resultados anteriores.
En este sentido el segundo capítulo viene a ser prolongación del primero, y constituye una oportunidad para reafirmar los hábitos adquiridos en el primer capítulo.

* 13 Conjuntos

Se hablará de **conjuntos** $A, B, C, \ldots$ y de sus **elementos** $x, y, z, \ldots$ Se escribe $x \in A$ en lugar de cualquiera de las frases siguientes:

x está en A,
x pertenece a A,
x es elemento de A.

Se dice que A **está contenido** en B, o que A **es subconjunto de** B, en símbolos $A \subset B$, si y sólo si todo elemento de A es elemento de B.

Propiedades

$\boldsymbol{A \subset A}$ **:** Reflexiva

(1) Para todo x, si $x \in A$ ent $x \in A$:

(a) $x \in A$ Hpt
(b) $x \in A$ (a) Desc

(2) Todo elm de A es elm de A (1) Trad
(3) $A \subset A$ (2) Def de $\subset$

Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$: Transitiva

(1) $A \subset B$ Hpt
(2) Todo elm de A es elm de B (1) Def de $\subset$
(3) Para todo x, si $x \in A$ ent $x \in B$ (2) Trad
(4) $B \subset C$ Hpt
(5) Todo elm de B es elm de C (4) Def de $\subset$
(6) Para todo x, si $x \in B$ ent $x \in C$ (2) Trad
(7) Para todo y, si $y \in A$ ent $y \in C$:
   (a) $y \in A$ Hpt
   (b) Si $y \in A$ ent $y \in B$ (3) Desc
   (c) $y \in B$ (a) Por (b)
   (d) Si $y \in B$ ent $y \in C$ (6) Desc
   (e) $y \in C$ (c) Por (d)
(8) Todo elm de A es elm de C (7) Trad
(9) $A \subset C$ (8) Def de $\subset$

Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$. Axioma de igualdad

Según este axioma, si todo elemento de A es elemento de B, y todo elemento de B es elemento de A, entonces $A = B$. Esto significa que un conjunto se conoce por sus elementos.
Se definen el **vacío**, **$\emptyset$**, **intersecar** y **ajenidad**, como sigue:
No existe x tal que $x \in \emptyset$. **Def de $\emptyset$**
A interseca a B ssi algún elm de A es elm de B. **Def**
A es ajeno a B ssi ningún elm de A es elm de B. **Def**

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.
2. Para todo B, $\emptyset \subset B$:
3. Si $x \in A$ y $x \in B$ entonces A interseca a B.
4. Si A es ajeno a B y $x \in A$ entonces $x \notin B$:
5. Si A es ajeno a B y $x \in B$ entonces $x \notin A$:

* 14 Unión e intersección

Se definen la **unión** $\boldsymbol{A \cup B}$, y la **intersección** $\boldsymbol{A \cap B}$, mediante los siguientes axiomas:
$x \in A \cup B$ si, y sólo si, $x \in A$ o $x \in B$. Def de $\cup$
$x \in A \cap B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $x \in B$. Def de $\cap$

Propiedades algebraicas

$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$ **Conmutativas**

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ **Asociativas**

$A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$
$A \cup (B_1 \cap B_2) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$ **Distributivas**

Cada igualdad se descompone en dos inclusiones, las cuales se demuestran a partir de los axiomas.

Ejemplos

$\boldsymbol{(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)}$**:**

(1) Para todo x, si $x \in (A \cap B) \cap C$ ent $x \in A \cap (B \cap C)$**:**

(a) $x \in (A \cap B) \cap C$ Hpt
b) $x \in A \cap B$ y $x \in C$ (a) Def de $\cap$
c) $x \in A \cap B$
d) $x \in C$ (b) Desc
e) $x \in A$ y $x \in B$ (c) Def de $\cap$
f) $x \in A$
g) $x \in B$ (e) Desc
h) $x \in B$ y $x \in C$ (g)(d) Desc
i) $x \in B \cap C$ (h) Def de $\cap$
j) $x \in A$ y $x \in B \cap C$ (f)(i) Desc
k) $x \in A \cap (B \cap C)$ (j) Def de $\subset$

(2) Todo elm de $(A \cap B) \cap C$ es elm de $A \cap (B \cap C)$ (1) Trad
(3) $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ (2) Def de $\subset$

$\boldsymbol{A \cup B \subset B \cup A}$**:**
Para todo x, si $x \in A \cup B$ entonces $x \in B \cup A$**:**

(1) $x \in A \cup B$ Hpt
(2) $x \in A$ o $x \in B$ (1) Def de $\cup$
(3) Si $x \in A$ ent $x \in B \cup A$:
  (a) $x \in A$ Hpt
  (b) $x \in B$ o $x \in A$ (a) Desc, de la parte a la disy
  (c) $x \in B \cup A$ (b) Def de $\cup$
(4) Si $x \in B$ ent $x \in B \cup A$:
  (a) $x \in B$ Hpt
  (b) $x \in B$ o $x \in A$ (a) Desc
  (c) $x \in B \cup A$ (b) Def de $\cup$
(5) $x \in B \cup A$ (2)(3)(4) Por casos

EJERCICIOS

1. $A \cap (B_1 \cup B_2) \subset (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$:
2. $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \subset A \cap (B_1 \cup B_2)$:
3. $A \cup (B_1 \cap B_2) \subset (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$:
4. $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \subset A \cup (B_1 \cap B_2)$:
5. $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$:

15 Diferencia

Axiomas

$x \in A - B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $x \notin B$. **Def de** $\boldsymbol{-}$

$x \notin A - B$ si, y sólo si, $x \notin A$ o $x \in B$. **Giro**

Propiedades

$(A - B) - C = A - (B \cup C)$,
$A - (A - B) = A \cap B$. **Restas iteradas**

$(A_1 \cup A_2) - B = (A_1 - B) \cup (A_2 - B)$,
$(A_1 \cap A_2) - B = (A_1 - B) \cap (A_2 - B)$. **Distributivas**

$A - (B_1 \cup B_2) = (A - B_1) \cap (A - B_2)$,
$A - (B_1 \cap B_2) = (A - B_1) \cup (A - B_2)$. **De de Morgan**

Ejemplos

$\boldsymbol{(A - B) - C \subset A - (B \cup C)}$**:**

Para todo x, si $x \in (A - B) - C$ entonces $x \in A - (B \cup C)$:

(1) $x \in (A - B) - C$ Hpt
(2) $x \in A - B$ y $x \notin C$ (1) Def de $-$
(3) $x \in A - B$
(4) $x \notin C$ (2) Desc
(5) $x \in A$ y $x \notin B$ (3) Def de $-$
(6) $x \in A$
(7) $x \notin B$ (5) Desc
(8) $x \notin B$ y $x \notin C$ (7)(4) Desc
(9) $x \notin B \cup C$ (8) Def de $\cup$, girada
(10) $x \in A$ y $x \notin B \cup C$ (6)(9) Desc
(11) $x \in A - (B \cup C)$ (10) Def de $-$

$\boldsymbol{A - (A - B) \subset A \cap B}$**:**

Para todo x, si $x \in A - (A - B)$ entonces $x \in A \cap B$:

(1) $x \in A - (A - B)$ Hpt
(2) $x \in A$ y $x \notin A - B$ (1) Def de $-$
(3) $x \in A$
(4) $x \notin A - B$ (2) Desc
(5) $x \notin A$ o $x \in B$ (3) Def de $-$, girada
(6) $x \in B$ (5)(3) Por exclusión
(7) $x \in A$ y $x \in B$ (3)(6) Desc
(8) $x \in A \cap B$ (10) Def de $\cap$

$\boldsymbol{A - (B_1 \cup B_2) \subset (A - B_1) \cap (A - B_2)}$**:**

Para todo x, si $x \in A - (B_1 \cup B_2)$ entonces $x \in (A - B_1) \cap (A - B_2)$:

(1)	$x \in A - (B_1 \cup B_2)$	Hpt
(2)	$x \in A$ y $x \notin B_1 \cup B_2$	(1) Def de $-$
(3)	$x \in A$	
(4)	$x \notin B_1 \cup B_2$	(2) Desc
(5)	$x \notin B_1$ y $x \notin B_2$	(4) Def de $\cup$, girada
(6)	$x \notin B_1$	
(7)	$x \notin B_2$	(5) Desc
(8)	$x \in A - B_1$	(3)(6)
(9)	$x \in A - B_2$	(3)(7) Def de $-$
(10)	$x \in (A - B_1) \cap (A - B_2)$	(8)(9) Def de $\cap$

EJERCICIOS

1. Reproduzca las tres demostraciones anteriores.
2. Demuestre las inclusiones inversas de las tres anteriores.
3. $A - (B_1 \cap B_2) = (A - B_1) \cup (A - B_2)$:
4. $A \cap (B_1 - B_2) = (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$:

16 Producto cartesiano

Por definición, el **producto cartesiano** $\boldsymbol{A \times B}$ es el conjunto de los pares (x, y) tales que $x \in A$ y $y \in B$.

Axiomas

$(x, y) \in A \times B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $y \in B$.	**Def de** $\times$
$(x, y) \notin A \times B$ si, y sólo si, $x \notin A$ o $y \notin B$.	**Giro**

Propiedades

$\boldsymbol{A \times (B_1 \cup B_2) \subset (A \times B_1) \cup (A \times B_2)}$**:**

Para todo (x, y), si $(x, y) \in A \times (B_1 \cup B_2)$ entonces $(x, y) \in (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$:

(1) $(x, y) \in A \times (B_1 \cup B_2)$ Hpt
(2) $x \in A$ y $y \in B_1 \cup B_2$ (1) Def de $\times$
(3) $x \in A$
(4) $y \in B_1 \cup B_2$ (2) Desc
(5) $y \in B_1$ o $y \in B_2$ (4) Def de $\cup$
(6) Si $y \in B_1$ ent $(x, y) \in (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$:
  (a) $y \in B_1$ Hpt
  (b) $x \in A$ y $y \in B_1$ (3)(a) Desc
  (c) $(x, y) \in A \times B_1$ (b) Def de $\times$
  (d) $(x, y) \in A \times B_1$ o $(x, y) \in A \times B_2$ (c) Desc
  (e) $(x, y) \in (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$ (d) Def de $\cup$
(7) Si $y \in B_2$ ent $(x, y) \in A \times B_2$:
  (a) $y \in B_2$ Hpt
  (b) $x \in A$ y $y \in B_2$ (3)(a)
  (c) $(x, y) \in A \times B_2$ (b) Def de $\times$
  (d) $(x, y) \in A \times B_1$ o $(x, y) \in A \times B_2$ (c) Desc
  (e) $(x, y) \in (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$ (d) Def de $\cup$
(8) $(x, y) \in (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$ (5)(6)(7) Por casos

$\boldsymbol{A \times (B_1 \cap B_2) \subset (A \times B_1) \cap (A \times B_2)}$**:**

Para todo (x, y), si $(x, y) \in A \times (B_1 \cap B_2)$ ent $(x, y) \in (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$:

(1) $(x, y) \in A \times (B_1 \cap B_2)$ Hpt
(2) $x \in A$ y $y \in B_1 \cap B_2$ (1) Def de $\times$
(3) $x \in A$
(4) $y \in B_1 \cap B_2$ (2) Desc
(5) $y \in B_1$ y $y \in B_2$ (4) Def de $\cap$
(6) $y \in B_1$
(7) $y \in B_2$ (5) Desc
(8) $x \in A$ y $y \in B_1$ (3)(6)
(9) $x \in A$ y $y \in B_2$ (3)(7) Desc
(10) $(x, y) \in A \times B_1$ (8)
(11) $(x, y) \in A \times B_2$ (9) Def de $\times$
(12) $(x, y) \in (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$ (10)(11) Def de $\cap$

EJERCICIOS

1. $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$:
2. $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$:
3. $A \times (B_1 - B_2) = (A \times B_1) - (A \times B_2)$:

17 Familias de conjuntos

Familia de conjuntos es un sistema $(A_i)_{i \in I}$ que a cada índice $i \in I$ le asocia un conjunto A_i.
Se definen la **unión** y la **intersección**, de una familia tal, como sigue:
$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ si, y sólo si, existe i tal que $i \in I$ y $x \in A_i$. **Def de $\bigcup$**
$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ si, y sólo si, para todo i, si $i \in I$ entonces $x \in A_i$. **Def de $\bigcap$**
Se escribe simplemente $\bigcup_i$, o bien $\bigcup$, cuando se sobreentiende que $i \in I$.

Propiedades

$\boldsymbol{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) - B \subset \bigcup_{i \in I} (A_i - B)}$**:**
Para todo x, si $x \in (\bigcup A_i) - B$ entonces $x \in \bigcup (A_i - B)$**:**

(1)	$x \in (\bigcup A_i) - B$	Hpt
(2)	$x \in \bigcup A_i$ y $x \notin B$	(1) Def de $-$
(3)	$x \in \bigcup A_i$	
(4)	$x \notin B$	(2) Desc
(5)	Existe i tal que $i \in I$ y $x \in A_i$	(3) Def de $\bigcup$
(6)	$i \in I$ y $x \in A_i$	Def de i
(7)	$i \in I$	
(8)	$x \in A_i$	(6) Desc
(9)	$x \in A_i$ y $x \notin B$	(8)(4) Desc
(10)	$x \in A_i - B$	(9) Def de $-$
(11)	$i \in I$ y $x \in A_i - B$	(7)(10) Desc
(12)	Existe i tal que $i \in I$ y $x \in A_i - B$	(11) Desc
(13)	$x \in \bigcup (A_i - B)$	(12) Def de $\bigcup$

$\boldsymbol{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - B \subset \bigcap_{i\in I}(A_i - B)}$**:**

Para todo x, si $x \in (\bigcap A_i) - B$ entonces $x \in \bigcap(A_i - B)$:

(1) $x \in (\bigcap A_i) - B$ Hpt
(2) $x \in \bigcap A_i$ y $x \notin B$ (1) Def de $-$
(3) $x \in \bigcap A_i$
(4) $x \notin B$ (2) Desc
(5) Para todo i, si $i \in I$ ent $x \in A_i$ (3) Def de $\bigcap$
(6) Para todo i, si $i \in I$ ent $x \in A_i - B$:
  (a) $i \in I$ Hpt
  (b) Si $i \in I$ ent $x \in A_i$ (5) Desc
  (c) $x \in A_i$ (a) Por (b)
  (d) $x \in A_i$ y $x \notin B$ (c)(4) Desc
  (e) $x \in A_i - B$ (d) Def de $-$
(7) $x \in \bigcap(A_i - B)$ (6) Def de $\bigcap$

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.

2. Demuestre las inclusiones inversas de las dos anteriores.

3. $A \cap \bigcup B_i \subset \bigcup(A \cap B_i)$:
4. $\bigcup(A \cap B_i) \subset A \cap \bigcup B_i$: **Distributiva**

5. $A \cup \bigcap B_i \subset \bigcap(A \cup B_i)$:
6. $\bigcap(A \cup B_i) \subset A \cup \bigcap B_i$: **Distributiva**

7. $A - \bigcap B_i = \bigcup(A - B_i)$:
8. $A - \bigcup B_i = \bigcap(A - B_i)$: **De de Morgan**

9. Si $I = \emptyset$ entonces no existe x tal que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$:

10. Si $I = \emptyset$ entonces, para todo x, $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$:

Capítulo III

FUNCIONES E IMAGEN

Se observará la frecuencia con que se usan aquí los axiomas de la igualdad. Esto se debe a que los conceptos de función, inyectividad, suprayectividad, e imagen directa, se definen en términos de la igualdad.
Se emplearán las frases **para todo $\boldsymbol{x \in A}$, existe $\boldsymbol{x \in A}$ tal que**, en contextos como los siguientes:

Para todo $x \in A$, $f(x) = y$.	**Forma abreviada**
Para todo x, si $x \in A$ entonces $f(x) = y$.	**Traducción**
Existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.	**Forma abreviada**
Existe x tal que $x \in A$ y $f(x) = y$.	**Traducción**

Se usarán los símbolos $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe), tlq (tal que), y $\exists!$ (existe un solo).

18 Funciones

Correspondencia es cualquier conjunto f de pares ordenados (x, y).

$x \in \operatorname{Dom} f$ si, y sólo si, existe t tal que $(x, t) \in f$.	**Def de dominio**
$y \in \operatorname{Crs} f$ si, y sólo si, existe t tal que $(t, y) \in f$.	**Def de curso**

Si $\boldsymbol{(x, y) \in f}$ entonces $\boldsymbol{x \in \mathrm{Dom}\, f}$ y $\boldsymbol{y \in \mathrm{Crs}\, f}$:

(1) $(x, y) \in f$ Hpt
(2) $\exists\, t$ tlq $(x, t) \in f$ (1) Desc
(3) $x \in \operatorname{Dom} f$ (2) Def de Dom
(4) $\exists\, t$ tlq $(t, y) \in f$ (1) Desc
(5) $y \in \operatorname{Crs} f$ (4) Def de Crs

Se dice que **f le asocia a x el valor y** si, y sólo si, $(x, y) \in f$.
Función es una correspondencia f que a cada $x \in \operatorname{Dom} f$ le asocia un sólo valor y. Este valor único suele llamarse $f(x)$. En otros términos:

f es función si, y sólo si, f es correspondencia y, dados x, y_1, y_2, si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$. Def de función
Si f es función entonces $f(x) = y$ si, y sólo si, $(x, y) \in f$. Def de $f(x)$

Si f es función y $x \in \operatorname{Dom} f$ entonces $(x, f(x)) \in f$:

(1) f es función
(2) $x \in \operatorname{Dom} f$ Hpt
(3) $\exists\, t$ tlq $(x, t) \in f$ (2) Def de Dom
(4) $(x, t) \in f$ Def de t
(5) $f(x) = t$ ssi $(x, t) \in f$ (1) Def de $f(x)$
(6) $f(x) = t$ (4) Por (5)
(7) $(x, f(x)) \in f$ (4)(6) Def de $=$

Se dice que **f va de A a B** si, y sólo si, f es función, $\operatorname{Dom} f = A$ y, para todo $x \in A$, $f(x) \in B$. **Def de incidencia**

Si f va de A a B y $B \subset C$ entonces f va de A a C:

(1) f va de A a B Hpt
(2) f es función
(3) $\operatorname{Dom} f = A$
(4) $\forall\, x \in A$, $f(x) \in B$ (1) Def de incid
(5) $B \subset C$ Hpt
(6) $\forall\, y$, si $y \in B$ ent $y \in C$ (5) Def de $\subset$
(7) $\forall\, x \in A$, $f(x) \in C$:
  (α) $x \in A$ Hpt
  (β) $f(x) \in B$ (α) Por (4)
  (γ) Si $f(x) \in B$ ent $f(x) \in C$ (6) Desc
  (δ) $f(x) \in C$ (β) Por (γ)
(8) f va de A a C (2)(3)(7) Def de incid

Si $\operatorname{Dom} f = D$, $\operatorname{Dom} g = D$ y, para todo $x \in D$, $f(x) = g(x)$, entonces $f = g$. Axioma de igualdad

EJERCICIO

1. Reproduzca las tres demostraciones anteriores.

19 Composición

Si f va de A a B, y g va de B a C, entonces existe ϕ tal que ϕ es función, $\mathrm{Dom}\,\phi = A$ y, para todo $x \in A$, $\phi(x) = g(f(x))$:

(1) f va de A a B

(2) g va de B a C Hpt

(3) $(x, z) \in \phi$ ssi $x \in A$ y $z = g(f(x))$ Def de ϕ

(4) ϕ es función:

- (α) ϕ es corresponencia (3) Def de correspondencia
- (β) Si $(x, z_1), (x, z_2) \in \phi$ ent $z_1 = z_2$:
  - (β_1) $(x, z_1) \in \phi$
  - (β_2) $(x, z_2) \in \phi$ Hpt
  - (β_3) $x \in A$ y $z_1 = g(f(x))$ (β_1)
  - (β_4) $x \in A$ y $z_2 = g(f(x))$ (β_2) Def de ϕ
  - (β_5) $z_1 = g(f(x))$ (β_3)
  - (β_6) $z_2 = g(f(x))$ (β_4) Desc
  - (β_7) $z_1 = z_2$ (β_5)(β_6) Def de $=$
- (γ) ϕ es función (α)(β) Def de función

(5) $\mathrm{Dom}\,\phi = A$:

- (α) $\forall\, x$, si $x \in \mathrm{Dom}\,\phi$ ent $x \in A$:
  - (α_1) $x \in \mathrm{Dom}\,\phi$ Hpt
  - (α_2) $\exists\, y$ tlq $(x, y) \in \phi$ (α_1) Def de Dom
  - (α_3) $(x, y_0) \in \phi$ Def de y_0
  - (α_4) $x \in A$ y $y_0 = g(f(x))$ (α_3) Def de ϕ
  - (α_5) $x \in A$ (α_4) Desc
- (β) $\forall\, x$, si $x \in A$ ent $x \in \mathrm{Dom}\,\phi$:
  - (β_1) $x \in A$ Hpt
  - (β_2) $z_0 = g(f(x))$ Def de z_0

(β_3) $x \in A$ y $z_0 = g(f(x))$ (β_1)(β_2)
(β_4) $(x, z_0) \in \phi$ (β_4) Def de ϕ
(β_5) $\exists\, z$ tlq $(x, z) \in \phi$ (β_4) Desc
(β_6) $x \in \operatorname{Dom} \phi$ (β_5) Def de Dom

(6) $\forall\, x \in A$, $\phi(x) = g(f(x))$:

(α) $x \in A$ Hpt
(β) $x \in \operatorname{Dom} \phi$ (α)(5) $=$
(γ) $(x, \phi(x)) \in \phi$ (4)(β) Dm
(δ) $x \in A$ y $\phi(x) = g(f(x))$ (γ) Por (3)
(ϵ) $\phi(x) = g(f(x))$ (δ) Desc

Puesto que existe ϕ tal que ϕ es función, $\operatorname{Dom} \phi = A$ y, para todo $x \in A$, $\phi(x) = g(f(x))$, hay que ponerle nombre. El nombre usual es $g \circ f$. Dicho de otro modo:
Si f va de A a B y g va de B a C, se define la **composición $\boldsymbol{g \circ f}$** de tal modo que

$g \circ f$ es función,
$\operatorname{Dom}(g \circ f) = A$,
y, para todo $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$g \circ f$ se lee **$\boldsymbol{g}$ de $\boldsymbol{f}$**, o **$\boldsymbol{g}$ precedida de $\boldsymbol{f}$**, o **$\boldsymbol{f}$ seguida de $\boldsymbol{g}$**.

EJERCICIOS

1. Reproduzca la demostración anterior.

2. Si f va de A a B, y g va de B a C, entonces $g \circ f$ va de A a C:

20 Infra, Supra, Biyectiva

Se dice que $f\colon A \to B$ **es inyectiva** si, y sólo si, f va de A a B y, dados $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Def de inyectiva

Si $\boldsymbol{f\colon A \to B}$ y $\boldsymbol{g\colon B \to C}$ son inyectivas entonces $\boldsymbol{g \circ f\colon A \to C}$ es inyectiva:

(1) $f\colon A \to B$ es inyectiva Hpt
(2) f va de A a B

(3) $\forall\, x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ ent $f(x_1) \neq f(x_2)$ (1) Def de inyect
(4) $g\colon B \to C$ es inyect Hpt
(5) g va de B a C
(6) $\forall\, y_1, y_2 \in B$, si $y_1 \neq y_2$ ent $g(y_1) \neq g(y_2)$ (4) Def de inyect
(7) $g \circ f$ va de A a C (2)(5) Dm
(8) $\forall\, x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ ent $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$:
   (α) $x_1 \in A$
   (β) $x_2 \in A$
   (γ) $x_1 \neq x_2$ Hpt
   (δ) $f(x_1) \in B$ (α)
   (ϵ) $f(x_2) \in B$ (β) Por (2)
   (ζ) $f(x_1) \neq f(x_2)$ (α)(β)(γ) Por (3)
   (η) $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (δ)(ϵ)(ζ) Por (6)
   (θ) $g(f)(x_1)) = (g \circ f)(x_1)$ (2)(5)(α)
   (ι) $g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ (2)(5)(β) Def de $\circ$
   (κ) $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ (η)(θ)(ι) Def de $=$
(9) $g \circ f\colon A \to C$ es inyectiva (7)(8) Def de inyect

Se dice que $f\colon A \to B$ **es suprayectiva** si, y sólo si, f va de A a B y, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Def de suprayectiva

Si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son suprayectivas entonces $g \circ f\colon A \to C$ es suprayectiva:

(1) $f\colon A \to B$ es suprayectiva Hpt
(2) f va de A a B
(3) $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A$ tlq $f(x) = y$ (1) Def de supra
(4) $g\colon B \to C$ es suprayectiva Hpt
(5) g va de B a C
(6) $\forall\, z \in C, \exists\, y \in B$ tlq $g(y) = z$ (4) Def de supra
(7) $g \circ f$ va de A a C (2)(5) Dm
(8) $\forall\, z \in C, \exists\, x \in A$ tlq $(g \circ f)(x) = z$:
   (α) $z \in C$ Hpt
   (β) $\exists\, y \in B$ tlq $g(y) = z$ (α) Por (6)

(γ) $y_0 \in B$
(δ) $g(y_0) = z$ Def de y_0
(ϵ) $\exists\, x \in A$ tlq $f(x) = y_0$ (γ) Por (3)
(ζ) $x_0 \in A$
(η) $f(x_0) = y_0$ Def de x_0
(θ) $g(f(x_0)) = g(y_0)$ (η) Def de $=$
(ι) $g(f(x_0)) = z$ (θ)(δ) Def de $=$
(κ) $g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$ (2)(5)(ζ) Def de $\circ$
(λ) $(g \circ f)(x_0) = z$ (ι)(κ) Def de $=$
(μ) $x_0 \in A$ y $(g \circ f)(x_0) = z$ (ζ)(λ)
(ν) $\exists\, x$ tlq $x \in A$ y $(g \circ f)(x) = z$ (μ) Desc

(9) $g \circ f \colon A \to C$ es suprayectiva (7)(8) Def de supra

Se dice que $f \colon A \to B$ **es biyectiva** si, y sólo si, $f \colon A \to B$ es inyectiva y suprayectiva a la vez.

EJERCICIOS

1. Reproduzca la primera demostración.
2. Reproduzca la segunda demostración.
3. Si $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to C$ son biyectivas entonces $g \circ f \colon A \to C$ es biyectiva:

21 Imagen Directa

Dada $f \colon X \to Y$, a cada conjunto $A \subset X$ se le asocia su **imagen** $f(A)$ como el conjunto de los $f(x)$ tales que $x \in A$.

Axiomas

Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$.
Si $y \in f(A)$ entonces existe x tal que $x \in A$ y $f(x) = y$.

Def de imagen

Propiedades

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i),\ f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i),\ f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2).$$

Si $A_1 \subset A_2$ entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.

Ejemplos

$\boldsymbol{f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i\in I} f(A_i)}$**:**

Para todo y, si $y \in f(\bigcup A_i)$ entonces $y \in \bigcup f(A_i)$:

(1) $y \in f(\bigcup A_i)$ Hpt
(2) Existe x tal que $x \in \bigcup A_i$ y $f(x) = y$ (1) Def de imgn
(3) $x_0 \in \bigcup A_i$ y $f(x_0) = y$ (1) Def de x_0
(4) $x_0 \in \bigcup A_i$
(5) $f(x_0) = y$ (3) Desc
(6) Existe i tal que $i \in I$ y $x_0 \in A_i$ (4) Def de $\bigcup$
(7) $j \in I$ y $x_0 \in A_j$ Def de j
(8) $j \in I$
(9) $x_0 \in A_j$ (7) Desc
(10) $f(x_0) \in f(A_j)$ (9) Def de imagen
(11) $y \in f(A_j)$ (10)(5) Def de $=$
(12) $j \in I$ y $y \in f(A_j)$ (8)(11) Desc
(13) Existe i tal que $i \in I$ y $y \in f(A_i)$ (12) Desc
(14) $y \in \bigcup f(A_i)$ (13) Def de $\bigcup$

$\boldsymbol{f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2)}$**:**

Para todo y, si $y \in f(A_1) - f(A_2)$ entonces $y \in f(A_1 - A_2)$:

(1) $y \in f(A_1) - f(A_2)$ Hpt
(2) $y \in f(A_1)$ e $y \notin f(A_2)$ (1) Def de $-$
(3) $y \in f(A_1)$
(4) $y \notin f(A_2)$ (2) Desc
(5) Existe x tal que $x \in A_1$ y $f(x) = y$ (3) Def de imgn
(6) $x_0 \in A_1$ y $f(x_0) = y$ Def de x_0
(7) $x_0 \in A_1$
(8) $f(x_0) = y$ (6) Desc
(9) Si $x_0 \in A_2$ ent $f(x_0) \in f(A_2)$ Def de imgn
(10) $f(x_0) \notin f(A_2)$ (4)(8) Def de $=$

(11) Si $f(x_0) \notin f(A_2)$ ent $x_0 \notin A_2$ (9) Giro
(12) $x_0 \notin A_2$ (10) Por (11)
(13) $x_0 \in A_1$ y $x_0 \notin A_2$ (7)(12) Desc
(14) $x_0 \in A_1 - A_2$ (13) Def de $-$
(15) $f(x_0) \in f(A_1 - A_2)$ (14) Def de imgn
(16) $y \in f(A_1 - A_2)$ (15)(8) Def de $=$

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.
2. Si $A_1 \subset A_2$ entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$:
3. $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$:
4. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$:
5. $f(\emptyset) = \emptyset$:

22 Caso Inyectivo

Sea $f\colon X \to Y$, inyectiva. En este caso valen las propiedaes que se demuestran aquí, aparte de las ya demostradas para toda f. Nuevamente, $A, A_1, A_2, \ldots$ son subconjuntos de X.

Si $x \notin A$ entonces $f(x) \notin f(A)$: Lema

.(1) $x \notin A$
(2) $f(x) \in f(A)$ Neg
(3) Existe t tal que $t \in A$ y $f(t) = f(x)$ (2) Def de imgn
(4) $t_0 \in A$ y $f(t_0) = f(x)$ Def de t_0
(5) $t_0 \in A$
(6) $f(t_0) = f(x)$ (4) Desc
(7) Si $t_0 \neq x$ ent $f(t_0) \neq f(x)$ Porque f es inyect
(8) Si $f(t_0) = f(x)$ ent $t_0 = x$ (7) Giro
(9) $t_0 = x$ (6) Por (8)
.(10) $x \in A$ (5)(9) Def de $=$

$\boldsymbol{f(A_1 - A_2) \subset f(A_1) - f(A_2)}$**:**

Para todo y, si $y \in f(A_1 - A_2)$ entonces $y \in f(A_1) - f(A_2)$:

(1) $y \in f(A_1 - A_2)$ Hpt
(2) Existe x tal que $x \in A_1 - A_2$ y $f(x) = y$ (1) Def de imgn
(3) $x_0 \in A_1 - A_2$ y $f(x_0) = y$ Def de x_0
(4) $x_0 \in A_1 - A_2$
(5) $f(x_0) = y$ (3) Desc
(6) $x_0 \in A_1$ y $x_0 \notin A_2$ (4) Def de $-$
(7) $x_0 \in A_1$
(8) $x_0 \notin A_2$ (6) Desc
(9) $f(x_0) \in f(A_1)$ (7) Def de imgn
(10) $f(x_0) \notin f(A_2)$ (8) Por lema
(11) $f(x_0) \in f(A_1) - f(A_2)$ (9)(10) Def de $-$
(12) $y \in f(A_1) - f(A_2)$ (11)(5) Def de $=$

EJERCICIOS

1. Reproduzca las dos demostraciones anteriores.

2. $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \supset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$:

Para todo y, si $y \in \bigcap f(A_i)$ entonces $y \in f(\bigcap A_i)$:

(1) $y \in \bigcap f(A_i)$ Hpt
(2) Para todo i, si $i \in I$ ent $y \in f(A_i)$ Def de $\bigcap$
(3) Existe i tal que $i \in I$ Hpt adic
(4) $j \in I$ Def de j
(5) Si $j \in I$ ent $y \in f(A_j)$ (2) Desc
(6) $y \in f(A_j)$ (4) Por (5)
(7) Existe x tal que $x \in A_j$ y $f(x) = y$ (6) Def de imgn
(8) $x_0 \in A_j$ y $f(x_0) = y$ Def de x_0
(9) $x_0 \in A_j$
(10) $f(x_0) = y$ (8) Desc
(11) Para todo i, si $i \in I$ ent $x_0 \in A_i$:
  (a) $i \in I$ Hpt
  (b) Si $i \in I$ ent $y \in f(A_i)$ (2) Desc
  (c) $y \in f(A_i)$ (a) Por (b)
  (d) $f(x_0) \in f(A_i)$ (c)(10) Def de $=$

(e) Si $x_0 \notin A_i$ ent $f(x_0) \notin f(A_i)$ Lema
(f) Si $f(x_0) \in f(A_i)$ ent $x_0 \in A_i$ (e) Giro
(g) $x_0 \in A_i$ (d) Por (f)

Complete esta demostración.

3. Si A_1 es ajeno a A_2 entonces $f(A_1)$ es ajeno a $f(A_2)$:

Nota.- Se dice que A_1 es ajeno a A_2 si, y sólo si, ningún elemento de A_1 es elemento de A_2.

23 Imagen Inversa

Dada $f\colon X \to Y$, a cada $B \subset Y$ se le asocia su **imagen inversa** $f^{-1}(B)$, formada de los x tales que $f(x) \in B$.

Axioma

$x \in f^{-1}(B)$ si, y sólo si, $f(x) \in B$. **Def de f^{-1}**

Propiedades

$f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$, $f^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap f^{-1}(B_i)$,
$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

Si $B_1 \subset B_2$ entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Como se ve, la imagen inversa se porta bien con las operaciones algebraicas, lo que no ocurre con la imagen directa, a menos que f sea inyectiva.

$f^{-1}(B_1 - B_2) \subset f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$:

Para todo x, si $x \in f^{-1}(B_1 - B_2)$ entonces $x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$:

(1) $x \in f^{-1}(B_1 - B_2)$ Hpt
(2) $f(x) \in B_1 - B_2$ (1) Def de f^{-1}
(3) $f(x) \in B_1$ y $f(x) \notin B_2$ (2) Def de $-$
(4) $f(x) \in B_1$
(5) $f(x) \notin B_2$ (3) Desc
(6) $x \in f^{-1}(B_2)$ (4) Def de f^{-1}
(7) $x \notin f^{-1}(B_2)$ (5) Def de f^{-1}, girada
(8) $x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$ (6)(7) Def de $-$

Si $\boldsymbol{B_1 \subset B_2}$ entonces $\boldsymbol{f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)}$:

(1) $B_1 \subset B_2$ Hpt
(2) Para todo y, si $y \in B_1$ ent $y \in B_2$ (1) Def de $\subset$
(3) Para todo x, si $x \in f^{-1}(B_1)$ ent $x \in f^{-1}(B_2)$:
  (a) $x \in f^{-1}(B_1)$ Hpt
  (b) $f(x) \in B_1$ (a) Def de f^{-1}
  (c) Si $f(x) \in B_1$ ent $f(x) \in B_2$ (2) Desc
  (d) $f(x) \in B_2$ (b) Por (c)
  (e) $x \in f^{-1}(B_2)$ (d) Def de f^{-1}
(4) $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ (3) Def de $\subset$

$$\boldsymbol{f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \supset \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)}:$$

Para todo x, si $x \in \bigcap f^{-1}(B_i)$ ent $x \in f^{-1}(\bigcap B_i)$:

(1) $x \in \bigcap f^{-1}(B_i)$ Hpt
(2) Para todo i, si $i \in I$ ent $x \in f^{-1}(B_i)$ (1) Def de $\bigcap$
(3) Para todo i, si $i \in I$ ent $f(x) \in B_i$:
  (a) $i \in I$ Hpt
  (b) Si $i \in I$ ent $x \in f^{-1}(B_i)$ (2) Desc
  (c) $x \in f^{-1}(B_i)$ (a) Por (b)
  (d) $f(x) \in B_i$ (c) Def de f^{-1}
(4) $f(x) \in \bigcap B_i$ (3) Def de $\bigcap$
(5) $x \in f^{-1}(\bigcap B_i)$ (4) Def de f^{-1}

EJERCICIOS

1. Reproduzca las tres demostraciones anteriores.
2. Demuestre las inclusiones inversas de las dos anteriores.
3. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$:
4. Si B_1 es ajeno a B_2 entonces $f^{-1}(B_1)$ es ajeno a $f^{-1}(B_2)$:

24 Reflexiones

Reflexión de A es una función inyectiva $f \colon A \to A$.

Si $f\colon A \to A$ es inyectiva, y $x \in A - f(A)$, entonces los elementos $x, f(x), ff(x), \ldots$ son distintos entre si, es decir,

$$\begin{array}{llll}
x \neq f(x), & x \neq ff(x), & x \neq fff(x), & \cdots \\
f(x) \neq ff(x), & f(x) \neq fff(x), & f(x) \neq ffff(x), & \cdots \\
ff(x) \neq fff(x), & ff(x) \neq ffff(x), & ff(x) \neq fffff(x), & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

Demostración:

(1) $f\colon A \to A$ es inyect Hpt

(2) f va de A a A

(3) Dados $t_1, t_2 \in A$, si $t_1 \neq t_2$ ent $f(t_1) \neq f(t_2)$ (1) Def de inyect

(4) Para todo t, si $t \in A$ ent $f(t) \in A$ (2) Def de incidencia

(5) $x \in A - f(A)$ Hpt

(6) $x \in A$

(7) $x \notin f(A)$ (5) Def de $-$

(8) $x \in A, f(x) \in A, ff(x) \in A, \ldots$:

- (a) $x \in A$ (6) Desc
- (b) Si $x \in A$ ent $f(x) \in A$ (4) Desc
- (c) $f(x) \in A$ (a) Por (b)
- (d) Si $f(x) \in A$ ent $ff(x) \in A$ (4) Desc
- (e) $ff(x) \in A$ (c) Por (d)
- $\cdots$

(9) $f(x) \in f(A), ff(x) \in f(A), fff(x) \in f(A), \ldots$ (8) Def de imgn

(10) $x \neq f(x), x \neq ff(x), x \neq fff(x), \ldots$:

- (a) $x \notin f(A)$ (7) Desc
- (b) $f(x) \in f(A)$ (9) Desc
- (c) $x \neq f(x)$ (a)(b) Def de $=$, girada
- (d) $ff(x) \in f(A)$ (9) Desc
- (e) $x \neq ff(x)$ (a)(d) Def de $=$, girada
- $\cdots$

(11) $f(x) \neq ff(x), f(x) \neq fff(x), f(x) \neq ffff(x), \ldots$ (10) Por (3)

(12) $ff(x) \neq fff(x), ff(x) \neq ffff(x), ff(x) \neq fffff(x), \ldots$
(11) Por (3)

$\cdots$

EJERCICIOS

1. Reproduzca la demostración anterior.

2. Si $U \subset A - B$ entonces $U \subset A$:

3. Si $U \subset A - B$ entonces U es ajeno a B:

4. Si U es ajeno a M, y $V \subset M$, entonces U es ajeno a V:

5. Si f va de A a A entonces, para todo E, si $E \subset A$ entonces $f(E) \subset A$:

6. Si $f\colon A \to A$ es inyectiva, y $U \subset A - f(A)$, entonces los conjuntos $U, f(U), ff(U), \ldots$ son ajenos entre si:

Capítulo IV

EJEMPLOS GEOMÉTRICOS

Los objetos básicos de la geometría son los **puntos** $A, B, C \ldots$, las **rectas** $a, b, c \ldots$ y los **planos** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Los puntos son los átomos del espacio geométrico. Las rectas y los planos son conjuntos de puntos, definidos implícitamente mediante ciertos axiomas que se irán introduciendo al avanzar.

En vez de $P \in \ell$ se dice que **la recta** ℓ **pasa por el punto** P. En vez de $\ell \subset \alpha$ se dice que **el plano** α **pasa por la recta** ℓ.

Materialmente, toda recta es como un hilo tenso que se prolonga sin fin en ambas direcciones. Todo plano es como una placa que se extiende sin fin en todas las direcciones. Estas ideas ayudan a formular los axiomas y a intuir los resultados, pero no a demostrarlos. Esto último se logra mediante las técnicas introducidas en el capítulo I.

En los apartados 25, 26, 27 se ejercita la definición de **cortar**, en sus tres modalidades: recta–recta, recta–plano y plano–plano. En 28 se practica la definición de **paralelismo**, también en sus tres modalidades.

En las demostraciones de este capítulo, los resultados del álgebra de conjuntos que se utilicen serán registrados como **algebraicos**.

* 25 Intersecar y cortar

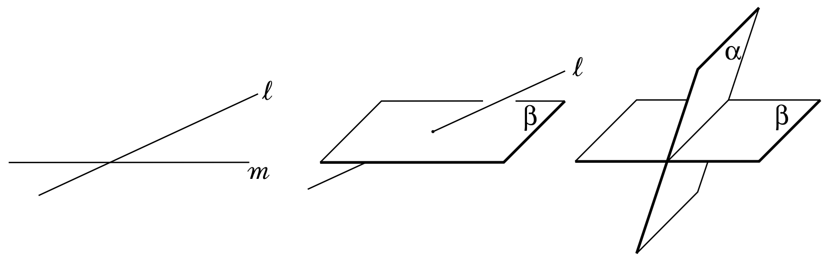
La noción de intersecar se refiere a conjuntos en general. La de cortar se refiere a rectas y planos.

Definición de intersecar:

ℓ **interseca a** β ssi existe P tal que $P \in \ell$ y $P \in \beta$.

Definición de cortar:

ℓ **corta a** m ssi ℓ interseca a m y $\ell \neq m$.
ℓ **corta a** β ssi ℓ interseca a β y $\ell \not\subset \beta$.
α **corta a** β ssi α interseca a β y $\alpha \neq \beta$.



Consecuencias inmediatas:

Si ℓ es ajena a m entonces ℓ no corta a m:

(1) ℓ es ajena a m y ℓ corta a m Neg
(2) ℓ corta a m (1)
(3) ℓ interseca a m y $\ell \neq m$ (2) Def de cortar
(4). ℓ interseca a m (3)
(5) ℓ es ajena a m (1)
(6). ℓ no interseca a m (5) Def común

Si $\ell = m$ entonces ℓ no corta a m:

(1) $\ell = m$ y ℓ corta a m Neg
(2) ℓ corta a m (1) Desc
(3) ℓ interseca a m y $\ell \neq m$ (2) Def de cortar
(4). $\ell \neq m$ (3) Desc
(5). $\ell = m$ (1) Desc

Si ℓ no corta a m entonces ℓ es ajena a m o $\ell = m$:

(1) ℓ no corta a m Hpt
(2) ℓ no es ajena a m y $\ell \neq m$ Neg tesis
(3) ℓ no es ajena a m (2) Desc
(4) ℓ interseca a m (3) Def común
(5) ℓ interseca a m y $\ell \neq m$ (4)(2) Desc
(6). ℓ corta a m (5) Def de cortar

Estos resultados se llaman **inmediatos** porque se demuestran a partir de las definiciones, sin que intervengan resultados previamente demostrados.

EJERCICIOS

1. Reproduzca las tres demostraciones anteriores.

2. Si ℓ no corta a β entonces ℓ es ajena a β o $\ell \subset \beta$:
   Si ℓ es ajena a β entonces ℓ no corta a β:
   Si $\ell \subset \beta$ entonces ℓ no corta a β:

3. Si α no corta a β entonces α es ajeno a β o $\alpha = \beta$:
   Si α es ajeno a β entonces α no corta a β:
   Si $\alpha = \beta$ entonces α no corta a β:

* 26 Axiomas geométricos

Primeros axiomas:

Todo plano contiene rectas que se cortan.
Toda recta tiene más de un punto.
Si dos planos se intersecan, su intersección tiene más de un punto.

Dados P, Q, puntos diferentes, existe una recta única, llamada **recta** PQ, que pasa por P y por Q.

Axiomas

$\boldsymbol{P, Q \in}$ recta $\boldsymbol{PQ}$.
Si $\boldsymbol{P, Q \in \ell}$ y $\boldsymbol{P \neq Q}$ entonces $\boldsymbol{\ell =}$ recta $\boldsymbol{PQ}$. Def de recta PQ
Si $\boldsymbol{P, Q \in \alpha}$ y $\boldsymbol{P \neq Q}$ entonces recta $\boldsymbol{PQ \subset \alpha}$.

Dados P y ℓ, tales que ℓ no pasa por P, existe un plano único, llamado **plano** $P\ell$, que pasa por P y por ℓ.

Axiomas

$\boldsymbol{P \in}$ plano $\boldsymbol{P\ell}$.
$\boldsymbol{\ell \subset}$ plano $\boldsymbol{P\ell}$.
Si $\boldsymbol{P \in \alpha}$ y $\boldsymbol{\ell \subset \alpha}$, y $\boldsymbol{P \notin \ell}$, entonces $\boldsymbol{\alpha =}$ plano $\boldsymbol{P\ell}$. Def de plano $P\ell$.

Consecuencias:

Si $\boldsymbol{\ell \subset m}$ entonces $\boldsymbol{\ell = m}$:

(1) $\ell \subset m$ Hpt
(2) ℓ tiene más de un punto Axioma
(3) $\exists\, P, Q$ tlsq $P, Q \in \ell$ y $P \neq Q$ (2) Trad
(4) $P, Q \in \ell$ y $P \neq Q$ Def de P, Q
(5) $P, Q \in \ell$ y $\ell \subset m$ (4)(1)
(6) $P, Q \in m$ (5) Algeb
(7) $P, Q \in m$ y $P \neq Q$ (6)(4)
(8) $\ell =$ recta PQ (4)
(9) $m =$ recta PQ (7) Def de recta PQ
(10) $\ell = m$ (8)(9) Def de $=$

Si $\boldsymbol{\alpha}$ corta a $\boldsymbol{\beta}$ entonces $\boldsymbol{\alpha \cap \beta}$ es una recta:

(1) α corta a β Hpt
(2) α interseca a β
(3) $\alpha \neq \beta$ (1) Def de cortar
(4) $\alpha \cap \beta$ tiene más de un punto (2) Axioma
(5) $\exists\, P, Q$ tlsq $P, Q \in \alpha \cap \beta$ y $P \neq Q$ (4) Trad
(6) $P, Q \in \alpha \cap \beta$
(7) $P \neq Q$ Def de P, Q
(8) $P, Q \in \alpha$
(9) $P, Q \in \beta$ (6) Algeb
(10) recta $PQ \subset \alpha$ (8)(7)
(11) recta $PQ \subset \beta$ (9)(7) Axioma
(12) recta $PQ \subset \alpha \cap \beta$ (10)(11) Algeb
(13) $\alpha \cap \beta \subset$ recta PQ:
 (a) $\alpha \cap \beta \not\subset$ recta PQ Neg
 (b) $\exists\, R$ tlq $R \in \alpha \cap \beta$ y $R \notin$ recta PQ (a) Algeb
 (c) $R \in \alpha \cap \beta$
 (d) $R \notin$ recta PQ Def de R
 (e) $R \in \alpha$ y $R \in \beta$ (c) Algeb
 (f) $R \in \alpha$ y recta $PQ \subset \alpha$ (e)(10)

(g) $R \in \beta$ y recta $PQ \subset \beta$ (e)(11)
(h) $\alpha =$ plano (R recta PQ) (f)
(i) $\beta =$ plano (R recta PQ) (g) Def de plano (R recta PQ)
(j). $\alpha = \beta$ (h)(i) Def de =

(14) $\alpha \cap \beta =$ recta PQ (12)(13) Algeb

EJERCICIO

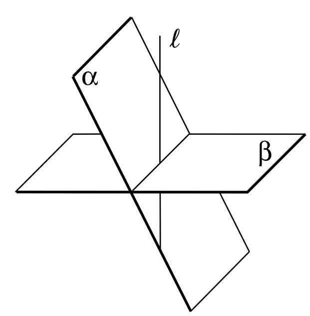
Reproduzca las dos demostraciones anteriores.

* 27 Pequeño repertorio

Si una recta de un plano corta a otro plano entonces ambos planos se cortan:

Si $\boldsymbol{\ell} \subset \boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\ell}$ corta a $\boldsymbol{\beta}$ entonces $\boldsymbol{\alpha}$ corta a $\boldsymbol{\beta}$:

(1) $\ell \subset \alpha$
(2) ℓ corta a β Hpt
(3) α interseca a β:



(a) ℓ interseca a β (2) Def
(b) $\exists\, P$ tlq $P \in \ell$ y $P \in \beta$ (a) Def
(c) $P \in \ell$ y $P \in \beta$ Def de P
(d) $P \in \ell$ y $\ell \subset \alpha$ (c)(1) Desc
(e) $P \in \alpha$ (d) Algeb
(f) $P \in \alpha$ y $P \in \beta$ (e)(c) Desc
(g) α interseca a β (f) Def

(4) $\alpha \neq \beta$:
(a) $\alpha = \beta$ Neg
(b) $\ell \subset \alpha$ y $\alpha = \beta$ (1)(a)
(c) $\ell \subset \beta$ (b) Def de =
(d). $\ell \not\subset \beta$ (2) Def de cortar

(5) α corta a β (3)(4) Def de cortar

Si una recta de un plano corta a otro plano entonces dicha recta corta a la intersección de ambos planos:

Si $\boldsymbol{\ell \subset \alpha}$ y $\boldsymbol{\ell}$ corta a $\boldsymbol{\beta}$ entonces $\boldsymbol{\ell}$ corta a $\boldsymbol{\alpha \cap \beta}$:

(1) $\ell \subset \alpha$
(2) ℓ corta a β Hpt
(3) α corta a β (1)(2) Resultado anterior
(4) $\alpha \cap \beta$ es una recta (3) Dm
(5) ℓ interseca a $\alpha \cap \beta$:
  (a) ℓ interseca a β (2) Def de cortar
  (b) $\exists\, P$ tlq $P \in \ell$ y $P \in \beta$ (a) Def de intersecar
  (c) $P \in \ell$ y $P \in \beta$ Def de P
  (d) $P \in \ell$ y $\ell \subset \alpha$ (c)(1) Desc
  (e) $P \in \alpha$ (d) Algeb
  (f) $P \in \alpha$ y $P \in \beta$ (e)(c) Desc
  (g) $P \in \alpha \cap \beta$ (f) Algeb
  (h) $P \in \ell$ y $P \in \alpha \cap \beta$ (c)(g) Desc
  (i) ℓ interseca a $\alpha \cap \beta$ (h) Def de intersecar
(6) $\ell \neq \alpha \cap \beta$:
  (a) $\ell = \alpha \cap \beta$ Neg
  (b) $\alpha \cap \beta \subset \beta$ Algeb
  (c) $\ell \subset \beta$ (b)(a) Def de $=$
  (d). $\ell \not\subset \beta$ (2) Def de cortar
(7) ℓ corta a $\alpha \cap \beta$ (5)(6) Def de cortar

EJERCICIOS

1. Si $\ell \subset \alpha$ y ℓ corta a β entonces α corta a β:
2. Si $\ell \subset \alpha$ y ℓ corta a β entonces ℓ corta a $\alpha \cap \beta$:
3. Si $\ell \subset \alpha$ y ℓ corta a $\alpha \cap \beta$ entonces α corta a β:
4. Si $\ell \subset \alpha$ y ℓ corta a $\alpha \cap \beta$ entonces ℓ corta a β:

28 Paralelismo

Definiciones:
$\ell \| m$ si y sólo si ℓ y m están en un mismo plano y ℓ no corta a m.

$\ell \| \beta$ si y sólo si ℓ no corta a β.
$\alpha \| \beta$ si y sólo si α no corta a β.

El símbolo $\|$ significa **es paralelo a**.

Propiedades

Si $\ell \| m$ entonces ℓ es ajena a m o $\ell = m$.
Si ℓ es ajena a m y ℓ, m están en un mismo plano entonces $\ell \| m$.
Si $\ell = m$ entonces $\ell \| m$.
Si $\ell \| \beta$ entonces ℓ es ajena a β o $\ell \subset \beta$.
Si ℓ es ajena a β entonces $\ell \| \beta$.
Si $\ell \subset \beta$ entonces $\ell \| \beta$.
Si $\alpha \| \beta$ entonces α es ajeno a β o $\alpha = \beta$.
Si α es ajeno a β entonces $\alpha \| \beta$.
Si $\alpha = \beta$ entonces $\alpha \| \beta$.

Demostraciones:

Si $\ell \| m$ entonces ℓ es ajena a m o $\ell = m$:

(1) $\ell \| m$ Hpt
(2) ℓ no corta a m (1) Def de $\|$
(3) ℓ no interseca a m o $\ell = m$ (2) Def de cortar, girada
(4) Si ℓ no interseca a m ent ℓ es ajena a m Def común
(5) ℓ es ajena a m o $\ell = m$ (3)(4) Por casos

Si ℓ es ajena a m y ℓ, m están en un mismo plano entonces $\ell \| m$:

(1) ℓ es ajena a m
(2) ℓ, m están en un mismo plano Hpt
(3) ℓ no interseca a m (1) Def común
(4) ℓ no interseca a m o $\ell = m$ (3) Desc
(5) ℓ no corta a m (4) Def de cortar, girada
(6) $\ell \| m$ (2)(5) Def de $\|$

Si $\boldsymbol{\ell = m}$ entonces $\boldsymbol{\ell \| m}$:

(1) $\ell = m$ Hpt
(2) ℓ no interseca a m o $\ell = m$ (1) Dm
(3) ℓ no corta a m (2) Def de cortar, girada
(4) $\exists\, \alpha$ tlq $\ell \subset \alpha$ Axioma geométrico
(5) $\ell \subset \alpha$ Def de α
(6) $\ell \subset \alpha$ y $\ell = m$ (5)(1)
(7) $m \subset \alpha$ (6) Def de $=$
(8) ℓ y m están en un mismo plano (5)(7) Trad
(9) $\ell \| m$ (8)(3) Def de $\|$

EJERCICIOS

1. Si $\ell \| \beta$ entonces ℓ es ajena a β o $\ell \subset \beta$:
2. Si ℓ es ajena a β entonces $\ell \| \beta$:
3. Si $\ell \subset \beta$ entonces $\ell \| \beta$:
4. Si $\alpha \| \beta$ entonces α es ajeno a β o $\alpha = \beta$:
5. Si α es ajeno a β entonces $\alpha \| \beta$:
6. Si $\alpha = \beta$ entonces $\alpha \| \beta$:
7. Si $\ell \| m$ y ℓ interseca a m entonces $\ell = m$: Dm indirecta
8. Si $\ell \| \beta$ y ℓ interseca a β entonces $\ell \subset \beta$:
9. Si $\alpha \| \beta$ y α interseca a β entonces $\alpha = \beta$:

29 Euclides

Dada una recta ℓ, y un punto cualquiera P, existe una paralela a ℓ, y sólo una, que pasa por P.
Este es el **quinto postulado de Euclides**. Se resume en dos axiomas.

Axiomas

Dados $\boldsymbol{\ell}$ y $\boldsymbol{P}$, existe $\boldsymbol{\ell'}$ tal que $\boldsymbol{\ell \| \ell'}$ y $\boldsymbol{P \in \ell'}$.
Si $\boldsymbol{\ell \| \ell', \ell''}$ y $\boldsymbol{P \in \ell', \ell''}$ entonces $\boldsymbol{\ell' = \ell''}$.

Consecuencias

Si $\boldsymbol{\ell \| \ell', \ell''}$, y $\boldsymbol{\ell'}$ interseca a $\boldsymbol{\ell''}$, entonces $\boldsymbol{\ell' = \ell''}$:

(1) $\ell \| \ell', \ell''$
(2) ℓ' interseca a ℓ'' Hpt
(3) $\exists\, P$ tlq $P \in \ell'$ y $P \in \ell''$ (2) Def de intersecar
(4) $P \in \ell', \ell''$ Def de P
(5) $\ell' = \ell''$ (1)(4) Axioma

Si $\boldsymbol{\ell \| \ell', \ell''}$ entonces $\boldsymbol{\ell'}$ no corta a $\boldsymbol{\ell''}$:

(1) $\ell \| \ell', \ell''$
(2) ℓ' corta a ℓ'' Neg
(3) ℓ' interseca a ℓ'' y $\ell' \neq \ell''$ (2) Def de cortar
(4) $\ell \| \ell', \ell''$ y ℓ' interseca a ℓ'' (1)(3)
(5) $\ell' = \ell''$ (4) Resultado anterior
(6). $\ell' \neq \ell''$ (3)

Si $\boldsymbol{\ell, \ell', \ell''}$ están en un mismo plano, y $\boldsymbol{\ell'}$ corta a $\boldsymbol{\ell''}$, entonces $\boldsymbol{\ell}$ corta a $\boldsymbol{\ell'}$ o $\boldsymbol{\ell}$ corta a $\boldsymbol{\ell''}$:

(1) ℓ, ℓ', ℓ'' están en un mismo plano
(2) ℓ' corta a ℓ'' Hpt
(3) ℓ no corta a ℓ' y ℓ no corta a ℓ'' Neg tesis
(4) ℓ, ℓ' están en un mismo plano y ℓ no corta a ℓ'
(5) ℓ, ℓ' están en un mismo plano y ℓ no corta a ℓ'' (1)(3)
(6) $\ell \| \ell'$ (4)
(7) $\ell \| \ell''$ (5) Def de $\|$
(8). ℓ' no corta a ℓ'' (6)(7) Resultado anterior

Por comodidad, el primer axioma de esta sección debe asumir una afinación, como sigue:

Si $\boldsymbol{\ell \subset \beta}$ y $\boldsymbol{P \in \beta}$ entonces existe $\boldsymbol{m}$ tal que $\boldsymbol{\ell \| m}$, $\boldsymbol{m \subset \beta}$ y $\boldsymbol{P \in m}$ Axioma

EJERCICIOS

1. Si $\ell \| \ell', \ell''$ y ℓ' interseca a ℓ'' entonces $\ell' = \ell''$:

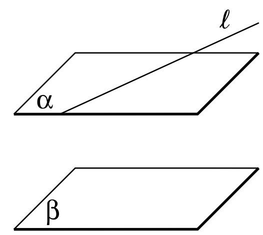
2. Si $\ell \| \ell', \ell''$ entonces ℓ' no corta a ℓ'':

3. Si ℓ, ℓ', ℓ'' están en un mismo plano, y ℓ' corta a ℓ'', entonces ℓ corta a ℓ' o ℓ corta a ℓ'':

Estos tres resultados, junto con los tres axiomas de esta sección llevarán el nombre de **Euclides** en todo lo que sigue.

30 Criterios

Si $\boldsymbol{\ell \subset \alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha \| \beta}$ entonces $\boldsymbol{\ell \| \beta}$:



(1) $\ell \subset \alpha$
(2) $\alpha \| \beta$ Hpt
(3) $\alpha = \beta$ o α es ajeno a β (2) Dm
(4) Si $\alpha = \beta$ ent $\ell \| \beta$:
  (a) $\alpha = \beta$ Hpt
  (b) $\ell \subset \alpha$ y $\alpha = \beta$ (1)(a)
  (c) $\ell \subset \beta$ (b) Def de $=$
  (d) $\ell \| \beta$ (c) Dm
(5) Si α es ajeno a β ent $\ell \| \beta$:
  (a) α es ajeno a β Hpt
  (b) $\ell \subset \alpha$ y α es ajeno a β (1)(a)
  (c) ℓ es ajena a β (b) Algeb
  (d) $\ell \| \beta$ (c) Dm

Si $\boldsymbol{\ell \| \ell'}$ y $\boldsymbol{\ell' \subset \beta}$ entonces $\boldsymbol{\ell \| \beta}$:

(1) $\ell \| \ell'$
(2) $\ell' \subset \beta$ Hpt
(3) ℓ es ajena a β o ℓ interseca a β Def común
(4) Si ℓ es ajena a β ent $\ell \| \beta$ Dm
(5) Si ℓ interseca a β ent $\ell \| \beta$:
  (a) ℓ interseca a β Hpt
  (b) $\exists\, P$ tlq $P \in \ell$ y $P \in \beta$ (a) Def
  (c) $P \in \ell$ y $P \in \beta$ Def de P
  (d) $\ell' \subset \beta$ y $P \in \beta$ (2)(c)
  (e) $\exists\, m$ tlq $\ell' \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ (d) Euclides

(f) $\ell' \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ Def de m

(g) $\ell' \| \ell$ y $\ell' \| m$ (1)(f)

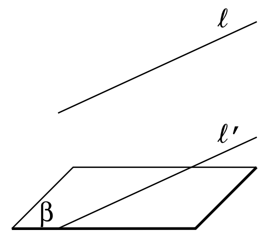
(h) $P \in \ell$ y $P \in m$ (c)(f)

(i) $\ell = m$ (g)(h) Euclides

(j) $m \subset \beta$ y $\ell = m$ (f)(i)

(k) $\ell \subset \beta$ (j) Def de $=$

(l) $\ell \| \beta$ (k) Dm



Si $\boldsymbol{\ell_1, \ell_2 \subset \alpha}$, $\boldsymbol{\ell_1}$ corta a $\boldsymbol{\ell_2}$, y $\boldsymbol{\ell_1, \ell_2 \| \beta}$, entonces $\boldsymbol{\alpha \| \beta}$:

(1) $\ell_1, \ell_2 \subset \alpha$

(2) ℓ_1 corta a ℓ_2

(3) $\ell_1, \ell_2 \| \beta$ Hpt

(4) α no $\| \beta$ Neg tesis

(5) α corta a β (4) Def de $\|$

(6) $\alpha \cap \beta$ es una recta (5) Dm

(7) $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ Algeb

(8) $\alpha \cap \beta$, ℓ_1, ℓ_2 están en un mismo plano: El plano α

(9) ℓ_1 corta a ℓ_2 (2)

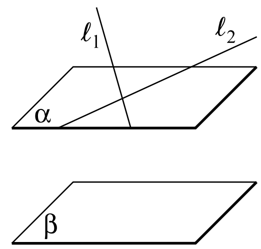
(10) ℓ_1 corta a $\alpha \cap \beta$ o ℓ_2 corta a $\alpha \cap \beta$ (8)(9) Euclides

(11) Si ℓ_1 corta a $\alpha \cap \beta$ ent ℓ_1 corta a β

(12) Si ℓ_2 corta a $\alpha \cap \beta$ ento ℓ_2 corta a β (1) Repertorio

(13) ℓ_1 corta a β o ℓ_2 corta a β (10)(11)(12) Por casos

(14). ℓ_1 no corta a β y ℓ_2 no corta a β (3) Def de $\|$



EJERCICIOS

1. Si $\ell \subset \alpha$ y $\alpha \| \beta$ entonces $\ell \| \beta$:
2. Si $\ell \| \ell'$ y $\ell' \subset \beta$ entonces $\ell \| \beta$:
3. Si $\ell_1, \ell_2 \subset \alpha$, ℓ_1 corta a ℓ_2, y $\ell_1, \ell_2 \| \beta$, entonces $\alpha \| \beta$:

31 Lemas

Primer lema:

Si $\boldsymbol{\ell \| \beta}$ y $\boldsymbol{P \in \beta}$ entonces existe $\boldsymbol{m}$ tal que $\boldsymbol{\ell \| m}$, $\boldsymbol{m \subset \beta}$ y $\boldsymbol{P \in m}$:

(1) $\ell \| \beta$

(2) $P \in \beta$ Hpt

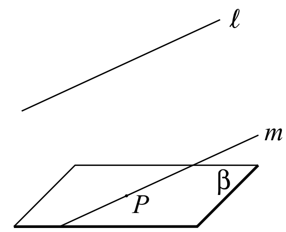
(3) $\ell \subset \beta$ o ℓ es ajena a β (1) Dm en 28

(4) Si $\ell \subset \beta$ ent $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$:

- (a) $\ell \subset \beta$ Hpt
- (b) $\ell \subset \beta$ y $P \in \beta$ (a)(2)
- (c) $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ (b) Euclides

(5) Si ℓ es ajena a β ent $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$:

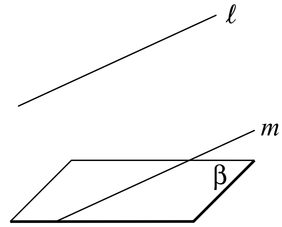
- (a) ℓ es ajena a β Hpt
- (b) $P \in \beta$ (2)
- (c) $P \notin \ell$ (a)(b) Algeb
- (d) $P \in$ plano $P\ell$
- (e) $\ell \subset$ plano $P\ell$ (c) Def de plano $P\ell$
- (f) $\alpha =$ plano $P\ell$ Def de α
- (g) $P \in \alpha$ (d)(f)
- (h) $\ell \subset \alpha$ (e)(f) Def de $=$
- (i) α interseca a β (g)(b) Algeb
- (j) $\alpha \neq \beta$ Porque $\ell \subset \alpha$ y $\ell \not\subset \beta$
- (k) α corta a β (i)(j) Def
- (l) $\alpha \cap \beta$ es una recta (k) Dm en 26
- (m) $\ell \| \alpha \cap \beta$:
  - (m_1) ℓ y $\alpha \cap \beta$ están en un mismo plano: El plano α
  - (m_2) ℓ es ajena a $\alpha \cap \beta$ (a) Algeb
  - (m_3) ℓ no corta a $\alpha \cap \beta$ (m_2) Dm en 25
  - (m_4) $\ell \| \alpha \cap \beta$ (m_1)(m_3) Def
- (n) $\ell \| \alpha \cap \beta$, $\alpha \cap \beta \subset \beta$ y $P \in \alpha \cap \beta$ (m)(Algeb)(g)(b)
- (o) $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ (n) Desc



(6) $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ (3)(4)(5) Por casos

Segundo lema:

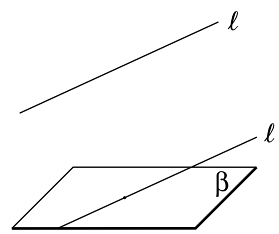
Si $\boldsymbol{\ell \| \beta}$ entonces existe $\boldsymbol{m}$ tal que $\boldsymbol{\ell \| m}$ y $\boldsymbol{m \subset \beta}$:



(1) $\ell \| \beta$ Hpt
(2) $\exists\, P$ tlq $P \in \beta$ Axioma
(3) $P \in \beta$ Def de P
(4) $\ell \| \beta$ y $P \in \beta$ (1)(3) m
(5) $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in \beta$ (4) Lema anterior
(6) $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ Def de m
(7) $\ell \| m$ y $m \subset \beta$ (6)

Tercer lema:

Si $\boldsymbol{\ell \| \ell'}$, $\boldsymbol{\ell \| \beta}$ y $\boldsymbol{\ell'}$ interseca a $\boldsymbol{\beta}$ entonces $\boldsymbol{\ell' \subset \beta}$:



(1) $\ell \| \ell'$
(2) $\ell \| \beta$
(3) ℓ' interseca a β Hpt
(4) $\exists\, P$ tlq $P \in \ell'$ y $P \in \beta$ (3) Def
(5) $P \in \ell'$ y $P \in \beta$ Def de P
(6) $\ell \| \beta$ y $P \in \beta$ (2)(5)
(7) $\exists\, m$ tlq $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ (6) 1$^{\text{er}}$ lema
(8) $\ell \| m$, $m \subset \beta$ y $P \in m$ Def de m
(9) $\ell \| m$ y $\ell \| \ell'$ (8)(1)
(10) $P \in m$ y $P \in \ell'$ (8)(5)
(11) $m = \ell'$ (9)(10) Euclides
(12) $m \subset \beta$ y $m = \ell'$ (8)(11)
(13) $\ell' \subset \beta$ (12)

Reproduzca las tres demostraciones anteriores.

32 Teoremas

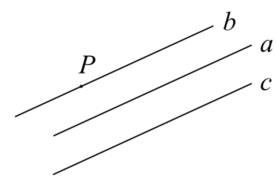
Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre si:

Si $\boldsymbol{c \| a}$ y $\boldsymbol{c \| b}$ entonces $\boldsymbol{a \| b}$:

(1) $c \| a$
(2) $c \| b$ Hpt
(3) a no corta a b (1)(2) Euclides
(4) $a = b$ o a es ajena a b (3) Dm

(5) Si $a = b$ ent $a\|b$ Dm

(6) Si a es ajena a b ent $a\|b$:



(a) a es ajena a b Hpt
(b) $\exists\, P$ tlq $P \in b$ Axioma
(c) $P \in b$ Def de P
(d) $P \notin a$ (a)(c) Algeb
(e) $P \in$ plano Pa
(f) $a \subset$ plano Pa Def de plano Pa
(g) $c\|a$ y $a \subset$ plano Pa (1)(f)
(h) $c\|$ plano Pa (g) Criterio
(i) $c\|b$ y $c\|$ plano Pa (2)(h)
(j) b interseca a plano Pa Porque $P \in b$ y $P \in$ plano Pa
(k) $b \subset$ plano Pa (i)(j) Lema
(l) a y b están en un mismo plano: El plano Pa
(m) a no corta a b (3)
(n) $a\|b$ (l)(m) Def

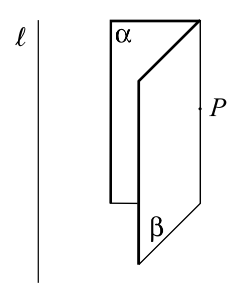
(7) $a\|b$ (4)(5)(6) Por casos

Corolario

Si $a\|c$ y $c\|b$ entonces $a\|b$.

Toda recta paralela a dos planos que se cortan es paralela a su intersección:

Si $\ell\|\alpha$, $\ell\|\beta$ y α corta a β entonces $\ell\|\alpha \cap \beta$:

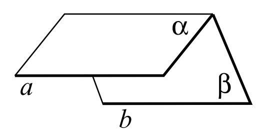


(1) $\ell\|\alpha$
(2) $\ell\|\beta$
(3) α corta a β Hpt
(4) $\alpha \cap \beta$ es una recta (3) Dm
(5) $\exists\, P$ tlq $P \in \alpha \cap \beta$ (4) Axioma
(6) $P \in \alpha \cap \beta$ Def de P
(7) $\exists\, \ell'$ tlq $\ell\|\ell'$ y $P \in \ell'$ Euclides

(8) $\ell \| \ell'$ y $P \in \ell'$ Def de ℓ'
(9) $\ell \| \ell'$ y $\ell \| \alpha$ (8)(1) Desc
(10) ℓ' interseca a α Porque $P \in \ell'$ y $P \in \alpha$
(11) $\ell' \subset \alpha$ (9)(10) Lema
(12) $\ell \| \ell'$ y $\ell \| \beta$ (8)(2) Desc
(13) ℓ' interseca a β Porque $P \in \ell'$ y $P \in \beta$
(14) $\ell' \subset \beta$ (12)(13) Lema
(15) $\ell' \subset \alpha \cap \beta$ (11)(14) Algeb
(16) $\ell' = \alpha \cap \beta$ (15)(4) Dm
(17) $\ell \| \ell'$ y $\ell' = \alpha \cap \beta$ (8)(16)
(18) $\ell \| \alpha \cap \beta$ (17) Def de =

EJERCICIO

Si $a \| b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$,
y α corta a β,
entonces $a, b \| \alpha \cap \beta$:



33 Transitividad

Las leyes transitivas del paralelismo son las siguientes:

Si $\ell \| \ell'$ y $\ell' \| \ell''$ entonces $\ell \| \ell''$. (Demostrado en sección 32)
Si $\ell \| \ell'$ y $\ell' \| \beta$ entonces $\ell \| \beta$.
Si $\ell \| \alpha$ y $\alpha \| \beta$ entonces $\ell \| \beta$.
Si $\gamma \| \alpha$ y $\alpha \| \beta$ entonces $\gamma \| \beta$.

Demostraciones

Si $\boldsymbol{\ell \| \ell'}$ y $\boldsymbol{\ell' \| \beta}$ entonces $\boldsymbol{\ell \| \beta}$:

(1) $\ell \| \ell'$
(2) $\ell' \| \beta$ Hpt
(3) $\exists\, \ell''$ tlq $\ell' \| \ell''$ y $\ell'' \subset \beta$ (2) Lema
(3') $\ell' \| \ell''$ y $\ell'' \subset \beta$ Def de ℓ''
(4) $\ell \| \ell'$ y $\ell' \| \ell''$ (1)(3) Desc

(5) $\ell \| \ell''$ (4) Dm

(6) $\ell \| \ell''$ y $\ell'' \subset \beta$ (5)(3') Desc

(7) $\ell \| \beta$ (6) Criterio

Si $\boldsymbol{\ell \| \alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha \| \beta}$ entonces $\boldsymbol{\ell \| \beta}$:

(1) $\ell \| \alpha$

(2) $\alpha \| \beta$ Hpt

(3) $\exists\, \ell'$ tlq $\ell \| \ell'$ y $\ell' \subset \alpha$ (1) Lema

(4) $\ell \| \ell'$ y $\ell' \subset \alpha$ Def de ℓ'

(5) $\ell' \subset \alpha$ y $\alpha \| \beta$ (4)(2) Desc

(6) $\ell' \| \beta$ (5) Criterio

(7) $\ell \| \ell'$ y $\ell' \| \beta$ (4)(6) Desc

(8) $\ell \| \beta$ (7) Resultado anterior

Si $\boldsymbol{\gamma \| \alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha \| \beta}$ entonces $\boldsymbol{\gamma \| \beta}$:

(1) $\gamma \| \alpha$

(2) $\alpha \| \beta$ Hpt

(3) $\exists\, \ell_1, \ell_2 \subset \gamma$ tlsq ℓ_1 corta a ℓ_2 Axioma geométrico

(3') $\ell_1, \ell_2 \subset \gamma$ y ℓ_1 corta a ℓ_2 Def de ℓ_1, ℓ_2

(4) $\ell_1 \subset \gamma$ y $\gamma \| \alpha$

(5) $\ell_2 \subset \gamma$ y $\gamma \| \alpha$ (3')(1) Desc

(6) $\ell_1 \| \alpha$ (4)

(7) $\ell_2 \| \alpha$ (5) Criterio

(8) $\ell_1 \| \alpha$ y $\alpha \| \beta$ (6)(2)

(9) $\ell_2 \| \alpha$ y $\alpha \| \beta$ (7)(2)

(10) $\ell_1 \| \beta$ (8)

(11) $\ell_2 \| \beta$ (9) Resultado anterior

(12) $\ell_1, \ell_2 \subset \gamma$, ℓ_1 corta a ℓ_2, y $\ell_1, \ell_2 \| \beta$ (3')(10)(11)

(13) $\gamma \| \beta$ (12) Criterio

EJERCICIOS

1. Si $\ell \| \ell'$ y $\ell' \| \beta$ entonces $\ell \| \beta$:

2. Si $\ell \| \alpha$ y $\alpha \| \beta$ entonces $\ell \| \beta$:

3. Si $\gamma \| \alpha$ y $\alpha \| \beta$ entonces $\gamma \| \beta$:
4. Si $\ell \| \ell'$ y ℓ corta a β entonces ℓ' corta a β: **Indirecta**
5. Si $\alpha \| \beta$ y ℓ corta a α entonces ℓ corta a β:
6. Si $\alpha \| \beta$ y γ corta a α entonces γ corta a β:

ABREVIATURAS

adic	adicional
alg	algún
Algeb	Algebraico
conj	conjunción
Crs	Curso
Def	Definición
Desc	Descendente
disy	disyunción
Dm	Demostrado
Dom	Dominio
elm	elemento
ent	entonces
esp	específico
gral	general
hno	hermano
Hpt	Hipótesis
ident	idéntico
imgn	imagen
incid	incidencia
inyect	inyectiva
mit	mitómano
Neg	Negación
ning	ningún
Result	Resultado
ssi	si y sólo si
supra	suprayectiva
tlq	tal que
Trad	Traducción