Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Teoría de Integración

Federico Menéndez-Conde Lara

www.smm.org.mx

Serie: Textos. Vol. 13 (2011)

Teoría de Integración

Federico Menéndez-Conde Lara

a mis padres

Tabla de Contenidos

Introducción

Porque sin salir del presente
que es un anillo delicado
tocamos la arena de ayer

PABLO NERUDA
(Integraciones)

El concepto matemático de integral tiene su raíz histórica en el problema de medir longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas. El planteamiento de dicho problema es un común denominador de la gran mayoría – incluso tal vez de todas – las civilizaciones que han pisado la tierra desde la antigüedad; a través de la historia, en diversas partes del mundo, se han ideado diversos métodos para medir diferentes figuras. Una muestra muy antigua de esto es la existencia de jeroglíficos egipcios, de hace casi cuatro mil años, en los que se calculan el área de un círculo (en términos de su diámetro) y el volumen de una pirámide truncada (o *frustum*) (este y más ejemplos pueden consultarse en [8] y [21]).

Uno de los métodos más notables para medir áreas y volúmenes entre los varios que han sido usados desde hace miles de años, es el conocido como *método de exhaución*; la idea de este método es sencilla: consiste en aproximar el área de una figura (o el volumen de un cuerpo) rellenándola de figuras más simples, de las cuales se conoce desde antes su área. Un ejemplo típico para ilustrar esto – y que fue concebido en diversas culturas – es el cálculo del área de un círculo aproximándolo por sucesiones de polígonos inscritos de cada vez más lados. En la Grecia antigua se aplicó este método con frecuencia, alcanzando resultados excepcionales; por lo general, las figuras que se deseaba medir eran aproximadas por uniones de triángulos. Los ejemplos más sobresalientes son tal vez los analizados por Arquímedes (ver e.g. [8, 27, 33]), que incluyen regiones delimitadas por elipses, espirales y arcos de parábola. Complementario al método de exhaución existe el *método de compresión* en el que en vez de rellenar la figura, se le cubre de forma cada vez más fina, aproximándola por formas simples de las que se conoce el área. Arquímedes usó ambos métodos para dar una prueba corta de que "el área de una circunferencia es igual a la mitad del producto del radio por la longitud de la circunferencia" (ver e.g. [27, 33]).

En el siglo XVII se dio un paso gigantesco en estas cuestiones, con el desarrollo del cálculo diferencial e integral que tuvo lugar en ese tiempo, que se debió principalmente a los trabajos de Godfried Leibniz e Isaac Newton; en particular, el Teorema Fundamental del Cálculó significó una formidable herramienta para calcular el área de una infinidad de figuras, usando sencillos procedimientos algorítmicos. Es también en el siglo XVII que comienza a usarse la notación (de Leibniz)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

para referirse a la integral de una función. En esa notación se refleja la idea de integral como fue concebida por Leibniz: el área bajo la gráfica de la función f es una suma infinita de áreas de rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitamente pequeña dx (longitud a la que Leibniz llamó "infinitesimal"). Desde luego, los métodos de exhaución y compresión están presentes en la integral del cálculo infinitesimal, en donde se usan – en vez de los triángulos de la Grecia clásica u otros polígonos – exclusivamente rectángulos cada vez más y más delgados.

La evolución del cálculo, muy ligada al sinnúmero de exitosas aplicaciones a las ciencias naturales que se fueron descubriendo (en física y astronomía, sobre todo), dio a la integral una vida propia, dejando así de ser solamente una herramienta para calcular áreas y volúmenes. Esta misma evolución, y con la influencia de ciertas inquietudes filosóficas de la época (ver e.g. [8]), desembocó, durante la primera mitad del siglo XIX, en las primeras formulaciones rigurosas de los principios básicos del cálculo; los primeros trabajos en ese sentido fueron los realizados por Augustin Cauchy en Francia y por Bernhard Bolzano en Bohemia. Cauchy definió la integral para funciones continuas en intervalos acotados como el límite de ciertas sumas de áreas sobre particiones del dominio (casos particulares de lo que ahora conocemos como *sumas de Riemann*), habiendo demostrado que el límite resultante era independiente de la elección de las particiones, siempre y cuando estas se fueran haciendo arbitrariamente finas. En terminología moderna, Cauchy demostró que "toda función continua en un intervalo compacto es Riemann-integrable." La definición de Cauchy fue retomada y generalizada por Bernhard Riemann al considerar la integral de funciones discontinuas; al quedar claro que no podía definirse la integral (en la forma hecha por Cauchy) a funciones "demasiado discontinuas", surgió de una forma natural la idea de "función integrable" (como aquella para la cual, sin que tenga que ser continua, puede definirse la integral). La integral definida por Riemann se estudia hasta nuestros días y está presente en la gran mayoría de los libros y cursos de cálculo de la actualidad.

Al inicio del siglo XX, el joven matemático francés Henri Lebesgue propuso una definición de integral para funciones de variable real, que extendía a la definición de Riemann. La integral propuesta, conocida ahora como la *integral de Lebesgue* fue ganando una rápida aceptación, y pronto se convirtió en la integral más usada y estudiada por los matemáticos (información amplia y detallada sobre esta historia y sus implicaciones puede leerse en [26] y [5]). La aparición de esta integral fue precedida por un gran número de intensas investigaciones sobre la integral de Riemann (y diversas variantes que surgieron en la segunda mitad del siglo XIX), tanto para funciones de una como de varias variables reales y complejas; al mismo tiempo, fueron surgiendo "teorías de medida", es decir, diferentes propuestas de como medir subconjuntos (por ejemplo, de $\mathbb{R}^n$). Algunos matemáticos de ese tiempo observaron y enfatizaron la relación entre los conceptos de integral y de medida, y los estudiaron como un mismo problema. Una gran influencia sobre la evolución del análisis real fue la ejercida por la Teoría de Conjuntos, que ofreció nuevas perspectivas para entender conceptos tan fundamentales como el de número real o el de función; de la misma forma que el resto del análisis matemático, el concepto de integral no fue inmune a la influencia de esa revolucionaria teoría, que al finalizar el siglo XIX había ganado ya una aceptación muy extendida entre la comunidad matemática. Fueron también de gran impacto en los estudios sobre la integral, muchas preguntas concretas sobre las propiedades de la misma, motivadas en gran parte por aplicaciones del análisis a la física y a la teoría de números. Notables ejemplos de esto fueron los cuestionamientos referentes a la convergencia de series de funciones y la integración de las mismas, problemas cruciales en el estudio de las representaciones de funciones por series trigonométricas; estas cuestiones fueron muy estudiadas a partir de los trabajos – ya considerados clásicos en aquel tiempo – realizados por Joseph Fourier sobre la transmisión de calor.

La integral de Lebesgue, lejos de ser una simple generalización que extendía la integral de Riemann a funciones con comportamientos patológicos, resultó una herramienta muy eficiente en la resolución de importantes problemas ya existentes; entre otros resultados, la integral de Lebesgue permitió establecer de un modo claro y elegante, criterios simples para la integración iterada de funciones en $\mathbb{R}^n$ (Teoremas de Fubini y de Tonelli), así como para la integración de límites de funciones (Teorema de la Convergencia Dominada y similares). Esto constituyó uno de los factores que propiciaron el gran éxito de la que era entonces una innovadora definición de integral. La diferencia fundamental entre la integral de Riemann y la de Lebesgue, es que en la primera se realizan particiones del dominio de la función a integrar, mientras que en la segunda las particiones se hacen sobre la imagen de la misma; haciendo lo primero, basta saber calcular áreas de rectángulos, mientras que haciendo lo segundo resulta que los “rectángulos” a los que hay que medir pueden tener como “base” a conjuntos arbitrarios de números reales. Para calcular el área de esos rectángulos, hace falta medir sus bases; es por ello que la integral de Lebesgue requiere de un proceso para medir subconjuntos de números reales (la *medida de Lebesgue*).

Además de lo señalado en el párrafo anterior, otro factor muy importante en el éxito histórico de la integral de Lebesgue fue su posterior generalización a una *Teoría de Medida* en la que se llevan las ideas de Lebesgue sobre medición de conjuntos de números reales a un alto grado de abstracción; en esta medida, es posible medir subconjuntos de cualquier conjunto dado, y construir integrales de funciones definidas sobre ellos. Fue así que el concepto de integral trascendió las fronteras del cálcuo y del análisis real. Siendo la teoría de la medida una teoría de índole muy general, ha resultado tener conexiones con las más diversas ramas de las matemáticas, tanto puras como aplicadas, impactando y retroalimentándose de las mismas. Dos botones muy significativos: la primera formulación matemática rigurosa de las leyes de la termodinámica, dada por Constantin Carathéodory, y la Teoría de Probabilidad propuesta por Andrey Kolmogorov; en ambos casos, la teoría de la medida es la base teórica principal. Los planteamientos de la termodinámica y de la probabilidad en términos de la teoría de la medida han tenido una perdurable y fundamental influencia sobre ambas disciplinas, resultando también de gran utilidad en la resolución de diversos problemas planteados por las mismas. Sería en extremo extenso hacer un recuento de las áreas en las que la integral de Lenesgue y la teoría de la medida han tenido impacto y profundas conexiones; por citar algunos ejemplos significativos (además de los dos mencionados arriba), mencionamos al análisis de Fourier, el análisis funcional, la mecánica cuántica, la tomografía computarizada, los fractales, los sistemas dinámicos, la teoría ergódica, las finanzas matemáticas y la geometría diferencial. En vista de todo esto, no parece ser demasiado sorprendente que la integral de Lebesgue (y su generalización teoría de la medida) siga siendo con mucha diferencia – hoy en día, a más de un siglo distancia de su nacimiento –, la integral más usada en la investigación en matemáticas, y uno de los temas recurrentes en los programas de estudio en matemáticas.

El presente trabajo es un libro de texto sobre la integral de Lebesgue y la teoría de la medida, desarrollado a partir de unas notas de curso usadas de la materia

Análisis Matemático 2, en la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. De esta forma, el texto está escrito con los estudiantes de nivel licenciatura en mente, siendo ellos – y los profesores del curso –los principales lectores potenciales; puede también ser usado como texto en cursos de posgrado, y como libro de referencia por profesores e investigadores. El texto es autocontenido en gran medida; los prerequisitos para abordarlo están incluidos en los cursos de cálculo o análisis real que se suelen impartir en los primeros cuatro o cinco semestres de las licenciaturas en física, matemáticas o similares. En particular, se presupone un conocimiento previo de la integral de Riemann y del concepto de cardinalidad y de *conjunto numerable*. Familiaridad con la teoría básica de espacios métricos o topológicos, si bien es puede resultar útil en algunas partes del texto, de ninguna manera es indispensable. El curso puede iniciarse, si así se desea, en el Capítulo II, donde se presenta la teoría abstracta, y refiriendo al Capítulo I cuando sea necesario; sin embargo, creemos que es mucho más conveniente, sobre todo en cursos a nivel licenciatura, iniciar por el Capítulo I, yendo desde lo particular (integral de Lebesgue) a lo general (teoría de la medida).

En el Capítulo I, se define la integral de Lebesgue y se estudian algunas de sus propiedades básicas. Esto se hace solo para el caso particular de funciones acotadas definidas en dominios de medida finita; la definición general de integral de Lebesgue se pospone hasta el Capítulo II, en el que se presenta la teoría de la medida en abstracto, incluyendo a la medida e integral de Lebesgue como un caso particular. El motivo de presentar primero a la integral de Lebesgue para el caso particular mencionado, es que eso permite escribir la definición en una forma que generaliza de manera natural a la integral de Riemann como suele presentarse en libros de cálculo (e.g. [51]) en términos de supremo de sumas inferiores e ínfimo de sumas superiores; considero que esto puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor las razones detrás de la definición general, al evitar pasar por alto ciertas sutilezas de la definición. Los teoremas de convergencia se presentan en el Capítulo II, para espacios de medida abstractos. En el Capítulo III se presenta teoría de construcción de medidas (Teoremas de Extensión de Carathéodiry y Hahn); ejemplos cruciales de integrales, como son las integrales sobre productos de espacios de medida, y la integral de Lebesgue-Stieltjes se introducen a la luz de dicha teoría. En el Capítulo IV se estudia el Teorema de Radon–Nikodym, uno de los resultados más importantes y profundos en la teoría de la medida, y que la conecta con resultados fundamentales de análisis funcional. El material del Capítulo IV es casi del todo autocontenido; los temas de análisis funcional requeridos (en particular para la parte final de la Sección IV.3, y de forma mínima en el resto del capítulo) se incluyen en el Apéndice B.

AGRADECIMIENTOS

El curso de Análisis Matemático 2 en la UAEH ha sido impartido, además de por el autor, por los profesores Benjamín Itzá Ortiz y Rubén Martínez Avendaño. Vaya mi más profundo agradecimiento para ambos colegas y amigos, por haber hecho uso de mis notas, y por las extensas discusiones que hemos tenido sobre el material; sin duda, todo ello ha resultado en mejoras significativas al texto. También quiero expresar mi más sincero y afectuoso agradecimiento a los estudiantes de las primeras siete generaciones de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH, no solo por haber contribuido – a veces de forma directa, a veces de forma indirecta – a mejorar este trabajo, con sus preguntas, comentarios y observaciones (tanto en clase como fuera de ella), sino por ser la principal fuente de motivación para la realización de este trabajo. Quiero agradecer también a Orlando Ávila Pozos, Fernando Barrera Mora y por Emilio Lluis Puebla, editor de las Publicaciones Electrónicas de la SMM; el apoyo recibido por parte de ellos ha hecho posible la publicación de este libro. Para finalizar, mi más sincero agradecimiento para el réferi; sus comentarios y observaciones sin duda han contribuido a la mejora del texto.

Federico Menéndez–Conde Lara
Mineral de la Reforma, Hidalgo
Agosto 2011

Capítulo I

La Integral de Lebesgue

En este capítulo presentamos la medida y la integral de Lebesgue. La medida de Lebesgue nos proporciona una forma de medir una gran diversidad de conjuntos de números reales; esta forma de medir es consistente con la idea intuitiva de lo que uno espera que midan ciertos conjuntos sencillos, como por ejemplo los intervalos, y es la base para definir la integral de Lebesgue. Esta última es una integral que generaliza a la integral de Riemann; la utilidad de esta generalización se irá haciendo evidente a lo largo del texto.

I.1 La Medida Exterior

> *Si el diámetro se mide sin dejar residuo, la circunferencia medida con la misma unidad dejará un residuo (...) Aunque pongamos grande empeño, podremos lograr que el residuo sea muy pequeño pero nunca alcanzaremos un estado "sin residuo".*

NILAKANTHA SOMAYAJI
(Aryabhatiyabhasya)

En esta sección se propone una primera forma de medir subconjuntos de $\mathbb{R}$, a la que llamamos la *medida exterior*. La definición de la medida exterior (Definición I.2) resulta de una construcción que es bastante intuitiva.

Comenzamos identificando una colección de conjuntos (intervalos acotados, a los que llamaremos *celdas*) a los que podemos medir de forma muy natural.

Definición I.1 *Llamamos celdas a los subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *de alguna de las formas siguientes:*

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\} \\ (a,b] & = & \{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\} \\ [a,b) & = & \{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\} \\ [a,b] & = & \{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\} \end{array}$$

para $a,b\in\mathbb{R}$. *Si* K *es cualquiera de las celdas de arriba.*

Definimos la longitud de las celdas por

$$\ell\,(K)=b-a.$$

Observamos que las celdas son simplemente los intervalos acotados y el conjunto vacío; no está por demás remarcar que a los intervalos no acotados no los consideramos celdas. Otra observación sencilla es que la intersección de dos celdas es siempre una celda, pero su unión puede no ser una celda (ejercicio I.1).

La longitud de un intervalo corresponde a la idea usual que se tiene de “lo que mide” el mismo; pero no queremos medir solamente intervalos, sino subconjuntos de $\mathbb{R}$ en general. En particular, si un conjunto A dado es igual a una unión finita de celdas disjuntas, sería de esperarse que el tamaño del conjunto A coincida con la suma de las longitudes de las celdas que lo conforman; en la siguiente definición se propone una forma de medir conjuntos que concuerda con esto. La idea es aproximar los conjuntos cubriéndolos con una colección numerable de celdas.

Definición I.2 *Para* $E\subset\mathbb{R}$ *definimos el conjunto* $\mathscr{L}_E$ *como el conjunto de los números reales* x *tales que existe una colección numerable de celdas* $\{I_k\}$ *que cumplen las dos condiciones siguientes:*

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_k \ell\,(I_k) \\ E & \subset & \bigcup_k I_k \end{array}$$

Diremos que x *es el elemento de* $\mathscr{L}_E$ *determinado por las celdas* $\{I_k\}$. *Se define la medida exterior del conjunto* E *como*

$$m^*(E)=\inf\mathscr{L}_E.$$

Observamos que el conjunto $\mathscr{L}_E$ está siempre acotado inferiormente por el cero, por lo que basta que $\mathscr{L}_E$ sea no vacío para que el ínfimo en la Definición I.2 exista. Sin embargo, es posible que el conjunto $\mathscr{L}_E$ sea vacío; en efecto, esto ocurre si el conjunto E es demasiado grande (por ejemplo, en el caso en el que E sea todo $\mathbb{R}$). Para incluir también estos casos en la definición, usaremos la convención

$$\inf \emptyset = +\infty$$

que es una extensión natural de la definición de ínfimo, y que además resulta en que los "conjuntos muy grandes" tengan medida exterior infinita. En particular se tiene que si I es un intervalo no acotado entonces $m^*(I) = +\infty$ (ejercicio I.3).

Algunas propiedades básicas de la medida exterior se enlistan a continuación.

(P1) $m^*(E)$ está definida para todo $E \subset \mathbb{R}$.

(P2) $m^*(E) \geq 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}$.

(P3) $A \subset B \implies m^*(A) \leq m^*(B)$.

(P4) Si $\{E_n\}$ es una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$, y $E = \bigcup_n E_n$, entonces
$$m^*(E) \leq \sum_n m^*(E_n).$$

(P5) $m^*(K) = \ell(K)$ para toda celda K.

La propiedad (P1) es inmediata del hecho de que $\mathscr{L}_E$ es siempre acotado por abajo. Las propiedades (P2) a (P4) no son difíciles de probar y se dejan como ejercicio para el lector (ejercicios I.2 y I.4). La propiedad (P5) es un tanto menos inmediata y la probaremos más adelante, en la Proposición I.5. Las propiedades (P2) a (P5) muestran consistencia con la idea intuitiva de medir conjuntos, mientras que la condición (P1) nos dice que podemos medir, usando la medida exterior $m^*(\cdot)$, a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$; esto pareciera indicar que estamos en buen camino, y que tenemos una forma apropiada de medir.

Es importante señalar que en la propiedad (P4) la colección de conjuntos que se considera puede ser finita o infinita; a esta propiedad se le conoce como *subaditividad*.

En la definición de medida exterior es posible considerar sólo celdas abiertas sin que la definición se altere; también podemos considerar solamente celdas cerradas e, incluso, podemos restringirnos a cubiertas formadas por celdas cuya longitud es siempre menor que un $\delta > 0$ dado. Establecemos todo esto de forma precisa en el lema siguiente.

Lema I.3 *Para $E \subset \mathbb{R}$, sea $\mathscr{A}_E$ el subconjunto de $\mathscr{L}_E$ determinado al considerar exclusivamente celdas abiertas; de forma similar, sea $\mathscr{C}_E \subset \mathscr{L}_E$ el conjunto determinado al considerar sólo celdas cerradas. También, para $\delta > 0$ dado, sea $L_E^{(\delta)} \subset \mathscr{L}_E$ el conjunto determinado al tomar solamente celdas de longitud menor o igual que δ. Se tienen las igualdades*

$$m^*(E) = \inf \mathscr{A}_E = \inf \mathscr{C}_E = \inf \mathscr{L}_E^{(\delta)}.$$

DEMOSTRACIÓN.

El caso $\mathscr{L}_E = \emptyset$ es trivial; podemos suponer entonces que $\mathscr{L}_E$ es no vacío, o equivalentemente que $m^*(E)$ es finita. Probemos primero que $m^*(E) = \inf \mathscr{A}_E$. La desigualdad $m^*(E) = \inf \mathscr{L}_E \leq \inf \mathscr{A}_E$ se sigue de inmediato por el hecho de que $\mathscr{A}_E \subset \mathscr{L}_E$; falta probar entonces sólo que $m^*(E) \geq \inf \mathscr{A}_E$.

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario dado, existe un punto $x \in \mathscr{L}_E$ determinado por una colección de celdas $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$m^*(E) \leq x < m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Resulta pertinente notar que el haber tomado la colección $\{I_n\}$ infinita no significa ninguna pérdida de generalidad: Si la colección que determina a x fuera finita, siempre podríamos agregar infinitas celdas vacías.

Denotamos por $a_n \leq b_n$ a los extremos de cada celda I_n, y definimos celdas abiertas

$$J_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right).$$

Es claro que $I_n \subset J_n$, por lo cual la unión de las J_n's cubre a E.

Tenemos entonces que existe $y \in \mathscr{A}_E$ con

$$\begin{aligned} y = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \\ &= x + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\inf \mathscr{A}_E \leq m^*(E) + \varepsilon,$$

y por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario se obtiene que $\inf \mathscr{A}_E = m^*(E)$, como se quería demostrar.

Para demostrar la igualdad $m^*(E) = \inf \mathscr{C}_E$, observamos que si $z \in \mathscr{L}_E$, entonces tiene la forma

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\bar{K}_n)$$

para algunas celdas K_n; se sigue que $z \in \mathscr{C}_E$. Por lo tanto $\mathscr{L}_E \subset \mathscr{C}_E$ y, como la contención opuesta es inmediata de la definición, ambos conjuntos coinciden.

La igualdad restante $\left(m^*(E) = \inf \mathscr{L}_E^{(\delta)}\right)$ es inmediata del ejercicio I.7.

□

Nota: En la prueba del lema anterior, para demostrar que $\inf \mathscr{A}_E \leq m^*(E)$ probamos la desigualdad (I.1) para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Este es un procedimiento muy útil cuando se trabaja con la medida exterior, ya que esta está definida como un ínfimo; usaremos este recurso con frecuencia.

El siguiente lema técnico resultará útil en la demostración de la propiedad (P5) y su demostración se deja como ejercicio para el lector.

Lema I.4 *Sea J una celda cerrada y consideremos una colección finita de celdas abiertas $\{I_1, \ldots, I_n\}$ cuya unión cubre a J. Entonces*

$$\ell(J) < \ell(I_1) + \cdots + \ell(I_n).$$

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio I.8.

□

Establecemos ahora la propiedad (P5) de la medida exterior.

Proposición I.5 *Para toda celda K se tiene que $m^*(K) = \ell(K)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea I una celda cualquiera. La desigualdad $m^*(I) \leq \ell(I)$ se cumple trivialmente (¿por qué?)

Supongamos entonces que $m^*(I) < \ell(I)$. Se sigue que podemos elegir $\delta > 0$ con $\ell(I) > m^*(I) + \delta$, y como $\inf \mathscr{A}_E = m^*(E)$ (Lema I.3), tenemos que

$$\inf \mathscr{A}_E < \ell(I) - \delta.$$

De esto, se sigue que $\ell(I) - \delta$ no es cota inferior de $\mathscr{A}_E$ y podemos tomar una colección de celdas abiertas $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión cubre a I, de forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \ell(I) - \delta.$$

Sean J_1 y J_2 dos intervalos abiertos que contengan a cada uno de los extremos de la celda I, con $\ell(J_i) < \delta/2$ ($i = 1, 2$). Tenemos entonces que

$$\ell(J_1) + \ell(J_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \ell(I) = \ell(\bar{I}).$$

Por el Teorema de Heine–Borel (ver, por ejemplo [45]) existe una subcubierta finita (de la celda compacta $\bar{I}$) a la que denotamos por $\{\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_M\} \subset \{J_1, J_2\} \cup \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{M} \ell\left(\tilde{I}_n\right) &\leq \ell(J_1) + \ell(J_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \\ &< \ell(\bar{I}), \end{aligned}$$

lo que contradice el Lema I.4. Por lo tanto $\ell(I) \leq m^*(I)$ y la proposición queda demostrada.

□

Presentamos la siguiente definición de “distancia entre conjuntos”.

Definición I.6 *Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, definimos la distancia entre ellos como*

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| \mid x \in A, y \in B\}.$$

Cabe señalar que la distancia definida arriba no es una métrica (¿por qué?), pero sí es simétrica y satisface también la desigualdad del triángulo

$$\operatorname{dist}(A, C) \leq \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C).$$

El siguiente resultado se agrega a (P2)–(P5) como otra propiedad de la medida exterior que va de acuerdo con lo que nos dice la intuición que sucede cuando medimos objetos.

Proposición I.7 *Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que la distancia entre ellos es positiva, entonces $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Por la propiedad de subatividad (P4), se tiene la desigualdad

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B).$$

Falta entonces verificar tan sólo la desigualdad opuesta. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; por el Lema I.3 sabemos que para todo $\delta > 0$

$$m^*(A \cup B) = \inf \mathscr{L}_{A \cup B}^{(\delta)}$$

por lo que se sigue que existe una colección $\{I_n\}$ de celdas cuya unión cubre al conjunto $A \cup B$ y tal que

$$\begin{aligned} \ell(I_n) &< \operatorname{dist}(A,B), \qquad \forall n & (1) \\ \sum_n \ell(I_n) &< m^*(A \cup B) + \varepsilon. & (2) \end{aligned}$$

Ahora, la condición (1) implica que si $I_n \cap A \neq \emptyset$ entonces $I_n \cap B = \emptyset$; de esto se sigue que el lado izquierdo de (2) puede descomponerse como una suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = a + b,$$

con $a \in \mathscr{L}_A$ y $b \in \mathscr{L}_B$. Se concluye de esto que

$$m^*(A) + m^*(B) \leq a + b = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, obtenemos la desigualdad buscada.

$\square$

Terminamos esta sección enunciando una última propiedad de la medida exterior en la que se sigue mostrando un "buen comportamiento." Esta propiedad nos dice que los conjuntos no cambian de tamaño si los movemos de lugar, algo sin duda acorde con la intuición geométrica acerca de los movimientos rígidos.

Definición I.8 *Para $x \in \mathbb{R}$ y $E \subset \mathbb{R}$ definimos el conjunto*

$$x + E = \{x + y \mid y \in E\}.$$

Al conjunto $x + E$ lo llamamos la traslación de E por x.

Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ definimos

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Proposición I.9 *Para todo $x \in \mathbb{R}$ y $E \subset \mathbb{R}$ se tiene que $m^*(E) = m^*(x+E)$*

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio I.10.

$\square$

La propiedad de la medida exterior dada por la Proposición I.9 se conoce como *invarianza por traslaciones*.

Ejercicios

I.1 *Verifica que si I y J son celdas, entonces $I \cap J$ es siempre una celda, pero $I \cup J$ es una celda si y sólo si alguna de las intersecciones $I \cap \bar{J}$ o $\bar{I} \cap J$ es no vacía*

I.2 *Demostrar que para todo $E \subset \mathbb{R}$ se tiene que $m^*(E) \geq 0$, y que si $A \subset B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

I.3 *Para $a \in \mathbb{R}$ cualquiera, sean*

$$I = (-\infty, a] \qquad J = [a, \infty).$$

Probar que

$$\mathscr{L}_I = \mathscr{L}_J = \emptyset.$$

I.4 *Demostrar que para toda colección $E_k \subset \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad*

$$m^*\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

I.5 *Dar un ejemplo de una colección de conjuntos para los cuales la desigualdad del problema anterior sea estricta.*

I.6 *Prueba que si $\mathscr{L}_E$ es no vacío, entonces es un intervalo.*

I.7 *Completa la demostración del Lema I.3 mostrando que para todo $E \subset \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ se tiene*

$$\mathscr{L}_E^{(\delta)} = \mathscr{L}_E.$$

I.8 *Demostrar el Lema I.4 (página 17).*
Sugerencia: *usar inducción sobre el número de celdas.*

I.9 *Definimos el diámetro de un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ como*

$$\operatorname{diam}(E) = \sup \{|x-y| \mid x, y \in E\}.$$

Probar que $\operatorname{diam}(E) \geq m^*(E)$. *Dar un ejemplo de un subconjunto, que no sea un intervalo, para el que se cumpla la igualdad.*

I.10 *Sea $\{I_n\}$ una colección de celdas que cubre a un conjunto E.*
(a) *Probar que $\{x + I_n\}$ es una colección de celdas que cubre a $x + E$.*
(b) *Usar el inciso anterior y la igualdad $\ell(I_n) = \ell(x + I_n)$ para concluir la prueba de la Proposición I.9.*

I.11 *Encontrar las medidas exteriores de los conjuntos siguientes, justificando cada una de las respuestas:*
(a) $A = [-2, 3]$
(b) $B = \{x \mid x^2 < 20\}$
(c) $C = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$
(d) $D = [0, 1) \cap \mathbb{Q}^c$

I.12 *Demostrar el Lema I.4, de la página 17.*

I.2 La Medida de Lebesgue

Things are going to slide,
slide in all directions,
Won't be nothing you can measure anymore

LEONARD COHEN
(The Future)

En la Sección I.1 presentamos la medida exterior $m^*(\cdot)$, y observamos diversas propiedades y resultados que parecen indicar que nos proporciona una forma adecuada y razonable de medir conjuntos de números reales. En esta sección veremos que esto no es del todo cierto, ya que la medida exterior puede llegar a mostrar un comportamiento en extremo patológico, que va en total desacuerdo con lo que el sentido común nos dicta que debería suceder al medir conjuntos. Para corregir esto, habremos de restringir nuestras mediciones a cierta clase de conjuntos, a los que llamaremos *Lebesgue medibles* (que son "medibles en el sentido de Lebesgue"); si nos restringimos a esta clase de conjuntos, la medida exterior tiene un comportamiento adecuado (por así decirlo). En esta sección introducimos la *medida de Lebesgue*, que no es otra cosa que la misma medida exterior $m^*(\cdot)$, pero restringida la clase de los conjuntos Lebesgue medibles. Si bien este cambio de nombre puede sonar artificioso, resultará de lo más natural dentro de un contexto teórico más general, que será presentado en el Capítulo II.

Definición I.10 *Se dice que $E \subset \mathbb{R}$ cumple la condición de Carathéodory si para todo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

A los conjuntos que cumplen esta condición los llamamos conjuntos Lebesgue medibles (ó, abreviando: conjuntos L–medibles).

El que un conjunto E sea L–medible significa entonces, que "separa bien" a todos los conjuntos; es decir, si separamos de cualquier conjunto dado A lo que queda dentro de E de lo que queda fuera de E, entonces la medida del todo debe de ser igual a la suma de esos dos pedazos disjuntos. Esto, desde luego, no parece ser mucho pedir y es lo que uno supondría que debería suceder en general: en caso contrario estaríamos ante la posibilidad de que dos pedazos disjuntos de un conjunto midan más que el todo. Podemos tambier notar que para verificar si un conjunto E cumple la condición de Carathéodory, es suficiente probar la desigualdad

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \qquad \forall A \subset \mathbb{R},$$

puesto que la desigualdad opuesta es inmediata de la propiedad de subatividad (P4) de la medida exterior.

Nos preguntamos entonces: ¿Qué conjuntos son L–medibles? ¿No será que todos? Por lo pronto vemos un par de ejemplos de conjuntos que sí cumplen la condición de Caratheodory:

1. Los conjuntos de medida exterior nula.

   Sea E un conjunto con $m^*(E) = 0$, y sea $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario. Como se señaló arriba, basta verificar que

   $$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

pero esto se sigue de las contenciones

$$A \cap E \subset E \quad \text{y} \quad A \cap E^c \subset A.$$

2. Los intervalos abiertos (a,b).

   Denotemos por I al intervalo (a,b), y fijemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario. Tomemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera; por el Lema I.3 de la sección I.1 sabemos que existe $x \in \mathscr{L}_A$ con $m^*(A) \leq x < m^*(A) + \varepsilon$. Si $\{I_n\}$ es la colección de celdas abiertas que determina a x, entonces $\{I_n \cap I\}$ y $\{I_n \cap I^c\}$ son colecciones de celdas abiertas que determinan, respectivamente, a elementos $y \in \mathscr{L}_{A\cap I}$ y $z \in \mathscr{L}_{A\cap I^c}$. Como $\ell(I_n) = \ell(I_n \cap I) + \ell(I_n \cap I^c)$, se cumple la igualdad $x = y + z$.

   Entonces,

$$m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) \leq y + z \leq m^*(A) + \varepsilon$$

   y, por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos concluir que

$$m^*(A \cup I) + m^*(A \cup I^c) \leq m^*(A).$$

Quisiéramos identificar más ejemplos de conjuntos L–medibles. El teorema siguiente nos ayudará en este asunto, además de que es por si mismo un resultado de una gran relevancia teórica y práctica. La utilidad de este teorema irá quedando de manifiesto a lo largo de este capítulo; esto no es de ninguna manera una casualidad, sino que es consecuencia de profundas razones teóricas, como veremos más adelante, en el Capítulo II.

Teorema I.11 *La colección de conjuntos L–medibles cumple lo siguiente.*

(i) *El conjunto vacío es L–medible.*
(ii) *Si A es L–medible, entonces A^c también es L–medible.*
(iii) *Si $\{A_n\}$ es una colección numerable de conjuntos L–medibles, entonces su unión también es L–medible.*

Una consecuencia inmediata de este teorema y de las leyes de De Morgan es el hecho de que la intersección de una colección numerable de conjuntos L–medibles es también un conjunto L–medible (véase el ejercicio I.16).

La prueba de los primeros dos incisos del Teorema I.11 es directa, y se deja al lector (ejercicios I.13 y I.14); ambos incisos los daremos por demostrados en lo subsecuente. La prueba del tercer inciso, en cambio, es un tanto más complicada, por lo que será demostrada después de algunos lemas previos.

Lema I.12 *Las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

(i) *La unión de una colección finita de conjuntos L–medibles es un conjunto L–medible.*

(ii) *La intersección de una colección finita de conjuntos L–medibles es un conjunto L–medible.*

DEMOSTRACIÓN.

Usaremos inducción sobre el número de conjuntos en la colección para probar el inciso (i). En el caso en el que hay un sólo conjunto el resultado es trivial.

Supongamos que E_1 y E_2 son dos conjuntos L–medibles; por ser E_1 un conjunto L–medible tenemos que

$$\begin{aligned} m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) &= \\ &= m^*(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1)+m^*(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^c) \\ &= m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^c\cap E_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte,

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)=m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c). \tag{4}$$

Sumando las igualdades (3) y (4)

$$\begin{aligned} m^*(A\cap(E_1\cup E_2))+m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c) &= \\ &= m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^c\cap E_2)+m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \\ &= m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^c) \\ &= m^*(A), \end{aligned}$$

donde en la tercera y cuarta igualdades hemos usado, respectivamente, que E_2 y E_1 son L–medibles. Se tiene que podemos concluir que $E_1\cup E_2$ satisface la condición de Carathéodory, y el resultado del primer inciso se cumple entonces en el caso $n=2$.

Ahora, supongamos cierto el resultado para la unión en el caso $n=k$, y sean $\{E_1,\dots,E_{k+1}\}$ conjuntos L–medibles; entonces, tanto la unión $E_1\cup\cdots\cup E_k$ como el conjunto E_{k+1} son L–medibles y aplicando el resultado para $n=2$ se sigue que $E_1\cup\cdots\cup E_{k+1}$ es también L–medible.

El resultado del inciso (ii) se demuestra usando el inciso (i) de este lema, el inciso (ii) del Teorema I.11 y las leyes de De Morgan (ejercicio I.15).

□

Lema I.13 *Sea $\{E_n\}$ una colección numerable de conjuntos L–medibles. Existe una colección $\{B_n\}$ de conjuntos L–medibles disjuntos a pares, tales que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN.

Definimos

$$\begin{aligned} B_1 &= E_1 \\ B_n &= \left[\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right]^c \cap E_n, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Los B_n así definidos son disjuntos a pares, lo que es claro de las contenciones

$$\begin{aligned} B_n &\subset E_n \\ B_m &\subset E_n^c \qquad \text{si } m > n. \end{aligned}$$

El que los conjuntos B_n sean todos L–medibles, se sigue del Lema I.12 y el inciso (ii) del Teorema I.11.

Mostremos que se cumple (5). Como $B_n \subset E_n$, se sigue de forma inmediata que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Ahora, tomemos x en la unión de los E_n; entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_k$, pero $x \neq E_j$ siempre que $j < k$ (es decir, E_k es el primero de esos conjuntos que contiene a x). Para este k se tiene que $x \in B_k$ y por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

□

Lema I.14 *Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una colección finita de conjuntos L–medibles con los E_j disjuntos a pares. Entonces, para todo $A \subset \mathbb{R}$*

$$m^*(A \cap E) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j), \tag{6}$$

donde $E = E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n$.

DEMOSTRACIÓN.

Observamos, que por ser E_1 un conjunto medible

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &= m^*((A \cap E) \cap E_1) + m^*((A \cap E) \cap E_1^c) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{j=2}^{n} E_j\right]\right), \end{aligned}$$

donde hemos usado que los E_j son disjuntos a pares. Del mismo modo, por ser E_2 medible, se tiene que

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{j=2}^{n} E_j\right]\right) = m^*(A \cap E_2) + m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{j=3}^{n} E_j\right]\right),$$

por lo cual

$$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2) + m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{j=3}^{n} E_j\right]\right).$$

Aplicando sucesivamente la misma idea a los conjuntos restantes $E_3, \ldots, E_n$ se llega al resultado deseado.

□

Corolario I.15 *Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una colección de conjuntos medibles disjuntos a pares y E es la unión de los E_n's, entonces*

$$m^*(E) = \sum_j m^*(E_j)$$

DEMOSTRACIÓN.

Poner $A = \mathbb{R}$ en el Teorema I.14.

□

NOTA: A la propiedad (6) se le conoce como *aditividad*; de modo más preciso, dicha igualdad significa que la medida exterior es aditiva para colecciones finitas de conjuntos L–medibles. Un poco más adelante (Teorema I.16) se verá que la aditividad también se cumple para colecciones numerables de conjuntos L–medibles.

Estamos ahora listos para demostrar el Teorema I.11

DEMOSTRACIÓN DEL INCISO (iii) DEL TEOREMA I.11

Por los Lemas I.12 y I.13, basta demostrar la afirmación (iii) para el caso en el que $\{E_n\}$ es una colección infinita numerable de conjuntos disjuntos a pares; para $\{E_n\}$ de tal forma, definimos

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \\ F_N &= \bigcup_{n=1}^{N} E_n. \end{aligned}$$

Por el Lema I.12, los F_N son conjuntos L–medibles; también es claro que $F_N \subset E$. De esto, y usando también el Lema I.14, para todo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_N) + m^*(A \cap F_N^c) \\ &\geq m^*(A \cap F_N) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap E^c) + \sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j). \end{aligned}$$

Dado que $N \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, esto implica que

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap E^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap E_j) \qquad (7) \\ &\geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de subaditividad (P4) de la medida exterior. Como la desigualdad opuesta también se cumple (¿por qué sabemos eso?) concluimos que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

Una consecuencia sencilla, pero muy importante, de lo que acabamos de hacer es el hecho de que $m^*(\cdot)$ es aditiva no solamente para colecciones finitas, sino para colecciones numerables de conjuntos L–medibles.

Teorema I.16 *Sea $\{E_n\}$ una colección numerable de conjuntos L–medibles disjuntos a pares. Entonces*

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{8}$$

DEMOSTRACIÓN.

La desigualdad (7) nos muestra que

$$m^*(A) \geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_n E_n\right)^c\right) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap E_j),$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Poniendo $A = \bigcup\limits_n E_n$ en esa desigualdad, se sigue que

$$m^*\left(\bigcup_n E_n\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j).$$

Como la desigualdad contraria es también cierta por subaditividad, se tiene (8).

□

Veamos a continuación más ejemplos de conjuntos L–medibles.

1. Todos los intervalos.

   Se sigue del ejemplo 2 en la página 23, usando el Teorema I.11 (ejercicio I.17).

2. Los conjuntos abiertos

   Se sigue del ejemplo anterior y el inciso (iii) del Teorema I.11, ya que todo abierto en $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos.

3. Los conjuntos cerrados

   Se sigue del ejemplo anterior y el inciso (ii) del Teorema I.11 ya que los cerrados son los complementos de los abiertos.

La siguiente definición establece una clase todavía más amplia de conjuntos que también son L–medibles.

Definición I.17 *Se dice que un conjunto $G \subset \mathbb{R}$ es de clase G_δ si es igual a la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos. Similarmente, se dice que un conjunto $F \subset \mathbb{R}$ es de clase F_σ si puede escribirse como unión numerable de conjuntos cerrados.*

No es difícil verificar que tanto los conjuntos abiertos como los conjuntos cerrados pertenecen a ambas clases F_σ y G_δ (ejercicio I.21). Una sucesión convergente sin su punto límite, forma un conjunto de clase F_σ que no es ni abierto ni cerrado. Se deja al lector (ejercicio I.22) verificar que el complemento de un conjunto de clase G_δ es un conjunto de clase F_σ, y que el complemento de un conjunto de clase F_σ es un conjunto de clase G_δ. Otra observación importante, es que por el Teorema I.11 se tiene que tanto los conjuntos G_δ como los F_σ son L–medibles.

Lema I.18 *Para todo $E \subset \mathbb{R}$ existe un conjunto G de clase G_δ tal que $E \subset G$ y $m^*(G) = m^*(E)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Si $m^*(E) = \infty$, nos basta tomar $G = \mathbb{R}$; podemos entonces suponer que $m^*(E)$ es un número real. Por el Lema I.3 de la Sección I.1 puede verse que, para todo $M \in \mathbb{N}$, podemos elegir un abierto A_M (unión de celdas abiertas $\{I_n\}$ que cubre al conjunto E) tal que

$$m^*(E) \leq m^*(A_M) < m^*(E) + \frac{1}{M}.$$

Tomando G como la intersección de todos los A_M se sigue el resultado deseado.

$\square$

El resultado análogo para conjuntos de clase F_σ es también cierto (ver ejercicio I.23).

Teorema I.19 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El conjunto E es L–medible.*
(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $A \supset E$ con $m^*(A \setminus E) < \varepsilon$.*
(iii) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $K \subset E$ con $m^*(E \setminus K) < \varepsilon$.*
(iv) *Existe un conjunto G de clase G_δ tal que $G \supset E$ y $m^*(G \setminus E) = 0$.*
(v) *Existe un conjunto F de clase F_σ tal que $F \subset E$ y $m^*(E \setminus F) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Consideremos primero el caso particular $m^*(E) < \infty$. Para $\varepsilon > 0$ dado, tomamos $x \in \mathscr{A}_E$ menor que $m^*(E) + \varepsilon$. Sea A la unión de los intervalos abiertos que determinan a x; en particular, A es un conjunto abierto y por subaditividad se tiene que

$$m^*(A) \leq x < m^*(E) + \varepsilon.$$

Como E es L–medible, se sigue que

$$m^*(A \setminus E) = m^*(A) - m^*(E) < \varepsilon. \tag{9}$$

Ahora veamos el caso $m^*(E) = \infty$. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea

$$E_n = E \cap [n, n+1).$$

Se tiene que $\{E_n\}$ es una colección numerable de conjuntos L–medibles, disjuntos a pares, de medida exterior finita, y cuya unión es E. Podemos elegir conjuntos abiertos $A_n \supset E_n$ con

$$m^*(A_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n.$$

Denotamos por A a la unión de los A_n. Aplicando el Teorema I.16, y el hecho de que

$$A \setminus E \subset \bigcup_n (A_n \setminus E_n)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} m^*(A \setminus E) &\leq m^*\left(\bigcup_n (A_n \setminus E_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n \setminus E_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Basta probar (¿por qué?) que para todo $X \subset \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ se cumple la desigualdad

$$m^*(E \cap X) + m^*(E^c \cap X) < m^*(X) + \varepsilon. \tag{10}$$

Tomemos $A \supset E$, un abierto con $m^*(A \setminus E) < \varepsilon$. Se tiene que

$$m^*(E \cap X) \leq m^*(A \cap X),$$

y como $E^c = A^c \cup (A \setminus E)$ también se tiene

$$\begin{aligned} m^*(E^c \cap X) &\leq m^*(A^c \cap X) + m^*((A \setminus E) \cap X) \\ &< m^*(A^c \cap X) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades vemos que

$$m^*(E \cap X) + m^*(E^c \cap X) < m^*(A \cap X) + m^*(A^c \cap X) + \varepsilon.$$

Como A es abierto, cumple la condición de Caratheodory y se sigue (10).

(i) $\Longrightarrow$ (iii). Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si E es un subconjunto L–medible de $\mathbb{R}$, existe $A \supset E^c$ abierto con $m^*(A \setminus E^c) < \varepsilon$, puesto que ya sabemos que se cumple (ii) y E^c es también L–medible. Como $E \setminus A^c = A \cap E = A \setminus E^c$, tenemos que $K = A^c$ es el conjunto cerrado que requerimos.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Un procedimiento análogo al de la implicación (ii) $\Longrightarrow$ (i) funciona también en este caso. Los detalles quedan como ejercicio.

En este punto, hacemos notar que ya hemos probado que las primeras tres afirmaciones son equivalentes.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $G_n \supset E$ un abierto con

$$m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}.$$

Definimos

$$G = \bigcap_n G_n.$$

Es claro que el conjunto G cumple con los requerimientos.

(iii) $\Longrightarrow$ (v). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n \subset E$ un cerrado con

$$m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}.$$

Definimos

$$F = \bigcup_n F_n.$$

También es claro que el conjunto F cumple con los requerimientos.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Tomemos $G \supset E$ un conjunto de clase G_δ con $m^*(G \setminus E) = 0$, y sea $X \subset \mathbb{R}$ arbitrario. Tenemos

$$\begin{aligned} m^*(E \cap X) + m^*(E^c \cap X) &\leq m^*(G \cap X) + m^*(G^c \cap X) + m^*((G \setminus E) \cap X) \\ &= m^*(X) \end{aligned}$$

y se sigue que E es L–medible.

(v) $\Longrightarrow$ (i). La prueba es análoga a la de la implicación anterior y se deja como ejercicio.

$\square$

Una consecuencia curiosa de lo anterior es lo siguiente:
Si hubiera un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ que no fuera L–medible, por un lado (Lema I.18) existiría un conjunto G de clase G_δ que contiene a E, pero con la misma medida exterior que E; por otra parte (Teorema I.19) la diferencia $G \setminus E$ tendría que tener medida exterior positiva. En otras palabras, sería posible agregarle a E algo que "mide más que cero" sin que el conjunto resultante haya aumentado de tamaño. Este es uno más de los comportamientos patológicos que mencionamos al principio de esta sección, y que son típicos de lo que sucede con la medida exterior cuando consideramos conjuntos que no son L–medibles.

La siguiente definición nos proporcionará un instrumento para medir subconjuntos de $\mathbb{R}$, de una forma tal que se evitará que ocurran situaciones extrañas (y que contradigan la intuición) como la señalada en el párrafo anterior.

Definición I.20 *Denotamos por $m(\cdot)$ a la restricción de $m^*(\cdot)$ a la colección de conjuntos L–medibles, y le llamamos a $m(\cdot)$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$*

Desde luego, pudiera argumentarse que la Definición I.20 no tendría mucha razón para existir si todos los conjuntos de números reales fueran L–medibles; lo mismo puede decirse de la Definición I.10. Sin embargo, ambas definiciones tienen razón de ser, ya que sí pueden definirse conjuntos de números reales que no son Lebesgue medibles; a continuación presentamos un ejemplo.

Definición I.21 *Consideramos la relación de equivalencia: $x \approx y$, si $x - y \in \mathbb{Q}$. Un conjunto $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Vitali si es acotado y contiene exactamente un elemento de cada una de las clases de equivalencia inducidas por esta relación de equivalencia.*

La existencia de conjuntos de Vitali depende de aceptar como cierto el *axioma de elección* (véase por ejemplo [50]). Acá evitamos cualquier debate filosófico sobre este asunto, damos por cierto el axioma de elección, y seguimos adelante con el análisis.

Para probar que los conjuntos de Vitali no son L–medibles, probamos primero el siguiente resultado (que por sí mismo parece ser bastante natural):

Lema I.22 *Si E es un conjunto L–medible, entonces sus traslaciones $x+E$ son todas L–medibles.*

DEMOSTRACIÓN.

Fijamos $x \in \mathbb{R}$, y fijamos $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario. Usando la Proposición I.9, para todo conjunto E que sea L–medible, tenemos

$$\begin{aligned} m^*(x+A) &= m^*(A) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*(x+[A \cap E]) + m^*(x+[A \cap E^c]). \end{aligned}$$

Se pueden verificar sin mucha dificultad las igualdades de conjuntos

$$\begin{aligned} x+[B \cap C] &= [x+B] \cap [x+C] \\ x+B^c &= [x+B]^c \end{aligned}$$

ciertas para cualesquiera B y C, subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Se sigue de las igualdades de arriba, haciendo las sustituciones apropiadas, que

$$\begin{aligned} m^*(x+A) &= m^*([x+A] \cap [x+E]) + m^*([x+A] \cap [x+E^c]) \\ &= m^*([x+A] \cap [x+E]) + m^*([x+A] \cap [x+E]^c). \end{aligned}$$

Como todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es de la forma $x+A$ para algún $A \subset \mathbb{R}$, la igualdad de arriba significa que $x+E$ cumple la condición de Carathéodory.

□

Recordamos que $m^*(E) = m^*(x+E)$ para todo $E \subset \mathbb{R}$ (Proposición I.9), de forma que del Lema I.22 podemos concluir que $m(E) = m(x+E)$ para todo conjunto L–medible E. En otras palabras, la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.

Teorema I.23 *Los conjuntos de Vitali no son L–medibles.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathbb{V}$ un conjunto de Vitali y pongamos $a = \inf \mathbb{V}$, $b = \sup \mathbb{V}$; en particular $\mathbb{V} \subset [a,b]$. Denotamos por ℓ a la longitud de la celda $[a,b]$ y consideramos el conjunto $K = \mathbb{Q} \cap [-\ell, \ell]$.

Vamos a probar que

$$[a,b] \subset \bigcup_K (q+\mathbb{V}) \subset [a-\ell, b+\ell], \tag{11}$$

y que para todos q_1 y q_2 racionales

$$(q_1 + \mathbb{V}) \cap (q_2 + \mathbb{V}) = \emptyset, \text{ siempre que } q_1 \neq q_2. \tag{12}$$

Entonces, si $\mathbb{V}$ fuera L–medible, por el Lema I.22 todos los $q + \mathbb{V}$ lo serían también, y aplicando el Teorema I.16 tendríamos por (12) la igualdad

$$m^* \left(\bigcup_K q + \mathbb{V} \right) = \sum_{q \in K} m^* (q + \mathbb{V}),$$

de donde por (11) se tendría

$$0 < \ell \leq \sum_{q \in K} m^* (q + \mathbb{V}) \leq 3\ell < \infty.$$

Pero el Teorema I.9 nos dice que los términos en la suma de arriba son todos iguales, obteniéndose

$$0 < \sum_{q \in K} m^* (\mathbb{V}) < \infty,$$

lo cual es desde luego imposible.

Para terminar la demostración, basta entonces probar que (11) y (12) son ambas verdaderas. Para $x \in [a,b]$ arbitrario, tomemos el elemento $\tilde{x} \in \mathbb{V}$ con $x - \tilde{x} \in \mathbb{Q}$. Se tiene

$$x = (x - \tilde{x}) + \tilde{x} \in (x - \tilde{x}) + \mathbb{V}.$$

Como además $(x - \tilde{x}) \in K$, tenemos la primera contención en (11). Por el otro lado, si $z \in q + \mathbb{V}$ para algún $q \in K$, entonces $z = q + y$ con $-\ell \leq q \leq \ell$ y $a \leq y \leq b$, de donde se sigue la segunda contención en (11).

Para probar (12), notamos que si $x - q_1 \in \mathbb{V}$, entonces $x - q_2 \notin \mathbb{V}$, porque $x - q_1$ y $x - q_2$ están en la misma clase de equivalencia.

$\square$

Un subconjunto de $\mathbb{R}$ con características muy peculiares y que comentaremos a continuación es el llamado *conjunto de Cantor*. Una definición concisa – aunque no la más descriptiva – es que el conjunto de Cantor es el conjunto de los elementos de $[0,1]$ que pueden escribirse en base ternaria usando solamente las cifras 0 y 2.

Una forma más visual de definir el conjunto de Cantor es usar la siguiente construcción:

Figura I.1: Los primeros $K^{(n)}$ en la construcción del conjunto de Cantor

Sea $K^{(0)} = [0,1]$ y definimos $K^{(n)}$ para $n \in \mathbb{N}$ recursivamente, particionando cada componente conexa de $K^{(n-1)}$ en tres intervalos de igual longitud y removiendo el interior del intervalo central.

De esta forma, $K^{(n)}$ está formado por la unión de 2^n intervalos cerrrados de longitud $1/3^n$. También es claro de la construcción que $K^{(n+1)} \subset K^{(n)}$ para todo n. Se define el conjunto de Cantor K como la intersección

$$K = \bigcap_n K^{(n)}.$$

El conjunto K posee propiedades interesantes desde el punto de vista de la métrica usual en $\mathbb{R}$; es el ejemplo típico de un conjunto *perfecto* que es *denso en ninguna parte*. Un conjunto es perfecto si es igual al conjunto de sus puntos límite. En cierta forma, un conjunto perfecto no vacío debe ser "grande", ya que arbitrariamente cerca de cada punto hay una infinidad de puntos del mismo. Un conjunto es *denso en ninguna parte* si su cerradura tiene interior vacío, lo cual indica que el conjunto es "pequeño."

Desde el punto de vista de la medida de Lebesgue, el conjunto de Cantor es L–medible, pues es cerrado, y no es difícil demostrar que es "muy pequeño," usando el resultado siguiente.

Proposición I.24 *Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de conjuntos L–medibles, tales que $E_{n+1} \subset E_n$ para todo n. Si $m(E_N) < \infty$ para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces*

$$m\left(\bigcap_n E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

DEMOSTRACIÓN.

El resultado es consecuencia del Teorema I.16 y se deja como ejercicio para el lector.

$\square$

Corolario I.25 *El conjunto de Cantor tiene medida de Lebesgue igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN.

Inmediato de la Proposición I.24.

$\square$

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, el conjunto de Cantor es un subconjunto muy grande de $\mathbb{R}$, pues tiene de hecho la misma cardinalidad de $\mathbb{R}$ (ver Apéndice A); y sin embargo, es un conjunto de medida cero. Un ejemplo todavía más extremo en este sentido se presenta en el ejercicio I.34.

Construimos ahora conjuntos que muy similares al conjunto de Cantor, a los que denotaremos por K_α, pero que tienen medida positiva; estos conjuntos son idénticos al conjunto de Cantor desde el punto de vista de la topología:

K puede transformarse de forma continua en K_α y viceversa.

Para $\alpha \in (0,1)$ definimos $K_\alpha^{(0)} = [0,1]$. Recursivamente, para $n \geq 0$, de cada componente conexa X del conjunto $K_\alpha^{(n)}$ quitamos el intervalo de longitud $\alpha/2^{2n+1}$ con centro en el punto medio de X; al conjunto resultante le llamamos $K_\alpha^{(n+1)}$. El conjunto $K_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_\alpha^{(n)}$ es perfecto y denso en ninguna parte, pero tiene medida de Lebesgue positiva. Para probar esto puede usarse también la Proposición I.24.

Proposición I.26

$$m(K_\alpha) = 1 - \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN.

Es fácil ver que $K_\alpha^{(n)}$ está formado por 2^n intervalos cerrados disjuntos. Estos intervalos son todos de la misma longitud (digamos ℓ_n); en particular, como es claro de la construcción, se tiene

$$\ell_{n+1} = \left(\ell_n - \frac{\alpha}{2^{2n+1}}\right)/2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} m\left(K_\alpha^{(n+1)}\right) &= 2^{n+1}\ell_{n+1} \\ &= 2^n\left(\ell_n - \frac{\alpha}{2^{2n+1}}\right) \\ &= 2^n\ell_n - \frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= m\left(K_\alpha^{(n)}\right) - \frac{\alpha}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Podemos ver entonces, aplicando hacia atrás esta igualdad, que

$$m\left(K_\alpha^{(n+1)}\right) = 1 - \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha}{2^{j+1}}.$$

Entonces, por la Proposición I.24

$$\begin{aligned} m(K_\alpha) &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{j+1}} \\ &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicios.

I.13 *Demostrar que* $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$ *cumplen la condición de Caratheodory.*

I.14 *Probar que si A es L–medible, entonces su complemento* A^c *también lo es.*

I.15 *Usando el inciso (i) del Lema I.12 y el ejercicio I.14 probar el inciso (ii) del Lema.*

I.16 *Probar que si* $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de conjuntos L−medibles, entonces su intersección es L−medible.*

I.17 *Demostrar que todos las intervalos son Lebesgue medibles.*

I.18 *Para cada uno de los conjuntos siguientes, decidir si son medibles o no, justificando tu respuesta:*

a) $\mathbb{Z}$	*c)* $\mathbb{Q}$	*e) Cantor*
b) $\mathbb{Z}^c$	*d)* $\mathbb{Q}^c$	*f)* $\{\pi + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$

I.19 *Probar que la igualdad*

$$m(A\cup B) + m(A\cap B) = m(A) + m(B)$$

es cierta para todos A y B conjuntos medibles.

I.20 *Demostrar que* $m(A) = 0 \implies A^c$ *es denso. Mostrar con un contraejemplo que la implicación recíproca es falsa.*

I.21 *Verificar que todos los conjuntos abiertos son de clase F_σ y que todos los conjuntos cerrados son de clase G_δ.*

I.22 *Probar que A es un conjunto G_δ si y sólo si A^c es un conjunto F_σ.*

I.23 *Demostrar que todo $E \subset \mathbb{R}$ contiene un subconjunto K de clase F_σ tal que $m^*(E) = m^*(K)$.* [Sugerencia: considerar primero el caso $m^*(E) < \infty$].

I.24 *Dar ejemplos de conjuntos G_δ y F_σ que no sean ni abiertos ni cerrados.*

I.25 *Completa la demostración del Teorema I.19, probando las tres implicaciones faltantes.*

I.26 *Demuestra la Proposición I.24.*

I.27 *Mostrar con un ejemplo que sin la hipótesis de que $m(E_N) < \infty$ para algún $N \in \mathbb{N}$, la conclusión de la Proposición I.24 no es verdadera.*

I.28 *Con la notación de la demostración del Teorema I.23, probar la igualdad*

$$\cup_{q \in K} \ (q + \mathbb{V}) = [a - \ell, b + \ell].$$

I.29 *Para $E \subset \mathbb{R}$, definimos su medida interior $m_*(E)$ como:*

$$m_*(E) = \sup \ \{ \ m(K) \mid K \subset E \text{ es cerrado} \, \}.$$

Verifica que $m_*(E) \leq m^*(E)$.

I.30 *Demuestra que si E es un conjunto L–medible, entonces $m_*(E) = m^*(E)$.*

I.31 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m_*(E) = m^*(E) < \infty$. Probar que E es L–medible.*

I.32 *Prueba que E es L–medible si y sólo si la intersección $E \cap [-n, n]$ es medible para toda $n \in \mathbb{N}$.*

I.33 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible cualquiera, y sea $0 < \lambda < m(A)$. Demuestra que existe un subconjunto $B \subset A$ con $m(B) = \lambda$.*

I.34 *Sea K el conjunto de Cantor. Definimos*

$$K' = \{a + (b - a)x \mid x \in K, \ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Prueba que para todo intervalo J el conjunto $K' \cap J$ es no numerable, y que $m(K') = 0$.

I.3 Funciones Medibles y la Integral de Lebesgue

My life is falling to pieces,
somebody put me together

FAITH NO MORE
(Falling to Pieces)

En la Sección I.2 se definió el concepto de conjunto Lebesgue medible. Estos conjuntos serán nuestros dominios permitidos; es decir, aquellos en los que vamos a poder definir la integral. La cuestión es que si se quiere medir el "área de la figura bajo la gráfica" será necesario poder medir la base de la figura. En la presente sección definimos la integral, precisando desde antes la clase de funciones para las cuales puede definirse.

Definición I.27 *Definimos el conjunto de los reales extendidos como el conjunto* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *El orden de los números reales se extiende de forma natural a* $\mathbb{R}^*$ *tomando* $-\infty < x < +\infty$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Como es usual, algunas veces omitiremos el signo "+", escribiendo "∞'' en lugar de "$+\infty''$.

Definición I.28 *Decimos que una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ *es Lebesgue medible (abreviando L–medible) si para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se tiene que el conjunto*

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \alpha\} \tag{13}$$

es Lebesgue medible.

El signo de orden en (13) puede sustituirse por cualquiera de los signos '$<$', '$\leq$' ó '$\geq$'sin que la Definición I.28 sea alterada; es decir, cada una de las cuatro clases de funciones que resultan de las diferentes elecciones de signo – y que en principio pudieran ser distintas – en realidad coinciden. La prueba de esto se deja al lector (ejercicio I.35).

Algunos ejemplos sencillos, pero importantes, de funciones L–medibles se enlistan a continuación.

1. Las funciones constantes $f(x) = c$.

   En este caso

$$A_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha < c \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq c \end{cases}$$

2. La función identidad $f(x) = x$.

   Aquí se tiene $A_\alpha = (\alpha, \infty)$.

3. Las funciones monótonas (crecientes y decrecientes).

   A_α es en este caso siempre igual a un intevalo; los detalles se dejan al lector (ejercicio I.36).

Ejemplos triviales de funciones que no son L–medibles están dados por las funciones indicadoras de conjuntos que no son L–medibles.

Los siguientes dos teoremas nos muestran que la clase de funciones L–medibles es en realidad muy amplia; de hecho, todas las funciones con las que estamos familiarizados de nuestros cursos de cálculo (incluso las más patológicas) son funciones L–medibles.

Teorema I.29 *Si f y g son funciones L–medibles con rango en $\mathbb{R}$, entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y fg son L–medibles*

DEMOSTRACIÓN.

Sean f y g como en el enunciado del teorema y tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Queremos probar que el conjunto

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid (f+g)(x) > \alpha\}$$

es L–medible.

Para $r \in \mathbb{R}$ definimos

$$E_r = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > r \text{ y } g(x) > \alpha - r\}.$$

El conjunto E_r es L–medible para todo $r \in \mathbb{R}$, ya que es la intersección de dos conjuntos L–medibles (¿cuáles?); también es claro que $E_r \subset E$.

Ahora, sea $y \in E$ arbitrario, es decir $f(y) + g(y) > \alpha$; podemos entonces tomar $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(y) > q > \alpha - g(y)$, de donde se sigue que $y \in E_q$.

Hemos probado que

$$E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q,$$

por lo que E es la unión numerable de conjuntos L–medibles, y por el Teorema I.11 concluimos que E es L–medible. Tenemos pues, que $f+g$ es una función L–medible.

Por otra parte,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -f(x) > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < -\alpha\},$$

por lo que la función $-g$ es L–medible (dado que g es L–medible). Se sigue entonces que $f-g$ es también una función L–medible.

Ahora, notemos que si $\alpha < 0$ entonces

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f^2(x) > \alpha\right\} = \mathbb{R},$$

mientras que si $\alpha \geq 0$

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f^2(x) > \alpha\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -f(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) > \sqrt{\alpha}\right\},$$

y por lo tanto f^2 es una función L–medible si f lo es. Tenemos entonces que la función $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ es L–medible. Como cf es L–medible para toda constante c (ejercicio I.38) se concluye que fg es igualmente una función L–medible.

□

El resultado del teorema anterior puede extenderse a funciones medibles f y g con rango en $\mathbb{R}^*$ si adoptamos las siguientes convenciones aritméticas en $\mathbb{R}^*$, que resultan bastante naturales:

$$\begin{aligned}
(\pm\infty) + (\pm\infty) &= (\pm\infty) + x = \pm\infty \\
x(\pm\infty) &= \pm\infty, \ \text{si } x > 0 \\
x(\pm\infty) &= \mp\infty, \ \text{si } x < 0 \\
0(\pm\infty) &= 0.
\end{aligned}$$

Las expresiones $-\infty + \infty$ y $\infty + (-\infty)$ no están definidas. Una consecuencia de esto último es que la suma de dos funciones con valores en $\mathbb{R}^*$ puede no estar definida; lo estará sólo en el caso en el que siempre que alguna de las dos funciones tome el valor $+\infty$ la otra no tome el valor $-\infty$.

Del Teorema I.29 se puede deducir que una gran cantidad de funciones son L–medibles: los polinomios, las combinaciones lineales de funciones monótonas crecientes y decrecientes, etc.

El teorema siguiente amplía todavía más la clase de funciones L–medibles.

Teorema I.30 *Sea $\{f_n\}$ una suceción de funciones L–medibles con el mismo dominio E. Entonces $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ y $\liminf f_n$ son todas funciones L–medibles.*

DEMOSTRACIÓN.

Definimos dos conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E \mid \sup f_n(x) > \alpha\} \\ B &= \bigcup_n \{x \in E \mid f_n(x) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Estos dos conjuntos en realidad son el mismo:

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \sup \{f_n(x)\} > \alpha \\ &\iff \alpha \text{ no es cota superior de } \{f_n(x)\} \\ &\iff \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ con } f_n(x) > \alpha \\ &\iff x \in B. \end{aligned}$$

Por el Teorema I.11 se sigue entonces que A es L–medible, y por lo tanto $\sup f_n$ es una función L–medible. El resultado para $\inf f_n$ puede probarse de forma análoga (ejercicio I.37).

Debido a que

$$\begin{aligned} \limsup f_n &= \inf{}_n \sup{}_{k \geq n} f_k \\ \liminf f_n &= \sup{}_n \inf{}_{k \geq n} f_k \end{aligned}$$

el resultado del resto del teorema se sigue de lo demostrado en el párrafo anterior; los detalles quedan como ejercicio para el lector (ejercicio I.37).

$\square$

Corolario I.31 *Sea $\{K_n\}$ una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos a pares, y sean $f_n : K_n \to \mathbb{R}^*$ funciones medibles. Entonces la función dada por*

$$f(x) = f_n(x), \qquad \text{si } x \in K_n$$

es L–medible.

DEMOSTRACIÓN

Ejercicio I.39

□

También es consecuencia del Teorema I.30 el que todas las funciones continuas (y las continuas a trozos) son L–medibles; en efecto, por el Teorema de Weierstrass (ver, por ejemplo [46]) sabemos que toda función continua en $[a,b]$ es el límite uniforme de polinomios.

Un concepto muy importante cuando hablamos de la medida de Lebesgue (y como veremos en el capítulo siguiente también dentro de un contexto más general) es referido mediante la expresión "*casi en todas partes*"; establecemos esto de forma precisa a continuación.

Definición I.32 *Decimos que una proposición referente a los números reales se cumple "casi en todas partes" ó "en casi todo $\mathbb{R}$" (con respecto a la medida de Lebesgue) si la medida de Lebesgue del conjunto de los x para los cuales la propiedad no es verdadera es igual a cero. La frase "casi en todas partes" la abreviaremos por "c.t.p." Para $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible, diremos que una proposición se cumple "en casi todo E" si la medida de Lebesgue del conjunto formado por los $x \in E$ tales que la propiedad no es verdadera es igual a cero.*

Por ejemplo, la proposición "x es irracional" se cumple casi en todas partes, porque el conjunto en el que es falsa (los números racionales) tiene medida de Lebesgue igual a cero. La proposición "casi toda x en $[0,1]$ es positiva" es rigurosamente cierta en el contexto establecido. Con más frecuencia nos referiremos a proposiciones sobre funciones; expresiones como "f es positiva c.t.p.", "$g(x)=0$ c.t.p." ó "h es continua c.t.p." serán usadas con frecuencia, y su significado deberá quedar claro desde ahora.

Un primer resultado en el que usamos el concepto de c.t.p. es el que sigue.

Proposición I.33 *Si f es una función L–medible y $f = g$ c.t.p., entonces g es también una función L–medible.*

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio para el lector (ejercicio I.41).

□

Procedemos a continuación a definir la integral de Lebesgue que, como hemos mencionado, extiende a la integral de Riemann. Es en el contexto de esta integral en el que se aprecia mejor la importancia del concepto de “casi en todas partes” introducido arriba.

Comenzaremos definiendo la integral para una clase especial de funciones a las que llamamos *funciones simples*.

Definición I.34 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible. Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es una función L–medible que toma una cantidad finita de valores distintos, decimos que φ es una función simple. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es la imagen de φ, podemos escribir*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{A_j}(x) \tag{14}$$

donde $A_j = \varphi^{-1}(\{a_j\})$. Al lado derecho de (14) *le llamamos la representación canónica de φ.*

Ejemplos de funciones simples son las funciones constantes y las funciones escalonadas (combinaciones lineales de funciones indicadoras de celdas). Recordamos que las funciones escalonadas se usan en los cursos de cálculo para definir la integral de Riemann de una función. Las funciones simples tomarán el papel de las funciones escalonadas en la definición de la integral de Lebesgue.

Definición I.35 *Sean φ y E como en la Definición I.34, y $D \subset E$ un conjunto L–medible con $m(D) < \infty$. Definimos la integral de Lebesgue de φ sobre D como*

$$\int_D \varphi \, dm = \sum_{j=1}^{n} a_j \, m(A_j \cap D)\,.$$

Observemos que esta definición coincide con la definición de la integral de Riemann en el caso de integrales de funciones escalonadas; sin embargo, en esta definición se incluyen integrales de funciones que no son integrables en el sentido de Riemann (por ejemplo la integral de la función indicadora del conjunto de los números racionales).

Además de su representación canónica, una función simple puede tener diversas representaciones como combinación lineal de funciones indicadoras. Por esto será conveniente establecer el siguiente resultado técnico.

Lema I.36 *Sean $\{K_1, \ldots, K_m\}$ conjuntos L–medibles disjuntos a pares, y sea φ la función*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \chi_{K_j}(x).$$

Entonces, φ es una función simple y

$$\int_D \varphi \, dm = \sum_{j=1}^{n} c_j \, m(K_j \cap D) \tag{15}$$

para todo D conjunto L–medible.

DEMOSTRACIÓN.

Sea φ como en el enunciado del teorema; es fácil ver que φ es una función simple (ejercicio I.44). Si $\{a_1, \ldots, a_m\}$ son los valores distintos que toma la función φ entonces cada uno de los c_j en la expresión (15) es tal que $c_j = a_k$ para algún $k = 1, \ldots, m$. Podemos por tanto reenumerar los c_j en la forma $\{c_{k,j}\}$ de forma que para cada $k = 1, \ldots, m$, se tenga que los $c_{k,1} = \cdots = c_{k,m_k} = a_k$; reacomodamos conforme a esto también a los K_j; más precisamente, denotamos por $K_{k,j}$ al conjunto correspondiente al valor $\{c_{k,j}\}$. Esto nos lleva transformar el lado derecho de (15) en

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j \, m(K_j \cap D) &= \sum_{j,k} c_{k,j} \, m\left(K_{k,j} \cap D\right) \\
&= \sum_{k} a_k \left(m(K_{k,1} \cap D) + \cdots m(K_{k,m_k} \cap D)\right).
\end{aligned}$$

Escribimos $A_k = \varphi^{-1}(a_k)$; por definición se tiene que $A_k = \bigcup_j K_{k,j}$ y que los $K_{k,j}$ son L–medibles y disjuntos a pares. Del Teorema I.16 se sigue entonces que

$$m(K_{k,1} \cap D) + \cdots m(K_{k,m_k} \cap D) = m(A_k),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j \, m(K_j \cap D) &= \sum_{k} a_k \, m(A_k \cap D) \\
&= \int_D \varphi \, dm,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

La integral recién definida comparte muchas propiedades con la integral de Riemann; como muestra de ello tenemos el siguiente resultado.

Lema I.37 *Sean φ y ψ funciones simples con el mismo dominio E, y c cualquier constante. Entonces, para todo conjunto L–medible $D \subset \mathbb{R}$ se tiene que:*

(a) $\displaystyle\int_D (c\varphi)\, dm = c\int_D \varphi\, dm.$

(b) $\displaystyle\int_D (\varphi+\psi)\, dm = \int_D \varphi\, dm + \int_D \psi\, dm.$

(c) *Si $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para casi todo $x \in D$, entonces*

$$\int_D \varphi\, dm \leq \int_D \psi\, dm.$$

DEMOSTRACIÓN.

(a) Supongamos que la representación canónica de φ está dada por (14). Si $c = 0$ el resultado es trivial; si $c \neq 0$, la representación canónica de φ es:

$$(c\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{n} c\, a_j\ \chi_{A_j}(x),$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\int_D (c\varphi)\ dm &= \sum_{j=1}^{n} c\, a_j\, m(A_j \cap D)\\ &= c\sum_{j=1}^{n} a_j\, m(A_j \cap D)\\ &= c\int_D \varphi\, dm\end{aligned}$$

(b) Sean

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{j=1}^{m} a_j\, \chi_{A_j}(x)\\ \psi(x) &= \sum_{j=1}^{m} b_j\, \chi_{B_j}(x)\end{aligned}$$

representaciones canónicas. Tenemos entonces que

$$(\varphi+\psi)(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\, \chi_{A_i \cap B_j}(x).$$

Como la colección de conjuntos $A_i \cap B_j$ es disjunta a pares, se sigue del Lema I.36 que para todo $D \subset E$ que sea L–medible,

$$\begin{aligned}\int_D (\varphi + \psi)\ dm &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\, m(A_i \cap B_j \cap D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i\, m(A_i \cap B_j \cap D) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j\, m(A_i \cap B_j \cap D)\,.\end{aligned}$$

Por otra parte, como se tienen las igualdades

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j = A_i, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B_j = B_j$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\int_D (\varphi + \psi)\ dm &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i \cap D) + \sum_{j=1}^{m} b_j\, m(B_j \cap D) \\ &= \int_D \varphi\ dm + \int_D \psi\ dm.\end{aligned}$$

(c) La función simple $\psi - \varphi$ es no negativa para casi todo $x \in D$.

Sea

$$(\psi - \varphi)(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \chi_{C_j}(x),$$

su representación canónica; necesariamente $m(C_j \cap D) = 0$ siempre que $c_j < 0$. Entonces la integral de $\psi - \varphi$ sobre D es igual a una suma de términos no negativos y por tanto no puede ser negativa. El resultado deseado se sigue entonces fácilmente de los incisos anteriores.

□

Una consecuencia inmediata del tercer inciso de este lema es que si dos funciones simples coinciden casi en todas partes, entonces sus integrales de Lebesgue son iguales. En otras palabras, podemos alterar los valores de una función en un conjunto de medida cero y la integral no sufrirá cambio alguno.

Recordamos que la integral de Riemann de una función f sobre un intervalo acotado, puede definirse como el supremo de integrales de funciones escalonadas que están por debajo de f, o como el ínfimo de integrales de funciones escalonadas que están por encima de f, cuando ambas cantidades coinciden. La siguiente definición está motivada por el mismo orden de ideas.

Definición I.38 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible, con $m(E) < \infty$. Para cada función $f : E \to \mathbb{R}$ acotada, introducimos la notación*

$$\begin{aligned} \Phi[f] &= \left\{ \int_E \varphi\, dm \;\mid\; \varphi \text{ es simple y } \varphi(x) \leq f(x),\ \forall x \in E \right\} \\ \Psi[f] &= \left\{ \int_E \psi\, dm \;\mid\; \psi \text{ es simple y } \psi(x) \geq f(x),\ \forall x \in E \right\} \end{aligned}$$

Decimos que f es Lebesgue integrable (abreviado L– integrable) en E si

$$\sup \Phi[f] = \inf \Psi[f]. \tag{16}$$

En ese caso definimos la integral de Lebesgue de f sobre E como

$$\int_E f\, dm = \sup \Phi[f] = \inf \Psi[f].$$

Está claro que la definición anterior es consistente con la Definición I.35: En el caso en el que f es una función simple las definiciones coinciden.

Del tercer inciso del Lema I.37 se sigue que

$$x \in \Phi[f] \quad \text{y} \quad y \in \Psi[f] \quad \Longrightarrow \quad x \leq y. \tag{17}$$

Una consecuencia de esto es que todas las funciones que son integrables en el sentido de Riemann son también L–integrables. En efecto: toda función escalonada es una función simple, así que el que f sea Riemann integrable significa que el supremo de cierto subconjunto de Φ_f es igual al ínfimo de cierto subconjunto de Ψ_f; esto, junto con (17) implica que $\sup \Phi[f] = \inf \Psi[f]$. Puede también observarse que, en caso de existir, ambas integrales coinciden.

De esta forma, la integral de Lebesgue generaliza a la integral de Riemann. Desde luego, hay muchas funciones que no son Riemann–integrables pero que sí son Lebesgue–integrables; por ejemplo ¿Cuánto vale la integral de Lebesgue de la función indicadora de $\mathbb{Q}^c$ sobre un intervalo cualquiera?

El resultado central de esta sección relaciona los conceptos de Lebesgue medibilidad y Lebesgue integrabilidad y se presenta a continuación (Teorema I.40); pero primero probamos un sencillo lema técnico.

Lema I.39 *Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa, y para $s \in \mathbb{R}$ definimos*

$$T_s = \{x \in E \mid \varphi(x) > s\}.$$

Entonces

$$s\, m(T_s) \leq \int_E \varphi\, dm.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} s & \text{si } x \in T_s \\ 0 & \text{si } x \notin T_s \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{\varphi}$ es una función simple con $\tilde{\varphi} \leq \varphi$. Concluimos:

$$s\, m(T_s) = \int_E \tilde{\varphi}\, dm \leq \int_E \varphi\, dm.$$

□

El siguiente es un resultado fundamental.

Teorema I.40 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función acotada, y supongamos que $m(E) < \infty$. Entonces, f es L–medible si y sólo si es L–integrable.*

DEMOSTRACIÓN.

$\Longrightarrow$) Sea f una función L–medible; como f es acotada por hipótesis, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in E$. Introducimos para cada $n \in \mathbb{N}$ una partición del conjunto E en $2n+1$ subconjuntos, escribiendo

$$E_k^{(n)} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}, \qquad -n \leq k \leq n.$$

Para cada n fijo, no es difícil verificar que la colección de conjuntos $\left\{E_k^{(n)}\right\}_k$ es disjunta a pares y que su unión es igual a E. Además, estos $E_k^{(n)}$ son conjuntos L–medibles (¿por qué?)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos funciones simples φ_n y ψ_n por

$$\varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\ \chi_{E_k^{(n)}}, \qquad \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\ \chi_{E_k^{(n)}}.$$

De esta forma $\varphi_n < f \leq \psi_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$; por esto se tiene que

$$\begin{aligned} \int_E \varphi_n\, dm &\in \Phi[f] \\ \int_E \psi_n\, dm &\in \Psi[f]. \end{aligned}$$

Por otra parte, notamos que

$$\psi_n - \varphi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} \chi_{E_k^{(n)}} = \frac{M}{n}\chi_E .$$

Entonces,

$$\int_E \psi_n \, dm - \int_E \varphi_n \, dm = \frac{M}{n}\, m(E),$$

que tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto se tiene la igualdad

$$\inf \Psi[f] = \sup \Phi[f],$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\Longleftarrow$) Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen funciones simples $\varphi_n \in \Phi[f]$ y $\psi_n \in \Psi[f]$ tales que

$$\int_E \psi_n \, dm - \int_E \varphi_n \, dm < \frac{1}{n}$$

Sean $D_{m,n}$ y D_m los conjuntos

$$\begin{aligned} D_{m,n} &= \left\{ x \in E \;\middle|\; \psi_n(x) - \varphi_n(x) > \frac{1}{m} \right\} \\ D_m &= \left\{ x \in E \;\middle|\; \inf\, \psi_n(x) - \sup\, \varphi_n(x) > \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Consideramos también el conjunto

$$\begin{aligned} D &= \{ x \in E \mid \sup\, \varphi_n(x) < \inf\, \psi_n(x) \} \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m, \end{aligned}$$

Como las funciones ψ_n y φ_n son todas L–medibles, tenemos que tanto D como cada uno de los conjuntos $D_{m,n}$ y D_m son todos L–medibles. Además, para todos n y m en $\mathbb{N}$ tenemos que $D_m \subset D_{m,n}$, y por el Lema I.39 se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{m}\, m(D_{m,n}) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n) \; dm,$$

y entonces

$$\frac{1}{m}\, m(D_m) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n) \; dm < \frac{1}{n}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $m(D_m) = 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y entonces $m(D) = 0$. Esto significa que $\sup\, \varphi_n = \inf\, \psi_n$ c.t.p., de donde

$$\sup\, \varphi_n = f = \inf\, \psi_n, \qquad \text{c.t.p.}$$

Por el Lema I.30 en la Sección I.3 sabemos que $\sup\, \varphi_n$ (y también $\inf\, \psi_n$) son L–medibles, y se concluye entonces de la Proposición I.33 que f es también L–medible.

□

De esta forma, tenemos que los dos conceptos centrales sobre funciones de este capítulo (Lebesgue medibilidad y Lebesgue integrabilidad) coinciden en el caso en el que se tiene una función acotada definida en un conjunto de medida finita; esto va a ser un hecho crucial en lo que sigue.

Se busca tener una definición de integral más incluyente, que no se restrinja a dominios acotadas y funciones acotadas; para conseguir esto, va a ser necesario hacer ciertos ajustes. De entrada, si se tiene una función en un dominio no acotado, por lo general la igualdad (16) no va a ser satisfecha para funciones que sí tienen integrales impropias (en el sentido de Riemann):

Considérese, por ejemplo la función

$$f(x) = 1/x^2.$$

De acuerdo a lo conocido de cálculo integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{3}.$$

Y, sin embargo

$$\Psi[f] = \{+\infty\}.$$

Quisiéramos modificar (generalizar) la Definición I.38 para poder abarcar casos como el de la integral de arriba. El Teorema I.40 es precisamente el resultado que nos permite hacer eso de una manera razonable y eficiente: El punto es que, en vez de requerir a priori la igualdad (16), podemos pedir en su lugar que las funciones a considerar sean medibles (siendo que ambas hipótesis coinciden en el caso acotado). Más en concreto tenemos la siguiente definición:

Definición I.41 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible y sea $f : E \to \mathbb{R}^*$ una función no negativa. Se define la integral de Lebesgue de f sobre E como*

$$\int_E f = \sup\, \Phi[f].$$

Esto es, para que la integral de f esté definida se pide, desde la definición misma, el que f sea L–medible. El Teorema I.40 nos dice que en el caso acotado esto es lo mismo que pedir la igualdad (16); pero, con la ventaja de que, al ignorar al ínfimo del conjunto $\psi[f]$, se tiene una definición mucho más general. La restricción $f \geq 0$, que pudiera resultar un tanto extraña, la hemos agregado por simplicidad; desde luego, no aparecerá en la definición general de integral que se presenta en el capítulo siguiente y que generaliza a las anteriores (Definición II.19).

En el teorema siguiente y sus corolarios vemos que la integral de Lebesgue preserva muchas de las propiedades básicas de la integral de Riemann.

Teorema I.42 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible con $m(E) < \infty$ y sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones integrables. La integral de Lebesgue cumple lo siguiente:*

(i) *Para toda constante c se tiene*

$$\int_E cf \, dm = c \int_E f \, dm.$$

(ii) *Para todas f y g*

$$\int_E \big(f + g\big) \, dm = \int_E f \, dm + \int_E g \, dm.$$

(iii) *Si $f \leq g$ c.t.p, entonces*

$$\int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm.$$

Si bien tenemos ya las definiciones y herramientas necesarias para proceder con la demostrar este teorema, pospondremos su demostración hasta el Capítulo II. La razón de esto es que en dicho capítulo desarrollamos la presentación de una teoría que nos permitirá probar este resultado de una forma más general (véase Teorema II.28). De cualquier modo, sería muy recomendable que el lector diera por su cuenta una demostración del primer inciso en este punto, ya sea en el caso acotado (Definición I.38) o para $f \geq 0$ (Definición I.41).

Del Teorema I.42 se siguen de forma directa algunos resultados notables:

Corolario I.43 *Sean f y g funciones de E en $\mathbb{R}$, donde $m(E) < \infty$. Si $f = g$ c.t.p, entonces*

$$\int_E f \, dm = \int_E g \, dm.$$

DEMOSTRACIÓN.

Inmediato del tercer inciso del Teorema I.42.

□

Corolario I.44 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto con medida finita, y f una función integrable con dominio en E. Entonces el valor absoluto $|f|$ también es integrable y se tiene que*

$$\left| \int_E f \, dm \right| \leq \int_E |f| \, dm$$

DEMOSTRACIÓN.

Como $-|f| \leq f \leq |f|$, se sigue del tercer inciso del Corolario I.43 que

$$-\int_E |f| \, dm \leq \int_E f \, dm \leq \int_E |f| \, dm.$$

y se tiene el resultado deseado.

□

Corolario I.45 *Sean a y b constantes tales que c.t.p. se tenga que $a \leq f(x) \leq b$. Entonces*

$$a \, m(E) \leq \int_E f \, dm \leq b \, m(E).$$

DEMOSTRACIÓN.

Tenemos que

$$a \;\chi_E \leq f \leq b \, \chi_E$$

y el resultado es entonces inmediato del tercer inciso del Corolario I.43.

□

Corolario I.46 *Si A y B son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces*

$$\int_{A \cup B} f \, dm = \int_A f \, dm + \int_B f \, dm.$$

DEMOSTRACIÓN.

Observamos que

$$f = f\ \chi_A + f\ \chi_B.$$

Entonces, por el segundo inciso del Teorema I.42:

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f\, dm &= \int_{A\cup B} (f\ \chi_A + f\ \chi_B)\ dm \\
&= \int_{A\cup B} (f\ \chi_A)\ dm + \int_{A\cup B} (f\ \chi_B)\ dm \\
&= \int_A f\, dm + \int_B f\, dm.
\end{aligned}$$

□

Ejercicios

I.35 *Verifica que si en la definición de función L–medible se sustituye el signo "$>$" por cualquiera de los signos "$<$", "$\leq$" ó "$\geq$", la Definición I.28 no se modifica.* [Sugerencia: usar el Teorema I.11].

I.36 *Sea f una función creciente y $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Demuestra que el conjunto*

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \alpha\}$$

es igual a un intervalo. ¿Cuáles son los extremos del intervalo? ¿Qué se puede decir en el caso en el que f sea decreciente?

I.37 *Completar la demostración del Teorema I.30*

I.38 *Completar la demostración del Teorema I.29 probando que si f es una función L–medible y $c \in \mathbb{R}^*$, entonces la función cf es también una función medible.*

I.39 *Demostrar el Corolario I.31*

I.40 *Construye una función f que no sea L–medible y tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \mid f(x) = \alpha\}$ sí sea L–medible.*

I.41 *Prueba que si $f : E \to \mathbb{R}^*$ es L–medible y $g = f$ c.t.p. entonces g también es medible (Proposición I.33).*

I.42 *Sea $g: E \to \mathbb{R}^*$ una función medible y sea*

$$X = \{x \in E \mid g(x) = 0\}.$$

Se tiene una función $h: E \to \mathbb{R}^*$ tal que $h(x) = 1/g(x)$, para todo $x \in E \setminus X$. Probar que h es L–medible si y sólo si su restricción al conjunto X es L–medible.

I.43 *Demuestra que si φ es una función simple con imagen $\{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces los conjuntos $A_j = \varphi^{-1}(\{a_j\})$ son L–medibles.*

I.44 *Explica por qué la función φ definida en el Lema I.36 (página I.36) es simple.*

I.45 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible y para $f: E \to \mathbb{R}^*$ denotemos por E_+ y E_- a los conjuntos $E_\pm = \{x : f(x) = \pm\infty\}$. Demuestra que f es L–medible si y solamente si E_+ y E_- son ambos conjuntos L–medibles y la restricción de la f al dominio $E \setminus (E_+ \cup E_-)$ es una función L–medible.*

I.46 *Demuestra que si f es L–medible y A es abierto entonces $f^{-1}(A)$ es un conjunto L–medible.*

I.47 *Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ definimos*

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \\ f_-(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Demuestra que f es L$-$medible si y sólo si $f_\pm$ son ambas L$-$medibles.

I.48 *Prueba que la restricción de una función L$-$medible a un subconjunto L$-$medible de $\mathbb{R}$ es a su vez una función L$-$medible.*

I.49 *Sea K_α el conjunto de tipo Cantor con medida positiva definido en la página 36, y sean $f(x) = 1$ y $g(x) = x$. Evalúa las integrales de f y g sobre K_α.*

I.50 *Usa el resultado anterior para calcular la integral de $h(x) = ax + b$ sobre el conjunto K_α.*

Capítulo II

La Teoría de la Medida

En este capítulo presentaremos la teoría que se desarrolló a partir de abstraer las ideas en las que se basa la integral de Lebesgue. Esta teoría, conocida como la teoría de la medida, permite definir integrales de funciones sobre cualquier dominio dado, y ha influido en diversas áreas de las matemáticas. La integral de Lebesgue construida en el Capítulo I es un caso particular.

II.1 Espacios de medida

El mar se mide por olas, el cielo por alas
nosotros por lágrimas

JAIME SABINES
(Horal)

En esta sección sentamos los fundamentos sobre los cuales se desarrollará de una forma abstracta la idea de integral. Se trata de generalizar a la medida de Lebesgue de forma que se puedan medir conjuntos cualesquiera, y no solamente subconjuntos de $\mathbb{R}$. Un *espacio de medida* es un conjunto sobre el cual se pueden hacer mediciones (se establecerá esto de forma precisa en esta sección). En cierto sentido, este procedimiento de abstracción es muy similar al que nos lleva de las idea de distancia (en la recta, el plano o el espacio) al concepto de espacio métrico.

Dado un conjunto cualquiera, comenzamos estableciendo los subconjuntos que van a medirse.

Definición II.1 *Sea X cualquier conjunto. Una σ-álgebra en X es una colección $\mathscr{X}$ de subconjuntos de X tales que se cumplen las condiciones siguientes.*

(i) *X está en $\mathscr{X}$.*

(ii) *Si A está en $\mathscr{X}$, su complemento A^c también está en $\mathscr{X}$.*

(iii) *Si $\{A_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{X}$, entonces su unión $\bigcup\limits_n A_n$ también está en $\mathscr{X}$.*

A la pareja $(X, \mathscr{X})$ se le llama espacio medible.

La razón de ser de la definición anterior es que las σ-álgebras de conjuntos van a ser las colecciones de conjuntos que vamos a poder medir (de ahí el nombre "espacio medible") y en ese mismo sentido los conjuntos pertenecientes a una σ-álgebra serán los dominios de las funciones a integrar.

Por las propiedades elementales de las operaciones con conjuntos, se sigue de la Definición II.1 que si $\{A_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{X}$, entonces su intersección

$$\bigcap_n A_n$$

también está en $\mathscr{X}$.

Algunos ejemplos de σ-álgebras son las siguientes.

1. El Conjunto Potencia.

   El *conjunto potencia* de un conjunto X dado, definido como la colección de todos los subconjuntos de X, es una σ-álgebra en X. Se suele denotar al conjunto potencia de X por 2^X.

2. Para todo X la colección $\{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra en X.

3. Para todo $Y \subset X$, la colección $\{\emptyset, X, Y, Y^c\}$ es una σ-álgebra en X.

4. La σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

   La colección de conjuntos L–medibles, introducidos en la Definición I.10 del capítulo anterior (página 22), es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$; se le conoce como la *σ-álgebra de Lebesgue* en $\mathbb{R}$. El que dicha colección sea una σ-álgebra es lo que nos dice el Teorema I.11; de hecho, podríamos reenunciar dicho teorema diciendo:

   "La colección de conjuntos L–medibles es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$".

Notamos que los tres primeros ejemplos son bastante triviales, y es en realidad muy sencillo verificar que son σ-álgebras; en cambio, recordemos que probar que la colección de conjuntos L–medibles es una σ-álgebra demandó de bastante más esfuerzo.

El resultado siguiente nos permitirá construir más ejemplos de σ-álgebras.

Proposición II.2 *Sea $\{\mathscr{X}_\alpha\}$ una colección de σ-álgebras sobre un conjunto X. Entonces la intersección de todas ellas es también una σ-álgebra sobre el conjunto X.*

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio II.2.

□

Como consecencia de este resultado, se sigue que dada cualquier colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X, de entre todas las σ-álgebras que contienen a $\mathscr{A}$ existe una que es la menor de todas: la intersección de todas ellas. Observamos también que siempre existe al menos una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{A}$: el conjunto potencia de X.

Juntamos las ideas del párrafo anterior en una definición.

Definición II.3 *Si $\mathscr{A}$ es una colección de subconjuntos de X, definimos la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$ como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a la colección $\mathscr{A}$.*

Es claro de esta definición, que toda σ-álgebra que contenga a la colección $\mathscr{A}$ contiene a su vez a la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$. En el caso en el que X sea un espacio métrico (o topológico) la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos juega un papel fundamental en el desarrollo de la teoría.

Definición II.4 *Sea X un espacio métrico (topológico) y sea $\mathscr{A}$ la colección formada por los subconjuntos abiertos de X. La σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$ se conoce como la σ-álgebra de Borel en X. A esta σ-álgebra la denotaremos por $\mathscr{B}(X)$ y a los conjuntos contenidos en ella los llamaremos borelianos, conjuntos de Borel ó conjuntos Borel medibles.*

De acuerdo a esta definición, la σ-álgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ de conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$ es la generada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Puesto que la colección de conjuntos L–medibles es una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos, debe contener también a todo $\mathscr{B}(\mathbb{R})$; en otras palabras, todo conjunto de Borel es L–medible. En sentido contrario, no es difícil convencerse de que los conjuntos en las clases F_σ y G_δ pertenecen todos a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (ejercicio II.4). Resulta entonces apropiado plantearnos la cuestión sobre si las σ-álgebras de Borel y de Lebesgue, definidas en $\mathbb{R}$, pudieran ser iguales. La respuesta a esto es negativa: existen ejemplos de conjuntos L–medibles que no pertenecen a la σ-álgebra de Borel (ver Apéndice A).

Otra forma muy útil de construir nuevos espacios medibles a partir de uno dado consiste en restringir una σ-álgebra a conjuntos más pequeños. Si $(X,\mathscr{X})$ es un espacio medible y $E \in \mathscr{X}$, entonces la colección $\mathscr{X}_E = \{E \cap Y \mid Y \in \mathscr{X}\}$ forma una σ-álgebra en E; esto puede el lector verificarlo por su cuenta (ejercicio II.5) y nos lleva a la siguiente definición.

Definición II.5 *Sea $(X,\mathscr{X})$ un espacio medible y $E \in \mathscr{X}$. Denotamos por $\mathscr{X}_E$ a la σ-álgebra en E dada por $\{E \cap Y \mid Y \in \mathscr{X}\}$. Decimos que $(E,\mathscr{X}_E)$ es el espacio medible heredado por E*

Ya hemos introducido las colecciones de conjuntos que podremos medir, y revisado algunas de sus propiedades generales; presentamos ahora la forma de medirlos.

Definición II.6 *Sea $(X,\mathscr{X})$ un espacio medible. Una medida en $(X,\mathscr{X})$ es una función $\mu : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^*$ tal que se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \mathscr{X}$.

3) Si $\{E_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{X}$, disjuntos a pares, entonces

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n).$$

Si μ es una medida en el espacio medible $(X,\mathscr{X})$, a la terna $(X,\mathscr{X};\mu)$ se le llama espacio de medida. En el caso en el que $\mu(X) < \infty$ diremos que $(X,\mathscr{X};\mu)$ es un espacio de medida finita, o equivalentemente que μ es una medida finita.

Observemos que esta definición abstrae las ideas más elementales de lo que sucede cuando medimos algún objeto, trátese de su volumen, su área, su longitud, su peso, etc. Si $(X,\mathscr{X};\mu)$ es un espacio de medida, μ mide los subconjuntos de X que es pueden medirse, es decir aquellos que están en la σ-álgebra $\mathscr{X}$.

Ejemplos fundamentales de medidas definidas en el espacio medible $\left(X, 2^X\right)$ con X arbitrario son los siguientes:

1. La Medida de Contar.
   Si $E \subset X$, definimos $\mu(E)$ como el número de elementos de E (pudiendo ser finito o infinito).
2. Las Medidas de Concentración.
   Para $x \in X$ fijo definimos la *medida de concentración en* x a la medida μ_x dada por:

$$\mu_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

El lector podrá verificar que ambos ejemplos satisfacen las tres condiciones de la Definición II.6 (ejercicio II.7).

Otro ejemplo muy importante de medida fue presentado ya en el Capítulo I, la medida de Lebesgue. El hecho de que la medida de Lebesgue es una medida ya lo probamos; en efecto, las propiedades (P1) y (P2) de la medida exterior muestran que $m(\cdot)$ cumple las condiciones (1) y (2) de la Definición II.6, y el Teorema I.16 nos proporciona la condición (3). En este caso, el espacio de medida es $(\mathbb{R}, \mathscr{X}; m)$, donde $\mathscr{X}$ es la σ-álgebra de Lebesgue. La existencia de conjuntos que no cumplen la condición de Carathéodory (Teorema I.23) nos impide extender la medida de Lebesgue a una medida en todo el conjunto potencia $2^{\mathbb{R}}$.

A partir de las medidas presentadas, se pueden construir infinidad de medidas nuevas efectuando algunas operaciones básicas: En particular, la suma de medidas en $(X, \mathscr{X})$ es a su vez una medida en $(X, \mathscr{X})$; también las restricciones de una medida μ en $(X, \mathscr{X})$ a cada espacio heredado $(E, \mathscr{X}_E)$ son medidas (ejercicio II.6).

El siguiente resultado general, resultará muy útil en la siguiente sección, ya que es fundamental para verificar ciertas propiedades de la integral.

Lema II.7 *Sea $(X, \mathscr{X}; \mu)$ un espacio de medida y tomamos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de conjuntos medibles tales que $B_n \subset B_{n+1}$ para todo n. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

DEMOSTRACIÓN.

Definimos para $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$\begin{aligned} F_1 &= B_1 \\ F_{n+1} &= B_{n+1} \setminus B_n. \end{aligned}$$

Los conjuntos F_n así definidos son medibles y disjuntos a pares. Además para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$B_n = \bigcup_{j=1}^{n} F_j \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} F_j,$$

por lo cual

$$\mu(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(F_n).$$

Haciendo $n \to \infty$ se sigue el resultado deseado.

$\square$

Ahora que ya sabemos cuáles son los conjuntos que se pueden medir y cómo medirlos, veremos cuáles son las funciones que es posible medir, y que por tanto será factible integrar. Generalizando la definición I.28 del capítulo anterior, establecemos:

Definición II.8 *Sea $(X, \mathscr{X})$ un espacio medible, y sea $E \in \mathscr{X}$. Se dice que la función $f : E \to \mathbb{R}^*$ es medible (con respecto a la σ-álgebra $\mathscr{X}$) si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$A_\alpha = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$$

está en la σ-álgebra $\mathscr{X}$.

NOTA: con frecuencia omitiremos especificar con respecto a qué σ-álgebra una función es medible, ya que será evidente del contexto.

Desde luego, esta definición contiene como un caso particular a las funciones L–medibles (Definición I.28 en el Capítulo I). En concreto, el que una función sea L–medible significa que es medible con respecto a la σ-álgebra de Lebesgue. Observamos también que en la definición de función medible no se hace referencia alguna a una medida; en otras palabras y como para los conjuntos, podemos medir a las funciones medibles de diversas maneras; esto es, dependiendo de nuestra elección de una medida.

De la misma forma que en la definición de función L–medible, podemos reemplazar el signo “mayor que” en la Definición II.8 por cualquiera de los otros signos de orden, sin alterar la definición; la prueba de este hecho es idéntica a la del caso particular de la medida de Lebesgue, como se podrá convencer el lector si repasa dicha la prueba con atención. El que los mismos argumentos funcionen en el caso general se debe a que para demostrar el resultado en el caso de funciones L–medibles usamos, tal vez sin darnos cuenta, exclusivamente propiedades establecidas en el Teorema I.11; es decir, derivamos el resultado en cuestión del hecho de que la clase de las funciones L–medibles es una σ-álgebra.

Algunos de los ejemplos presentados de funciones L–medibles (ver página 40) prevalecen en el caso general: para todo espacio medible $(X,\mathscr{X})$ se tiene que son medibles todas las funciones constantes, así como las funciones indicadoras de conjuntos en $\mathscr{X}$.

Cuando el espacio medible en cuestión es de la forma $\left(X,2^X\right)$, está claro que todas las funciones definidas en cualquier subconjunto de X son medibles (¿por qué?) Del otro lado de la moneda está la σ-álgebra $\{X,\emptyset\}$: En el espacio medible correspondiente solamente son medibles las funciones constantes (ejercicio II.9).

Los Teoremas I.29 y I.30 se generalizan sin mayor dificultad.

Teorema II.9 *Sea $(X,\mathscr{X})$ un espacio medible. Si f y g son funciones medibles con el mismo dominio, entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y fg son todas medibles. Si $\{f_n\}$ es una suceción de funciones medibles con el mismo dominio, entonces* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ *y* $\liminf f_n$ *son todas funciones medibles.*

DEMOSTRACIÓN.

Procedemos como en las demostraciones de los Teoremas I.29 y I.30; en dichas demostraciones, todas las implicaciones lógicas se siguen del Teorema I.11 (es decir, del hecho de que la colección de conjuntos L–medibles es una σ-álgebra) y pueden por lo tanto reproducirse en la situación general. Los detalles de esto quedan al lector (ejercicio II.10).

$\square$

El concepto de "casi en todas partes" introducido en la página 43, se extiende de forma natural a la situación general.

Definición II.10 *En un espacio de medida $(X,\mathscr{X};\mu)$ se dice que una proposición se cumple μ-casi en todas partes en X (abreviado μ-c.t.p.) ó para casi todo $x \in X$ si el conjunto de puntos de X para los cuales la proposición es falsa está contenido en un conjunto de medida cero.*

Sea X cualquier conjunto; dos ejemplos muy sencillos que ilustran la definición anterior son los siguientes.

1. Consideramos $\left(X, 2^X; \mu\right)$ con μ la medida de contar.
   Una proposición se cumple μ-casi en todas partes si y solamente si se cumple en todas partes. Esto es porque, en este caso, el único conjunto con medida cero es el vacío.
2. Para $x \in X$ tomamos $\left(X, 2^X; \mu_x\right)$ con μ_x la medida de concentración en el punto x.
   Aquí para que una proposición se cumpla μ_x-casi en todas partes, es necesario y suficiente que se cumpla en el punto x.

Estos ejemplos muestran dos caras opuestas y extremas de una misma situación: con la medida de contar importa lo que sucede en todos los puntos, mientras que en la medida de concentración solamente es relevante lo que pasa en un punto dado. Una situación intermedia, y muy diferente a ambos casos, es lo que sucede con por ejemplo la medida de Lebesgue.

Muchos de los resultados presentados (y otros que vamos a ver después) pudieran hacernos creer que la teoría general es casi una copia del caso particular de Lebesgue; si bien puede afirmarse que hay algo de cierto en eso, en realidad la afirmación está muy lejos de ser del todo cierta, y hay que tomar las cosas con cierto cuidado. Por ejemplo, la Proposición I.32 no es verdadera en general:

Tomemos la σ-álgebra en $\mathbb{R}$ generada por el intervalo $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, con la medida del complemento de $\mathbb{R}^+$ igual a cero; sea f una función creciente en $(-\infty, 0]$ y constante 1 en $\mathbb{R}^+$. Esta función es claramente no medible, pero es igual casi en todas partes a la función indicadora de $\mathbb{R}^+$, que sí es medible.

En realidad la Proposición I.43 es cierta para una clase especial de medidas que definimos a continuación.

Definición II.11 *Un espacio de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$ es completo si todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible. En ese caso, también diremos que μ es una medida completa.*

La medida de Lebesgue es completa, puesto que todo conjunto con medida exterior cero es L–medible. Las medidas de contar y de concentración son completas, como puede verificarse de forma directa de las definiciones. Demostrar la afirmación hecha en el párrafo precedente a la Definición II.11 queda como ejercicio para el lector. (ejercicio II.12)

Terminamos esta sección con un resultado que caracteriza a las funciones medibles.

Teorema II.12 *Sea $(X,\mathscr{X})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) *f es una función medible.*

b) *Para todo $A \subset \mathbb{R}$ abierto, el conjunto $f^{-1}(A)$ es medible.*

c) *Para todo $B \subset \mathbb{R}$ boreliano, el conjunto $f^{-1}(B)$ es medible.*

DEMOSTRACIÓN.

Las implicaciones $c \implies b$ y $b \implies a$ son triviales. Probemos entonces que $a \implies c$. Sea f medible y denotemos por $\mathscr{Z}$ a la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

$$\mathscr{Z} = \left\{ Z \subset \mathbb{R} \;\middle|\; f^{-1}(Z) \text{ es medible } \right\}.$$

Probamos a continuación que esta colección es una σ-álgebra.

$f^{-1}(\mathbb{R}) = X$ está en $\mathscr{X}$, por lo que se sigue que $\mathbb{R} \in \mathscr{Z}$. Si $Z \in \mathscr{Z}$ por definición se tiene que $f^{-1}(Z) \in \mathscr{X}$, y entonces el conjunto $\left(f^{-1}(Z)\right)^c = f^{-1}(Z^c)$ está en $\mathscr{X}$, de donde $Z^c \in \mathscr{Z}$. Para finalizar, sea $\{Z_n\}$ una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{Z}$; la imagen inversa de su unión es

$$f^{-1}\left(\bigcup_n Z_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(Z_n)$$

que está en $\mathscr{X}$ porque cada $f^{-1}(Z_n)$ está en $\mathscr{X}$. Entonces la unión $\bigcup_n Z_n$ está en $\mathscr{Z}$, y concluimos que $\mathscr{Z}$ es en efecto una σ-álgebra.

Por otra parte, como f es medible, los conjuntos (α,∞) están en $\mathscr{Z}$, y al ser $\mathscr{Z}$ una σ-álgebra debe contener a la σ-ágebra generada por dichos conjuntos. No es difícil probar que la σ-álgebra generada por los intervalos (α,∞) es la σ-álgebra de Borel (ejercicio II.18), por lo cual concluimos que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{Z}$. Pero esto último significa que la imagen inversa de todo boreliano es medible, que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

Notamos que en la prueba de este teorema tuvimos que recurrir a un artificio indirecto ya que no es posible así nada más tomar un boreliano cualquiera y verificar que su imagen inversa es medible: la razón de esto es que no sabemos cómo son los "borelianos arbitrarios." En este sentido esta prueba nos da una alternativa muy eficiente para demostrar que los conjuntos de Borel tienen tal o cual propiedad, siendo suficiente demostrar que los abiertos cumplen la propiedad en cuestión y que la colección de conjuntos que la cumplen es una σ-álgebra. A diferencia de lo que sucede con un boreliano arbitrario, sí podemos tomar un “abierto arbitrario” y concluir cosas a partir de ello. Incluso, en ocasiones como en la prueba del Teorema II.12 puede ser suficiente demostrar que la propiedad se cumple para una colección de conjuntos aún más pequeña; en el caso de ese teorema bastó considerar los intervalos de la forma (a,∞), dado que estos generan por si solos a la σ-álgebra de Borel.

Ejercicios.

II.1 *Considera la colección de subconjuntos $A \subset \mathbb{N}$ tales que o bien A tiene un número finito de elementos o bien A^c tiene un número finito de elementos. Decide si esta colección es o no una σ-álgebra en $\mathbb{N}$. Justifica tu respuesta.*

II.2 *Demostrar la Proposición II.2.*

II.3 *Verifica que la colección de subconjuntos de $X \subset \mathbb{R}$ tales que o bien X es a lo más numerable o bien X^c es a lo más numerable, es una σ-álgebra en el conjunto de los números reales.*

II.4 *Probar que todo conjunto de clase G_δ y todo conjunto de clase F_σ pertenecen a la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

II.5 *Sea $(X,\mathscr{X})$ un espacio medible, y $E \in \mathscr{X}$. Demostrar que si*

$$\mathscr{X}_E = \{A \cap E \mid A \in \mathscr{X}\},$$

entonces $(E,\mathscr{X}_E)$ es también un espacio medible.

II.6 *Sean $(X,\mathscr{X})$ y $(E,\mathscr{X}_E)$ como en el ejercicio anterior, y sea μ una medida en $(X,\mathscr{X})$. Probar que la restricción de μ a $\mathscr{X}_E$ es una medida en $(E,\mathscr{X}_E)$*

II.7 *Verifica que las medidas de contar y de concentración son en efecto medidas (ver página 61).*

II.8 *Verifica que si $(X,\mathscr{X};\mu)$ es un espacio de medida y $A \subset B$ son dos conjuntos en $\mathbf{X}$ se tiene que $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

II.9 *Sea X cualquier conjunto no vacío, y considera la σ-álgebra $\{X,\emptyset\}$. Prueba que si f es medible, entonces f es constante.*

II.10 *Prueba el Teorema II.1.* [Sugerencia: seguir las demostraciones correspondientes para el caso de Lebesgue]

II.11 *Sean μ y ν medidas en el espacio medible $(X,\mathscr{X})$ y $A \in \mathscr{X}$. Supóngase que $\mu(E) = \nu(E)$ para todo $E \subset A$ y que $\mu(F) = \nu(F)$ para todo $F \subset A$. Probar que $\mu = \nu$.*

II.12 *Sea $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida completo. Probar que si $f : X \to \mathbb{R}$ es medible y $g = f$ μ-c.t.p., entonces g es medible.*

II.13 *Sean $\mu_1,\cdots,\mu_n$ medidas en un espacio medible $(X,\mathscr{X})$. Prueba que $\mu(E) = \mu_1(E)+\cdots+\mu_n(E)$ es una medida en $(X,\mathscr{X})$.*

II.14 *Dada una colección numerable de medidas $\{\mu_n\}$ en el mismo espacio medible, prueba que μ definida por*

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(E)}{2^n}$$

es una medida. ¿Qué condiciones deben de cumplir las μ_n para que μ sea finita?

II.15 *Probar que si f es medible entonces $|f|$ también es medible. Mostrar con un ejemplo que el recíproco no es cierto.*

II.16 *Demuestra que si el espacio de medida $(X,\mathscr{X};\mu)$ es completo y $f = g$ c.t.p. entonces f es medible si y solamente si g es medible.*

II.17 *Sea $\mathscr{A}$ la σ-álgebra en $\mathbb{R}$ generada por la colección formada por todos los intervalos de la forma (a,∞). Prueba que todos los conjuntos abiertos están en la σ-álgebra $\mathscr{A}$.*

II.18 *Concluir del problema anterior que $\mathscr{A}$ es la sigma-álgebra de Borel en los reales.*

II.2 La Integral y la Convergencia Monótona

Seventeen seconds, a measure of life

THE CURE
(Seventeen Seconds)

Definiremos en esta sección la integral con respecto a una medida arbitraria. Nuestra definición general de integral, para funciones medibles en cualquier espacio de medida, se presenta en la Definición II.19. Presentamos, antes de dicha definición, una definición "alternativa" para funciones acotadas en espacios de medida finita (Definición II.17); dicha definición va en el sentido de la Definición I.38, y resulta ser en esencia un caso particular de la Definición II.19. Un resultado muy importante que presentamos en esta sección es el llamado *Teorema de la Convergencia Monótona* (Teorema II.22), que es el primero de los teoremas clásicos que indican el comportamiento de las integrales de límites de funciones. Otro resultado importante es el Teorema II.27, que permite definir fácilmente muchas nuevas medidas a partir de una medida dada.

Procediendo como en la Sección I.3, definimos primero la integral de funciones simples.

Definición II.13 *Sean $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida y E un conjunto medible. Una función $\varphi : E \to \mathbb{R}^*$ es simple si es medible y toma una cantidad finita de valores. Definimos la representación canónica de φ como en la Definición I.34. La integral de φ con respecto a μ es igual a*

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(A_j \cap E),$$

en el caso en que la suma de la derecha tenga sentido (incluyendo como válidas las convenciones aritméticas definidas en la página 41). Diremos que φ es integrable si la integral existe y es finita.

Consideremos, por ejemplo, el espacio medible $\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}\right)$ equipado con la medida de contar. En ese caso, una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es simple si y sólo si toma un número finito de valores, puesto que en el espacio considerado todas las funciones son medibles; esta función será integrable si y solamente si es igual a cero excepto para (a lo más) una colección finita de puntos.

La función, definida en ese espacio, dada por

$$\varphi(n) = (-1)^n$$

es un ejemplo de una función simple que no tiene integral sobre $\mathbb{N}$; no existe, puesto que no está definida la resta $\infty - \infty$.

Las propiedades sobre integrales de funciones simples que se demostraron en la Sección I.3 son ciertas también en el caso más general que tratamos ahora. Más en concreto:

Lema II.14 *Sea E un conjunto medible en un espacio de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$, y sean φ y ψ funciones simples con dominio E. Para c cualquier constante, se tiene que*

(a) $\displaystyle\int_E (c\varphi + \psi)\, d\mu = c\int_E \varphi\, d\mu \ + \int_E \psi\, d\mu.$

(b) *Si $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para casi todo $x \in D$, entonces*

$$\int_E \varphi\, d\mu \leq \int_E \psi\, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Puede probarse exactamente de la misma forma que el Lema I.37.

□

También se tiene el siguiente resultado que permitirá extender la integral a funciones medibles arbitrarias mediante aproximaciones por funciones simples.

Lema II.15 *Supongamos que $(X, \mathscr{X}; \mu)$ es un espacio de medida y que f es una función medible. Entonces*

(i) *Si $f \geq 0$, existe una sucesión de funciones simples $\{\varphi_n\}$ que converge puntualmente a f y tal que $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$.*

(ii) *Si $f \leq 0$, existe una sucesión de funciones simples $\{\psi_n\}$ que converge puntualmente a f y tal que $0 \geq \psi_n \geq \psi_{n+1} \geq f$.*

DEMOSTRACIÓN.

Para probar el primer inciso usaremos una construcción similar a la del Teorema I.40. Para f medible y no negativa definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$E_k^{(n)} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \frac{(k-1)}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \qquad k = 1, \ldots, 2^{2n}$$

$$E_{2^{2n}+1}^{(n)} = \{ x \in X \mid f(x) \geq 2^n \}.$$

Es claro de su definición que para cada n fija, los conjuntos $E_k^{(n)}$ son medibles y disjuntos a pares y que

$$\bigcup_{k=1}^{2^{2n}+1} E_k^{(n)} = X,$$

es decir que tenemos una partición del conjunto X en subconjuntos medibles. Definimos funciones simples φ_n por

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{2^{2n}+1} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^{(n)}}.$$

No es difícil ver que $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$. Probemos que $\varphi_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$; para x arbitrario, tomamos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $f(x) < 2^N$; para todo $n \geq \mathbb{N}$ tenemos las desigualdades

$$\varphi_n(x) \leq f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

Como los extremos de esta expresión convergen al mismo valor, este tiene que ser entonces $f(x)$.

El segundo inciso se sigue fácilmente del primero y se deja para el lector (ejercicio II.25) .

$\square$

Una observación sencilla, que no debemos pasar por alto, es que para todo $E \subset X$ es medible y φ una función simple, se tiene la igualdad

$$\int_E \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, \chi_E \, d\mu. \tag{1}$$

Verificar eso se deja al lector (ejercicio II.19).

El siguiente lema nos dice que a cada función simple no negativa podemos asociar una medida. Su demostración es directa y se deja también al lector.

Lema II.16 *Supongamos que $\varphi \geq 0$ es una función simple en un espacio de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Para cada $E \in \mathscr{X}$ escribimos*

$$\lambda_\varphi(E) = \int_E \varphi \, d\mu.$$

La función $\lambda_\varphi(\cdot)$ es una medida en $(X, \mathscr{X})$.

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio II.21.

□

NOTA: la medida λ_φ definida arriba depende también de la medida μ dada. Esta dependencia no se refleja en la notación; sin embargo, no habrá ambigüedad al usarla, ya que siempre quedará claro por el contexto cuál es la medida μ considerada. El Lema II.16 será generalizado en el Teorema II.27.

Definimos ahora la integral para funciones acotadas en espacios de medida finita. Esta definición generaliza a la Definición I.38 de el Capítulo I, y por lo tanto también a la integral de Riemann.

Definición II.17 *Sea $(X, \mathscr{X}; \mu)$ un espacio de medida finita. Para cada función acotada $f : X \to \mathbb{R}$ introducimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \Phi_\mu[f] &= \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \ \mid \varphi \text{ es simple y } \varphi(x) \leq f(x),\ \forall x \in X \right\} \\ \Psi_\mu[f] &= \left\{ \int_X \psi \, d\mu \ \mid \psi \text{ es simple y } \psi(x) \geq f(x),\ \forall x \in X \right\} \end{aligned}$$

En el caso en que se tenga la igualdad

$$\sup \Phi_\mu[f] = \inf \Psi_\mu[f] \tag{2}$$

definimos la integral de f en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ como

$$\int_X f \, d\mu = \sup \Phi_\mu[f] = \inf \Psi_\mu[f].$$

También llamaremas a esta cantidad "la integral de f sobre X con respecto a μ". Diremos que f es μ-integrable en X si la integral existe.

Desde luego, la Definición II.17 es consistente con la Definición II.13 para el caso de funciones simples (ejercicio II.20).

De la misma manera que en el caso de la integral de Lebesgue, se tiene el siguiente resultado fundamental, que establece que existe una relación entre las ideas de medibilidad e integración; este resultado permite hacer una generalización útil y razonable de la Definición II.17:

Teorema II.18 *Sea* $(X, \mathscr{X}; \mu)$ *un espacio de medida finita, y sea* $f : X \to \mathbb{R}$ *acotada. Entonces* f *es medible si y solamente si se satisface la igualdad* (2).

DEMOSTRACIÓN.

Exactamente igual a la prueba del Teorema (I.40).

□

Como se discutió sobre el final del capítulo anterior, si se busca tener una definición de integral que incluya a funciones no acotadas (o definidas en un espacio de medida no finita) no resulta conveniente pedir que se cumpla la igualdad (2). La razón de esto es la siguiente:

Supongamos que $f(x) > 0$ para todo x en un conjunto de medida infinita, y sea $\psi \geq f$ una función simple. Entonces existe $c > 0$ tal que $\mu\left(\psi^{-1}(c)\right) = \infty$, debido a que ψ toma una cantidad finita de valores. Y entonces se tiene que

$$\Psi_\mu[f] \subset \{+\infty\}.$$

De modo similar, si $f < 0$ en un conjunto de medida infinita, entonces

$$\Phi_\mu[f] \subset \{-\infty\}.$$

De esta forma, si f no se anula afuera de algún conjunto de medida finita, se tiene que al menos uno de los dos conjuntos $\Phi_\mu[f]$ o $\Psi[f]$ no proporciona ninguna información relevante acerca de la función, y no debería por tanto involucrarse en una definición razonable de su integral. Un ejemplo en que puede apreciarse la situación descrita, es el de la función $f(x) = 1/x^2$ presentado al final del Capítulo I.

Una salida muy conveniente a esta encrucijada nos la da el Teorema II.18, que nos permite pedir medibilidad en vez de requerir que se cumpla la igualdad (2).

En muchas situaciones (funciones acotadas en dominios de medida finita) ambos requisitos resultan equivalentes por completo; pero el supuesto de medibilidad puede manejarse sin problema también en los casos en que la función no sea acotada o el espacio no sea de medida finita.

De acuerdo a la intuición geométrica heredada de los cursos de cálculo integral, la integral para funciones positivas será “el área bajo la curva,” mientras que para funciones negativas será “menos el área sobre la curva.” A continuación procederemos a establecer eso de una manera precisa.

Para definir la integral en general usaremos la siguiente notación. Dada una función $f : X \to \mathbb{R}^*$ escribimos

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Definición II.19 *Sea $(X, \mathscr{X}; \mu)$ un espacio de medida, y f una función medible. Definimos la integral de f en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ como*

$$\int_X f \, d\mu = \sup \Phi_\mu[f_+] + \inf \Psi_\mu[f_-],$$

en el caso de que la suma de la derecha tenga sentido. También nos referiremos a esta cantidad como "la integral de f sobre X con respecto a μ". Si además se tiene que

$$\begin{aligned} \sup \Phi_\mu[f_+] &< +\infty \\ \inf \Psi_\mu[f_-] &> -\infty \end{aligned}$$

diremos que f es integrable en $(X, \mathscr{X}; \mu)$.

Para el caso en el que f es una función simple, no es difícil convencerse que la Definición II.19 es consistente con la Definición II.13. Notamos también que las integrales de funciones positivas (o negativas) c.t.p. siempre están definidas (aunque las funciones pueden no ser integrables).

Por supuesto, la Definición II.19 también es consistente con la Definición II.17 para funciones acotadas en espacios de medida finita; esto es un resultado crucial, y si no fuera cierto estaríamos en dificultades con nuestras definiciones. Presentamos este resultado en el Teorema II.21. Probamos antes un lema.

Lema II.20 *Sea f una función medible en un espacio de medida finita $(X, \mathscr{X}; \mu)$, y sean E_1 y E_2 conjuntos medibles tales que $X = E_1 \cup E_2$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in E_1 \cap E_2$. Entonces*

$$\sup \Phi_\mu[f] = \sup \Phi_\mu[f|_{E_1}] + \sup \Phi_\mu[f|_{E_2}],$$

donde $f|_{E_j}$ es la restricción de f al conjunto E_j.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $w \in \Phi_\mu[f]$; por definición, existe una función simple $\varphi \leq f$ tal que

$$w = \int_X \varphi \, d\mu.$$

En particular, $\varphi(x) \leq 0$ para todo $x \in E_1 \cap E_2$. Definimos funciones simples por

$$\varphi_i : E_i \to \mathbb{R} \qquad i = 1,2.$$
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in E_i \setminus E_j \\ \\ 0, & \text{si } x \in E_j \end{cases}$$

Es claro que $\varphi(x) \leq \varphi_i(x) \leq f|_{E_i}$ para todo $x \in E_i$; por esto se tiene que

$$w \leq \int_{E_1} \varphi_1 \, d\mu + \int_{E_2} \varphi_2 \, d\mu.$$

Como la expresión en el lado derecho de la desigualdad de arriba es un elemento del conjunto $\Phi_\mu[f|_{E_1}] + \Phi_\mu[f|_{E_2}]$, y w es un elemento arbitrario de $\Phi_\mu[f]$, se sigue que

$$\sup \Phi_\mu[f] \leq \sup \Phi_\mu[f|_{E_1}] + \sup \Phi_\mu[f|_{E_2}].$$

Tomemos ahora $z \in \Phi_\mu[f|_{E_1}] + \Phi_\mu[f|_{E_2}]$ arbitrario, y sean $\hat{\varphi}_i \leq f|_{E_i}$ funciones simples tales que

$$z = \int_{E_1} \hat{\varphi}_1 \, d\mu + \int_{E_2} \hat{\varphi}_2 \, d\mu.$$

Definiendo (donde $i \neq j$)

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \hat{\varphi}_i(x), & \text{si } x \in E_i \setminus E_j \\ \\ 0, & \text{si } x \in E^i \cap E^j, \end{cases}$$

se sigue que $\hat{\varphi}_i(x) \leq \hat{\varphi}(x) \leq f(x)$ para todo $x \in E_i$, y $\hat{\varphi}_i(x) \leq 0$ para todo $x \in E_1 \cap E_2$. Por lo tanto

$$z \leq \int_X \hat{\varphi} \, d\mu \in \Phi_\mu[f].$$

Al ser z arbitrario, se sigue que

$$\sup \Phi_\mu[f] \geq \sup {}_\mu[f|_{E_1}] + \sup {}_\mu[f|_{E_2}]$$

lo que concluye la demostración.

□

El teorema siguiente nos dice que la Definición II.17 es consistente con la Definición II.19. En efecto, el lado izquierdo de (3) es la integral de f en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ según la Definición II.17, mientras el lado derecho es la misma integral según la Definición II.19.

Teorema II.21 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función acotada y medible en un espacio de medida finita $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Entonces*

$$\sup \Phi_\mu[f] = \sup \Phi_\mu[f_+] + \inf \Psi_\mu[f_-] \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN.

Observamos que $f = f_+ + f_-$ y que podemos escribir estas funciones como

$$f_\pm(x) = \frac{f \pm |f|}{2}$$

Se sigue entonces del Teorema II.9 y el ejercicio II.15 que tanto f_+ como f_- son medibles.

Del Lema II.20 se tiene que

$$\sup \Phi_\mu[f] = \sup \Phi_\mu[f|_{V_+}] + \sup \Phi_\mu[f|_{V_-}], \tag{4}$$

donde

$$V_\pm = \{x \in X \mid f(x) = f_\pm(x)\}.$$

Como $f_\pm(x) = 0$ para todo $x \in V_\mp$, se sigue también del Lema II.20 que

$$\begin{aligned} \sup \Phi_\mu[f_\pm] &= \sup \Phi_\mu[f_\pm|_{V_\pm}] + \sup \Phi_\mu[f_\pm|_{V_\mp}] \\ &= \sup \Phi_\mu[f_\pm|_{V_\pm}]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4) obtenemos

$$\sup \Phi_\mu[f] = \sup \Phi_\mu[f_+] + \sup \Phi_\mu[f_-].$$

Finalmente, como f_- es medible sabemos que

$$\sup \Phi_\mu[f_-] = \inf \Psi_\mu[f_-]$$

y sustituyendo arriba, se obtiene la igualdad buscada.

□

Tenemos pues, que nuestras dos definiciones de integral para funciones medibles son consistentes entre si. Al ser la Definición II.19 la más general de las dos, la adoptaremos en los subsecuente como nuestra definición de integral (haciendo la observación de que en el caso acotado la hipótesis de medibilidad puede sustituirse por la igualdad (2) de “tipo integral de Riemann”).

Otro cuestionamiento que puede plantearse sobre la Definición II.19 es que se esperaría que las integrales de funciones en dominios no acotados en $\mathbb{R}$ sea consistente con las integrales impropias que se estudian en cálculo (tanto de funciones acotadas como de funciones definidas sobre dominios no acotados). Esto es por fortuna lo que ocurre en muchas situaciones, como puede verse en el Corolario II.24).

El siguiente es el primero de los llamados "teoremas de convergencia" para las integrales en espacios de medida. Estos se refieren a resultados que dan condiciones que permiten intercambiar límites con integrales.

Teorema II.22 (Convergencia Monótona.) *Sea $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ una sucesión no decreciente de funciones no negativas, en un espacio de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Si $f_n \to f$ puntualmente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que lo que queremos probar es la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup \Phi_\mu[f_n] \Big) = \sup \Phi_\mu[f]. \tag{5}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\Phi_\mu[f_n] \subset \Phi_\mu[f]$ al ser $f_n \leq f$. Se sigue inmediatamente que

$$\sup \Phi_\mu[f_n] \leq \sup \Phi_\mu[f].$$

Tomando el límite $n \to \infty$ obtenemos la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup \Phi_\mu[f_n] \Big) \leq \sup \Phi_\mu[f].$$

Para probar la desigualdad opuesta, fijamos un $\alpha \in (0,1)$ arbitrario, y tomamos una función simple $\varphi \leq f$ también arbitraria. Definimos una colección numerable de conjuntos B_n por

$$B_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Estos B_n son medibles por ser $f_n - \alpha\varphi$ funciones medibles; además, al tenerse que $f_n \leq f_{n+1}$, se sigue que $B_n \subset B_{n+1}$. También, dado que para toda $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ converge a $f(x) > \alpha\varphi(x)$, tenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X.$$

Por otra parte, como por definición de B_n se tiene que $\alpha\varphi\,\chi_{B_n} \leq f_n$, se sigue que

$$\int_{B_n} \alpha\varphi\, d\mu \leq \sup \Phi_\mu[f_n].$$

Usando el resultado y la notación del Lema II.16, escribimos la desigualdad de arriba como

$$\lambda_{\alpha\varphi}(B_n) \leq \sup \Phi_\mu[f_n], \tag{6}$$

siendo $\lambda_{\alpha\varphi}(\cdot)$ una medida. Aplicando el Lema II.7 a la sucesión de conjuntos B_n obtenemos

$$\lambda_{\alpha\varphi}(X) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{\alpha\varphi}(B_n). \tag{7}$$

Se sigue de (6) y (7) que

$$\int_X \alpha\varphi\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\sup \Phi_\mu[f_n]\Big).$$

Por ser $\alpha \in (0,1)$ arbitrario, concluimos que

$$\int_X \varphi\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\sup \Phi_\mu[f_n]\Big).$$

El lado izquierdo de la desigualdad de arriba es un elemento arbitrario de $\Phi_\mu[f]$, por lo que tomando el supremo tenemos la desigualdad deseada.

□

Corolario II.23 *Sea* $0 \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots$ *una sucesión funciones, en un espacio de medida* $(X, \mathscr{X}; \mu)$*. Si* $f_n \to f$ *puntualmente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Ahora, lo que hay que probar es que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\inf \Psi_\mu[f_n]\Big) = \inf \Psi_\mu[f]. \tag{8}$$

Esto puede obtenerse a partir del Teorema II.22, multiplicando todo por -1. Los detalles quedan como ejercicio para el lector (ejercicio II.24).

□

Corolario II.24 *Sean $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida, y Sea $\{A_n\}$ una colección de conjuntos medibles tales que $A_n \subset A_{n+1}$ y con su unión igual a X. Si $f \geq 0$, entonces se tiene que*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f_n(x) = f(x)\,\chi_{A_n}(x)$. Está claro que se satisfacen las hipótesis del Teorema II.22, y el resultado se sigue entonces de forma inmediata.

□

Desde luego, la hipótesis $f \geq 0$ en el Corolario II.24 puede sustituirse por $f \leq 0$, y se obtiene el mismo resultado.

Los espacios $(X,\mathscr{X};\mu)$ que pueden descomponerse como en el Corolario $II.24$ de forma que los A_n tengan todos medida finita, tienen un nombre particular:

Definición II.25 *Si el espacio $(Y,\mathscr{Y};\nu)$ es tal que existen conjuntos medibles E_n con $\mu(E_n) < \infty$ para toda n y $\cup E_n = Y$ diremos que $(Y,\mathscr{Y};\nu)$ es un espacio es de medida σ-finita. De modo equivalente, diremos también que ν es una medida σ-finita.*

El Corolario II.24 nos garantiza que las funciones que tienen integrales impropias de Riemann son integrables en el sentido de Lebesgue, siempre y cuando no cambien de signo; en realidad, serán integrables si no cambian "demasiado" de signo. Esto puede precisarse con el siguiente resultado que, si bien es sencillo de demostrar, da una caracterización muy útil de las funciones integrables en un espacio de medida.

Proposición II.26 *Sea $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida y $f : E \to \mathbb{R}^*$ medible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *f es integrable.*

(ii) *f_+ y f_- son ambas integrables.*

(iii) *$|f|$ es integrable.*

DEMOSTRACIÓN.

El resultado se sigue directamente de la Definición II.19. Los detalles quedan como ejercicio para el lector (ejercicio II.27).

□

En particular, si consideramos la medida de contar en $\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}\right)$ se tiene que una sucesión $\{a_n\}$ es integrable si y solamente si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{10}$$

En ese caso se tiene que la integral es

$$\int_{\mathbb{N}} \{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Sabemos por resultados de cálculo que (10) (la convergencia absoluta de la serie) es equivalente a que el valor de la suma de los elementos de la sucesión no dependa del orden en que los sumemos; esto va de acuerdo con el paradigma de que el valor de una integral debe de depender sólo de la función y del dominio. Sería inadecuado, por decir lo menos, que una misma función en un mismo espacio de medida tuviera integrales distintas dependiendo de donde empezáramos a integrar.

Una situación muy similar es lo que ocurre con la función (ver figura II.2)

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Esta función no es Lebesgue integrable en el intervalo $(0, \infty)$; tanto el área bajo la gráfica de f_+ como el área sobre la gráfica de f_- son infinitas, y no podemos por tanto restar una de la otra. Es cierto, sin embargo, que si vamos sumando y restando áreas en algún orden particular, puede ser que la serie resultante converja a algún valor; en particular, la integral de f en $(0, \infty)$ existe en el sentido de las integrales impropias de Riemann, y de hecho se sabe que en ese sentido (ver e.g. [1]):

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Se observa pues, que la teoría de la medida establece una fuerte analogía que por un lado tiene a las series convergentes que no son absolutamente convergentes, y por el otro lado a las funciones que no son Lebesgue integrables, pero que su oscilación entre valores positivos y negativos hace que la integral impropia exista.

No está por demás mencionar que es por completo válido – y hasta necesario en muchas situaciones– considerar integrales como la que aparece en (11), sin que sean la integral con respecto a alguna medida; de la misma manera que es válida y a veces necesario el considerar límites de series que no son absolutamente

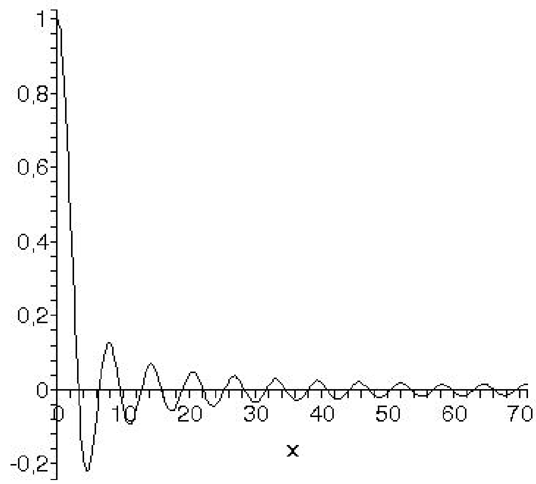

Figura II.1: Una función con integral impropia que no es Lebesgue integrable.

convergentes. Existen definiciones de integral que incluyen estos casos. Una de estas definiciones, tal vez la más conocida, es la *integral de Henstock-Kurzweil*; en el Apéndice C se presenta un breve esbozo de esta integral y algunas de sus propiedades.

Terminamos esta sección con el siguiente resultado, que generaliza al Lema 6; notemos que en su demostración se aplica dos veces la convergencia monótona.

Teorema II.27 *Sea $f \geq 0$ integrable en $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Entonces*

$$\lambda_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

define una medida en $(X, \mathscr{X})$.

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema II.15 existe una sucesión de funciones simples

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \dots$$

que converge a f, y tal que $\varphi_n \leq f$ para toda n. Por el resultado para funciones simples (Lema II.16), tenemos que si

$$\lambda_n(E) = \int_E \varphi_n \, d\mu,$$

entonces cada $\lambda_n(\cdot)$ es una medida en $(X, \mathscr{X})$. Aplicando el Teorema II.22 a la sucesión $\{\varphi_n\}$ se obtiene

$$\lambda_f(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(E).$$

El resultado buscado se concluye del ejercicio II.30.

$\square$

Ejercicios.

II.19 *Verificar la igualdad* (1).

II.20 *Sea φ una función simple en un espacio de medida finita $(X, \mathscr{X}; \mu)$, con representación canónica*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{A_j}(x).$$

Probar que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(A_j) = \sup \Phi_\mu[\varphi] = \inf \Psi_\mu[\varphi].$$

II.21 *Demuestra que, para toda medida μ en $(X, \mathscr{X})$ y para toda función simple no negativa e integrable φ, la expresión*

$$\lambda_\varphi(E) = \int_E \varphi \, d\mu$$

define una medida en $(X, \mathscr{X})$.

II.22 *Demostrar el Teorema II.18 siguiendo la demostración del Teorema I.40.*

II.23 *Considera el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathscr{L})$, donde L es la $\sigma-$álgebra de Lebesgue. Usa el resultado del problema anterior para construir dos medidas μ_1 y μ_2 en este espacio, que cumplan las igualdades*

$$\begin{aligned} \mu_1([a,b]) &= b^3 - a^3 \\ \mu_2([a,b]) &= \max\left\{0, b^2 - a^2\right\}, \end{aligned}$$

para todos $a \leq b$ en los reales.

II.24 *Demostrar el Corolario II.23.*

II.25 *Completar la prueba del Lema II.15 (página 70).*

II.26 *Sean f y g funciones medibles en $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Prueba que si $f = g$ c.t.p. y f es integrable, entonces g es integrable y*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$$

para todo E medible.

II.27 *Demostrar la Proposición II.26*

II.28 *Sea $f \leq 0$ una función medible en $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Demuestra que existe una sucesión de funciones simples $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}$ que converge puntualmente a f.*

II.29 *Considera los números naturales con la medida de contar. Usando el teorema de la convergencia monótona, verifica que*

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

II.30 *Sea $\{\mu_n\}$, una colección numerable de medidas ($n \in \mathbb{N}$), tales que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo E medible y $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que*

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$

define una medida. Sugerencia: aplicar el Teorema II.22 al espacio del problema anterior para probar la aditividad.

II.31 *Probar que $\mu(E) = 0 \implies \lambda_f(E) = 0$.*

II.32 *Sea $(X, \mathscr{X}; \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y A_n una colección de conjuntos de medida finita cuya unión es todo el conjunto X. Demostrar que para toda f integrable se tiene la igualdad*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu.$$

Sugerencia: probar primero para el caso en que los A_n son disjuntos a pares.

II.33 *Demostrar que f es integrable (en cualquier espacio de medida) si y solamente si $|f|$ es integrable.*

II.34 *Da un ejemplo de una función no negativa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ tal que la medida*

$$\lambda_g(E) = \int_E g(x)\, dx$$

no sea completa. Nota: aquí y en adelante, la notación dx representa integración con respecto a la medida de Lebesgue.

II.35 *Verifica que, en el problema anterior, la función g no puede tomarse positiva c.t.p.*

II.36 *Probar lo siguiente:*

(i) *Si $f \leq g$ entonces*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

(ii) *Si $f \geq 0$ y $E \subset F$ son medibles, entonces*

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu.$$

II.37 *Considera la sucesión de funciones simples $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ que convergen a f en el Lema II.15. Verifica que si f es acotada entonces la convergencia es uniforme; explica lo que sucede si f no es acotada.*

II.38 *Sea $(X, \mathscr{X}; \mu)$ un espacio de medida, y sea $E \in \mathscr{X}$ tal que $0 < \mu(E) < \infty$. Supongamos que para cierta función medible se tiene que $a \leq f(x) \leq b$ para casi todo $x \in E$. Demostrar que*

$$a \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \leq b.$$

II.39 *Usar el ejercicio anterior para demostrar que si S es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y la integral*

$$\int_E f\, d\mu$$

está en S para todo $E \in \mathscr{E}$ entonces $f(x) \in S$ para casi todo $x \in X$. Sugerencia: *todo abierto en $\mathbb{R}$ es la unión numerable de intervalos abiertos.*

II.3 El Teorema de la Convergencia Dominada

Inventando el problema general, hemos vencido la principal dificultad que ofrecía el problema particular

GEORGE POLYA
(Cómo plantear y resolver problemas)

En esta sección demostraremos tres resultados muy importantes acerca de la integral. El primero de ellos (Teorema II.28) nos dice que la integral es lineal; el segundo (Teorema II.29) se conoce como el Lema de Fatou, que si bien tiene la apariencia de ser un resultado técnico, resulta ser muy importante ya que se siguen de él una gran cantidad de consecuencias de forma casi inmediata (ver por ejemplo los corolarios que le siguen). El tercero de ellos (Teorema II.32) es conocido como el Teorema de la Convergencia Dominada, y se considera uno de los resultados más trascendentes de de la teoría de la medida. La herramienta principal para las demostraciones de los resultados de esta sección es el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema II.22) presentado en la sección anterior.

A continuación probaremos que la integral con respecto a cualquier medida es una transformación lineal en el espacio vectorial de las funciones integrables.

Teorema II.28 *Sea $(X, \mathscr{X}; \mu)$ un espacio de medida. Sean*

$$f, g : X \to \mathbb{R}^*$$

funciones tales que sus integrales sobre X con respecto a μ existan. Entonces,

(i) *Para todo $c \in \mathbb{R}$ la integral de cf existe y se tiene que*

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$$

(ii) *Si está definida la suma*

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

entonces la integral de $f + g$ existe y se tiene que

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

(iii) *Si $f \leq g$ μ-c.t.p. , entonces*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$$

DEMOSTRACIÓN.

(i) Si $c = 0$ el resultado es trivial. El resultado para $c \in \mathbb{R}$ y f simple se prueba como el Lema I.37 de la sección I.3. Supongamos ahora que $c > 0$ y que f es integrable; consideremos sucesiones

$$0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 \geq \psi_n \geq \psi_{n+1}$$

de funciones simples que convergen puntualmente a f_+ y a f_-, respectivamente (la existencia de estas sucesiones está garantizada por el Lema II.15 de la sección anterior). La sucesión $0 \leq c\varphi_n \leq c\varphi_{n+1}$ de funciones simples converge a $(cf)_+$ y la sucesión de funciones simples $0 \geq \psi_n \geq \psi_{n+a}$ converge a $(cf)_-$. Aplicando el Teorema II.22 se obtiene entonces que

$$\begin{aligned}
\int_X cf\, d\mu &= \int_X (cf)_+\, d\mu + \int_X (cf)_-\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X c\varphi_n\, d\mu + \int_X c\psi_n\, d\mu \\
&= c\left[\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\, d\mu\right] \\
&= c\left[\int_X f_+\, d\mu + \int_X f_-\, d\mu\right] \\
&= c\int_X f\, d\mu.
\end{aligned}$$

El caso para $c < 0$ se prueba de forma análoga.

(ii) Supongamos primero que f y g son ambas funciones no negativas, y sean $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ y $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}$ sucesiones de funciones que convergen a f y g respectivamente. Por el Teorema II.22 se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_X \varphi_n\, d\mu + \int_X \psi_n\, d\mu\right] \\
&= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.
\end{aligned}$$

El caso en el que f y g son ambas no positivas se prueba de forma análoga usando el Corolario II.23. Si tenemos que $f \geq 0$ y $g \leq 0$, se tiene que

$$(f+g)_+ + (-g) = f + (-(f+g)_-)$$

por lo que, usando el resultado de arriba, obtenemos que

$$\int_X (f+g)_+ \, d\mu + \int_X (-g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X (-(f+g)_-) \, d\mu,$$

de donde, por el inciso (i), concluimos que

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, d\mu &= \int_X (f+g)_+ \, d\mu + \int_X (f+g)_- \, d\mu \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

Haciendo uso de todo esto, tenemos que si f y g son cualesquiera dos funciones integrables

$$\begin{aligned} \int_X (f+g) \, d\mu &= \int_X (f_+ + g_+) \, d\mu + \int_X (f_- + g_-) \, d\mu \\ &= \int_X f_+ \, d\mu + \int_X g_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu + \int_X g_- \, d\mu \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

(iii) Se sigue de aplicar el segundo inciso al tenerse

$$\int_X (g-f) \, d\mu \geq 0.$$

□

Como se mencionó ya con anterioridad, el Teorema I.42 es un caso particular de lo que acabamos de demostrar.

Teorema II.29 (Lema de Fatou) *Sea $\{f_n\}$ una colección de funciones integrables en un espacio de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Entonces*

(i) *Si $f_n \geq 0$ para toda n, entonces*

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu.$$

(ii) *Si $f_n \leq 0$ para toda n, entonces*

$$\int_X \limsup f_n \, d\mu \geq \limsup \int_X f_n \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $f_n \geq 0$ para toda n. Definimos una colección de funciones g_n por

$$g_n = \inf\{f_k \mid k \geq n\}.$$

Se tiene que $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$, y por el Teorema II.9 todas las funciones g_n son medibles; de hecho, puesto que $0 \leq g_n \leq f_n$ las funciones g_n son integrables. Podemos aplicar el Teorema II.22 obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &= \int_X \sup{}_n \, g_n \, d\mu \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.
\end{aligned}$$

La desigualdad final se sigue del hecho de que para toda n

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \int_E f_n \, d\mu.$$

Hemos probado el primer inciso. El segundo inciso se sigue del primero fácilmente, multiplicando todo por menos uno (ejercicio II.40).

□

La importancia del Lema de Fatou quedará clara con los siguientes dos corolarios. El primero de ellos caracteriza a las funciones que se anulan casi en todas partes; el segundo generaliza el Teorema de la Convergencia Monótona para sucesiones que en vez de converger puntualmente, sólo convergen casi en todas partes.

Corolario II.30 *Sea $f \geq 0$ integrable en $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Entonces $f = 0$ μ-c.t.p. con respecto a μ si y solamente si*

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $f = 0$ casi en todas partes con respecto a μ, y denotemos por E al conjunto donde f es positiva. Se sigue del Teorema II.29 que

$$\begin{aligned}
\int_X f\, d\mu &\leq \int_X \lim_{n\to\infty} n\, \chi_E\, d\mu \\
&= \int_X \liminf_{n\to\infty} n\, \chi_E\, d\mu \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_X n\, \chi_E\, d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $f \geq 0$ por hipótesis, se tiene la igualdad buscada.

La implicación en sentido opuesto no requiere del Lema de Fatou, y queda como ejercicio para el lector (ejercicio II.46).

□

El siguiente corolario generaliza al Teorema de Convergencia Monótona (Teorema II.22) al no requerir convergencia en todo punto, sino solamente "casi en todas partes".

Corolario II.31 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión no decreciente de funciones no negativas que convergen μ-c.t.p. a una función f. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea

$$M = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \right\},$$

y sea N el complemento de M. Por hipótesis se tiene que $\mu(N) = 0$. Definimos $g_n = f_n\, \chi_M$. Es claro que $\{g_n\}$ es una sucesión no decreciente de funciones no negativas que convergen puntualmente a $f \cdot \chi_M$. Se tiene entonces por el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema II.22) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu &= \int_X f \cdot \chi_M\, d\mu \\
&= \int_M f\, d\mu. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Como se tiene que μ-c.t.p. se cumplen las igualdades $g_n - f_n = 0$ y $f - f \cdot \chi_M = 0$, usando el Corolario II.30 y el Teorema II.28 se sigue que

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X g_n \, d\mu \tag{13}$$
$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_M \, d\mu = \int_M f \, d\mu. \tag{14}$$

Sustituyendo respectivamente (13) y (14) en ambos lados de la igualdad (12) obtenemos el resultado deseado.

□

El resultado siguiente es, sin duda alguna, una de las joyas más preciadas en la corona de la teoría de la medida.

Teorema II.32 (Teorema de la Convergencia Dominada) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ que convergen puntualmente a una función f. Si existe una función g, integrable en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ con $g \geq |f_n|$ μ-c.t.p. para toda n, entonces f es integrable en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos primero el caso en el que $f_n(x) \to f(x)$ para toda $x \in X$. En este caso, por el Teorema II.9 se tiene que f es medible; al ser g integrable con $0 \leq |f| \leq g$ se sigue que $|f|$ es integrable (ver el ejercicio II.42); y de acuerdo a la Proposición II.26, también lo es f. Consideramos la sucesión de funciones no negativas $\{g + f_n\}$ que convergen puntualmente a $g + f$. Aplicando el Teorema II.29 a dicha sucesión se obtiene

$$\begin{aligned} \int_X (g+f) \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g+f_n) \, d\mu \\ &= \int_X g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu. \tag{15}$$

De forma similar, aplicando el segundo inciso del Teorema II.29 a la sucesión $\{f_n - g\}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_X (f-g)\, d\mu &\geq \limsup_{n\to\infty} \int_X (f_n - g)\, d\mu \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu - \int_X g\, d\mu,\end{aligned}$$

por lo cual

$$\int_X f\, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \tag{16}$$

De las desigualdades (15) y (16) se concluye que

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

□

En ocasiones, se necesita tomar límites de integrales de funciones que dependen continuamente de un parámetro definido en un espacio métrico (digamos, para fijar ideas, en un intervalo en $\mathbb{R}$). Tenemos para estos casos el siguiente corolario.

Corolario II.33 *Consideramos un intervalo (a,b) en $\mathbb{R}$ y sea $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $f : X \times (a,b) \to \mathbb{R}^*$ es tal que para todo $y \in (a,b)$ la función $f_y(x) = f(x,y)$ es integrable en $(X,\mathscr{X};\mu)$, y para todo $x \in X$ la función $f_x(y) = f(x,y)$ es continua. Si existe una función integrable $g : X \to \mathbb{R}^*$ tal que $f_y \leq g$ para toda $y \in (a,b)$, entonces para cada $y_0 \in (a,b)$ fijo se tiene*

$$\lim_{y\to y_0} \int_X f_y\, d\mu = \int_X f_{y_0}\, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Se sigue del Teorema II.32 (ejercicio II.45).

□

Una situación que se presenta con suma frecuencia es la de tener integrales de funciones que dependen de un parámetro y querer derivar con respecto a dicho parámetro; esto es, evaluar expresiones de la forma

$$\frac{d}{dx} \int_X f(x,y)\, dy.$$

Una pregunta natural, y muy común, es si será o no válido derivar "dentro del signo de integral." El Teorema de la Convergencia Dominada es la herramienta por excelencia para abordar este tipo de cuestiones. El siguiente resultado ilustra esto.

Teorema II.34 *Sea $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida, y sea $f : X \times (a,b) \to \mathbb{R}^*$ una función tal que para todo $x \in X$ se tiene que la función $f_x(y) \equiv f(x,y)$ es derivable en el intervalo (a,b), y tal que para todo $y \in (a,b)$ se tiene que la función $f^y(x) \equiv (x,y)$ es medible en $(X,\mathscr{X})$. Si para un $y_0 \in (a,b)$ dado, la función f^{y_0} es integrable y además existe una función integrable $g : X \to \mathbb{R}^*$ tal que*

$$\left| \frac{df_x}{dy}(y) \right| \leq g(x),$$

para todo $(x,y) \in X \times (a,b)$, entonces

$$\frac{d}{dy}\left[\int_X f^y(x)\, d\mu(x) \right] = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x).$$

DEMOSTRACIÓN.

Vamos a probar primero que las funciones $f^y(x)$ son integrables para toda $y \in (a,b)$. Por el Teorema del Valor Medio (ver, por ejemplo [51]), para todo $x \in X$ existe un punto $z(x)$ entre y y y_0 tal que

$$\begin{aligned} \frac{f^y(x) - f^{y_0}(x)}{y - y_0} &= \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} |f^y(x)| &\leq |f^{y_0}| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) \right| |y - y_0| \\ &= |f^{y_0}| + \left| \frac{df_x}{\partial y}\Big(z(x)\Big) \right| |y - y_0| \\ &\leq |f^{y_0}| + |g(x)|\, |y - y_0|. \end{aligned}$$

Como, por hipótesis, las funciones f^{y_0} y g son integrables y f^y es medible, se tiene que f^y es también integrable.

Ahora, fijamos $y \in (a,b)$ arbitrario y tomamos una sucesión y_n que converja a y. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x) &= \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,y) - f(x,y_n)}{y - y_n}\, d\mu(x) \qquad (17) \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f^y(x) - f^{y_n}(x)}{y - y_n}\, d\mu(x). \qquad (18) \end{aligned}$$

Otra aplicación del Teorema del Valor Medio nos da la desigualdad

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(y)-f(y_n)}{y-y_n}\right| &= \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_n(x))\right| \\ &= \left|\frac{df_x}{dy}(z_n(x))\right| \\ &\leq |g(x)|, \end{aligned}$$

donde z_n es algún punto entre y y y_n. Podemos entonces aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada (Teorema II.32) al lado derecho de (18), obteniendo la igualdad

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f^y(x)-f^{y_n}(x)}{y-y_n}\, d\mu(x).$$

El resultado buscado se sigue entonces del Teorema II.28.

□

Ejercicios.

II.40 *Completar la demostración del Lema de Fatou (Teorema II.29); esto es: probar el inciso (ii) a partir del inciso (i).*

II.41 *Sea* $h_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$. *Demostrar que si* $g > h_n$ *para toda* n*, entonces* g *no puede ser integrable.*

II.42 *Probar, a partir de la Definición II.19 de la Sección II.2) que si* f *es no negativa y medible, y existe* $g \geq f$ *integrable, entonces* f *es integrable.*

II.43 *Sea* $(X, \mathscr{X}; \mu)$ *un espacio de medida finito. Probar que si* $f_n \to f$ *uniformemente en* E *y todas las* f_n *son integrables, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Usa el ejercicio II.41 para mostrar que la hipótesis de que la medida μ *sea finita es necesaria.*

II.44 *Da un contraejemplo para mostrar que si en el problema anterior se pide sólo convergencia puntual, el resultado no es cierto.*

II.45 *Dar los detalles de la demostración del Corolario II.33. ¿Sigue siendo válido el resultado si se relaja la hipótesis pidiendo que f_x sea continua solamente para casi toda x?*

II.46 *Sea f una función no negativa e integrable en $(X, \mathscr{X}; \mu)$. Supongamos que*

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Probar que entonces f se anula μ-c.t.p.

II.47 *Sea f una función μ-integrable en X. Prueba que si para todo $B \subset X$ medible se tiene que*

$$\int_B f \, d\mu = 0,$$

entonces $f = 0$ casi en todas partes.

II.48 *Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos su transformada de Fourier $\hat{f}$ como la función*

$$\hat{f}(\omega) = \int \cos(x\omega) f(x) \, dx + i \int \operatorname{sen}(x\omega) f(x) \, dx,$$

en el caso en el que las integrales existan para casi todo $\omega \in \mathbb{R}$ (con respecto a la medida de Lebesgue). Demostrar que si f es Lebesgue integrable, entonces $\hat{f}$ existe y es continua.

II.49 *Explica en tus propias palabras lo que dice el Teorema de la Convergencia Dominada para el caso en el que se considera el espacio medible dado por los números naturales con la medida de contar.*

Capítulo III

Construcción de Medidas

En este capítulo se presenta una forma sistemática de construir espacios de medida. La teoría general se presenta en la Sección III.1. En las secciones subsecuentes se aplica la teoría para construir dos clases de medidas de gran importancia: las *medidas producto* (Sección III.15) y las *medidas de Lebesgue–Stieltjes* (Sección III.4). Las medidas producto son medidas en productos cartesianos $X \times Y$ de espacios de medida; un caso particular importante es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, que de la misma forma que en el caso unidimensional lleva a una generalización de la integral de Riemann. Los teoremas de Fubini y Tonelli (Teoremas III.23 y III.22) dan condiciones para integrar iteradamente en el espacio producto $X \times Y$. La integral de Lebesgue–Stieltjes es una generalización de las "integrales con peso" de Riemann–Stieltjes.

III.1 Generación de Medidas

> *Encuentro sus derivaciones maravillosas (...) Con mi carta debo haberle parecido como un berlinés que descubre Grunewald y se pregunta si había ya gente viviendo ahí.*

ALBERT EINSTEIN
(Carta a Carathéodory)

En esta sección introduciremos una forma de definir diferentes medidas en un conjunto X. El método generaliza lo hecho en el Capítulo I al construir la medida de Lebesgue. En términos generales, se determina primero la forma de medir una colección pequeña de conjuntos (en el ejemplo del Capítulo I, esta colección corresponde a las uniones finitas de celdas) y luego se extiende la definición a todo el conjunto potencia de X; finalmente, como ocurre con la medida de Lebesgue, resulta necesario restringir la clase de conjuntos que se miden, para evitar que se produzcan situaciones patológicas.

Definición III.1 *Sea X un conjunto. Un álgebra de conjuntos en X es una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos en X tal que se cumplen las condiciones siguientes:*

(i) *X está en $\mathscr{A}$.*

(ii) *Si A está en $\mathscr{A}$, su complemento A^c también está en $\mathscr{A}$.*

(iii) *Si $\{A_n\}$ es una colección finita de conjuntos en $\mathscr{X}$, entonces su unión también está en $\mathscr{A}$.*

Es decir, un álgebra de conjuntos es similar a una σ-álgebra, excepto que basta que sea cerrada bajo uniones finitas, sin que tenga que serlo también bajo uniones infinito numerables. Desde luego, toda σ-álgebra es también un álgebra.

Para tener una medida verdadera, de acuerdo a la definición del capítulo anterior, necesitamos de un espacio medible; es decir, de un conjunto equipado con una σ-álgebra (Definición II.6 de el Capítulo II). Si en vez de tener una σ-álgebra solamente tenemos un álgebra, todavía es posible tener un objeto que mide conjuntos de una forma razonable.

Definición III.2 *Sea X un conjunto y $\mathscr{A}$ un álgebra en X. Decimos que la pareja $(X,\mathscr{A})$ es un espacio semi-medible. Una semi-medida en $(X,\mathscr{A})$ es una función $\tilde{\mu} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^*$ tal que se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

(ii) $\tilde{\mu}(E) \geq 0$ *para todo $E \in \mathscr{X}$.*

(iii) *Si $\{E_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{X}$, disjuntos a pares, y tales que*

$$\bigcup_n E_n \in \mathscr{A},$$

entonces

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n).$$

Está claro que toda medida es en particular una semi-medida; como es de esperarse, las semi-medidas comparten muchas de las propiedades de las medidas, y las demostraciones pueden hacerse por lo general de forma similar a las correspondientes en el caso de las medidas. Enunciamos dos de estas propiedades a continuación.

Proposición III.3 *Sea $\tilde{\mu}$ una semi-medida en $(X, \mathscr{A})$.*
(i) *Si $A \subset B$ están en $\mathscr{A}$, entonces $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$.*
(ii) *Si $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ y la unión $\cup_n A_n$ está en el álgebra $\mathscr{A}$, entonces se tiene que*

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n).$$

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio III.1.

□

Considérense los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son uniones de colecciones finitas de intervalos disjuntos a pares; no es difícil convencerse de que esta colección forma un álgebra (ejercicio III.2), y una forma muy natural de medirlos es sumar las longitudes de sus componentes conexas (que es lo que hicimos en el Capítulo I). Este es el ejemplo canónico de una semi-medida en un álgebra. Recordamos de el Capítulo I que esa forma de medir corresponde a la medida de Lebesgue; más precisamente, la medida de Lebesgue es una extensión de la semi-medida a una colección mucho más amplia de conjuntos.

En general, si se tiene una semi-medida en un álgebra, uno quisiera extenderla a una verdadera medida en una σ-álgebra que contenga al álgebra. Para lograr esto, procedemos como en la Sección I.1, definiendo primero una *medida exterior*, que mida todos los subconjuntos de X.

Definición III.4 *Sean X un conjunto, $\mathscr{A}$ un álgebra en X y $\tilde{\mu}$ una semi-medida en $(X, \mathscr{A})$. Para $E \subset X$ cualquiera, denotamos por $\mathscr{L}_E$ al conjunto de los $x \in \mathbb{R}^*$ tales que existe una colección numerable $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ para la cual*

$$x = \sum_n \tilde{\mu}(A_n) \qquad \text{y} \qquad E \subset \bigcup_n A_n.$$

Se define la medida exterior μ^* generada por la semi-medida $\tilde{\mu}$ por

$$\mu^*(E) = \inf \mathscr{L}_E.$$

Como es de esperarse, la medida exterior μ^* extiende a la semi-medida $\tilde{\mu}$. De forma precisa, esto es:

Proposición III.5 *Sean $\tilde{\mu}$ y μ^* como arriba. Entonces*

$$\mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$$

para todo $A \in \mathscr{A}$.

DEMOSTRACIÓN.

Dado que $\tilde{\mu}(A) \in \mathscr{L}_A$, se tiene de forma inmediata la desigualdad

$$\tilde{\mu}(A) \geq \mu^*(A).$$

Probaremos ahora que $\tilde{\mu}(A)$ es cota inferior del conjunto $\mathscr{L}_A$, de donde se sigue la desigualdad opuesta. Para esto, tomemos un elemento arbitrario $x \in \mathscr{L}_A$; sabemos que x es de la forma

$$x = \sum_n \tilde{\mu}(A_n)$$

para algunas A_n en $\mathscr{A}$ cuya unión cubre a A. En particular

$$A = \bigcup_n (A \cap A_n),$$

por lo que usando los dos primeros incisos de la Proposición III.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(A) &\leq \sum_n \tilde{\mu}(A \cap A_n) \\ &\leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n) = x, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

La Definición III.4 es, desde luego, muy similar a la definición de la *medida exterior* $m^*(\cdot)$ presentada en el Capítulo I (Definición I.2). De hecho, la medida exterior $m^*(\cdot)$ de dicho capítulo es un caso particular de una medida exterior, según la Definición III.4:

Si bien la colección de celdas que consideramos al definir $m^*(\cdot)$ no es un álgebra, la colección de los conjuntos que son uniones finitas de celdas sí lo es (ejercicio III.2). Definimos $\tilde{\mu}$ en esta álgebra, de manera natural, por

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{N} \ell(I_n), \tag{1}$$

donde los I_n son intervalos disjuntos a pares cuya unión es el conjunto A; debe ser claro que esta definición no depende de la elección de los I_n, ya que $\tilde{\mu}(A)$ es igual a la medida de Lebesgue de A; también, puede verificarse que $\tilde{\mu}$ es una semi-medida cuya extensión es precisamente $m^*(\cdot)$ (ejercicio III.3).

Dependiendo de la semi-medida $\tilde{\mu}$ con la que comencemos, puede ocurrir –y de hecho es lo que sucede con la medida exterior definida en el Capítulo I– que existan conjuntos para los cuales la medida exterior generada tenga un comportamiento patológico; en otras palabras, puede ocurrir que la medida exterior no sea una medida verdadera. Afortunadamente, esto puede arreglarse en el caso general procediendo de forma análoga a como de hizo para la medida de Lebesgue; esto es, simplemente hay que dejar fuera del juego a los conjuntos que causan problema. Para esto se introduce la siguiente definición.

Definición III.6 *Sea μ^* la medida exterior generada por alguna semi-medida $\tilde{\mu}$ en un conjunto X. Decimos que un conjunto $E \subset X$ cumple la condición de Carathéodory con respecto a μ^* si para todo $A \subset X$ se tiene la igualdad*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

A los conjuntos que cumplen esta condición los llamamos conjuntos μ^*-medibles.

Como puede observarse, la definición anterior es una extensión de la Definición I.10, por lo que es de esperarse que tenga implicaciones similares.

Teorema III.7 (Teorema de Extensión de Carathéodory). *Sea $\tilde{\mu}$ una semi-medida en $(X, \mathscr{A})$ y sea μ^* la medida exterior generada por $\tilde{\mu}$. Sea $\mathscr{X}$ la colección de subconjuntos μ^*-medibles. Entonces $\mathscr{X}$ es una σ-álgebra en X que contiene al álgebra $\mathscr{A}$. La restricción de μ^* a $\mathscr{X}$ es una medida en $(X, \mathscr{X})$.*

DEMOSTRACIÓN.

Veamos primero que la colección de conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra. El que el conjunto vacío sea μ^*-medible se sigue directamente de que $\mu^*(\emptyset) = 0$; también, directamente de la Definición III.6, podemos ver que si E es μ^*-medible entonces su complemento es μ^*-medible.

Finalmente, si $\{E_n\}$ es una colección numerable de conjuntos μ^*-medibles, entonces su unión es μ^*-medible, pudiéndose probar esto procediendo exactamente como en la demostración del Teorema I.11. Para ser un poco más precisos, notemos que del Lema I.12 previo a dicha demostración nos dice que la colección de conjuntos L–medibles es un álgebra, mientras que un poco más abajo, en la demostración del Teorema I.11 se usa este hecho para probar que esa colección es una σ-álgebra; los argumentos se reproducen paso por paso en el caso general, y el lector interesado podrá convencerse de ello por su cuenta.

Estableceremos a continuación que si μ es la restricción de μ^* a la sigma-álgebra $\mathscr{X}$ entonces $(X,\mathscr{X};\mu)$ es un espacio de medida. El que $\mu(\emptyset)=0$ y el que $\mu(E)\geq 0$ para todo $E\in\mathscr{X}$ son resultados inmediatos de la Definición III.4. Tomemos una colección $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $E_n\subset X$ disjuntos a pares, y sea

$$E=\cup_n E_n.$$

Para $\varepsilon>0$ arbitrario, tomamos elementos $x_n\in\mathscr{L}_{E_n}$ tales que

$$\begin{aligned}\mu^*(E_n) &\leq x_n<\mu^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\\ x_n &= \sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\mu}(A_{m,n}), \qquad A_{n,m}\in\mathscr{A}.\end{aligned}$$

Como la unión de los $A_{m,n}$ cubre a E se sigue que

$$\begin{aligned}\mu^*(E)\leq\sum_{m,n\in\mathbb{N}}\tilde{\mu}(A_{m,n}) &= \sum_{n=1}^{\infty}x_n\\ &< \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)\right)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Al ser $\varepsilon>0$ arbitrario obtenemos la desigualdad

$$\mu^*(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n),$$

es decir, la medida exterior μ^* es subaditiva. Consideremos ahora que los $\{E_n\}$ son μ^*-medibles. Otra vez siguiendo la prueba del Teorema I.11 se puede obtener la desigualdad

$$\mu^*(A)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_n)+\mu^*(A\cap E^c),$$

correspondiente a (7) en dicha demostración, válida para toda $A\in\mathbb{R}$; poniendo $A=E$ en la fórmula de arriba y usando la subaditividad tenemos que

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

y por lo tanto μ es una medida en $\mathscr{X}$.

Para terminar con la demostración, supongamos que $A \in \mathscr{A}$ y que $Y \subset X$; queremos probar que A cumple la condición de Carathéodory. Por subaditividad sabemos que

$$\mu^*(Y) \leq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c).$$

La desigualdad en sentido opuesto es equivalente a que $\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$ sea una cota inferior del conjunto $\mathscr{L}_Y$. Tomemos entonces un $x \in \mathscr{L}_Y$ arbitrario, con

$$x = \sum_n \tilde{\mu}(A_n), \qquad A_n \in \mathscr{A}, \qquad Y \subset \bigcup_n A_n.$$

Los conjuntos $A_n \cap A$ y $A_n \cap A^c$ están en $\mathscr{A}$, por ser esta un álgebra; entonces,

$$x_1 = \sum_n \tilde{\mu}(A_n \cap A), \qquad x_2 = \sum_n \tilde{\mu}(A_n \cap A)$$

son tales que $x_1 \in \mathscr{L}_{Y \cap A}$ y $x_2 \in \mathscr{L}_{Y \cap A}$. Concluimos entonces que

$$x = x_1 + x_2 \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

El teorema anterior nos muestra que siempre existe una forma de extender una semi-medida a una medida, y nos dice además cómo hacerlo. El siguiente teorema nos indica que hay situaciones en las que esa es la única forma de hacerlo.

Definición III.8 *Sea $\tilde{\mu}$ una semi-medida en $(X, \mathscr{A})$. Decimos que $\tilde{\mu}$ es una semi-medida finita si $\tilde{\mu}(X) < \infty$. Si existe una colección numerable de conjuntos $\{E_n\}$ contenidos en $\mathscr{A}$ con $\mu(E_n) < \infty$ para toda n y $\cup E_n = X$ diremos que $\tilde{\mu}$ es una semi-medida σ-finita.*

Teorema III.9 (Teorema de Extensión de Hahn) *Si $\tilde{\mu}$ es una semi-medida σ-finita en un espacio $(X, \mathscr{A})$, entonces existe una única medida en la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$ que coincide con la semi-medida $\tilde{\mu}$ en $\mathscr{A}$.*

DEMOSTRACIÓN.

La existencia quedó ya establecida en el Teorema III.7. Para probar la unicidad consideramos primero el caso en el que $\tilde{\mu}$ es finita. Sea $\mathscr{X}$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$, y supongamos que μ y ν son medidas en $\mathscr{X}$ que coinciden en $\mathscr{A}$. Denotamos por $\mathscr{N}$ a la colección de conjuntos $B \in \mathscr{X}$ tales que $\mu(B) = \nu(B)$. Como $\mathscr{A} \subset \mathscr{N}$ y por hipótesis $\mathscr{N} \subset \mathscr{X}$, si probamos que $\mathscr{N}$ es una σ-álgebra podremos concluir que $\mathscr{N} = \mathscr{X}$, que es lo que se quiere probar.

El que X y el conjunto vacío están en $\mathscr{N}$ son hechos triviales (¿por qué?) Si $B \in \mathscr{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(B^c) &= \mu(X) - \mu(B) \\ &= \nu(X) - \nu(B) \\ &= \nu(B^c) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\tilde{\mu}(X) = \mu(X) = \nu(X) < \infty$. Si $\{B_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n B_n\right) &= \sum_n \mu(B_n) \\ &= \sum_n \nu(B_n) \\ &= \nu\left(\bigcup_n B_n\right). \end{aligned}$$

Concluimos pues, que $\mathscr{N}$ es una σ-álgebra.

Supongamos ahora que $\tilde{\mu}$ es una semi–medida que es σ–finita. Tomamos una colección de conjuntos $X_n \subset X$, disjuntos a pares, cuya unión es todo X y tales que $\tilde{\mu}(X_n) < \infty$. Denotamos por $\mathscr{A}_n$ al álgebra dada por (véase ejercicio III.4):

$$\mathscr{A}_n = \{X_n \cap E \mid E \in \mathscr{A}\}.$$

La restricción de $\tilde{\mu}$ a $\mathscr{A}_n$ es una semi-medida en $(X_n, \mathscr{A}_n)$ (ver ejercicio III.5); es además claro que dicha restricción es una semi-medida finita, dado que hemos supuesto que $\tilde{\mu}(X_n) < \infty$. Sea $\mathscr{X}_n$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}_n$, y tomemos medidas μ y ν en el espacio medible $(X, \mathscr{X})$; por lo demostrado en el párrafo anterior, las restricciones de μ y ν a cada $\mathscr{X}_n$ coinciden la una con la otra, puesto que ambas son extensiones de una misma semi-medida finita.

Concluimos entonces que para todo $E \in \mathscr{X}$

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_n \mu(E \cap X_n) \\ &= \sum_n \nu(E \cap X_n) \\ &= \nu(E), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

Notemos que en el caso de la medida de Lebesgue, el Teorema III.9 nos dice que si una medida μ es tal que la medida de todo intervalo coincide con su longitud, entonces μ coincide necesariamente con la medida de Lebesgue para todo conjunto de Borel; desde luego, no tendría por qué coincidir en la clase más grande de conjuntos L–medibles. En el Apéndice A se muestra la existencia de conjuntos L–medibles que no son borelianos.

Ejercicios.

III.1 *Demostrar la Proposición III.3.*

III.2 *Sea $\mathscr{A}$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son la unión de una colección finita de celdas. Verifica que $\mathscr{A}$ es un álgebra en $\mathbb{R}$.*

III.3 *Probar que la función $\tilde{\mu}$ definida en* (1) *es una semi-medida en el álgebra $\mathscr{A}$ del ejercicio III.2, y que si μ^* es la medida exterior que genera, entonces se tiene que $\mu^*(E) = m^*(E)$ para todo $E \subset \mathbb{R}$.*

III.4 *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra en un conjunto X. Demuestra que si $B \subset A$ está en $\mathscr{A}$, entonces la colección*

$$\mathscr{B} = \{B \cap E \mid E \in \mathscr{A}\}.$$

es un álgebra en B.

III.5 *Considera el álgebra de conjuntos $\mathscr{B}$ definida en el ejercicio III.4. Demuestra que la restricción de una semi-medida μ en $(X, \mathscr{A})$ al álgebra $\mathscr{B}$ es a su vez una semi-medida en $(B, \mathscr{B})$.*

III.6 *Demostrar que la medida de Lebesgue es la única medida en la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ que es invariante por traslaciones y tal que la medida del intervalo* $[0,1]$ *es igual a uno.*

III.7 *Demostrar que si μ es una medida invariante por traslaciones en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, entonces es un múltiplo de la medida de Lebesgue.*

III.2 Medidas en Productos Cartesianos

La cuestión es – dijo Alicia – si puedes hacer que las palabras signifiquen tantas cosas distintas.

LEWIS CARROLL
(Alicia a través del Espejo)

El propósito central de esta sección es construir medidas en productos cartesianos $X \times Y$ a partir de medidas en los conjuntos X y Y. Esto podrá hacerse usando los resultados obtenidos en la sección anterior. Una vez construida la medida, se tiene automáticamente la integral en el producto cartesiano.

Definición III.10 *Sean $(X, \mathscr{X})$ y $(Y, \mathscr{Y})$ dos espacios medibles. Un rectángulo en el producto cartesiano $X \times Y$ es un conjunto de la forma $A \times B$ con $A \in \mathscr{X}$ y $B \in \mathscr{Y}$.*

NOTA: En la definición anterior hay, desde luego, una dependencia con respecto a las σ-álgebras $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$; para ser bien precisos habría que decir con respecto a qué σ-álgebras un conjunto dado es un rectángulo. Por lo general, eso estará claro por el contexto y no será necesario especificar cuáles son las σ-álgebras en cuestión; en los casos en que fuera necesario, se harán las aclaraciones pertinentes.

Definición III.11 *Dados dos espacios medibles $(X, \mathscr{X})$ y $(Y, \mathscr{Y})$, si $\mathscr{Z}$ es la σ-álgebra generada por los rectángulos en $X \times Y$. Al espacio medible $(X \times Y, \mathscr{Z})$, lo llamamos el espacio producto de $(X, \mathscr{X})$ con $(Y, \mathscr{Y})$.*

Dados dos espacios de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$, se quiere construir una medida π en el espacio producto de $(X, \mathscr{X})$ y $(Y, \mathscr{Y})$ de forma tal que, de acuerdo con la idea usual de "área de un rectángulo", se tenga que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \tag{2}$$

para todo rectángulo $A \times B$; en otras palabras, se pretende que el "área" de un rectángulo sea igual al producto de las "longitudes" de sus lados. Esta construcción se hará un poco más adelante en el Teorema III.15. Primero presentamos algunos lemas.

Lema III.12 *Sean $(X,\mathscr{X})$ y $(Y,\mathscr{Y})$ dos espacios medibles. La colección $\mathscr{Z}_0$ de conjuntos en $X\times Y$ que pueden ponerse como uniones finitas de rectángulos es un álgebra en el producto cartesiano $X\times Y$.*

DEMOSTRACIÓN.

Ejercicio III.8.

$\square$

Lema III.13 *Sea $\mathscr{Z}_0$ como en el Lema III.12. Todo elemento de $\mathscr{Z}_0$ puede ponerse como la unión finita de rectángulos disjuntos a pares.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $S\in\mathscr{Z}_0$ dado por

$$S=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\times B_k,$$

con cada $A_k\times B_k$ siendo un rectángulo.

Dado un conjunto cualquiera D, usaremos la notación

$$D^{[1]}\equiv D,\qquad D^{[2]}\equiv D^c.$$

Sea $\mathscr{R}$ la colección de rectángulos R tales que:

(a) R tiene la forma

$$R=\left(A_1^{[i_1]}\cap\cdots\cap A_n^{[i_n]}\right)\times\left(B_1^{[j_1]}\cap\cdots\cap B_n^{[j_n]}\right),\tag{3}$$

donde cada i_k y cada j_k pueden tomar los valores 1 ó 2.

(b) Existe al menos un $m\in\{1,\ldots,n\}$ tal que $i_m=j_m=1$ en (3).

La colección de rectángulos en $\mathscr{R}$ es disjunta a pares (¿por qué?).

Además, si $R\in\mathscr{R}$, entonces hay por lo menos un $m\le n$ que cumple que $i_m=j_m=1$; es claro que $R\subset A_m\times B_m$ para tal m, y por lo tanto $R\subset S$.

Por otra parte, si $(x,y)\in S$, entonces $x\in A_k$ y $y\in B_k$ para por lo menos un $i\in\{1,\ldots,n\}$; tomamos el rectángulo $R\in\mathscr{R}$ con índices

$$\begin{aligned} i_k &= 1 \iff x\in A_k\\ j_k &= 1 \iff y\in B_k. \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que (x,y) está en R. Como (x,y) fue arbitrario concluimos que S está contenido en la unión de tales rectángulos. Esto es

$$S = \cup_{R\in\mathscr{R}} R,$$

lo que concluye la demostración.

$\square$

Lema III.14 *Sean $(X,\mathscr{X})$ y $(Y,\mathscr{Y})$ espacios medibles, y sea $A\times B$ un rectángulo en $X\times Y$. Supongamos que existe una colección a lo más numerable de rectángulos $A_n\times B_n$ tales que*

$$A\times B = \bigcup_n A_n\times B_n,$$

con los $A_n\times B_n$ disjuntos a pares. Si μ y ν son medidas cualesquiera en $(X,\mathscr{X})$ y $(Y,\mathscr{Y})$ respectivamente, entonces

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_n \mu\left(A_n\right)\nu\left(B_n\right).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la colección $A_n\times B_n$ es infinita numerable y que está indexada con n en los naturales (si la colección fuera finita, la podemos completar con una colección infinita de rectángulos vacíos).

Observamos que

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)\,\chi_B(y) &= \chi_{A\times B}(x,y)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n\times B_n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\,\chi_{B_n}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que para cada $x \in X$ fija

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)\nu(B) &= \int_Y \chi_A(x)\,\chi_B(y)\,d\nu(y) \\
&= \int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\,\chi_{B_n}(y)\,d\nu(y) \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_Y \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x)\,\chi_{B_n}(y)\,d\nu(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\int_Y \chi_{B_n}(y)\,d\nu(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n)\,.
\end{aligned}$$

En la tercera de las igualdades de arriba hemos usado el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema II.22), y en la cuarta la linealidad de la integral (Teorema II.28). Moviendo ahora a la variable x por todo el dominio X e integrando con respecto a la medida μ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu(A)\nu(B) &= \int_X \chi_A(x)\nu(B)\,d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_X \chi_{A_n}(x)\nu(B_n)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n)\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado como antes el Teorema II.22 y el Teorema II.28.

$\square$

Ahora sí, probaremos que el área de un rectángulo es igual a la longitud de su base por la longitud de su altura.

Teorema III.15 *Sean $(X,\mathscr{X};\mu)$ y $(Y,\mathscr{Y};\nu)$ dos espacios de medida, y denotamos por $\mathscr{Z}$ a la σ-álgebra generada por la colección de todos los rectángulos. Existe una medida π en el espacio medible $(X\times Y,\mathscr{Z})$ tal que para todo rectángulo $A\times B$ se cumple la igualdad* (2)*. Además, si ambos espacios $(X,\mathscr{X};\mu)$ y $(Y,\mathscr{Y};\nu)$ son σ-finitos, la medida π es única.*

DEMOSTRACIÓN.

Haremos la prueba por construcción. Sea $\mathscr{Z}_0$ como en el Lema III.12 y sea S un elemento en $\mathscr{Z}_0$. Por el Lema III.13 sabemos que S puede escribirse como la unión de M rectángulos disjuntos $A_n \times B_n$. Por el Lema III.14, si $C_n \times D_n$ es cualquier otra colección de N rectángulos disjuntos a pares tales que su unión es S, entonces se tiene la igualdad

$$\sum_{n=1}^{M} \mu(A_n)\,\nu(B_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(C_n)\,\nu(D_n). \tag{4}$$

Podemos definir entonces para cada $S \in \mathscr{Z}_0$ la cantidad $\pi(S)$ como cualquiera de las sumas en (4), siendo irrelevante la partición de S en rectángulos disjuntos que elijamos. Está claro que $\pi(\emptyset) = 0$ y que $\pi(S) \geq 0$ para todo S, ya que μ y ν son medidas; también es claro que π es aditiva en $\mathscr{Z}_0$.

Tenemos pues que π es una semi-medida en $(X \times Y, \mathscr{Z}_0)$, y la existencia de la medida se sigue inmediatamente del Teorema III.7. Puede probarse que $\mathscr{Z}_0$ es σ-finito (ejercicio III.9), por lo que del Teorema III.9 se sigue que la medida es única.

□

Definición III.16 *A la medida π construida en la demostración del Teorema III.15 le llamamos la medida producto de μ y ν. Escribimos $\pi = \mu \times \nu$. El espacio de medida $(X \times Y, \mathscr{Z}; \mu \times \nu)$ es el espacio producto de $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$.*

Una observación importante es que, si bien en el enunciado del Teorema III.15 la medida $\pi = \mu \times \nu$ se define en la σ-álgebra generada por los rectángulos, en realidad la medida producto puede extenderse de forma inmediata a la σ-álgebra $\mathscr{Z}$ de los conjuntos en $X \times Y$ que cumplen la condición de Carathéodory correspondiente (ver Teorema III.7), que pudiera en principio ser mayor que $\mathscr{Z}$; este hecho puede apreciarse en la forma en que se concluye la demostración del Teorema III.15.

Algunos ejemplos de medidas producto que se presentan con frecuencia son los siguientes.

1. Tomemos $\left(N, 2^N; \mu_c\right)$ con μ_c la medida de contar. El espacio producto de ese espacio consigo mismo es igual al espacio medible $\left(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}\right)$ equipado con la medida de contar (ver ejercicio III.10).

2. Sea $(\mathbb{R}, \mathscr{X}; m)$ el espacio dado por la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. A la medida producto de m consigo misma se le conoce como la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Inductivamente, si m^n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, la medida producto $m \times m^n$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{n+1}$. Como es natural suponer, la integral de Lebesgue generaliza a la integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$ (ver ejercicios III.12 y III.13).

Ejercicios.

III.8 *Probar el Lema III.12 (página 105).*

III.9 *Suponer que los espacios $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$ en el Teorema III.15 son σ-finitos. Demostrar que el álgebra $\mathscr{Z}_0$ es σ-finita con respecto a $\mu \times \nu$.*

III.10 *Consideramos los espacios de medida $\left(X, 2^X; \mu_c\right)$ y $\left(Y, 2^Y; \nu_c\right)$, donde μ_c y ν_c son las medidas de contar en los espacios respectivos. Verifica que la medida producto $\mu_c \times \nu_c$ es la medida de contar en el espacio medible $\left(X \times Y, 2^{X \times Y}\right)$.*

III.11 *Sean M y N espacios métricos. Demostrar que el producto de los espacios $(M, \mathscr{B}(N))$ y $(N, \mathscr{B}(N))$ es igual a $(M \times N, \mathscr{B}(M \times N))$, donde $M \times N$ está equipado con la métrica producto.*

III.12 *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en el sentido de Riemann. Demostrar que es también integrable en el sentido de Lebesgue y que ambas integrales coinciden.*

III.13 *Generalizar el Ejercicio III.12 para $A \subset \mathbb{R}^n$ con n arbitrario.*

III.14 *Demostrar que la medida de Lebesgue es la única medida en la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ que es invariante por traslaciones y tal que la medida del hipercubo*

$$H_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x_j| \leq 1, \text{ para todo } j = 1, \ldots n\right\}$$

es igual a uno.

III.15 *Demostrar que si μ es una medida invariante por traslaciones en $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces es un múltiplo de la medida de Lebesgue.*

III.3 Integración en Espacios Producto

> *La coincidencia de nombre entre el pie y el pie hace difícil la explicación. Cuídese especialmente de no levantar al mismo tiempo el pie y el pie.*
>
> JULIO CORTÁZAR
> (Instrucciones para subir una Escalera)

En la sección anterior hemos definido medidas en productos cartesianos. Por la teoría desarrollada en el Capítulo II tenemos de forma automática integrales definidas en estos espacios, y todos los notables resultados que se han presentado sobre la integral (linealidad, convergencia monótona, convergencia dominada, etc); sin embargo, el desarrrollo se ha hecho en abstracto y no se han dado indicaciones generales sobre cómo integrar de forma práctica en espacios producto. La presente sección llena, en una buena parte, dicho hueco. La idea central es que para calcular una integral con respecto a una medida producto $\mu \times \nu$ por lo general es posible integrar iteradamente, es decir integrar primero con respecto a μ y luego con respecto a ν (o viceversa). Los teoremas que se prueban en esta sección nos dan condiciones sobre cuándo es válido integrar de forma iterada; también nos indicarán cuándo es válido cambiar el orden de integración. El Teorema de Tonelli (Teorema III.22) trata el caso de las funciones medibles no negativas, mientras que el Teorema de Fubini (Teorema III.23) se ocupa de las funciones integrables.

Para enunciar los resultados, necesitaremos introducir notación y algunas definiciones.

Definición III.17 *Para cada $E \subset X \times Y$ y $(x,y) \in X \times Y$ definimos los conjuntos*

$$\begin{aligned} E_{[x]} &= \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \\ E^{[y]} &= \{x \in X \mid (x,y) \in E\} \end{aligned}$$

A los conjuntos de la forma $E_{[x]}$ los llamamos secciones verticales de E, y a los conjuntos de la forma $E^{[y]}$ los llamamos secciones horizontales de E.

Las secciones de conjuntos medibles son medibles. De forma precisa, esto es:

Proposición III.18 *Sea $(X \times Y, \mathscr{Z})$ el espacio producto de $(X, \mathscr{X})$ y $(Y, \mathscr{Y})$. Entonces, si $E \in \mathscr{Z}$ todas sus secciones horizontales están en $\mathscr{X}$ y todas sus secciones verticales están en $\mathscr{Y}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos el resultado solamente para las secciones verticales; la prueba para las secciones horizontales es en esencia la misma y se sugiere al lector dar los detalles para ese caso (ver ejercicio III.19).

Consideramos la colección $\mathscr{M}$ de subconjuntos de $X \times Y$ tales que todas sus secciones verticales son medibles en el espacio $(Y, \mathscr{Y})$. Vamos a probar que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los rectángulos; al ser $\mathscr{Z}$ la σ-álgebra generada por los rectángulos, tendremos que $\mathscr{Z} \subset \mathscr{M}$, que es exactamente lo que queremos demostrar.

Sea $A \times B$ cualquier rectángulo. Se sigue de la definición de sección vertical que

$$(A \times B)_{[x]} = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A \\ \emptyset, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Tanto B como $\emptyset$ están en la σ-álgebra $\mathscr{Y}$ por lo que toda sección vertical de $A \times B$ es medible. Tenemos entonces que todo rectángulo está en $\mathscr{M}$.

Vemos a continuación que la colección $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra. El que $\emptyset \in \mathscr{M}$ es trivial. Dado $A \in \mathscr{M}$, el hecho de que A^c también está en en $\mathscr{M}$ se sigue inmediatamente de la igualdad $(A^c)_{[x]} = \left(A_{[x]}\right)^c$ (ver ejercicio III.17). Finalmente, el ejercicio III.18 nos dice que

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)_{[x]} = \bigcup_{\alpha} (A_\alpha)_{[x]}, \tag{5}$$

de donde se concluye que $\mathscr{M}$ es cerrado bajo uniones numerables.

$\square$

Definición III.19 *Sean X, Y y W conjuntos y $E \subset X \times Y$. Dados $x \in X$ y una función $f : E \to W$, definimos la sección vertical de f en x como la función*

$$f_{[x]} : E_{[x]} \to W$$
$$f_{[x]}(y) = f(x,y)$$

Análogamente para $y \in Y$ definimos las sección horizontal de f en y como la función

$$f^{[y]} : E^{[y]} \to W$$
$$f^{[y]}(x) = f(x,y)$$

Notamos que la función f está por completo determinada por sus secciones verticales (y desde luego también por las horizontales). A continuación probamos que, como sucede con los conjuntos, las secciones de funciones medibles son medibles.

Proposición III.20 *Sea $(X\times Y,\mathscr{Z})$ como en la Proposición III.18. Si la función $f: X\times Y\to\mathbb{R}^*$ es medible, entonces todas sus secciones horizontales son medibles en $(X,\mathscr{X})$ y todas sus secciones verticales son medibles en $(Y,\mathscr{Y})$.*

DEMOSTRACIÓN.

Probaremos el resultado solamente para las secciones verticales, siendo la prueba para las secciones horizontales completamente análoga y se al lector (ver ejercicio III.23).

Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $x_0\in X$ arbitrarios. Para f como en el enunciado, consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \left\{y\in Y \;\middle|\; f_{[x_0]}(y)>\alpha\right\}\\ B_\alpha &= \{(x,y)\mid f(x,y)>\alpha\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y\in A_\alpha &\iff f(x_0,y)>\alpha\\ &\iff (x_0,y)\in B_\alpha\\ &\iff y\in (B_\alpha)_{[x_0]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A_\alpha=(B_\alpha)_{[x_0]}$. El conjunto B_α es medible, por ser f medible. El resultado buscado se sigue entonces de la Proposición III.18.

□

El resultado que probamos a continuación es un caso particular del Teorema de Tonelli (Teorema III.22), y servirá como escalón para probar el caso general.

Lema III.21 *Sea $(X\times Y,\mathscr{Z};\mu\times\nu)$ el espacio producto de dos espacios de medida σ-finitos $(X,\mathscr{X};\mu)$ y $(Y,\mathscr{Y};\nu)$. Si $E\subset X\times Y$ es medible, entonces $\nu\left(E_{[x]}\right)$ es medible como función de $x\in X$, y $\mu\left(E^{[y]}\right)$ es medible como función de $y\in Y$. Además, se tiene la igualdad*

$$\int_X \nu\left(E_{[x]}\right)\,d\mu(x)=(\mu\times\nu)(E)=\int_Y \mu\left(E^{[y]}\right)\,d\nu(y).$$

DEMOSTRACIÓN.

Vamos a probar solamente la igualdad

$$\int_X \nu\left(E_{[x]}\right)\, d\mu(x) = (\mu\times\nu)(E), \tag{6}$$

siendo la prueba de la igualdad

$$\int_Y \mu\left(E^{[y]}\right)\, d\nu(y) = (\mu\times\nu)(E) \tag{7}$$

completamente análoga (ejercicio III.25).

Supongamos primero que ambas medidas μ y ν son finitas.

Sea $\mathscr{M}$ la colección de conjuntos $E\in\mathscr{Z}$ para los cuales $\nu\left(E_{[x]}\right)$ es una función medible de x, y se cumple la igualdad

$$\int_X \nu\left(E_{[x]}\right)\, d\mu(x) = (\mu\times\nu)(E).$$

Lo que se quiere demostrar es equivalente a probar que $\mathscr{M}=\mathscr{Z}$, y para ello basta verificar que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra en $X\times Y$ que contiene a todos los rectángulos. Hacemos esto a continuación.

Si $R=A\times B$ es un rectángulo arbitrario, entonces la función

$$\nu\left(R_{[x]}\right) = \begin{cases} \nu(B), & \text{si } x\in A\\ 0, & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

es medible. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_X \nu\left(R_{[x]}\right)\, d\mu(x) &= \int_A \nu\left(R_{[x]}\right)\, d\mu(x) + \int_{A^c} \nu\left(R_{[x]}\right)\, d\mu(x)\\ &= \mu(A)\nu(B)\\ &= (\mu\times\nu)(R),\end{aligned}$$

de donde se sigue que $R\in\mathscr{M}$. En particular, se tiene que $\emptyset\in\mathscr{M}$.

Si $E\in\mathscr{M}$, entonces

$$\nu\left((E^c)_{[x]}\right) = \nu\left(\left(E_{[x]}\right)^c\right) = \nu(Y) - \nu\left(E_{[x]}\right),$$

que es claramente una función medible, por ser $\nu\left(E_{[x]}\right)$ un conjunto medible por hipótesis. Además, tenemos de lo anterior que

$$\begin{aligned}\int_X \nu\left((E^c)_{[x]}\right)\, d\mu(x) &= \mu(X)\nu(Y) - \int_X \nu\left(E_{[x]}\right)\, d\mu(x)\\ &= (\mu\times\nu)(X\times Y) - (\mu\times\nu)(E)\\ &= (\mu\times\nu)\left(E^c\right),\end{aligned}$$

de donde se concluye que $E^c \in \mathscr{M}$.

Ahora, sea $\{E_n\}$ una colección de conjuntos en $\mathscr{M}$, y sea

$$E = \cup_n E_n.$$

Definimos conjuntos F_n por

$$F_1 = E_1 \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \cap E_n^c \cap \cdots \cap E_1^c.$$

Se tiene que los F_n son disjuntos a pares y que

$$E = \cup_n F_n.$$

No es difícil probar que $\mathscr{M}$ es cerrado bajo intersecciones y uniones finitas (ejercicio III.21). Además, como ya sabemos que $E_n^c \in \mathscr{M}$ para toda n, se sigue que $F_n \in \mathscr{M}$.

Las secciones verticales $E_{[x]}$ son todas medibles (eso se sigue inmediatamente de 5), y también

$$\begin{aligned}
\int_X \nu\left(E_{[x]}\right)\, d\mu(x) &= \int_X \nu\left(\left(\bigcup_n F_n\right)_x\right) d\mu(x) \\
&= \int_X \nu\left(\bigcup_n (F_n)_x\right) d\mu(x) && (8) \\
&= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu\left(\left(F_n\right)_x\right) d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu\left(\left(F_n\right)_x\right) d\mu(x) && (9) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(F_n) && (10) \\
&= (\mu \times \nu)(E). && (11)
\end{aligned}$$

La igualdad (8) se sigue del ejercicio III.18, en la igualdad (9) hemos usado el Teorema II.22, y la igualdad (9) es consecuencia del hecho de que los F_n están en la colección $\mathscr{M}$. Concluimos que $E \in \mathscr{M}$.

De todo esto, se tiene que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los rectángulos en $X \times Y$; esto termina la demostración para el caso en que μ y ν son medidas finitas.

Supongamos ahora que μ y ν son medidas σ-finitas. Consideramos una colección de rectángulos $R_n = A_n \times B_n$, donde los A_n y los B_n son todos de medida finita, y tales que

$$\begin{array}{ll} A_n \subset A_{n+1} & B_n \subset B_{n+1} \\ X = \cup A_n & Y = \cup B_n. \end{array}$$

Es claro que $\cup R_n = X \times Y$. Aplicando el resultado del teorema para medidas finitas a los espacios heredados por cada R_n, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_X \nu(E_{[x]})\, d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \nu(E_{[x]})\, d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu \times \nu)(E \cap R_n) \\ &= (\mu \times \nu)(E), \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. Notemos que en la última igualdad se ha aplicado convergencia monótona (cf. ejercicio II.32).

□

Probaremos ahora el resultado general.

Teorema III.22 (Teorema de Tonelli) *Sean $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos, y sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}^*$ una función no negativa y medible en el espacio producto $(X \times Y, \mathscr{Z}; \mu \times \nu)$. Entonces las integrales*

$$\int_Y f_{[x]}(y)\, d\nu(y), \qquad \int_X f^{[y]}(x)\, d\mu(x)$$

son medibles como funciones de $x \in X$ y de $y \in Y$, respectivamente. Además se tienen las igualdades

$$\int_X \left(\int_Y f_{[x]}\, d\nu \right) d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f^{[y]}\, d\mu \right) d\nu. \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN.

Observemos primero que si f es la función indicadora de un conjunto medible, el enunciado de este teorema corresponde al Lema III.21, y por lo tanto lo damos por demostrado (ver el ejercicio III.24).

En el caso en el que f es una función simple, el resultado se sigue directamente del ejercicio III.16 y de la linealidad de las integrales (Teorema II.28), puesto que las funciones simples son combinaciones lineales de funciones indicadoras de conjuntos medibles.

Sea $f \geq 0$ una función medible $(X \times Y, \mathscr{Z}; \mu \times \nu)$. Demostraremos solamente que la función de x dada por

$$\int_Y f_{[x]}(y)\ d\nu(y)$$

es una función medible; el resultado análogo para $f^{[y]}$ se demuestra de forma prácticamente idéntica. Por el Lema II.15 de la Sección II.2 (página 69), podemos considerar una sucesión de funciones simples

$$0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$$

que convergen puntualmente a f. Podemos ver que para todo $x \in X$ se tiene

$$(\varphi_n)_{[x]}(y) = \varphi_n(x,y) \to f(x,y) = f_{[x]}(y).$$

Es decir, la sucesión $(\varphi_n)_{[x]}$ converge puntualmente a la sección $f_{[x]}$. Como las funciones $(\varphi_n)_{[x]}$ son medibles, se sigue del Teorema II.9 que $f_{[x]}$ es medible. Aplicando el Teorema II.22 y el hecho de que el enunciado del teorema se cumple para funciones simples, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_Y f_{[x]}(y)\ d\nu(y) &= \lim_{n\to\infty} \int_Y (\varphi_n)_{[x]}(y)\ d\nu(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \varphi_n\ d(\mu \times \nu) \\
&= \int_{X\times Y} f\ d(\mu \times \nu).
\end{aligned}$$

□

Las igualdades 12 suelen escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f\ d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y) \right)\ d\mu(x) \\
&= \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right)\ d\nu(y).
\end{aligned}$$

El otro resultado fundamental para calcular integrales en espacios producto se conoce como el Teorema de Fubini y lo presentamos a continuación.

Teorema III.23 (Teorema de Fubini) *Sean $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Si F es integrable en el espacio producto $(X \times Y, \mathscr{Z}; \mu \times \nu)$ entonces*

(i) *Para casi todo $x \in X$ (con respecto a μ), la sección $F_{[x]}$ es integrable en el espacio $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$.*

(ii) *Para casi todo $y \in Y$ (con respecto a ν), la sección $F^{[y]}$ es integrable en el espacio $(X, \mathscr{X}; \mu)$.*

(iii) *Consideramos funciones $g : X \to \mathbb{R}^*$ y $h : Y \to \mathbb{R}^*$ tales que*

$$g(x) = \int_Y F_{[x]}\, d\nu, \qquad h(y) = \int_X F^{[y]}\, d\mu,$$

μ-c.t.p. y ν-c.t.p. respectivamente. Se tienen la igualdades

$$\int_X g\, d\mu = \int_{X\times Y} F\, d(\mu \times \nu) = \int_Y h\, d\nu \tag{13}$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea F integrable en $(X \times Y, \mathscr{Z}; \mu \times \nu)$. Como F es integrable con respecto a $\mu \times \nu$, también lo es $|F|$ (ver Proposición II.26); por el Teorema de Tonelli (Teorema III.22) tenemos entonces que

$$\int_X \left(\int_Y |F|_{[x]}\, d\nu \right) d\mu = \int_{X\times Y} |F|\, d(\mu \times \nu) < \infty.$$

Se sigue de esto que, μ-c.t.p. en X, se tiene que

$$\int_Y |F|_{[x]}\, d\nu < \infty.$$

Esto es, la función $|F|_{[x]}$ es integrable para casi todo $x \in X$; pero $|F|_{[x]} = |F_{[x]}|$ (ver el ejercicio III.20), de donde se sigue que $F_{[x]}$ es integrable μ-c.t.p. De forma análoga se prueba que $F^{[y]}$ es integrable ν-c.t.p. en Y.

Aplicando el Teorema de Tonelli (Teorema III.22) a las funciones no negativas $F_\pm$, y usando el hecho de que $(F_\pm)_{[x]} = \left(F_{[x]}\right)_\pm$ (ejercicio III.20) se obtiene

$$\int_X \left(\int_Y \left(F_{[x]}\right)_\pm d\nu \right) d\mu = \int_{X\times Y} F_\pm\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X \left(F^{[y]}\right)_\pm d\mu \right) d\nu. \tag{14}$$

Ahora, para casi toda $x \in X$ y para casi toda $y \in Y$ tenemos que

$$\begin{aligned} g_\pm(x) &= \int_Y \left(F_{[x]}\right)_\pm d\nu \\ h_\pm(x) &= \int_X \left(F^{[y]}\right)_\pm d\mu. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas igualdades en (14) y sumando las igualdades correspondientes a cada uno de los dos signos $+$ y $-$, queda demostrado el teorema.

$\square$

NOTACIÓN: Las igualdades (13) suelen escribirse en las formas

$$\int_X \left(\int_Y F_{[x]} \, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F^{[y]} \, d\mu \right) d\nu,$$

$$\int_X \left(\int_Y F(x,y) \, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F(x,y) \, d\mu \right) d\nu.$$

Estas expresiones conllevan un abuso de notación, puesto que las integrales "de adentro de los paréntesis" pudieran no estar definidas; sin embargo, al estar definidas casi en todas partes (con respecto a la segunda integración) no hay en realidad ningún problema; desde luego, debe quedar claro que lo que esas igualdades significan es exactamente lo que dice el tercer inciso en el Teorema III.23.

El siguiente corolario, que combina los resultados de los dos teoremas anteriores, nos da una condición muy práctica para determinar si una función en un espacio producto es integrable, y para poder intercambiar el orden de integración.

Corolario III.24 *Sean $(X, \mathscr{X}; \mu)$ y $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$ espacios de medida, y sea f una función medible su el espacio producto. Si sabemos que alguna de las dos integrales iteradas*

$$\int_X \left(\int_Y |f|_{[x]} \, d\nu \right) d\mu$$

$$\int_Y \left(\int_X |f|^{[y]} \, d\mu \right) d\nu$$

existe y es finita, entonces f es integrable y se tienen las igualdades

$$\int_X \left(\int_Y \left(f_{[x]} \right) d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X \left(f^{[y]} \right) d\mu \right) d\nu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Por el Teorema III.22 se tiene que

$$\int_X \left(\int_Y |f|_{[x]} \, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X |f|^{[y]} \, d\mu \right) d\nu,$$

por lo que si alguna de las integrales iteradas de los extremos es finita, se sigue que $|f|$ (y por tanto también f) es integrable en el espacio producto. Del Teorema de Fubini III.23 se sigue entonces el resultado.

$\square$

Para terminar esta sección, vemos un par de ejemplos que nos muestran que las diferentes hipótesis en los teoremas anteriores son necesarias.

- Consideremos la sucesión $\{a_{m,n}\}$ con $m,n \in \mathbb{N}$ dada por

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

  Como puede verificarse fácilmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = 0 \tag{15}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = 1. \tag{16}$$

  Desde luego, $\{a_{m,n}\}$ no es ni positiva ni integrable como función en el espacio $\left(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}; \mu_c\right)$, con μ_c la medida de contar.

- Sea $X = [0,1]$, y tomamos los espacios $(X, \mathscr{X}; m)$ (medida de Lebesgue) y $\left(X, 2^X; \mu_c\right)$ (medida de contar); está claro que el segundo de estos espacios no es σ-finito (¿por qué?) Dado el espacio producto $(X \times X, \mathscr{Z}; m \times \mu_c)$, definimos una función $f : X \times X \to \mathbb{R}^*$ como la función indicadora de la diagonal

$$\{(x,x) \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

  Obtenemos:

$$\int_X \left(\int_X \left(f_{[x]}\right) \, dm \right) d\mu_c = \int_X 0 \, d\mu_c = 0,$$

$$\int_X \left(\int_X \left(f_{[x]}\right) \, d\mu_c \right) dm = \int_X 1 \, dm = 1.$$

  La función f es medible en $(X \times X, \mathscr{Z}; m \times \mu_c)$, porque la diagonal es un conjunto medible (ver el ejercicio III.26), pero desde luego no es integrable (ejercicio III.27).

El primero de los ejemplos de arriba, ilustra muy bien una idea subyacente a la integral. La integral de una función puede interpretarse como una especie de suma de todos los valores que toma la función en su dominio (sobre esto comentamos ya en la Sección II.2); de acuerdo a esa idea intuitiva, el valor que tome la integral debiera ser independiente del orden en que se sumen los valores. Si tenemos una función (sucesión) integrable $\{x_{m,n}\}$ en el espacio medible $\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}; \mu_c\right)$, con μ_c la medida de contar, y la representamos con una matriz

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} & x_{3,5} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

su integral es igual a la suma de todos los números que están en esa matriz *sin importar el orden en que los sumemos*. Pero, la matriz que representa a la sucesión $\{a_{m,n}\}$ de arriba es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

La suma (15) corresponde a sumar renglón por renglón, y la suma (16) corresponde a sumar columna por columna.

El segundo ejemplo, nos muestra que la hipótesis en los teoremas de Tonelli (Teorema III.22) y Fubini (Teorema III.23) de que los espacios sean σ-finitos es necesaria.

Ejercicios.

III.16 *Demuestra que para toda función f definida en un subconjunto de $X\times Y$ se cumplen las condiciones de linealidad*

$$(cf+g)_{[x]} = cf_{[x]} + g_{[x]}, \qquad (cf+g)^{[y]} = cf^{[y]} + g^{[y]}$$

III.17 *Sea A cualquier subconjunto de $X \times Y$. Verificar las identidades, válidas para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$:*

$$\left(A_{[x]}\right)^c = (A^c)_{[x]}\,, \qquad \left(A^{[y]}\right)^c = (A^c)^{[y]}\,.$$

III.18 *Sea A_α una colección cualquiera de subconjuntos de $X \times Y$. Verifica que para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ se tienen las identidades*

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)_{[x]} = \bigcup_\alpha (A_\alpha)_{[x]}\,, \qquad \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^{[y]} = \bigcup_\alpha (A_\alpha)^{[y]}\,.$$

III.19 *Completa la demostración de la Proposición III.18 probando que las secciones horizontales de conjuntos medibles son medibles.*

III.20 *Verifica las igualdades*

$$|f|_{[x]} = |f_{[x]}|, \qquad (f_\pm)_{[x]} = \left(f_{[x]}\right)_\pm\,,$$

y las expresiones análogas para las secciones horizontales.

III.21 *Considérese la colección $\mathscr{M}$ definida en la demostración del Lema III.21 (ver página 113). Demostrar que si E_1 y E_2 están en $\mathscr{M}$, entonces $E_1 \cap E_2$ y $E_1 \cup E_2$ también lo están.*

III.22 *Dar un contraejemplo para mostrar que la hipótesis de estar en un espacio de medida finita es necesaria en el ejercicio III.21.*

III.23 *Demuestra que todas las secciones horizontales de una función medible son medibles.*

III.24 *Probar que la sección (horizontal o vertical) de la función indicadora χ_E en un punto x, es igual a la función indicadora de la sección (horizontal o vertical) en ese mismo punto.*

III.25 *Verificar que la igualdad* (7) *es cierta, siguiendo los pasos de la prueba de la igualdad* (6).

III.26 *Considera el espacio $(X \times X, \mathscr{X}; m \times \mu_c)$ definido en la página 119. Demuestra que la diagonal*

$$D = \{(x,x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

es un subconjunto medible de $X \times X$.

III.27 *Sea D como en el ejercicio III.26. Probar que $(m \times \mu_c)(D) = \infty$.*

Sugerencia: Considera la definición de $m \times \mu_c$ a partir de una medida exterior.

III.4 La Integral de Lebesgue–Stieltjes

Tropezando con mi rostro distinto de cada día

FEDERICO GARCÍA LORCA
(Vuelta de Paseo)

En esta sección construimos una clase de medidas conocidas como *medidas de Lebesgue-Stieltjes*. La idea es que a cualquier función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, monótona y no decreciente, se le puede asociar una medida μ_g que está descrita por el comportamiento de g; en particular, para el caso en el que g sea continua, esta medida será tal que cada intervalo con extremos en a y b mida $g(b) - g(a)$. La construcción se lleva a cabo siguiendo la teoría general presentada en la Sección III.1.

De la misma manera que el Capítulo I, comenzamos midiendo las celdas:

Definición III.25 *Dada una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona no decreciente, definimos*

1. $\tilde{\mu}_g\big((a,b)\big) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \Big(g(b-\varepsilon) - g(a+\varepsilon)\Big)$

2. $\tilde{\mu}_g\big([a,b]\big) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \Big(g(b+\varepsilon) - g(a-\varepsilon)\Big)$

3. $\tilde{\mu}_g\big([a,b)\big) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \Big(g(b-\varepsilon) - g(a-\varepsilon)\Big)$

4. $\tilde{\mu}_g\big((a,b]\big) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \Big(g(b+\varepsilon) - g(a+\varepsilon)\Big)$

Observamos que en el caso de que la función g sea continua, cada una de las expresiones de arriba es igual a $g(b) - g(a)$; en el caso particular $g(x) = x$, se tiene que $\tilde{\mu}_g(I)$ es simplemente la longitud de la celda.

En seguida, extendemos $\tilde{\mu}_g$ a una semi-medida en el álgebra $\mathscr{A}$ generada por las celdas; esto puede hacerse de una única forma, que por lo demás resulta bastante natural. Recordamos que $\mathscr{A}$ consiste en los conjuntos que son uniones finitas de intervalos (no necesariamente acotados).

Definición III.26 *Extendemos $\tilde{\mu}_g$ al álgebra generada por las celdas de la siguiente manera:*
(a) $\tilde{\mu}_g(\emptyset) = 0$
(b) *Si $K \in \mathscr{A}$ es no acotado, entonces $\tilde{\mu}_g(K) = \infty$.*

(c) *Sea $K \in \mathscr{A}$ acotado, con $I_1, \ldots, I_n$ sus componentes conexas. Definimos*

$$\tilde{\mu}(K) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}(I_j). \tag{17}$$

El resultado que habría que esperar es por fortuna cierto:

Teorema III.27 *Si la función g satisface las hipótesis de la Definición III.25, entonces se tiene que $\tilde{\mu}_g(K)$ es una semi-medida en $\mathscr{A}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Las primeras dos propiedades de ser semi-medida (Definición III.2) son inmediatas de la definición de $\tilde{\mu}_g$. Resta solamente probar que $\tilde{\mu}_g$ es aditiva:

Sea
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} K_n$$
con los $K_i \in \mathscr{A}$ no vacíos y disjuntos a pares. Vamos a considerar solamente el caso en el que A es una celda: para el caso en el que A es no acotado, el resultado es trivial, y si A fuera una unión finita de celdas el resultado se sigue fácilmente del caso conexo (ejercicio III.29). Sean $K_{i,1}, \ldots K_{i,N_i}$ las componentes conexas de K_i. Se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}_g(K_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_i} \tilde{\mu}_g(K_{i,j}). \tag{18}$$

La doble suma en el lado derecho de (18) puede reescribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_i} \tilde{\mu}_g(K_{i,j}) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\mu}_g(J_k) \qquad N = N_1 + \cdots + N_n \tag{19}$$

donde cada J_k es igual a un $K_{i,j}$, y están ordenados de tal forma que el extremo superior de J_k coincide con el extremo inferior de J_{k+1}. Como las J_k son claramente disjuntas a pares, al sustituir en (19) las expresiones para $\tilde{\mu}(J_k)$ dadas por la Definición III.25, los términos intermedios se cancelan telescópicamente, resultando

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}_g(K_i) &= \sum_{k=1}^{N} \tilde{\mu}_g(J_k) \\ &= \tilde{\mu}(A). \end{aligned}$$

□

Corolario III.28 *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) \le g(y)$ siempre que $x < y$; sea $\tilde{\mu}_g$ la semi-medida del Teorema III.27, y sea $\mathscr{C}$ la σ-álgebra formada por los conjuntos que cumplen la condición de Carathodory para la medida exterior μ_g^* generada por $\tilde{\mu}_g$. Entonces la restricción a $\mathscr{C}$ de μ_g^* es una medida en $(\mathbb{R}, \mathscr{C})$.*

DEMOSTRACIÓN.

Aplicación directa del Teorema III.7.

□

Corolario III.29 *Sean g y μ_g^* como en el corolario anterior, y sea $\mathscr{B}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Entonces la restricción a $\mathscr{B}$ de μ_g^* es la única medida en $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ que coincide con $\tilde{\mu}_g$ en $\mathscr{A}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Aplicación directa del Teorema III.9 (ver ejercicio III.28).

□

Concretamos todo esto en la definición central de esta sección.

Definición III.30 *A la medida del Corolario III.28 le llamamos la medida de Lebesgue–Stieltjes determinada por g, y la denotamos por μ_g. Nos referiremos también al espacio $(\mathbb{R}, \mathscr{X}; \mu_g)$ y a su integral como el espacio y la integral de Lebesgue–Stieltjes determinadas por g.*

Comentaremos ahora acerca de algunos ejemplos de medidas de Lebesgue–Stieltjes para los cuales se pueden calcular integrales explícitas.

1. Si g es constante, entonces μ_g es la medida trivial $\mu_g = 0$, definida en el conjunto potencia $2^{\mathbb{R}}$.

2. Si $g(x)$ es la identidad en $\mathbb{R}$, entonces μ_g es la medida de Lebesgue.

3. Sea $g(x) = [[x]]$, la función mayor entero. Entonces $\mathscr{X} = 2^{\mathbb{R}}$ y $\mu_g(E)$ es igual al número de enteros contenidos en E. Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, cualquiera, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

4. Supongamos que g tiene derivada continua en la celda abierta (a,b) y que f es continua en su cerradura $[a,b]$. Mostraremos que

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu_g = \int_a^b f(x)g'(x)\, dx. \tag{20}$$

Para $N \in \mathbb{N}$ y $k = 0,1,\dots N$, pongamos

$$\begin{aligned} \delta_N &= \frac{b-a}{N}. \\ T_{k,N} &= a + k \cdot \delta_N \end{aligned}$$

Definimos funciones escalonadas φ_N por

$$\varphi_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f(T_{k-1,N}) \; \chi_{\,[T_{k-1,N},T_{k,N})]}(x).$$

Tenemos que

$$\int_{[a,b]} \varphi_N \, d\mu_g \quad = \quad \sum_{k=1}^{N} f(T_{k-1,N}) \Big(g(T_{k,N}) - g(T_{k-1,N}) \Big),$$

y por el Teorema del Valor Medio de cálculo se sigue que

$$\int_{[a,b]} \varphi_N \, d\mu_g \quad = \quad \sum_{k=1}^{N} f(N_{k-1,N})\, g'(\chi_{k,N})$$

para ciertos $\chi_k \in (T_{k-1,N}, T_{k,N})$. El lado derecho en la igualdad de arriba representa sumas de Riemann de fg', por lo que haciendo $N \to \infty$ se obtiene la integral de Riemann (Lebesgue) en $[a,b]$ para esa función; por otra parte, es consecuencia inmediata del Teorema de la Convergencia Dominada II.32 que el lado izquierdo tiende a la integral de f en $[a,b]$ con respecto a μ_g cuando $\mathbb{N} \to \infty$. Se concluye entonces (20).

El ejemplo anterior, y en concreto la fórmula (20), nos ofrece una forma directa de calcular una gran variedad de integrales de Lebesgue–Stieltjes. Esa fórmula es válida no solamente sobre intervalos, sino para todo conjunto Lebesgue- medible E (ejercicio III.33). La igualdad (20) prevalece en situaciones más generales que la de ser f continua; para convencernos de esto, basta por ejemplo considerar sucesiones de funciones continuas f_n y aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada II.32. Sin embargo, en el Capítulo IV extenderemos dicha igualdad de una manera todavía más eficiente y general.

NOTACIÓN: En vista del último ejemplo presentado, es usual escribir las integrales de Lebesgue–Stieltjes en cualquiera de las formas

$$\int f \, d\mu_g(x) = \int f(x) \, dg(x)$$

En el lado derecho se omite la referencia explícita a la medida μ_g, y es consistente con la notación "dx" para la integral de Lebesgue presentada en el ejercicio II.34. En lo subsecuente usaremos libremente ambas notaciones.

Ejercicios.

III.28 *Verifica que para toda g con las hipótesis de la Definición III.25 se tiene que $\tilde{\mu}_g$ es σ-finita.*

III.29 *Completar la demostración del Teorema III.27 considerando el caso en el que el conjunto A no es conexo.*

III.30 *Sea $g(x) = [[x]] + \cos x$. Calcular las integrales*

$$\int_a^b x^n \, dg(x) \qquad y \qquad \int_0^{2\pi} \cos x \, dg(x).$$

III.31 *Para la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

encuentra una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para toda función f, Lebesgue integrable:

$$\int f(x) \, dH(x) = \int f(x) h(x) \, dx.$$

III.32 *Considera la medida de concentración μ_y para cierto $y \in \mathbb{R}$ dado arbitrario. Explica por qué μ_y no es una medida de Lebesgue–Stieltjes.*

III.33 *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona no decreciente con derivada continua, y sea μ_g la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por g. Demostrar que para todo conjunto Lebesgue-medible E se tiene que*

$$\mu_g(E) = \int_E g'(x)\, dx.$$

Sugerencia: probar que ambos lados de la igualdad definen la misma semimedida en el álgebra generada por los intervalos.

Capítulo IV

Clasificación de Medidas

El Teorema II.27 nos muestra que, para $f \geq 0$ medible en $(X, \mathscr{X}; \mu)$, la expresión

$$\nu_f(E) = \int_E f \, d\mu, \tag{1}$$

define una medida en $(X, \mathscr{X})$. En el presente capítulo abordaremos esta cuestión en sentido opuesto:

dadas dos medidas μ y ν en un mismo espacio medible,
¿cuándo existe una función f tal que se tiene la igualdad de arriba?

La respuesta a este problema inverso viene dada por un resultado conocido como el Teorema de Radon-Nikodym (Teorema IV.3), que es uno de los resultados más importantes y profundos de la teoría de la medida. En términos generales, este teorema dice que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa solamente para cierto tipo de medidas; en este orden de ideas, una buena parte del capítulo será dedicada a agrupar las medidas en tipos adecuados. El Teorema de Descomposición de Lebesgue (Teorema IV.7) nos indicará que, en un sentido que se hará preciso, la clasificación correspondiente es completa. El Teorema de Radon-Nikodym está estrechamente relacionado con un resultado de análisis funcional conocido como la *descomposición de Riesz*. Esta realación se explora en el presente capítulo. Los espacios L^p (a veces llamados *espacios de Lebesgue*) son espacios de funciones integrables, y son unos de los objetos más ampliamente estudiados en análisis funcional; se presentan en la Sección IV.3. El material que se presenta en las tres primeras secciones de este capítulo es casi totalmente autocontenida; en la parte final de la Sección IV.3 se usan resultados bien conocidos de análisis funcional que no están incluidos en el capítulo. Todos los resultados de análisis funcional requeridos y no presentes en este capítulo se incluyen en el Apéndice B.

IV.1 La Derivada de Radon-Nikodym

Amo a una mujer clara,
que amo y me ama
sin pedir nada – o casi nada –,
que no es lo mismo,
pero es igual

SILVIO RODRÍGUEZ
(Pequeña Serenata Diurna)

El propósito central de esta sección es responder la pregunta formulada en el párrafo introductorio del capítulo sobre cuándo, dadas dos medidas μ y ν, existe una función f tal que ν es una medida de la forma ν_f que aparece en la expresión (1). La respuesta a dicha pregunta está dada por el Teorema de Radon-Nikodym (Teorema IV.3). Estrechamente ligado a ello, hay otro resultado (de considerable importancia en si mismo), conocido como la Descomposición de Lebesgue (Teorema IV.7).

En la dirección hacia obtener una respuesta a la pregunta arriba planteada, comenzamos con la siguiente definición.

Definición IV.1 *Sean μ y ν dos medidas en un espacio medible $(X, \mathscr{X})$. Decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ si*

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Denotamos esto por

$$\nu << \mu$$

En el ejercicio IV.1 se enuncian algunas propiedades básicas de las medidas absolutamente continuas.

Está claro que si ν no es absolutamente continua con respecto a μ, no es posible encontrar una función f tal que $\nu = \nu_f$ en (1) (¿por qué?). Resulta ser que, para medidas σ-finitas, esas son las únicas excepciones; ese es un hecho de fundamental importancia en la teoría, y lo presentaremos un poco más adelante (Teorema IV.3). Probamos primero, en el siguiente lema, un caso particular que nos servirá de escalón para probar el caso general:

Lema IV.2 *Sean ν y μ medidas finitas en $(X, \mathscr{X})$, tales que $\nu << \mu$ y $0 \leq \nu \leq \mu$. Entonces existe una función integrable f tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu. \qquad \forall E \in \mathscr{X} \tag{2}$$

Además, $0 \leq f \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathscr{G}$ la colección de funciones medibles

$$g : X \to \mathbb{R}, \qquad 0 \leq g \leq 1,$$

para las cuales se cumple la desigualdad

$$\int_E g \, d\mu \leq \nu(E), \qquad \forall E \in \mathscr{X}.$$

La colección $\mathscr{G}$ es no vacía (¿por qué?) así que podemos tomar

$$\alpha = \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \in \mathscr{G} \right\}.$$

Se observa que $0 \leq \alpha \leq \nu(X)$. Tomamos una sucesión de funciones $\{g_n\} \subset \mathscr{G}$ tales que

$$\int_X g_n \, d\mu \to \alpha,$$

y consideramos la sucesión no decreciente de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(x) = \max_{k \leq n} g_k(x).$$

Afirmamos que $f_n \in \mathscr{G}$ para toda $n \in \mathbb{N}$; para ver esto, definimos los conjuntos

$$\begin{array}{rcl}
A_1 & = & \left\{ x \in X \;\middle|\; g_1(x) \geq g_j(x) \;\; j = 2, \ldots, n \right\} \\
A_2 & = & \left\{ x \in X \setminus A_1 \;\middle|\; g_2(x) \geq g_j(x) \;\; j = 3, \ldots, n \right\} \\
A_3 & = & \left\{ x \in X \setminus (A_1 \cup A_2) \;\middle|\; g_3(x) \geq g_j(x) \;\; j = 4, \ldots, n \right\} \\
& \vdots & \\
A_{n-1} & = & \{ x \in X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-2}) \mid g_{n-1}(x) \geq g_n(x) \} \\
A_n & = & X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})
\end{array}$$

Estos A_k forman una colección de conjuntos medibles, disjuntos a pares, cuya unión es X; por lo tanto, para todo $E \in \mathscr{X}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_E f_n \, d\mu &= \sum_{k=1}^{n} \int_{E \cap A_k} g_k(x) \, dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \nu(E \cap A_k) \\
&= \nu(E).
\end{aligned}$$

Como además es claro que

$$0 \leq f_n \leq 1,$$

se sigue que, en efecto $f_N \in \mathscr{G}$.

Aplicando convergencia monótona (Teorema II.22) a la sucesión $\{f_n\}$, se tiene que para todo $E \in \mathscr{X}$

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \nu(E), \tag{3}$$

donde $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. De esto se sigue que $f \in \mathscr{G}$ y también que

$$\int_X f \, d\mu = \alpha.$$

Queremos demostrar que se tiene la igualdad en (3) para todo conjunto medible. Supongamos que no es así, es decir que existe un $F \in \mathscr{X}$ tal que

$$\int_F f \, d\mu < \nu(F). \tag{4}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x) < 1$ para todo $x \in F$; en efecto, si para cierto F ocurriera la desigualdad (4), no es difícil ver que para el subconjunto $F' = \{x \in F \mid f(x) < 1\}$ también se cumpliría la misma desigualdad.

Con esa consideración, definimos

$$F_n = \left\{ x \in F \;\middle|\; f(x) < 1 - \frac{1}{n} \right\}.$$

Al ser F_n una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es F, se sigue que

$$\int_{F_n} f \, d\mu \to \int_F f \, d\mu \qquad \text{y} \qquad \nu(F_n) \to \nu(F),$$

y por el supuesto (4), se tiene que existe F_N para el cual

$$\int_{F_N} f \, d\mu < \nu(F_N). \tag{5}$$

La desigualdad anterior implica, de forma particular, que F_N es de medida positiva (tanto para ν como para μ).

Sea $K \subset F_N$ tal que $\mu(K) > 0$, y sea $0 < \varepsilon < 1/N$ arbitrario. Notemos que

$$\int_X (f + \varepsilon\, \chi_K)\, d\mu > \alpha,$$

por lo cual

$$f + \varepsilon\, \chi_K \notin \mathscr{G}. \tag{6}$$

Como además se tiene que $0 \leq f + \varepsilon\, \chi_K \leq 1$, la única posibilidad de que se cumpla (6) es que exista un subconjunto $H \subset X$ para el cual

$$\int_H (f + \varepsilon\, \chi_K)\, d\mu > \nu(H). \tag{7}$$

Por otra parte, como $f \in \mathscr{G}$ se sigue de (3) que

$$\int_{H \cap K^c} (f + \varepsilon\, \chi_K)\, d\mu = \int_{H \cap K^c} f\, d\mu \leq \nu(H \cap K^c),$$

y por lo tanto

$$\int_{H \cap K} (f + \varepsilon\, \chi_K)\, d\mu > \nu(H \cap K).$$

En resumen, dados K y ε como arriba, existe $K' \subset K$ para el cual

$$\int_{K'} (f + \varepsilon\, \chi_K)\, d\mu > \nu(K').$$

Ahora, sea

$$\mathscr{B} = \left\{ G \subset F_N \;\middle|\; \int_G (f + \varepsilon\, \chi_{F_N})\, d\mu > \nu(G) \right\}.$$

Por lo discutido en el párrafo anterior, $\mathscr{B}$ es no vacío; es claro también que si $G \in \mathscr{B}$, entonces $\mu(G) > 0$. Se sigue

$$0 < \sup\, \{\mu(B) \mid B \in \mathscr{B}\} \leq \mu(F_N).$$

Tomamos una sucesión de conjuntos $\{G_n\} \subset \mathscr{B}$ tales que

$$G_n \subset G_{n+1} \qquad \mu(G_n) \to \sup\, \{\mu(B) \mid B \in \mathscr{B}\}.$$

Si G es la unión de los G_n, entonces

$$\int_G (f + \varepsilon\, \chi_{F_N})\, d\mu \geq \nu(G). \tag{8}$$

Observamos también que $\mu(G)=\mu(F_N)$: en efecto, si $\mu(G)<\mu(F_N)$, entonces se tendría que $\mu(F_N\setminus G)>0$, por lo que habría un subconjunto $G'\subset F_N\setminus G$ con

$$\mu(G\cup G')>\sup\{\mu(B)\mid B\in\mathscr{B}\}$$

y tal que $G\cup G'\in\mathscr{B}$, lo cual desde luego no es posible. Se sigue de esto inmediatamente que $\nu(G)=\nu(F_N)$ (¿por qué?) Pero entonces, podemos sustituir G por F_N en (8), obteniendo

$$\int_{F_N}(f+\varepsilon\,\chi_{F_N})\,d\mu>\nu(F_N).$$

Al ser $\varepsilon>0$ arbitrariamente pequeño, esta desigualdad contradice (5).

$\square$

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes en la teoría de la medida.

Teorema IV.3 (Teorema de Radon-Nikodym) *Sean ν y μ medidas σ-finitas en $(X,\mathscr{X})$, tales que $\nu<<\mu$. Entonces existe una función medible $f\geq 0$, única hasta igualdad μ-c.t.p. tal que*

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu.\qquad\forall E\in\mathscr{X}\tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos primero que las dos medidas en consideración son finitas, sin ninguna otra restricción. Como $\nu<<\mu+\nu$, sabemos del Lema IV.2 que existe una función g tal que para todo $E\in\mathscr{X}$

$$\nu(E)=\int_E g\,d(\mu+\nu),\qquad 0\leq g\leq 1.\tag{10}$$

Usando el resultado del ejercicio IV.5, se sigue fácilmente que

$$\int_E(1-g)\,d\nu = \int_E g\,d\mu\tag{11}$$

$$\mu(E) = \int_E(1-g)\,d(\mu+\nu).\tag{12}$$

Por el ejercicio IV.6, podemos multiplicar los integrandos en ambos lados de la igualdad (11) por la función $1+g+\cdots+g^n$, obteniéndose

$$\int_E(1-g^{n+1})\,d\nu=\int_E g(1+g+\cdots+g^n)\,d\mu.\tag{13}$$

Sea

$$N = \{x \in X \mid g(x) = 1\}. \tag{14}$$

De (11) se tiene que $\nu(N) = 0$. Para $x \notin N$, se tiene que la serie geométrica

$$1 + g(x) + \cdots + g^n(x) + \cdots$$

converge $1/(1 - g(x))$.

Usando (13), y aplicando dos veces convergencia dominada (Teorema II.32), obtenemos

$$\begin{aligned} \nu(E) = \nu(E \cap N^c) &= \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap N^c} (1 - g^{n+1})\, d\nu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap N^c} g(1 + g + \cdots + g^n)\, d\mu \\ &= \int_{E\cap N^c} \frac{g}{1-g}\, d\mu. \end{aligned}$$

Definiendo $f = g(1-g)^{-1}$ en N^c y arbitrariamente en N, se tiene la igualdad (9).

La generalización a medidas σ-finitas y la prueba de la unicidad c.t.p. se dejan al lector (ejercicios IV.7 y IV.8).

$\square$

El ejemplo 4 en la página 125 motiva la siguiente definición.

Definición IV.4 *A la función f del Teorema IV.3 se le conoce como la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ. Se usa la notación*

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Cuando μ_g es la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por una función diferenciable g, se tiene que

$$\mu_g(E) = \int_E g'(x)\, dx.$$

O sea, la derivada de Radon-Nikodym de μ_g con respecto a la medida de Lebesgue es igual a la derivada de g en el sentido usual. También se vio en el mismo ejemplo que

$$\int_E f\, d\mu_g(E) = \int_E f g'(x)\, dx,$$

para toda función medible f y para todo boreliano E; este hecho no es de ningún modo exclusivo de dicho caso particular:

Teorema IV.5 *Sean $\nu << \mu$, medidas σ-finitas en $(X, \mathscr{X})$. Entonces, para toda función medible f*

$$\int_E f \, d\nu = \int_E f \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right) d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

Se sigue inmediatamente del ejercicio IV.6.

$\square$

La derivada de Radon-Nikodym posee algunas propiedades análogas a aquellas de la derivada usual de los cursos de cálculo:

(RN1) Si $\nu_1 << \mu$ y $\nu_2 << \mu$, entonces

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

(RN2) Si $\nu << \mu$ y $\mu << \lambda$, entonces

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}$$

(RN3) Si $\nu << \mu$ y $\mu << \nu$, entonces

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)^{-1}.$$

Las tres propiedades anteriores se prueban directamente de la definición y se dejan al lector (ejercicio IV.9).

Complementarias a las medidas absolutamente continuas se tienen las llamadas *medidas singulares*, que definimos a continuación.

Definición IV.6 *Sean μ y λ dos medidas en un espacio medible $(X, \mathscr{X})$. Decimos que λ y μ son mutuamente singulares si existe un conjunto $Z \in \mathscr{X}$ tal que*

$$\mu(Z) = 0 \qquad y \qquad \lambda(Z^c) = 0.$$

Denotamos esto por $\mu \perp \lambda$.

Ejemplos sencillos de medidas singulares se presentan en el ejercicio IV.10. Propiedades básicas de las medidas singulares, se enuncian en el ejercicio IV.11. Una medida singular ν_1 con $\nu_1 \perp \mu$ resulta ser opuesta a una medida ν_2 con $\nu_2 << \mu$, en el sentido siguiente: si $\mu(E) = 0$, entonces también medida $\nu_2(E) = 0$, pero será E^c su complemento el que tenga medida $\nu_1(E^c) = 0$ (ver también el tercer inciso del ejercicio IV.11); en realidad, las medidas absolutamente continuas y las medidas singulares se complementan unas a otras en un sentido muy fuerte, como nos muestra el siguiente resultado.

Teorema IV.7 (Teorema de la Descomposición de Lebesgue) *Dadas medidas σ-finitas ν y μ en $(X, \mathscr{X})$, existen medidas $\nu_{\rm ac}$ y $\nu_{\rm sg}$ tales que se tiene*

$$\nu = \nu_{\rm ac} + \nu_{\rm sg}, \quad \nu_{\rm ac} << \mu, \quad \text{y} \quad \nu_{\rm sg} \perp \mu.$$

Además, tales $\nu_{\rm ac}$ y $\nu_{\rm sg}$ pueden elegirse de forma única.

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema IV.2, sabemos que

$$0 \leq \frac{d\mu}{d(\mu + \nu)} \leq 1. \tag{15}$$

Retomamos el conjunto N, que usamos en la demostración del Teorema IV.3, definido en (14):

$$N = \left\{ x \in X \;\middle|\; \frac{d\mu}{d(\mu + \nu)}(x) = 0 \right\}.$$

Definimos

$$\nu_{\rm sg}(E) = \nu(E \cap N) \quad \text{y} \quad \nu_{\rm ac}(E) = \nu(E \cap N^c).$$

Claramente $\nu_{\rm sg}$ y $\nu_{\rm ac}$ son medidas en $(X, \mathscr{X})$ tales que $\nu = \nu_{\rm ac} + \nu_{\rm sg}$; también es inmediato de las definiciones anteriores que $\mu(N) = 0$ y que $\nu_{\rm sg}(N^c) = 0$, por lo cual $\nu_{\rm sg} \perp \mu$.

Sea $E \in \mathscr{X}$ tal que $\mu(E) = 0$. Como $\mu(N) = 0$, se sigue que

$$\mu(E) = \mu(E \cap N^c) = 0.$$

Esto implica que

$$\int_{E \cap N^c} \frac{d\mu}{d(\mu + \nu)} \, d(\mu + \nu) = 0.$$

Al ser

$$\frac{d\mu}{d(\mu + \nu)} > 0$$

en $E \cap N^c$, la igualdad anterior implica que $(\mu + \nu)(E \cap N^c) = 0$; de esto se sigue que $\nu(E) = \nu(E \cap N^c) = 0$. Por lo tanto, $\nu_{\mathrm{ac}}(E) << \mu$, como se quería.

Solamente resta probar la unicidad. Supongamos que $\nu = \nu_0 + \nu_1$ con ν_0 y ν_1 medidas singular y absolutamente continua con respecto a μ, respectivamente. Sean A y B conjuntos tales que $\mu(A) = \mu(B) = \nu_0(A^c) = \nu_{\mathrm{sg}}(B^c) = 0$. Si $E \subset A \cup B$, como $\mu(E) = 0$ tenemos entonces que $\nu_1(E) = \nu_{\mathrm{ac}}(E) = 0$; se sigue también que $\nu_{\mathrm{sg}}(E) = \nu_0(E)$. Ahora, si $E \subset (A \cap B)^c$ tenemos que $\nu_{\mathrm{sg}}(E) = \nu_0(E) = 0$ (puesto que $E \subset A^c$ y $E \subset B^c$), por lo cual también $\nu_1(E) = \nu_{\mathrm{ac}}(E)$. Concluimos que ν_0 coincide con ν_{sg} (y ν_a con ν_{ac}) tanto en $A \cap B$ como en su complemento, y por lo tanto son iguales.

$\square$

Ejercicios

IV.1 *Demostrar que*
(a) $\nu << \nu$
(b) *Si* $\nu << \mu$ *y* $\mu << \lambda$*, entonces* $\nu << \lambda$.
(c) *Si* $\nu_1 << \mu$ *y* $\nu_2 << \mu$*, entonces* $\nu_1 + \nu_2 << \mu$.
(d) *Si* $\nu << \mu$ *y* $c \geq 0$*, enonces* $c\nu << \mu$.
(e) *Para* μ *y* ν *arbitrarias (en el mismo espacio) se tiene que* $\mu << \mu + \nu$.

IV.2 *Construir una medida* λ *en* $(X, \mathscr{B})$ *tal que* λ *no sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, ni viceversa.*

IV.3 *Sean* $\lambda << \mu$ *medidas en el espacio* $(X, \mathscr{X})$*, y sea* $(Y, \mathscr{Y}; \nu)$ *un espacio de medida arbitrario. Demostrar que* $\lambda \times \nu$ *es absolutamente continua con respecto a* $\mu \times \nu$ *en el espacio producto.*

IV.4 *Sea* μ *la medida de contar en* $\mathbb{R}$ *(con, digamos, la* σ*-álgebra de Borel) y* ν *cualquier medida en ese mismo espacio medible. Probar que si* ν *no es idénticamente cero, entonces no existe ninguna función medible* f *tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema IV.3?

IV.5 *Sean $\mu_1, \dots \mu_n$ medidas en $(X, \mathscr{X})$, y sea f una función integrable con respecto a cada μ_j, ($j = 1, \dots, n$). Probar que*

$$\int_E f\, d(\mu_1 + \cdots + \mu_n) = \int_E f\, d\mu_1 + \cdots + \int_E f\, d\mu_n, \qquad \forall E \in \mathscr{X}.$$

IV.6 *Supongamos que μ y ν son medidas en $(X, \mathscr{X})$, y f y g funciones medibles tales que*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\nu, \qquad \forall E \in \mathscr{X}.$$

Demostrar que para toda función medible h se cumple

$$\int_E fh\, d\mu = \int_E gh\, d\nu, \qquad \forall E \in \mathscr{X}.$$

*[*Sugerencia: probar primero para $h \geq 0$*].*

IV.7 *Sean f y g funciones medibles en $(X, \mathscr{X}; \mu)$ tales que*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$$

para todo $E \subset X$ medible. Probar que $f = g$ c.t.p.

IV.8 *Completar la demostración del Teorema IV.3 extendiendo el resultado a cualquier medida σ-finita.*

IV.9 *Demostrar las propiedades (R1)–(R3) de la derivada de Radon-Nikodym.*

IV.10 *Probar lo siguiente*

(a) *Si μ es la medida de contar en cualquier conjunto X, entonces $\lambda{<}\mu$ para toda medida λ en X.*

(b) *Toda medida de concentración en $\mathbb{R}$ es mutuamente singular con la medida de Lebesgue.*

IV.11 *Demostrar lo siguiente:*

(a) $\mu \perp \nu \iff \nu \perp \mu$.

(b) *Si $\nu_1 \perp \mu$ y $\nu_2 \perp \nu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.*

(c) *Si $\nu \perp \mu$ y $c > 0$, entonces $c\nu \perp \mu$.*

(d) *Si $\nu{<<}\mu$ y $\nu \perp \mu$, entonces necesariamente ν es la medida trivial $\nu = 0$.*

IV.12 *Probar que si $\lambda \perp \mu$, entonces $\lambda \times \nu \perp \mu \times \nu$ para toda medida ν.*

IV.13 *Para cada una de las siguientes funciones, encuentra la derivada de Radon-Nikodym de su medida de Lebesgue-Stieltjes generada, con respecto a la medida de Lebesgue:*

$$g(x) = [[x]] + x \qquad h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

IV.2 La Descomposición de Hahn

Te quiero, pero a pedazos.

JOAN MANUEL SERRAT
(Me gusta todo de ti)

En esta sección generalizamos la noción de medida, permitiendo que se tomen valores negativos; a estas medidas generalizadas se les conoce con el nombre de *cargas*, en analogía a la carga eléctrica que toma valores tanto positivos como negativos. El resultado principal de esta sección, conocido como *descomposición de Hahn* (Teorema IV.12), afirma que toda carga se puede separar como una resta de medidas.

Definición IV.8 *Una carga en un espacio medible* $(X, \mathscr{X})$ *es una función*

$$\mu : \mathscr{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

que cumple lo siguiente:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.
(2) *Si* $\mu(A) = \pm\infty$ *para algún* $A \in \mathscr{X}$ *entonces* $\mu(E) \neq \mp\infty$ *para todo* $E \in \mathscr{X}$.
(3) *Si* $\{E_n\}$ *es una colección numerable de conjuntos en* $\mathscr{X}$*, disjuntos a pares, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n). \tag{16}$$

Es importante notar que está dado por supuesto de forma implícita que la suma en el lado derecho de (16) siempre está bien definida, y que no depende del orden en que se tomen los sumandos. Otra observación es que si μ es una carga en $(X, \mathscr{X})$ y $\mu(A) = \pm\infty$ para algún A, entonces también $\mu(X) = \pm\infty$.

Definición IV.9 *Sea μ una carga en un espacio medible $(X,\mathscr{X})$, y sea $A \in \mathscr{X}$. Se dice que A es un conjunto positivo si para todo $E \subset A$ medible se tiene que $\mu(E) \geq 0$. De forma similar, si $\mu(E) \leq 0$ para todo $E \subset A$ medible, diremos que A es un conjunto negativo.*

Es claro que el conjunto vacío $\emptyset$ es tanto positivo como negativo, de acuerdo a la definición. Sin embargo, en general un conjunto de "carga cero" no tiene que ser ni positivo ni negativo: Basta tomar, por ejemplo $X = \{-1,1\}$ con $\mu(\{x\}) = x$.

Un punto importante de la Definición IV.9, es que nos da una relación concreta entre medidas y cargas; esto es, la restricción de carga a un conjunto positivo (o negativo) resulta en una medida (ver ejercicios IV.16 y IV.17).

La definición siguiente resultará muy útil en la demostación del Teorema IV.12.

Definición IV.10 *Para una carga μ en un espacio medible $(X,\mathscr{X})$ definimos la variación total de μ como*

$$|\mu|(E) = \sup \sum_n |\mu(E_n)| \qquad E \in \mathscr{X}.$$

donde el supremo se toma sobre todas las colecciones numerables $\{E_n\}$, de subconjuntos medibles de E, disjuntos a pares.

Notemos que si X es un conjunto positivo, entonces $|\mu| = \mu$, y que. si X es un conjunto negativo $|\mu| = -\mu$. En ambos casos, se tiene que $|\mu|$ es una medida; el resultado siguiente nos dice que eso es lo que ocurre en todos los casos.

Teorema IV.11 *Para toda carga μ, se tiene que su variación total $|\mu|$ es una medida.*

DEMOSTRACIÓN.

El que $|\mu|(\emptyset) = 0$ y el que $|\mu|(E) \geq 0$ para todo E medible, se sigue de forma inmediata de la definición de variación total. Sea $\{E_n\}$ una colección de conjuntos medibles, disjuntos a pares y sea E su unión. Tomamos valores x_n para los cuales se tenga que $0 \leq x_n < |\mu|(E_n)$, y por lo demás arbitrarios. De la definición de variación total, se sigue que para cada E_n existe una colección de subconjuntos $\{E_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, disjuntos a pares, para los cuales

$$x_n < \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_{n,k})|.$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} x_n &< \sum_{k,n=1}^{\infty} |\mu(E_{n,k})| \\ &\leq |\mu|(E),\end{aligned}$$

dado que $\{E_{n,k}\}$ es una colección numerable de subconjuntos de E, disjuntos a pares. Como cada x_n es un valor arbitrario menor que $|\mu|(E_n)$, podemos entonces concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) \leq |\mu|(E).$$

Para terminar la demostración, hay que probar que la desigualdad opuesta también es verdadera. Por la definición de $|\mu|(E)$, eso es equivalente a probar que

$$\sum_n |\mu(F_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n)$$

para toda colección $\{F_n\}$ de subconjuntos medibles de E, disjuntos a pares; tomemos entonces, una colección $\{F_n\}$ de tal forma, arbitraria. Para cada conjunto F_n se tiene que

$$|\mu(F_n)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k \cap F_n)|,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_n |\mu(F_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k \cap F_n)| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_k \cap F_n)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|(E_k),\end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue del hecho de que, para cada k, la colección $\{E_k \cap F_n\}$ es una partición de E_k.

$\square$

A continuación probamos que todo espacio medible con una carga puede ponerse como la unión disjunta de un conjunto positivo y uno negativo. La importancia de este resultado, reside en que permite descomponer las medidas de carga como una especie de “resta directa” de medidas usuales, lo que permite definir la integral con respecto a una carga (ver Definición IV.13) de forma que todos los muchos resultados que hemos presentado para integrales con respecto a medidas pueden extenderse a cargas de manera automática (y evidente).

Teorema IV.12 (Teorema de Descomposición de Hahn) *Sea μ una carga en $(X,\mathscr{X})$. Entonces existe un conjunto positivo A tal que A^c es negativo.*

DEMOSTRACIÓN.

Definimos

$$\mu^{\pm} = \frac{1}{2}(|\mu| \pm \mu). \tag{17}$$

Puede probarse que tanto μ^+ como μ^- son medidas en $(X,\mathscr{X})$, y que ambas son absolutamente continuas con respecto a $|\mu|$ (ejercicio IV.19). Entonces, por el Teorema IV.3, existen funciones no negativas g^+ y g^-, tales que

$$\mu^{\pm} = \int_E g^{\pm}\, d|\mu|, \qquad \forall E \in \mathscr{X}.$$

Notamos que de la igualdad $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, se tiene que

$$|\mu|(E) = \int_E g^+ + g^- \, d|\mu|$$

para todo E medible. Por lo tanto

$$g^+ + g^- = 1, \quad |\mu| - \text{c.t.p.} \tag{18}$$

Definimos conjuntos P_0 y N_0 por

$$\begin{aligned} P_0 &= \left\{ x \in X \;\middle|\; g^+(x) = 0 \right\} \\ N_0 &= \left\{ x \in X \;\middle|\; g^-(x) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Tomamos un subconjunto $E \subset P_0$ arbitrario. Como $|\mu(F)| \leq |\mu|(F)$ (¿por qué?), se sigue que

$$\begin{aligned} |\mu(F)| + \mu(F) &\leq |\mu|(F) + \mu(F) \\ &= 2\mu^+(F) \\ &= 2\int_F g^+ \, d|\mu| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(F) \leq 0$; esto implica que P_0 es un conjunto negativo.

De forma por completo análoga puede probarse que N_0 es un conjunto positivo (ejercicio IV.20).

Ahora, para $0 < r < 1$ definimos el conjunto

$$A_r = \left\{ x \in X \;\middle|\; |g^+(x) - g^-(x)| \leq r \right\}.$$

Sea $\{E_n\}$ una colección arbotraria de subconjuntos medibles de A_r, disjuntos a pares. Usando la igualdad $\mu = \mu^+ - \mu^-$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_n |\mu(E_n)| &= \sum_n \left| \int_{E_n} g^+ - g^- \, d|\mu| \right| \\ &\leq \sum_n r|\mu|(E_n) \\ &\leq r|\mu|(A_r). \end{aligned}$$

Pero, como la colección $\{E_n\}$ fue arbitraria, podemos tomar el supremo sobre tales colecciones, de donde se obtiene

$$|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r),$$

lo que implica que necesariamente $|\mu|(A_r) = 0$; en otras palabras

$$|g^+ - g^-| \geq 1, \quad |\mu| - \text{c.t.p.}. \tag{19}$$

De (18) y (19), se observa que para casi todo $x \in X$ se tienen dos posiblilidades:

$$g^+(x) = 1 \quad \text{y} \quad g^-(x) = 0,$$

en cuyo caso $x \in N_0$, o bien

$$g^+(x) = 0 \quad \text{y} \quad g^-(x) = 1,$$

en cuyo caso $x \in P_0$. Si $B = (N_0 \cup P_0)^c$, entonces $|\mu|(B) = 0$, y por el ejercicio IV.18 se tiene también que $\mu(B) = 0$.

Para concluir a demostración, podemos poner por ejemplo:

$$A = N_0 \cup B, \qquad A^c = P_0.$$

Desde luego, el conjunto de carga cero B puede repartirse de cualquier forma entre A y A^c, sin cambiar el resultado.

$\square$

Es fácil ver que el teorema anterior permite descomponer toda carga como una “resta de medidas” (ver ejercicios IV.16 y IV.17). Este hecho permite establecer la siguiente definición.

Definición IV.13 *Sea μ una carga en $(X,\mathscr{X})$, y sea $A \subset X$ tal que A es positivo y A^c es negativo. Para E un conjunto medible cualquiera y $f : E \to \mathbb{R}$ medible, definimos la integral de f con respecto a μ como*

$$\int_E f\, d\mu = \int_{E\cap A} f\, d\mu - \int_{E\cap A^c} f\, d(-\mu)$$

si la suma de las integrales del lado derecho está definida.

La definición anterior no depende de la elección del conjunto A (que no tiene por qué ser único); la verificación de esto se deja como ejercicio para el lector (ejercicio IV.21). También es claro que los resultados que hemos obtenido para integrales con respecto a medidas (convergencia monótona, convergencia dominada, Radon–Nikodym, etc.) se trasladan a la integral de la Definición IV.13.

Ejercicios

IV.14 *Probar lo siguiente:*
(a) *La unión arbitraria de conjuntos positivos es positiva.*
(b) *Todo subconjunto de un conjunto positivo es positivo.*
(c) *La unión arbitraria de conjuntos negativos es negativa.*
(d) *Todo subconjunto de un conjunto negativo es negativo.*

IV.15 *Mostrar con un ejemplo que si μ es una carga, entonces*

$$\nu(E) = |\mu(E)|$$

no define necesariamente una medida.

IV.16 *Sea μ una carga en $(X,\mathscr{X})$. Verificar que si $A \subset X$ es un conjunto positivo, entonces μ es una medida en el espacio medible heredado por A.*

IV.17 *Sea μ una carga en $(X,\mathscr{X})$. Verificar que si $A \subset X$ es un conjunto negativo, entonces $-\mu$ es una medida en el espacio medible heredado por A.*

IV.18 *Demostrar que para toda carga μ, se tiene que*

$$\mu(E) = 0 \iff |\mu|(E) = 0.$$

IV.19 *Sea μ una carga en $(X, \mathscr{X})$, y sea $|\mu|$ su variación total. Verificar que μ^+ y μ^-, definidas en 17, son medidas en $(X, \mathscr{X})$. Probar también que μ^+ y μ^- son absolutamente continuas con respecto a $|\mu|$.*

IV.20 *Demostrar que el conjunto N_0 que aparece en la demostración del Teorema IV.12 es un conjunto positivo.*

IV.21 *Mostrar que la Definición IV.13 no depende de la elección del conjunto A.*

IV.3 Espacios de Lebesgue y Representación de Riesz

And deep beneath the rolling waves
In labyrinths of coral caves
The echo of a distant tide
Comes willowing across the sand

PINK FLOYD
(Echoes)

Uno de los resultados básicos del análisis funcional es el conocido como Lema de Representación de Riesz (e.g. [11, 48]); en términos muy generales, este resultado caracteriza a los funcionales lineales de espacios vectoriales normados en términos de los elementos de un "espacio dual." Existen distintas versiones de esto, y en esta sección usaremos el Teorema de Radon–Nikodym (Teorema IV.3) para demostrar una de dichas versiones (Teorema IV.21), correspondiente a los llamados *espacios de Lebesgue* que definimos abajo. Otra versión del Teorema de Representación de Riesz, correspondiente a los espacios de Hilbert, se presenta en el Apéndice B. En la prueba de esa versión, no se hace uso del Teorema IV.3; de hecho, los papeles se invierten, y esa versión del Lema de Representación de Riesz será usada (más adelante, al final de la sección, para dar una demostración alternativa del Teorema de Radon–Nikodym. Esta reciprocidad entre el Teorema de Radon–Nikodym y la representación de Riesz, es una muestra de la profunda correspondencia entre ambos resultados.

Definición IV.14 *Sea $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$ y f medible definimos*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{20}$$

El espacio de Lebesgue $L^p(X;\mu)$ es el espacio de funciones

$$L^p(X;\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_p < \infty\}$$

donde dos funciones se consideran iguales si coinciden μ-c.t.p.

En el caso en el que X es infinito numerable y μ es la medida de contar, suele usarse la notación ℓ^p para los espacios de Lebesgue. También, cuando el contexto garantice que no haya ambigüedad, denotaremos a $L^p(X;\mu)$ por $L^p(X)$ o hasta simplemente por L^p

Los espacios L^p constituyen ejemplos clásicos fundamentales de *espacios vectoriales normados* en el estudio del análisis funcional; el lector que lo requiera, puede consultar una muy breve introducción sobre este tema en el Apéndice B; el material contenido ahí es suficiente para nuestros fines. La profunda relación entre las funciones Lebesgue integrables y las sucesiones absolutamente sumables, que ya se había hecho notar hacia el final de la Sección II.2, queda de manifiesto en el contexto de los espacios L^p.

El Teorema IV.16, además de ser de interés por sí mismo, es la herramienta principal para probar que $\|\cdot\|_p$ es, en efecto, una norma (ver Teorema IV.17 y Corolario IV.18). Antes demostramos un lema aritmético:

Lema IV.15 *Sean p y q dos números en $(1,\infty)$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{21}$$

Para todo par de números positivos a y b se tiene que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{22}$$

DEMOSTRACIÓN.

Para $r > 1$ definimos la función

$$f_r(x) = x^{r-1}, \qquad x \geq 0.$$

Claramente f_r es creciente para toda r y es sencillo verificar que si p y q satisfacen (21), entonces f_q es la inversa de f_p (ejercicio IV.22). De este modo, la desigualdad (22) puede escribirse en la forma

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy \tag{23}$$

donde $f = f_p$.

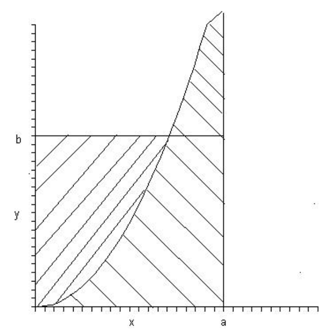

Figura IV.1: Suma de la integral de una función creciente y su inversa.

La desigualdad (23) es válida para cualquier función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ creciente y Riemann-integrable con $f(0) = 0$, como resulta evidente de la figura IV.3; damos a continuación una demostración analítica de este hecho, agregando la hipótesis de que f sea derivable:

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f^{-1}(b) \leq a$, ya que si este no fuera el caso bastaría intercambiar los papeles de f y f^{-1}.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^b f^{-1}(y)\, dy &= \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)\, dx \\ &= f^{-1}(b)b - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$\int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy = ab + \left[\int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\, dx - \big(a - f^{-1}(b)\big)b \right],$$

por lo que, para probar (23), basta verificar que la expresión entre corchetes de arriba es no negativa; pero esto es inmediato del hecho de que $f(x) \geq b$ siempre que $f^{-1}(b) \leq x \leq a$.

□

Teorema IV.16 (La Desigualdad de Hölder) *Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que se cumple* (21). *Entonces, para todas $f \in L^p(X;\mu)$ y $g \in L^q(X;\mu)$ se tiene que $fg \in L^1(X;\mu)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

DEMOSTRACIÓN.

Observemos que, sin pérdida de generalidad (¿por qué?), podemos suponer que

$$\|f\|_p = \|g\|_q = 1.$$

En ese caso la desigualdad buscada es equivalente a:

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \int_X \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) \, d\mu. \tag{24}$$

La desigualdad (24) se sigue del Lema IV.15, poniendo $a = |f|$ y $b = |g|$.

□

El caso $p = q = 2$ de la desigualdad de Hölder se conoce como la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (cf. Apéndice B).

Teorema IV.17 (Desigualdad de Minkowski) *Sea $p \geq 1$. Para todas f y g en $L^p(X;\mu)$ se tiene que*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

DEMOSTRACIÓN.

El caso $p = 1$ es trivial, así que consideramos el caso $p > 1$. Para $h \in L^p(X;\mu)$, sea S_h la función dada por

$$S_h(x) = \frac{|h(x)|^{p-1}}{\|h\|_p^{p/q}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Haciendo cálculos directos (ejercicio IV.25), puede verificarse que

$$\begin{aligned} \|S_h\|_q &= 1 && (25) \\ \|hS_h\|_1 &= \|h\|_p. && (26) \end{aligned}$$

Se sigue entonces, del caso $p = 1$ y de la desigualdad de Hölder que:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \|(f+g)S_{f+g}\|_1 \\ &\leq \|fS_{f+g}\|_1 + \|fS_{f+g}\|_1 \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|S_{f+g}\|_q \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p, \end{aligned}$$

obteniéndose el resultado buscado.

□

Corolario IV.18 *$L^p(X;\mu)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma en ese espacio.*

DEMOSTRACIÓN.

Del teorema anterior se sigue que $L^p(X;\mu)$ es cerrado bajo la suma de funciones y que $\|\cdot\|_p$ satisface la desigualdad del triángulo. Todas las demás propiedades de espacio vecorial y de norma se siguen de forma inmediata de las definiciones.

□

Antes de enunciar y probar el resultado que mencionamos al principio de esta sección (el *Lema de Representación de Riesz* para espacios L^p) vamos a presentar la integral de funciones con valores complejos y un importante resultado (Lema IV.20), esenciales en lo que sigue. La integral mencionada se define manera completamente natural:

Definición IV.19 *Sea μ una medida (o una carga) en el espacio medible $(X,\mathscr{X})$. Diremos que $f : X \to \mathbb{C}$ es integrable en $E \in \mathscr{X}$ si sus partes real e imaginaria son ambas integrables en E; en ese caso, definimos*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \mathrm{Re} f\,d\mu + i\int_E \mathrm{Im} f\,d\mu.$$

En general, resulta sencillo extender los resultados para la integral de funciones con valores reales a la integral de funciones con valores complejos; se deja al lector verificar que ese es el caso, para dos de los hechos más importantes (ejercicio IV.24).

Lema IV.20 *Sea $(X,\mathscr{X};\mu)$ un espacio de medida finita. La colección de funciones simples (con valores complejos) es densa en $L^p(X)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sean $\varepsilon > 0$ y $f \in L^p(X)$ arbitrarios. Para probar lo que se busca, basta probar que existe una función simple φ tal que

$$\|f - \varphi\|_p^p < \varepsilon.$$

Agregamos el supuesto de que $\varepsilon \leq 1$, que desde luego no provoca ninguna pérdida de generalidad.

La idea de la demostración es construir la función φ que aproxima a f a partir de una partición de X, similar a la construida en la demostración del Teorema I.40; sin embargo, en el caso que nos ocupa ahora, la función f no es necesariamente acotada, y debemos controlar primero este hecho. Para ese fin definimos:

$$F_R = \{x \in X \mid |f(x)| < R\}, \qquad R > 0.$$

Aplicando convergencia monótona (Teorema II.22) se sigue que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{F_R} |f|^p = \|f\|_p^p,$$

pudiendo concluir que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{F_M^c} |f|^p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta forma, podemos despreocuparnos de los valores de $|f|$ que son mayores o iguales que M y construir nuestra función φ como si fuera acotada. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \left(\frac{\varepsilon}{2\mu(X)}\right)^{1/p}$$

y para $n = 1, \ldots, MN$ definimos conjuntos

$$E_n = \left\{x \in X \;\middle|\; \frac{n-1}{N} \leq |f(x)| < \frac{n}{N}\right\}.$$

Claramente, los E_n forman una colección de conjuntos disjuntos a pares, tales que su unión es igual a F_M.

Si definimos

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{MN} \frac{n-1}{N}\, \chi_{E_n}(x)$$

tenemos que φ es una función simple que se anula en F_M^c y tal que

$$0 \leq f(x) - \varphi(x) < \left(\frac{\varepsilon}{2\mu(X)}\right)^{1/p}, \qquad \forall x \in F_M.$$

Se sigue entonces:

$$\begin{aligned}
\|f-\varphi\|_p^p &= \int_{F_M} |f-\varphi|^p \, d\mu + \int_{F_M^c} |f-\varphi|^p \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{MN} \int_{E_n} |f-\varphi|^p \, d\mu + \int_{F_M^c} |f|^p \, d\mu \\
&< \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \sum_{n=1}^{MN} \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left(\frac{\mu(F_M)}{\mu(X)} + 1 \right) \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema IV.21 (Representación de Riesz) *Sean* $p > 1$ *y* $q > 1$ *como en* (21). *Si* $(X, \mathscr{X}; \mu)$ *es un espacio de medida finita y* $T : L^p(X;\mu) \to \mathbb{C}$ *es una transformación lineal tal que existe* $C \geq 0$ *para la cual*

$$|T(f)| \leq C\|f\|_p, \qquad \forall f \in L^p,$$

entonces existe una única $g \in L^q(X;\mu)$ *tal que*

$$T(f) = \int_X f\, g \, d\mu, \qquad \forall f \in L^p(X;\mu).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\nu_1(E)$ la parte real de $T(\chi_E)$, para cada $E \in \mathscr{X}$. Probemos que $\nu_1(E)$ es una carga. Por hipótesis, se tiene:

$$|\nu_1(E)| \leq |T(\chi_E)| \leq C\|\chi_E\|_p = C\mu(E) \leq C\mu(X) < \infty.$$

De eso se sigue que ν_1 toma exclusivamente valores finitos y la condición (2) en la Definición IV.8 se cumple trivialmente. Como la condición (1) también es trivial (¿por qué?) sólo resta verificar que ν_1 es aditiva para uniones numerables. Sea E la unión de una colección finita o infinito numerable de conjuntos $\{E_n\}$, disjuntos a pares. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\nu_1(E) &= \operatorname{Re}\Big(T(\chi_E)\Big) \\
&= \operatorname{Re}\left(T\left(\sum_n \chi_{E_n}\right)\right) \\
&= \sum_n \operatorname{Re}\Big\{T(\chi_{E_n}\Big\} \\
&= \sum_n \nu_j(E_n).
\end{aligned}$$

La tercera de las igualdades de arriba se siguen del hecho de que T es lineal y continua; las demás igualdades son evidentes.

De forma por completo análoga se tiene que si definimos $\nu_2(E)$ como la parte imaginaria de $T(\chi_E)$ entonces ν_2 es también una carga. Es fácil verificar que tanto ν_1 como ν_2 son absolutamente continuas con respecto a μ (ejercicio IV.28). Se sigue entonces del Teorema IV.3 (cf. Teorema IV.12 y Definición IV.13) que existen funciones integrables (con valores reales) g_1 y g_2 tales que

$$\nu_j(E) = \int_E g_j \, d\mu, \quad j = 1, 2.$$

para todo $E \in \mathscr{X}$.

Poniendo $g = g_1 + ig_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(\chi_E) &= \nu_1(E) + i\nu_2(E) \\ &= \int_E g \, d\mu \\ &= \int_X g \, \chi_E \, d\mu. \end{aligned}$$

Queremos extender el resultado obtenido para funciones indicadoras, a toda función en L^p. Como T y la integral son ambas lineales, se sigue el resultado de forma inmediata para las funciones simples (con valores complejos). Antes de pasar a la situación general $f \in L^p$, conviene probar primero que g está en L^q (lo que además es parte del enunciado del teorema):

Sea $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots$ una sucesión de funciones simples que convergen puntualmente a $|g|$ (la existencia de la sucesión está garantizada por el Lema II.15); vamos a probar que

$$\|\varphi_n\|_q = \left(\int_X \varphi_n^q \, d\mu \right)^{1/q} < \text{constante},$$

lo que, por convergencia monótona (Teorema II.22), implicaría que $|g|^q$ es integrable (o equivalentemente que $g \in L^q$). Escribiendo g en su forma polar $g = |g|e^{i\theta_g}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n^q \, d\mu &= \int_X \varphi_n^{q/p} \varphi_n \, d\mu \\ &\leq \int_X \varphi_n^{q/p} |g| \, d\mu \\ &= \int_X \varphi_n^{q/p} e^{-i\theta_g} g \, d\mu. \end{aligned}$$

Las $\varphi_n^{q/p} e^{-i\theta_g}$ son funciones simples, por lo que ya sabemos que la última integral de arriba es igual a $T(\varphi_n^{q/p} e^{-i\theta_g})$ y por lo tanto está acotada por $C\|\varphi_n^{q/p}\|_p$ para cierta constante $C > 0$. De esto se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n^q \, d\mu &\leq C\|\varphi_n^{q/p}\|_p \\ &= C\left(\int_X \varphi_n^q \, d\mu\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Usando $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, concluimos que $\|\varphi_n\|_q \leq C$, y por lo tanto $g \in L^q$.

Ahora, para $f \in L^p$ arbitrario, por el Lema IV.20 podemos tomar una sucesión de funciones simples $\{\varphi_n\}$ que converja a f respecto de la norma en L^p; elegimos la sucesión de forma que se tenga además que $|\varphi_n| \leq |f|$ (ver ejercicio IV.29). Por la desigualdad de Hölder (Teorema IV.16) se tiene que $|fg|$ es μ–integrable, por lo que podemos aplicar convergencia dominada (Teorema II.32) a la sucesión $\{\varphi_n g\}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} T(f) &= \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n g \, d\mu \\ &= \int_X fg \, d\mu, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

□

NOTA: Las transformaciones lineales $T : L^p \to \mathscr{C}$ que satisfacen las condiciones del teorema anterior, son exactamente las transformaciones lineales continuas; esto se sigue de un resultado básico de análisis funcional (ver Teorema B.2 en el Apéndice B).

El teorema anterior es también cierto para los espacios de medida σ-finitos, y la prueba de esto se deja al lector (ejercicio IV.30). También se deja al lector el probar la versión del Lema de Representación de Riesz para los espacios $L^1(X)$ (ejercicios IV.31 y IV.32).

Una Demostración Alternativa

Presentamos aquí una forma distinta de probar tanto el teorema de Radon–Nikodym (Teoremas IV.3) como el de la descomposición de Lebesgue (Teorema IV.7).

En términos generales, la idea es usar el Teorema de Representación de Riesz para el espacio L^2 (en lugar del Lema IV.2) para obtener la expresión con (10); a partir de ahí las demostraciones pueden concluirse como en la Sección IV.1. En esta sección usaremos de forma reiterada los resultados que se presentan en el Apéndice B. Los argumentos que aquí se presentan, aunados a los descritos en la Sección IV.3, dejan de manifiesto que existe una profunda – y en un principio, nada obvia – relación entre el teorema de representación de Riesz y los teoremas IV.3 y IV.7.

Consideremos un espacio de medible $(X, \mathscr{X})$, y dos medidas finitas μ y ν en ese espacio. Para todo $f \in L^2(X; \mu + \nu)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\nu \right| &\leq \int_X |f| \, d\nu \\ &\leq \int_X |f| \, d(\mu + \nu) \\ &\leq (\mu + \nu)(X) \left(\int_X |f|^2 \, (d(\mu + \nu) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(X; \mu + \nu)$ (Teorema B.4 en el Apéndice B) – o equivalentemente, la desigualdad Hölder con $p = q = 2$ (Teorema IV.16) – aplicada a $|f|$ y a la función constante 1.

Se tiene entonces que

$$\left| \int_X f \, d\nu \right| \leq C \|f\|_{L^2(X;\mu+\nu)}$$

con constante $C = (\mu + \nu)(X)$. Se sigue del Teorema B.2 en el Apéndice B que

$$T(f) = \int_X f \, d\nu$$

es una transformación lineal continua de $L^2(X; \mu + \nu)$ en $\mathbb{C}$, y por lo tanto podemos aplicar el Lema de Representación de Riesz (Teorema B.15 en el Apéndice B) a la transformación T. Esto es, sabemos que existe una función $g \in L^2(X; \mu + \nu)$ tal que

$$T(f) = < f, g >_{L^2(X;\mu+\nu)}$$

para toda $f \in L^2(X; \mu + \nu)$, o en otras palabras:

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \bar{g} \, d(\mu + \nu) \qquad \forall f \in L^2(X; \mu + \nu). \tag{27}$$

Debido a que la medida en cuestión es finita, las funciones indicadoras χ_E son todas elementos de $L^2(X;\mu+\nu)$, así que podemos poner $f = \chi_E$ en (27), obteniendo

$$\nu(E) = \int_E \bar{g}\, d(\mu+\nu), \qquad \forall E \in \mathscr{X}. \tag{28}$$

Esto es casi la expresión (10), con la única diferencia de que la función g en aquella expresión tomaba valores en $(0,1)$, y acá en principio sólo sabemos que $\bar{g}(x) \in \mathbb{C}$. Veremos a continuación que, en realidad, $g(x) \in \mathbb{R}$.

Sea

$$E^{\pm} = \{x \in X \mid \pm \mathrm{Im}\, g(x) > 0\}.$$

Resulta claro que

$$\int_{E^+} \bar{g}\, d(\mu+\nu) < 0 \iff (\mu+\nu)(E^+) > 0.$$

Pero

$$\int_{E^+} \bar{g}\, d(\mu+\nu) = \nu(E_+) \geq 0.$$

Por lo tanto, $(\mu+\nu)(E^+) = 0$. Similarmente, se verifica que $(\mu+\nu)(E^-) = 0$. En conclusión $g(x) \in \mathbb{R}$ para casi toda $x \in X$, para cualquiera de las medidas involucradas (μ, ν, $\mu+\nu$); y podemos considerar entonces, sin pérdida de generalidad, que $g(x) \in \mathbb{R}$ para toda $x \in X$.

De la discusión anterior, y usando el resultado del ejercicio II.38 se observa que las expresiones (10) y (28) son, en efecto, equivalentes.

Ejercicios

IV.22 *Verificar que si p y q son tales que se cumple* (21)*, entonces*

$$(p-1)(q-1) = 1.$$

IV.23 *Deducir la desigualdad de Hölder para el caso general a partir del caso considerado ($\|f\|_p = \|g\|_q = 1$) en la demostración del Teorema IV.16.*

IV.24 *Verificar que la integral para funciones complejas (Definición IV.19) es lineal y que satisface el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema II.32). Hacer eso tanto para la integral con respecto a una medida, como para la integral con respecto a una carga.*

IV.25 *Verificar que se cumplen las igualdades* (25) *y* (26) *en la prueba del Teorema IV.17.*

IV.26 *Dar los detalles de la prueba del Corolario IV.18*

IV.27 *Sean* $(X;\|\cdot\|_X)$ *y* $(Y;\|\cdot\|_Y)$ *espacios normados y* $T : X \to Y$ *lineal. Demostrar que* T *es continua si y solamente si existe una constante* $M \geq 0$ *tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

IV.28 *Sean* μ, ν_1 *y* ν_2 *como en la demostración del Teorema IV.21. Probar que si* $\mu(E) = 0$ *entonces* $\nu_1(E) = \nu_2(E) = 0$.

IV.29 *Demostrar que si* $f \in L^p(X)$, *entonces existe una sucesión de funciones simples* $\{\varphi_n\}$ *que converge a* f *en* L^p *y tal que* $|\varphi_n| \leq |f|$ *para toda* n. Sugerencia: *ver la demostración del Lema IV.20.*

IV.30 *Extender el resultado del Teorema IV.21 para espacios de medida* σ*-finitos.*

IV.31 *Sea* $(X, \mathscr{X})\mu$ *un espacio de medida finita y sea* $T : L^1(X) \to \mathscr{C}$ *una transformación lineal continua. Demostrar que existe una función medible y acotada* $g : X \to \mathscr{C}$ *tal que*

$$T(f) = \int_X fg\, d\mu, \qquad \forall f \in L^1.$$

IV.32 *Extender el ejercicio anterior para espacios de medida* σ*-finitos.*

Apéndice A

Conjuntos medibles no borelianos

Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado

DAVID HILBERT
(Sobre el Infinito)

En este apéndice se muestra que existen subconjuntos L–medibles de $\mathbb{R}$ que no pertenecen a la σ-álgebra de Borel (Teorema A.4). Cabe hacer la aclaración de que al probar ese hecho, no se construyen explícitamente tales conjuntos, sino que se deduce su existencia a partir de una serie de consideraciones abstractas. También es pertinente mencionar que, de hecho, de entre los conjuntos L–medibles, hay muchos más conjuntos no borelianos que borelianos: La σ-álgbera de Borel tiene la cardinalidad del continuo, mientras que la σ-álgebra de Lebesgue tiene la cardinalidad del conjunto potencia de los reales; para la primera de estas afirmaciones, referimos a [29], mientras que la segunda se sigue del hecho de que todo subconjunto del conjunto de Cantor es L–medible (y, como puede verse abajo, el conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo).

Un resultado necesario en la prueba de la existencia de conjuntos medibles no borelianos que se presenta, es el hecho de que todo conjunto L–medible con medida positiva tiene un subconjunto no medible; este resultado, de notable interés por si mismo, es presentado en el Teorema A.2.

Para $A \subset \mathbb{R}$ usamos la notación

$$A \ominus B = A + (-B).$$

Equivalentemente

$$A \ominus B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Se tiene el siguiente resultado:

Lema A.1 *Si $X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto L–medible con $m(X) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el intervalo $(-\delta, \delta)$ está contenido en $X \ominus X$.*

DEMOSTRACIÓN.

Es suficiente demostrar el hecho para el caso en el que X es compacto, ya que siempre que $m(X) > 0$ se tiene que existe un subconjunto compacto de X con medida positiva: En efecto, en vista del Teorema I.19, podemos tomar un subconjunto cerrado $X' \subset X$ con medida positiva; y necesariamente, para n suficientemente grande, el conjunto compacto $X' \cap [-n, n] \subset X$ tiene medida positiva.

Suponemos entonces que X es compacto; por el mismo Teorema I.19, existe un conjunto abierto A que contiene a X tal que

$$0 < m(A) < 2m(X).$$

Ahora, sea δ igual a la distancia del conjunto (compacto) X al conjunto (cerrado) A^c; se tiene que $x + X \subset A$ siempre que $|x| < \delta$. En ese caso

$$m\Big(X \cup (x+X)\Big) \leq m(A) < 2m(X). \tag{1}$$

Por otra parte (ver ejercicio I.10) se tiene que

$$\begin{aligned} m\Big(X \cup (x+X)\Big) &= m(X) + m((x+X)) - m\Big(X \cap (x+X)\Big) \\ &= 2m(X) - m\Big(X \cap (x+X)\Big), \end{aligned}$$

y en vista de (1) se sigue que

$$m\Big(X \cap (x+X)\Big) > 0$$

En particular $X \cap (x+X) \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar un punto $y \in X \cap (x+X)$. Se observa que tanto $y - x$ como y son elementos de X, y por lo tanto $x = (y-x) - y$ está en $X \ominus X$. Al ser $x \in (-\delta, \delta)$ arbitrario obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Teorema A.2 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto L–medible con $m(E) > 0$. Existe un conjunto $V \subset E$ que no es medible.*

DEMOSTRACIÓN.

Si $\mathbb{V}$ es un conjunto de Vitali (ver Definición I.21), está claro que para todo $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que el conjunto $\mathbb{V}_q = q + \mathbb{V}$ es a su vez un conjunto de Vitali. Notemos también que se sigue de la definición de conjunto de Vitali que no hay ningún racional distinto de cero en el conjunto $\mathbb{V}_q \ominus \mathbb{V}_q$; desde luego, lo mismo es cierto para $K \ominus K$ con K cualquier subconjunto de un conjunto de Vitali. Pero esto significa, por el Lema A.1, que si $K \subset \mathbb{V}_q$ es L–medible, entonces $m(K) = 0$ (porque es imposible que el conjunto $K \ominus K$ contenga a ningún intervalo).

Afirmamos que al menos un $\mathbb{V}_q$ tiene que ser no Lebesgue medible: Por un lado, es inmediato de la definición de conjunto de Vitali que los conjuntos $\mathbb{V}_q$ son disjuntos a pares. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}$, existe necesariamente $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x + q \in \mathbb{V}$. Eso implica que $x \in \mathbb{V}_{-q}$, y entonces

$$\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{V}_q.$$

De las consideraciones anteriores se sigue que si todos los conjuntos $\mathbb{V}_q$ fueran L–medible s, entonces se tendría que

$$m(E) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(E \cap \mathbb{V}_q) = 0,$$

contradiciendo la hipótesis $m(E) > 0$.

$\square$

Como se mencionó arriba, el Teorema A.2 será utilizado en la construcción de nuestro conjunto medible no boreliano. Comenzamos ahora dicha construcción, definiendo una función $s : [0,1] \to [0,1]$ como sigue:

Para cada x en el conjunto de Cantor K (presentado en la página 34) consideramos su expansión en base 3

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

donde cada $a_j \in \{0, 2\}$. Definimos

$$s(x) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\frac{a_4}{2}, \dots$$

donde la expansión a la derecha de la igualdad es la expanción *binaria* de un número real en $[0,1]$. Obsérvese que así definida, la imagen de K bajo la función s es todo el intervalo $[0,1]$. En particular, se tiene que el conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo.

Sean $a < b$ números reales que cumplen las siguientes condiciones:

(a) $(a,b) \subset [0,1] \setminus K$
(b) $\{a,b\} \in K$.

Esto es, el intervalo (a,b) es uno de los intervalos que se quitan al construir el conjunto de Cantor, de acuerdo al procedimiento descrito en la página 35.

En expansión ternaria se tiene que dichos a y b son de la forma

$$\begin{aligned} a &= 0.a_1a_2a_3a_4\ldots a_m100000\ldots \\ &= 0.a_1a_2a_3a_4\ldots a_m022222\ldots \end{aligned}$$

$$b = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots a_m200000\ldots$$

con todos los $a_j \in \{0,2\}$. De esto se sigue que las expansiones binarias de $s(a)$ y $s(b)$ son

$$\begin{aligned} s(a) &= 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\frac{a_4}{2},\ldots,\frac{a_m}{2}01111\ldots \\ s(b) &= 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\frac{a_4}{2},\ldots,\frac{a_m}{2}100000\ldots \end{aligned}$$

por lo que claramente $s(a) = s(b)$; podemos definir entonces $s(x) = s(a) = s(b)$ para todo $x \in (a,b)$.

Procediendo de la misma manera para todos los números a y b que cumplen las condiciones (1) y (2) de arriba, la función $s(x)$ queda definida para todo $x \in [0,1]$. Se observa de esta construcción, que $s(x)$ es una función monótona no decreciente y suprayectiva; tiene entonces que ser continua (esto es un ejercicio de cálculo). De estas observaciones, se tiene de manera inmediata el resultado siguiente:

Teorema A.3 *Sea*

$$\begin{aligned} \Phi &: [0,1] \to [0,2] \\ \Phi(x) &= x + s(x). \end{aligned}$$

La función Φ es continua, estrictamente creciente y suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN.

Inmediato de las consideraciones de arriba.

$\square$

Teorema A.4 *Existe un conjunto L–medible $D \subset [0,1]$ que no es boreliano.*

DEMOSTRACIÓN.

El complemento del conjunto de Cantor está formado por una unión de intervalos abiertos (a,b) que cumplen las condiciones (1) y (2); estos intervalos son disjuntos a pares, y en cada uno de ellos, la función s es constante. De esto, se observa que Φ lleva a cada uno de estos intervalos a otro intervalo de su misma longitud; por lo tanto

$$m(\Phi([0,1]\setminus K)) = m([0,1]\setminus K) = 1.$$

Entonces se sigue que $m(\Phi(K)) = 1$; por el Teorema A.2 podemos tomar un conjunto $N \subset \Phi(K)$ que no sea medible (en particular, tampoco boreliano).

El conjunto $\Phi^{-1}(N)$ es L–medible, puesto que está contenido en K (que tiene medida cero) y la medida de Lebesgue es completa; pero $\Phi^{-1}(N)$ no puede ser boreliano porque, al ser Φ^{-1} una función medible, se tendría que también

$$\Phi(\Phi^{-1}(N)) = N$$

sería boreliano, y sabemos que ese no es el caso.

$\square$

NOTA: De la demostración anterior podemos ver que Φ es una función continua, con inversa continua (un "homeomorfismo" de acuerdo al lenguaje de la topología) que lleva un conjunto de medida cero (el Cantor) a un conjunto de medida positiva; la existencia de tal función es sin duda un hecho bastante peculiar y de interés por sí mismo. Otros ejemplos de homeomorfismos entre espacios de medida cero pueden construirse (más directamente, de hecho) entre los conjuntos "tipo Cantor" definidos en la página 36 y el Cantor usual; todos estos espacios son homeomorfos entre sí. Tales homeomorfismos pueden, desde luego, usarse para mostrar la existencia de borelianos no medibles, procediendo exactamente como en la demostración del Teorema A.4.

Apéndice B

Fundamentos de Análisis Funcional

On top of that abstract house
See my abstract view
An abstract mouse

FRANK BLACK
([I want to live on an] Abstract Plain)

En este apéndice se abordan los temas de análisis funcional que son usados en el texto, principalmente en el Capítulo IV, y que no son cubiertos en el cuerpo principal del mismo.

En lo que sigue, todos los espacios vectoriales serán considerados sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición B.1 *Si V es un espacio vectorial, una norma en V es una función que a cada vector $v \in V$ asigna un número real $\|v\| \geq 0$, y tal que*
(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ *para todo* $v \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$.
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todos* $u, v \in V$.

Se puede verificar directamente que si $\|\cdot\|$ es una norma, entonces

$$d(u,v) = \|u - v\| \tag{1}$$

define una métrica en V. Por lo tanto, todas las nociones de continuidad, convergencia, completitud, etc. correspondientes a espacios métricos, aparecen de forma natural en los espacios vectoriales normados (considerando siempre la métrica definida en (1).

Notación: cuando haya necesidad de especificar, representaremos a la norma del espacio V por $\|\cdot\|_V$.

Teorema B.2 *Sean V y W espacios vectoriales normados, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. T es continua si y solamente si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|T(v)\|_W \leq C\|v\|_V \tag{2}$$

para todo $x \in V$.

DEMOSTRACIÓN.

$\Longrightarrow$) Supongamos que no se cumple (2) para ninguna $C > 0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in V$ tal que

$$\|T(u_n)\|_W > n\|u_n\|_V.$$

Podemos además, sin pérdida de generalidad, suponer que $\|u_n\| = 1$ para todo n (si no fuera así, basta con dividir por $\|u_n\|$ y la desigualdad de arriba seguiría siendo válida). Se sigue que

$$\frac{u_n}{n} \to 0, \qquad \text{cuando } n \to \infty,$$

pero

$$\|T(u_n)\|_W > 1.$$

De aquí se concluye que $\|T(u_n)\|$ no puede converger a cero y por lo tanto T no es continua.

$\Longleftarrow$) Sea $\{v_n\}$ una sucesión cualquiera de vectores en V, convergente a cero. Para C como en (2) se tiene que

$$0 \leq \|T(v_n)\|_W \leq C\|v_n\|_V \to 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{T(v_n)\}$ converge a 0 y T es continua en 0. Ahora, si $\{u_n\}$ es una sucesión de vectores en V que convergen a un $v \in V$, se tiene que $u_n - v$ converge a cero, y por lo anterior también $T(u_n - v)$ converge a cero; pero como T es lineal, se sigue que $T(u_n)$ converge a $T(v)$ y por lo tanto T es continua en todo el espacio V.

$\square$

Definición B.3 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno en V es una función que asigna a cada pareja $(u,v) \in V \times V$ un número complejo*

$$< u,v > \in \mathscr{C}$$

de forma tal que se cumplen las condiciones siguientes:
(a) $< u,u > \geq 0$ *para todo* $u \in V$*, con igualdad si y solamente si* $u = 0$.
(b) $< u+v,z >= u,z > + < v,z >$*, para todos* $u,v,z \in V$.
(c) $< u,v >= \overline{< v,u >}$.
(d) $< \alpha u,v >= \alpha < u,v >$ *para todos* $u,v \in V$ *y* $\alpha \in \mathscr{C}$.

Nótese que una consecuencia inmediata es que $< u,\alpha v >= \overline{\alpha} < u,v >$. Se puede verificar también de forma directa que

$$\|u\| = \sqrt{< u,u >} \tag{3}$$

define una norma en V:

La desigualdad del triángulo puede probarse a partir del Teorema B.4 de la misma manera que se prueba la desigualdad de Minkowski (Teorema IV.17) a partir de la desigualdad de Hölder (Teorema IV.16); las otras propiedades de norma se siguen fácilmente de la definición de producto interno.

Teorema B.4 (Cauchy-Bunyakowski-Schwarz) *Sea V un espacio vectorial con producto interno $< \cdot,\cdot >$ y sea $\|\cdot\|$ como en* (3)*. Para todos $u,v \in V$ se tiene*

$$| < u,v > | \leq \|u\| \, \|v\|.$$

DEMOSTRACIÓN.

Fijemos $u,v \in V$ arbitrarios. Es sencillo verificar que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\|u+\alpha v\|^2 = \|u\|^2 + 2\text{Re } \{\overline{\alpha} < u,v >\} + |\alpha|^2 \|v\|^2.$$

Se tiene que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ la expresión del lado derecho de esa igualdad es no negativa. En particular, sustituyendo para

$$\alpha = \frac{< u,v >}{| < u,v > |} \, t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

se obtiene que la desigualdad

$$\|v\|^2 t^2 + 2| < u,v > |t + \|u\|^2 \geq 0$$

es cierta para todo número real t. Esto significa que la expresión del lado izquierdo de la desigualdad de arriba es un polinomio con coeficientes reales (para la variable $t \in \mathbb{R}$) con a lo más una raíz real; se concluye que su discriminante es no positivo, i.e:

$$|< u, v >|^2 \leq \|u\|^2 \; \|v\|^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

$\square$

Una consecuencia sencilla e importante de la desigualdad de C–B–S es la siguiente.

Corolario B.5 *Si V es un espacio vectorial con producto interno $< \cdot, \cdot >$, entonces para todo $v \in V$ el mapeo $u \mapsto < u, v >$ define una transformación lineal continua de V en $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN.

La linealidad es inmediata de la definición de producto interno. Si $\{u_n\}$ es una sucesión de vectores en V que converge a u, entonces por el Teorema B.4 se tiene

$$\begin{aligned} |< u - u_n, v > + < u_n, v >| &= |< u - u_n, v >| \\ &\leq \|u - u_n\| \|v\| \\ &\to 0, \qquad \text{cuando } n \to \infty, \end{aligned}$$

lo que demuestra la continuidad.

$\square$

Tenemos la siguiente definición.

Definición B.6 *Un espacio vectorial V con producto interno $< \cdot, \cdot >$ es un espacio de Hilbert si es completo respecto a la norma $\sqrt{< x, x >}$.*

Consideremos el espacio vectorial normado $L^2(X;\mu)$ (ver Definición IV.14). Puede verificar el lector que

$$< f, g >= \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

define un producto interno en $L^2(X;\mu)$ y que la norma que genera es precisamente la norma de L^2. Resulta que esta norma es además completa:

Teorema B.7 *Para todo espacio de medida $(X, \mathscr{X}; \mu)$, se tiene que $L^2(X; \mu)$ es un espacio de Hilbert.*

El resultado del Teorema B.7 es bien conocido; para su prueba referimos por ejemplo a [11, 48].

NOTACIÓN: lo mismo que para la norma, representaremos por $<>_V$ al producto interno del espacio V, siempre que se requiera especificar.

Definición B.8 *Sean u y v vectores en V, un espacio vectorial con producto interno. Si*

$$< u, v >= 0$$

se dice que u y v son ortogonales entre si. Si $A \subset V$, definimos el conjunto $A^\perp$ (léase "A-ortogonal") como

$$A^\perp = \{u \in V \mid < u, v >= 0, \ \forall v \in A\}.$$

Teorema B.9 *Sea $A \subset V$ como en la Definición B.8. $A^\perp$ es un subsespacio vectorial cerrado de V.*

DEMOSTRACIÓN.

Sean $u, v \in A^\perp$ y $\alpha \in \mathscr{C}$ arbitrarios. Para todo $w \in A$ se tiene

$$< u + \alpha v, w >=< u, w > + \alpha < v, w >= 0.$$

Por lo tanto $u + \alpha v \in A^\perp$, y se concluye que $A^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

Para probar la cerradura, tomamos una sucesión $\{u_n\} \subset A^\perp$ que converja a $u \in V$. Queremos mostrar que $u \in A^\perp$, es decir que $< u, w >= 0$ para todo $w \in A$; pero eso se sigue inmediatamente del hecho de que $< u_n, w > \to < u, w >$ (ver Corolario B.5).

$\square$

Teorema B.10 *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, y W un supespacio vectorial cerrado de $\mathscr{H}$. Entonces, todo $u \in \mathscr{H}$ puede escribirse, de forma única, como una suma*

$$u = w + v \tag{4}$$

de modo que $w \in W$ y $v \in W^\perp$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $u \in \mathscr{H}$ arbitrario. Afirmamos que existe $w \in W$ tal que

$$\|u-w\| \leq \|u-y\| \qquad \forall y \in W. \tag{5}$$

En efecto, tomando una sucesión de vectores $\{v_n\} \subset W$ tales que $\|u-v_n\|$ converja al ínfimo

$$s = \inf \{\|u-v\| \mid v \in W\},$$

es fácil ver que $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{H}$; al ser W completo (pues es un subconjunto cerrado de un espacio completo), se sigue que la sucesión converge a un punto $w \in W$. Por continuidad, se tiene que

$$\|u-w\| = s$$

de donde (5) se sigue de inmediato.

Mostramos a continuación que $u-w \in W^{\perp}$, lo que probará la existencia de la suma (4).

Para todo $x \in W$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $w+tx \in W$, por lo cual

$$\begin{aligned} \|u-w\|^2 &\leq \|u-(w+tx)\|^2 \\ &= \|u-w\|^2 - 2t \text{ Re } <u-w,x> + t^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$t^2\|x\|^2 \geq 2t \text{ Re } <u-w,x>, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

lo cual no es posible a menos que Re $<u-w,x>=0$.

De forma similar,

$$\begin{aligned} \|u-w\|^2 &\leq \|u-(w+itx)\|^2 \\ &= \|u-w\|^2 - 2t \text{ Im } <u-w,x> + t^2\|x\|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$t^2\|x\|^2 \geq 2t \text{ Im } <u-w,x>, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

y se concluye que también Im $<u-w,x>=0$.

Para probar la unicidad, supongamos que

$$u = w_1 + v_1 = w_2 + v_2 \qquad \text{con } w_j \in W \text{ y } v_j \in W^{\perp}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \|(w_1-w_2)+(v_1-v_2)\|^2 \\ &= \|w_1-w_2\|^2 + \|v_1-v_2\|^2 \end{aligned}$$

de donde se concluye que $v_1 = v_2$ y $w_1 = w_2$.

$\square$

A la suma en el lado derecho de (4) se le conoce como la *descomposición ortogonal* de u respecto a W; al vector w (que es el elemento en W más cercano a u) se le llama la *proyección ortogonal* de u sobre W. Una propiedad importante – y fácil de probar – acerca de las proyecciones ortogonales es la siguiente versión del Teorema de Pitágoras.

Corolario B.11 (Teorema de Pitágoras) *Sea w la proyección ortogonal de u sobre W (un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert). Para todo $x \in W$ se tiene la igualdad*

$$\|u-x\|^2 = \|u-w\|^2 + \|w-x\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN.

Como $u-w \in W^{\perp}$, se tiene que $< u-w, w-x >= 0$. El resultado buscado se sigue entonces inmediatamente poniendo

$$\|u-x\|^2 = \|(u-w)+(w-x)\|^2.$$

$\square$

Corolario B.12 *Si $u \in W$, la proyección ortogonal de u sobre $W^{\perp}$ es igual a* 0.

DEMOSTRACIÓN.

Para $x \in W^{\perp}$ se tiene que

$$\|u-x\|^2 = \|u\|^2 + \|x\|^2 \geq \|u\|^2,$$

de forma que el 0 es el elemento en $W^{\perp}$ más cercano a u (es decir, su proyección ortogonal).

$\square$

Observemos que si W es un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado V, entonces $\overline{W}$ es un subespacio vectorial cerrado. Más aún, se tiene el siguiente resultado:

Lema B.13 *Si W es un subespacio vectorial de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, entonces*

$$W^{\perp\,\perp} = \overline{W}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Es claro que $W \subset W^{\perp\,\perp}$. Como $W^{\perp\,\perp}$ es cerrado (Teorema B.9) se sigue que $\overline{W} \subset W^{\perp\,\perp}$. Para probar la contención opuesta, hacemos primero la observación de que $W^{\perp} = (\overline{W})^{\perp}$ se cumple para todo W. Tomemos $u \in W^{\perp\,\perp}$ arbitrario. Sea

$$u = u_1 + u_2, \qquad u_1 \in \overline{W}$$

la descomposición ortogonal de u con respecto a $\overline{W}$. Se sigue que

$$u_1 = -u_2 + u, \qquad u_2 \in W^{\perp} = \overline{W}^{\perp}$$

es la descomposición ortogonal de u_1 con respecto a $W^{\perp}$. Por el Corolario B.12 se concluye que $u_2 = 0$, y se concluye que $u \in \overline{W}$.

□

Lema B.14 *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W es denso en $\mathscr{H}$ si y solamente si $W^{\perp} = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN.

$\Longrightarrow$) Tomemos $u \in W^{\perp}$; como W es denso, podemos tomar una sucesión $\{w_n\} \subset W$ converge a u. Pero entonces, por el Corolario B.5 se tiene que

$$< u,u >= \lim_{n\to\infty} < w_n,u >= 0.$$

Por lo tanto $u = 0$, como se quería probar.

$\Longleftarrow$) Si $W^{\perp} = \{0\}$ se tiene del Lema B.13 que $\overline{W} = W^{\perp\,\perp} = V$, que es lo que se quiere probar.

□

Teorema B.15 (Representación de Riesz) *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno $< \cdot,\cdot >_{\mathscr{H}}$. Si $T : V \to \mathscr{C}$ es una transformación lineal continua, entonces existe un único $v_T \in V$ tal que*

$$T(u) =< u, v_T >$$

para todo $x \in V$.

DEMOSTRACIÓN.

Comenzamos por observar que si v_T cumple con el enunciado del teorema, entonces necesariamente

$$\left\langle u - \frac{T(u)}{\|v_T\|^2} v_T, v_T \right\rangle = 0.$$

De esto se sigue que si u está en el *kernel* de T, dado por

$$\ker(T) = \{x \in V \mid T(u) = 0\},$$

entonces $< u, v_T >= 0$; es decir, debe cumplirse que $v_T \in (\ker(T)^{\perp}$.

Habiendo considerado lo anterior, y notando que el kernel de T es un subespacio vectorial cerrado, se sigue que si T no es idénticamente cero entonces $\ker(T)$ no puede ser denso; por el Lema B.14 se sigue que existe $v \in (\ker(T)^{\perp}$ distinto de 0; tomando tal v definimos

$$v_T = \frac{\overline{T(v)}}{\|v\|^2} v.$$

Sustituyendo, puede calcularse fácilmente que

$$v_T = \|v\|^2.$$

Entonces, si $u \in V$ es arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned} T\left(u - \frac{T(u)}{\|v_T\|^2} v\right) &= T(u)\left(1 - \frac{T(v_T)}{\|v_T\|^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\left(u - \frac{T(u)}{\|v_T\|^2} v\right) \in \ker(T), \qquad \forall u \in V$$

y por lo tanto (para todo u) se tiene que

$$\left\langle u - \frac{T(u)}{\|v_T\|^2} v, v_T \right\rangle = 0.$$

De ahí se concluye fácilmente que $< u, v_t >= T(u)$.

En el caso en el que T es idénticamente cero, el resultado del teorema es trivial.

$\square$

Apéndice C

La Integral de Henstock–Kurzweil

Cuando nos parezca que una teoría es la única posible, debemos tomar esto como un signo de que no hemos entendido ni la teoría ni el problema que pretende resolver.

KARL POPPER
(Conocimiento objetivo: un enfoque evolucionista)

Existen diferentes definiciones de integral que extienden a la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ en direcciones distintas de la abstracción a espacios de medida. Se presenta en este apéndice una de estas definicion alternativas de integral – conocida como *integral de Henstock–Kurzweil* – que fue definida y estudiada independientemente por Jaroslav Kurzweil en 1957 [35] y por Ralph Henstock en 1968 [28]. Esta integral resultó ser equivalente a una integral definida mucho tiempo antes por Arnaud Denjoy [12]; sin embargo, la formulación de Denjoy es mucho más complicada.

La integral de Henstock–Kurzweil extiende a la definición de integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$, de forma que incluye (entre otras) a las integrales impropias de Riemann, aunque no sean Lebesgue integrables; esto abarca tanto integrales de funciones no acotadas, por ejemplo

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\, dx, \tag{1}$$

así como también a integrales en intervalos no acotados, por ejemplo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \tag{2}$$

Usaremos la notación

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int f, \qquad \mathscr{L}\int f, \qquad \mathscr{R}\int f,$$

para distinguir entre las integrales de Henstock–Kurzweil, de Lebesgue y de Riemann. La presentación que haremos de la integral de Henstock–Kurzweil será muy concisa y escueta; para exposiciones mucho más extensas y detalladas sobre el tema, referimos a los libros [4] y [34].

La definición de la integral de Henstock–Kurzweil está basada en las *sumas de Riemann* que suelen presentarse en cursos de cálculo, al tratar con la integral de Riemann; recordamos a continuación ese concepto.

Sea f es una función con dominio $[a,b]$, y sea

$$\mathscr{P} = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$$

una partición de ese intervalo. La expresión

$$\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(s_j - s_{j-1}) \qquad \text{con } \ t_j \in [s_{j-1}, s_j]$$

es una *suma de Riemann* de la pareja $(f,\mathscr{P})$. Para $r > 0$, se dice que $\mathscr{P}$ es r-fina si $s_j - s_{j-1} < r$ para todo $j = 1,\dots n$.

La función f es Riemann integrable en $[a,b]$ con

$$\mathscr{R}\int_a^b f \;=\; L$$

si y solamente si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición δ-fina $\mathscr{P}$ se tiene que

$$|S(f,\mathscr{P}) - L| < \varepsilon \tag{3}$$

siempre que $S(f,\mathscr{P})$ es una suma de Riemann de $(f,\mathscr{P})$ (cf. [51]).

La caracterización anterior de la integral de Riemann es la que se toma como punto de partida para definir la integral de Henstock–Kurzweil. Para presentar esa integral, necesitamos primero un poco de notación y algunas definiciones.

Definición C.1 *Llamamos un indicador de $[a,b]$ a una función γ que asigna a cada punto $t \in [a,b]$ un intervalo abierto $\gamma(t)$ que contiene a t.*

Definición C.2 *Una partición etiquetada de $[a,b]$ es una colección finita $\mathscr{T}$ de parejas*

$$\mathscr{T} = \{(t_1, J_1), \ldots, (t_n, J_n)\},$$

donde los t_k son números reales y los J_k son intervalos cerrados que cumplen lo siguiente:

(i) *$t_i \in J_i$, para todo $i = 1, \ldots n$.*
(ii) *La unión de los J_i es todo $[a,b]$.*
(iii) *Los interiores de los J_i son disjuntos a pares.*

Si γ es un indicador, se dice que la partición etiquetada es γ-fina, si $J_i \subset \gamma(t_i)$ para todo $i = 1, \ldots n$.

Definición C.3 *Para una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, y $\mathscr{P}$ una partición etiquetada de $[a,b]$ definimos la suma de Riemann del par $(f, \mathscr{P})$ por*

$$S(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} \ell(J_i) f(t_i)$$

donde los J_i y los t_i son respectivamente los intervalos y las etiquetas de $\mathscr{P}$.

Nótese que, con la definición anterior, la suma de Riemann de una pareja $(f, \mathscr{P})$ es única, contrariamente a lo que ocurre cuando $\mathscr{P}$ es una partición (no etiquetada) de las que se usan al tratar con la integral de Riemann.

Definición C.4 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si $L \in \mathbb{R}$ es tal que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un indicador γ tal que*

$$|S(f, \mathscr{P}) - L| < \varepsilon$$

para toda partición etiquetada $\mathscr{P}$ que sea γ-fina, diremos que f es HK–integrable en $[a,b]$. El número L es la integral de Henstock–Kurzweil de f. En tal caso, escribimos

$$\mathscr{H}\mathscr{K} \int_a^b f \;=\; L.$$

La definición de la integral de Henstock–Kurzweil en intervalos no acotados, es en esencia la misma que la de arriba; sin embargo, su presentación requiere de unos pequeños ajustes técnicos. Para mantener la exposición lo más simple y clara posible, nos restringiremos al caso de integrales de dominios acotados (para el caso general, se pueden consultar, por ejemplo, los dos textos arriba citados).

Teorema C.5 *Si f es Riemann integrable en $[a,b]$, entonces también es HK–integrable en $[a,b]$ y se tiene la igualdad*

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int_a^b f \;=\; \mathscr{R}\int_a^b f$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis, existen $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tales que se satisface la relación (3) para toda suma de Riemann $S(f,\mathscr{P})$, donde $\mathscr{P}$ sea una partición δ-fina de $[a,b]$. Definimos un indicador γ de $[a,b]$ por

$$\gamma(t) = (t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}).$$

Si $\mathscr{T}$ una partición etiquetada γ-fina, es claro que es también δ-fina y por lo tanto cumple que

$$|S(f,\mathscr{T}) - L| < \varepsilon,$$

que es lo que se quería probar.

□

La integral de Henstock–Kurzweil satisface las diferentes propiedades básicas que se espera que satisfaga una integral; por ejemplo, es lineal, no negativa para funciones no negativas, etc. (ver e.g. [4] y [34] para recuentos extensos y detallados de esto). Acá presentamos el siguiente de esos resultados básicos, que es fundamental para probar que las integrales impropias como (1) y (2) son integrales de Henstock–Kurzweil.

Lema C.6 *Supongamos que $a < c < b$ y sea f una función HK–integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Entonces f es HK–integrable en $[a,b]$ y se tiene la igualdad*

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int_a^b f \;=\; \mathscr{H}\mathscr{K}\int_a^c f \;+\; \mathscr{H}\mathscr{K}\int_c^b f$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Usamos la notación

$$I_1 = [a,c] \qquad I_2 = [c,b].$$

Por hipótesis, podemos tomar indicadores γ_j de I_j $(j = 1,2)$, tal que si $\mathscr{T}_j$ es cualquier partición etiquetada γ_j-fina de I_j entonces

$$|S(f,\mathscr{T}_j - L_j)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde L_j es la integral de Henstock–Kurzweil de f en I_j.

Definimos un indicador γ del intervalo $[a,b]$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_j(t) \cap (I_j \setminus \{c\}), & \text{si } t \in I_j \text{ y } t \neq c \\ \\ \gamma_1(c) \cap \gamma_2(c), & \text{si } t = c. \end{cases}$$

Tomemos ahora una partición etiquetada $\mathscr{T}$ que sea γ-fina, formada por intervalos $\{J_k\}$ con etiquetas $\{t_k\}$. Notemos que c tiene que ser necesariamente una de las etiquetas de $\mathscr{T}$, puesto que $c \notin \gamma(t)$ para ningún $t \neq c$; denotamos por J' al intervalo correspondiente a la etiqueta c.

Se tiene que

$$\begin{aligned} S(f,\mathscr{T}) &= \ell(J')f(c) + \sum_{t_k \neq c} f(t_k)\ell(J_k) \\ &\leq \left(\ell(J')f(c) + \sum_{t_k < c} f(t_k)\ell(J_k)\right) + \left(\ell(J')f(c) + \sum_{t_k > c} f(t_k)\ell(J_k)\right). \end{aligned}$$

Los sumandos entre paréntesis en la expresión de arriba son sumas de Riemann: El primero de una partición etiquetada γ_1-fina de I_1, y el segundo de una partición etiquetada γ_2-fina de I_2. Se sigue que cada uno de ellos es menor que $\varepsilon/2$, y por lo tanto

$$S(f,\mathscr{T}) < \varepsilon,$$

de donde se concluye que f es HK-integrable en $[a,b]$.

□

Corolario C.7 *Sea $\{I_1,\ldots,I_n\}$ una colección de intervalos cerrados con interiores disjuntos a pares, y tales que su unión es el intervalo $[a,b]$. Si una función f es HK–integrable en cada I_k, entonces es también HK–integrable en $[a,b]$ y se tiene la igualdad*

$$\mathscr{HK}\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \mathscr{HK}\int_{I_k} f.$$

DEMOSTRACIÓN.

Inmediato de aplicar inducción al resultado del Lema C.6.

□

El siguiente resultado nos muestra que las integrales impropias de la forma (1) existen en el sentido de Henstock–Kurzweil. El resultado correspondiente a las integrales impropias de la forma (2) puede demostrarse en forma similar (una vez habiendo hecho los ajustes que, como mencionamos arriba, es necesario hacer para definir la integral de Henstock–Kurzweil en dominios no acotados).

Teorema C.8
(a) *Si f es Riemann integrable en $[a,x]$ para todo $x \in [a,b)$ y existe el límite*

$$\lim_{x\to b^-} \mathscr{R}\int_a^x f,$$

entonces f es HK–integrable en $[a,b]$ y se tiene la igualdad

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int_a^b f \;=\; \lim_{x\to b^-} \mathscr{R}\int_a^x f$$

(b) *Si f es Riemann integrable en $[x,b]$ para todo $x \in (a,b]$ y existe el límite*

$$\lim_{x\to a^+} \mathscr{R}\int_x^b f,$$

entonces f es HK–integrable en $[a,b]$ y se tiene la igualdad

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int_a^b f \;=\; \lim_{x\to a^+} \mathscr{R}\int_x^b f.$$

DEMOSTRACIÓN.

Demostramos el primer inciso, siendo la prueba del segundo análoga.

Sea

$$\lim_{x\to b^-} \mathscr{R}\int_a^x f = L.$$

Tomamos una sucesión

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots \qquad c_n \to b.$$

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario, fijamos N tal que si $s > c_N$ entonces

$$\left|\mathscr{R}\int_a^s f \;-\; L\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

y también

$$f(b)(b-c_N) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Para cada intervalo $[c_k, c_{k+1}]$, elegimos $\delta_k > 0$ tal que si $\mathscr{P}$ es una partición δ_k-fina de ese intervalo, entonces

$$\left| S(f,\mathscr{P}) - \mathscr{R}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f \right| < \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\varepsilon}{3}$$

para toda suma de Riemann $S(f,\mathscr{P})$.

Definimos un indicador γ en el intervalo $[a,b]$ en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\gamma(a) &= (-\infty, c_1) \qquad\qquad \gamma(b) = (c_N, \infty). \\
\gamma(t) &= \left(t - \frac{\delta_k}{2}, t + \frac{\delta_k}{2}\right) \cap (c_k, c_{k+1}), \quad \text{si } t \in (c_k, c_{k+1}) \\
\gamma(t) &= \left(t - \frac{\delta_{k-1}}{2}, t + \frac{\delta_{k-1}}{2}\right) \cap \left(t - \frac{\delta_k}{2}, t + \frac{\delta_k}{2}\right) \cap (c_{k-1}, c_{k+1}), \quad \text{si } t = c_k \ (k \geq 1)
\end{aligned}$$

Sea $\mathscr{T}$ una partición etiquetada γ-fina de $[a,b]$; se quiere probar que

$$|S(f,\mathscr{T}) - L| < \varepsilon. \tag{6}$$

Notemos que b es necesariamente etiqueta de $\mathscr{T}$, sea $[r,b]$ el intervalo correspondiente, y supongamos que $M \in \mathbb{N}$ es tal que $c_M < r \leq c_{M+1}$. Notamos también que, de la definición del indicador γ, se sigue que si $c_k < r$, entonces $c_k \in \gamma(t)$ si y solamente si $t = c_k$; por lo tanto $c_0, c_1, \ldots, c_N, \cdots, c_M$ son necesariamente etiquetas de $\mathscr{T}$.

Denotamos por $J^{(k)}$ a los intervalos correspondientes a estos c_k's, y por J_m a los intervalos correspondientes a las otras etiquetas t_m. También separamos cada $J^{(k)}$ en sus partes "izquierda y derecha", escribiendo

$$\begin{aligned}
J_{\mathrm{I}}^{(k)} &= J^{(k)} \cap (c_{k-1} \cap c_k], \qquad k \leq 1 \\
J_{\mathrm{D}}^{(k)} &= J^{(k)} \cap (c_k \cap c_{k+1}], \qquad k \leq 0.
\end{aligned}$$

Con las observaciones y notación descritas, se tiene que

$$\begin{aligned}
S(f,\tau) &= \sum_{k=0}^{M-1}\left(\ell\left(J_{\mathrm{D}}^{(k)}\right) f(c_k) + \ell\left(J_{\mathrm{I}}^{(k)}\right) f(c_{k+1}) + \sum_{t_m \in (c_k, c_{k+1})} \ell(J_m) f(t_m)\right) \\
&+ \left(\ell\left(J_{\mathrm{D}}^{(M)}\right) f(c_M) + \sum_{t_m \in (c_M, r]} \ell(J_m \cap (c_M, r]) f(t_m)\right) + f(b)(b-r).
\end{aligned}$$

El término del renglón de arriba que está entre paréntesis es una suma de Riemann δ_k-fina en el intervalo $[c_k, c_{k+1}]$; del mismo modo, la expresión entre paréntesis del segundo renglón es una suma de Riemann δ_M-fina del intervalo $[c_M, r] \subset [c_M, c_{M+1}]$. Denotando por S_k a cada una de esas sumas de Riemann ($k = 0, \ldots, M$), se tiene que

$$\begin{aligned} \left| S_k - \mathscr{R}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f \right| &< \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\varepsilon}{3}, \qquad k = 0, \ldots M-1 \\ \left| S_M - \mathscr{R}\int_{c_M}^{r} f \right| &< \frac{1}{2^{M+1}}\frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} |S(f,\tau) - L| &\leq \left| S_0 - \mathscr{R}\int_a^{c_1} f \right| + \cdots + \left| S_{M-1} - \mathscr{R}\int_{c_{M-1}}^{c_M} f \right| \\ &+ \left| S_M - \mathscr{R}\int_{c_M}^{r} f \right| + \left| L - \mathscr{R}\int_a^r f \right| + f(b)(b-r) \\ &< \left(\sum_{k=0}^{M} \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\varepsilon}{3} \right) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

NOTA: en realidad, puede sustituirse la hipótesis del Teorema C.8 por una más débil, pidiendo solamente que los límites existan para las integrales de Henstock–Kurzweil, no siendo necesario que exista ninguna de las integrales en el sentido de Riemann. Aún más, para dicho resultado es cierta también la afirmación recírpoca (ver [4] o [34]). En ambos textos puede consultarse también la demostración del siguiente resultado, sin duda muy importante.

Teorema C.9 *Si f es Lebesgue integrable en un conjunto L–medible E, entonces también es HK–integrable en E, y se tiene la igualdad*

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int_E f = \mathscr{L}\int_E f$$

En la clase de funciones no negativas (o no positivas), las definiciones de Lebesgue y Henstock–Kurzweil son equivalentes. En realidad, los casos contemplados por la integral de Henstock–Kurzweil que no son Lebesgue integrables corresponden exclusivamente a funciones cuya oscilación entre valores positivos y negativos provoca que tanto el “área bajo la curva de f_+” como “el área sobre la curva de f_-” sean infinitamente grandes; es decir, los casos en que no se puede definir la integral de Lebesgue debido a que la expresión $+\infty + (-\infty)$ no tiene sentido. Desde luego, esto incluye ejemplos que sin duda son importantes en algunas circunstancias, como las integrales impropias de Riemann mencionadas al inicio de este apéndice.

Existen versiones de los teoremas de convergencia para la integral de Henstock–Kurzweil; también puede definirse dicha integral para funciones en $\mathbb{R}^n$, y se tienen para ella versiones de los teoremas de Fubini y de Tonelli. Referimos a [34] para detalles sobre todo ello. Terminamos este apéndice enunciando el siguiente resultado, una versión general del Teorema Fundamental del Cálculo, que constituye una de las fortalezas teóricas de la integral de Henstock–Kurzweil (la demostración puede consultarse en [4] o [34]).

Teorema C.10 *Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) excepto a lo más en una colección numerable de puntos, entonces la función f' (redefinida arbitrariamente en los puntos en que f no es derivable) es HK-integrable en $[a,b]$ y se tiene*

$$\mathscr{H}\mathscr{K}\int_{[a,b]} f' \;=\; f(b) - f(a).$$

Notas Históricas

y, a medio abrir, sus ojos estudiaron,
desde lejanos tiempos,
su fórmula famélica de masa...

CÉSAR VALLEJO
(Considerando en frío, Imparcialmente)

Capítulo I

La definición de medida exterior presentada en el texto (Definición I.1) fue propuesta por Henri Lebesgue en su tesis doctoral [36], dirigida por Emile Borel; fue ahí mismo donde publicó por primera vez su definición de integral. Durante la segunda mitad del siglo XIX, muchos matemáticos célebres (Stolz, Cantor, Jordan, Dini, Weierstrass, Borel, y otros) habían considerado el problema de medir subconjuntos de la recta, del plano, y de $\mathbb{R}^n$, y se propusieron diversas definiciones al respecto; en muchos casos, aunque no siempre, esas investigaciones estaban ligadas al estudio de integrales de funciones (mucha información sobre esto puede encontrarse en [26]). Una diferencia fundamental de las definición de Lebesgue con respecto a la mayor parte de sus predecesoras, fue que consideró colecciones numerables de conjuntos, en lugar de sólo colecciones finitas; si bien esto pusiera parecer un paso un tanto evidente, hay que tomar en cuenta que los ordinales infinitos habían sido introducidos de forma muy reciente. El primero en considerar cubiertas numerables no fue Lebesgue, sino Axel Harnack [25], quien hizo la observación de que – haciendo eso – el conjunto de los números racionales tendría medida cero; parece ser que Harnack se mostró renuente a aceptar como apropiada esa forma de medir conjuntos, al creer que el ejemplo mencionado resultaba paradójico, por lo que abandonó la idea y volvió a considerar puras colecciones finitas.

En [36], Lebesgue definió los conjuntos medibles como aquellos para los cuales su medida exterior coincide con su *medida interior* (ver ejercicio I.29). La *condición de Caratheodory* que se usa en la definición del texto, es históricamente posterior (ver abajo, notas a la Sección III.1). Un poco antes, en [6], al requerir que una medida de conjuntos debería ser “numerablemente aditiva”, Borel había definido lo que hoy conocemos como “la medida de Lebesgue” para los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que hoy se conocen como “borelianos.”

La existencia de subconjuntos de números reales que no son medibles en el sentido de Lebesgue, fue probada por Guiseppe Vitali en [53]. El matemático alemán Georg Cantor, considerado como el padre de la teoría de conjuntos, definió el conjunto que lleva su nombre en un pie de página del quinto de la serie de artículos en los que introdujo dicha teoría [9]; es en ese mismo artículo en los que se presentan por vez primera los ordinales infinitos.

Fue Guisseppe Peano [40] el primero en presentar a la integral de Riemann en forma análoga a la definión de integral de Lebesgue como se presenta en esta sección (es decir, en términos de ínfimo de sumas superiores y supremo de sumas inferiores). Un antecedente al concepto de "casi en todas partes" aparece en un trabajo de Harnack [24] en el que se dice que funciones f y g son "iguales en general" si para todo $\delta > 0$ el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - g(x)| > \delta\}$$

es discreto (significando esto que tenían "medida cero" para cierta forma de medir). Como se mencionó arriba, Lebesgue definió la integral que lleva su nombre en su tesis doctoral [36].

Capítulo II

El problema de determinar para cuales dominios en el plano (y en $\mathbb{R}^n$ en general) era posible definir la integral (tanto de Riemann como de otras variantes propuestas en el siglo XIX), motivó la idea de "conjunto medible". Por lo general, los autores hasta esa época daban la "medibilidad" por sentado, al considerar sólo dominios con fronteras formadas por curvas regulares (o regulares a trozos, cuando mucho). Notables excepciones a esa regla fueron los trabajos de Guisseppe Peano [40] y Camille Jordan [30], quienes al considerar dominios con fronteras irregulares hicieron la observación de que a ciertos dominios no podía asignárseles un área de manera natural o única; esa observación los llevó al concepto de "conjuntos medibles," llamando así a aquellos conjuntos para los cuales sí era posible asignar de forma natural un número para su área. Los trabajos de Peano y Jordan fueron de gran influencia en las posteriores definiciones de conjunto medible propuestas por Borel y por Lebesgue. La primera presentación axiomática de una definición de medida fue, hasta donde tenemos conocimiento, la presentada por Emile Borel en [6]; los "conjuntos medibles" implícitamente definidos eran precisamente los conjuntos de Borel en los reales. En [7], se presenta de forma explícita la definición de esos conjuntos.

La idea de definir espacios de medida en los que se pudieran definir integrales en abstracto, se desarrolló a partir de la integral de Lebesgue. El artículo [41], publicado por Johann Radon en 1913, se considera probablemente el principal eslabón entre la integral de Lebesgue y su generalización a espacios de medida abstractos (ver por ejemplo [5], [26]); en ese trabajo, Radon hace explícita la observación de que los conjuntos L–medibles (en $\mathbb{R}^n$) forman lo que ahora se conoce como una σ-álgebra, y usa esa observación para incluir una definición de integral más general que incluye de forma natural a la integral de Lebesgue (ver notas al Capítulo III). A partir de ahí, la generalización resultó natural y casi inmediata; apenas dos años después, Maurice Fréchet consideró la definición de integral en espacios de medida abstractos [15]. Durante ese tiempo, varios autores (Carathéodory, Hahn, Hausdorff, Lusin, Nikodym, Riesz, Sierpinski, Young, por mencionar algunos de los más destacados) consideraron integrales a diversos niveles de abstracción; ya en los años 1920's, el uso de la definición de medida en conjuntos abstractos era bastante común. La consolidación de la teoría abstracta (*sigma*–álgebras, espacios de medida) se dio en gran medida gracias a la reformulación de la teoría de la probabilidad propuesta por A. Kolmogorov [32]; en esa teoría, el *espacio de probabilidad* es un espacio de medida finita, en la que la σ-álgebra recibe el nombre de *espacio de eventos*.

El Teorema de Convergencia Monótona fue probado por Beppo Levi, en [38]; el resultado aparece en el trabajo original de Lebesgue, pero con la hipótesis adicional de que la función límite sea integrable. Pierre Fatou probó el resultado que lleva su nombre (para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$) en [13]. El Teorema de la Convergencia Dominada fue publicado por primera vez en [37], para el caso de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Capítulo III

La teoría de extensión de medidas propuesta por Constantin Carathéodory se expone en su libro [10]; la condición de Carathéodory ya había aparecido en varias ocasiones, en diferentes niveles de abstracción. Por ejemplo, en [54] escribe la condición de que un conjunto sea Lebesgue medible en términos muy similares a la condición de Carathéodory.

Durante la segunda mitad del siglo XIX, un gran número de matemáticos dedicó notables esfuerzos para obtener resultados que orientaran sobre la validez o no de integrar iteradamente. Los resultados obtenidos en ese entonces, cuando no eran muy restringidos, eran muy complicados en su formulación (ver [26] para una discución y numerosas referencias). En ese sentido, el Teorema III.23 – demostrado por el matemático italiano G. Fubini en 1907 ([17]) para la integral de Lebesgue – fue uno de los primeros grandes triunfos históricos de dicha definición de integral sobre las existentes con anterioridad. Es de uso común usar el término "teorema de Fubini" para referir a cualquier resultado sobre integrar iteradamente. El resultado para funciones no negativas, no necesariamente integrables (Teorema III.22) fue publicado por Leonida Tonelli en [52].

Hacia finales del siglo XIX, Thomas Stieltjes había considerado una variante de la integral de Riemann, al integrar con respecto a una función g que puede interpretarse como una "densidad continua de masa." La *integral de Stieltjes*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

se define como el límite de sumas de Riemann generalizadas

$$\sum_{k=0}^{n} f(t_k)(g(x_{k+1} - g_k(x))$$

al hacer tender a cero la longitud de los intervalos de la partición $\{x_0, \ldots, x_n\}$. La integral de Lebesgue–Stieltjes fue definida por J. Radon en 1913 (en [41]), al incorporar a la nueva teoría (de Lebesgue) a las integrales de Stieltjes (también conocidas como de Riemann–Stieltjes). En el trabajo de Radon, se incluyen a las integrales de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y de Stieltjes, dentro de una misma definición; como se mencionó arriba, en las notas al Capítulo II, esto derivó muy pronto en la abstracción a espacios de medida.

Capítulo IV

El Lema de Representación de Riesz (Teorema IV.21) fue probado para $p = q = 2$ (antes de conocerse el Teorema de Radon-Nikodym), independientemente por F. Riesz [43] y M. Fréchet [14]. El Teorema de Radon-Nikodym fue demostrado en el ya antes mencionado artículo [41] para integrales en $\mathbb{R}^n$; la versión general para espacios de medida abstractos fue demostrada en [39] por Otto Nikodym, matemático polaco. La demostración que presentamos en la Sección IV.1 está basada en su mayor parte en [49]. La demostración del Teorema de Radon-Nikodym a partir del Lema de Representación de Riesz en espacios de Hilbert, se atribuye a Jon Von Neumann; en su forma original, se usan no solamente cargas, sino medidas con valores complejos (esta prueba puede consultarse en [47] o [5]).

El Teorema de Descomposición de Hahn (Teorema IV.2) fue probado por Radon para medidas en $\mathbb{R}^n$, e independientemente por Hans Hahn [22] y Maurice Fréchet [16] para la situación general. El término “carga” (haciendo alusión a la carga eléctrica) para referirse a una medida que toma valores positivos y negativos, es muy posterior [2]. Los espacios de Lebesgue L^p, con esa notación, fueron introducidos por F. Riesz en [44].

Bibliografía

[1] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, ed. *Handbook of Methematical Functions*, Dover Publications Inc.

[2] A.D. ALEXANDROFF, *Additive set functions in abstract spaces*, Mat. Sbornik (1941) Vol. 4, 307-348.

[3] R.G. BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition, John Wiley and Sons 1995.

[4] R.G. BARTLE, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics 32, AMS 2000.

[5] V.I. BOGACHEV, *Measure Theory*, Springer Verlag.

[6] E. BOREL, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ecole Norm. Ann. vol 3 n.12, (1895), 9–55. (Tesis doctoral, Universidad de Paris 1894).

[7] E. BOREL, *Leconssur les functions des reelles*, Gauthier Villars, 1905.

[8] C. BOYER, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover 1959.Wiley Classics Library Edition, John Wiley and Sons 1995.

[9] G. CANTOR, *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V*, Math. Ann. vol. 23, (1883), 453–548.

[10] C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner 1918.

[11] J. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer Verlag.

[12] A. DENJOY, *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, Paris Ac. Sci. C.R., No. 154 , (1912), 859–862.

[13] P. FATOU, *Series trigonometriques et series de Taylor*, Acta Math. 30 (1906), p335.

[14] M. FRECHET, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1909), 14141416.

[15] M. FRECHET, *Sur l'intégrale d'une fonctionelle étendue a un ensemble abstrait*, Paris Soc. Mat. Bull. 43, (1915) 248265.

[16] M. FRECHET, *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*, Fund. Math. (1923), V.4 329-365.

[17] G. FUBINI, *Sugli integrali multipli*, Roma R. Acc. Lincei Rend., (5) 16_1, (1907) 608-614.

[18] F. GALAZ-FONTES, *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$, Oxford University Press.

[19] B.R. GELBAUM Y J.M.H. OLMSTED, *Counterexamples in Analysis*, Dover 1964.

[20] M. GEOURGIADOU, *Constantin Carathéodory: Mathematics and Politics in Turbulent Times*, Springer Verlag.

[21] G. GHEVERGHESE JOSEPH, *The Crest of the Peacock*, Princeton University Press.

[22] H. HAHN, *Theorie der reellen Fonctionen*, Springer, Berlin 1921.

[23] P. HALMOS, *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics 18, Springer Verlag.

[24] A. HARNACK, *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe*, Math. Ann. vol 19 (1882), 235–279.

[25] A. HARNACK, *Ueber der Inhalt von Punktmengen*, Math. Ann. vol 25, (1885), 241–250.

[26] T. HAWKINS, *Lebesgue Theory of Integration, It's Origins and Development*, AMS Chelsea Publishing.

[27] T. HEATH, *The Method of Archimedes*, Cosimo Classics.

[28] R. HENSTOCK, *A Riemann - type integral with Lebesgue power*, Canad. J. Math. (1968) vol 20, 79-87.

[29] K. HRBACEK, T.JECH, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, 19,99.

[30] C. JORDAN, *Remarques sur las intgrales défines*, Liouville Jour. Math. 4 (8) (1892), 69–99.

[31] A. KECHRIS, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer Verlag.

[32] A. KOLMOGOROV, *Teoría general de la medida y cálculo de probabilidades* (en ruso), Trudy Komm. Akad. Matem. no.1 (1929), 8–21.

[33] J. KUPKA, *Measure Theory: The Heart of the Matter*, The Math. Intelligencer (8) No. 4 (1986), 47–56.

[34] D.KURTZ, C. SWARTZ *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-kurzweil, and Mcshane* Series in Real Analysis, World Scientific Pub. Co. 2004.

[35] J. KURZWEIL, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czech. Math. Journal vol 7, num. 82 (1957), 418–446.

[36] H. LEBESGUE, *Intégrale, Longueur, Aire*, Université de Paris 1902.

[37] H. LEBESGUE, *Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'equation de Fredholm*, Paris, Soc. Math. Bull., 36 (1908), 3–19.

[38] B. LEVI, *Sopra l'integrazione delle serie*, Rend. 1st Lombardo (39) (1906), 775–780.

[39] O. NIKODYM, *Sur une generalisation des intégrales de M.J. Radon*, Fundamenta Mathematicae 15 (1930), 131-179.

[40] G. PEANO, *Applicatzione Geometriche del Calcolo Infinitesimali*, Torino, Bocca 1887.

[41] J. RADON, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*, Wien, Acad. Sber. 122 (1913), 1295–1438.

[42] B. RIEMANN, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhand. der Kniglichen Gesell. der Wiss. zu Gttingen, vol. 13, (1867).

[43] F. RIESZ, *Sur una espéce de géométrie analytiques des systems de fonctions summables*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1909), 14091411.

[44] F. RIESZ, *Untersuchungen ber Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. no.69 (1910) 449497.

[45] H.L. ROYDEN, *Real Analysis*, Tercera Edición, Prentice Hall 1988.

[46] W. RUDIN, *Principios de Análisis Matemático*, McGraw Hill 1987.

[47] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Tercera Edición, Series in Higher Mathematics, McGraw Hill 1987.

[48] M. REED Y B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Elsevier Science.

[49] A.R. SCHEP, *And still one more proof of the Radon-Nikodym theorem*, Am. Math. Month. 110, no 6 (2003), 536–538.

[50] J.R. SCHOENFELD, *Mathematical Logic*, AK Peters 2001.

[51] M. SPIVAK, *Calculus*, segunda edición en español, Reverté 1992.

[52] L. TONELLI, *Sul l'integrazione per parti*, Rend. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur. Roma (5) V.18 (1909), 246–253.

[53] G. VITALI, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani 1905.

[54] W.H. YOUNG, *Open sets and the theory of content*, Proc. London Math. Soc. V.2 (1905), 16–51.

Índice General