Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Matemática en la Matemática II, Música II, Naturaleza y Nuestro Cuerpo.

Flor de María Aceff
Emilio Lluis-Puebla

www.smm.org.mx

Serie: Divulgación. Vol. 2 (2007)

ISBN 968-9161-22-9

Matemática
en la
Matemática II, Música II, Naturaleza y Nuestro Cuerpo

Flor de María Aceff
y
Emilio Lluis-Puebla
Universidad Nacional Autónoma de México

Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Sociedad Matemática Mexicana
ISBN 968-9161-21-0 papel
ISBN 968-9161-22-9 CD
ISBN 968-9161-23-7 en línea

Índice General **3**

Prefacio **5**

Capítulo I Matemática y matemáticos II **9**

Capítulo II Matemática en la Música II **45**

Capítulo III Matemática en la Naturaleza **61**

Capítulo IV Matemática en Nuestro Cuerpo **77**

Bibliografía y Referencias **103**

Los Autores **107**

PREFACIO

Este segundo volumen, al igual que el primero, tiene como propósito el de servir como motivación y orientación vocacional a los jóvenes deseosos de dedicarse a una de las aventuras más formidables del Ser Humano, la Matemática. También está dedicado a toda persona que desee obtener un concepto más aproximado acerca de la Matemática y sus practicantes. Está dirigido tanto para un público en general como para un lector de nivel matemático diverso. Hemos tratado de dejarle algo a cada uno de ellos.

En "Matemática y matemáticos II" se escribe acerca de la Matemática, sus características, la investigación y progreso en ella. Como ejemplo del surgimiento de una teoría matemática se presenta la K-Teoría Algebraica. También, como matemática aplicada se hace lo correspondiente con la Teoría Matemática de la Música. Finalmente, se exponen pensamientos acerca de la Computación y su relación con la Matemática.

Con respecto a "Matemática en la Música II", actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer un marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Se expone el acercamiento de Mazzola para muchos problemas musicales el cual está basado en la Teoría de Topos. Se introduce el concepto de Denotador el cual permite describir los objetos musicales y se mencionan las ideas detrás del mismo.

Se concluye que estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años.

Muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que exhiben varios niveles de complejidad vistos con la geometría usual. La existencia de estos patrones nos reta a estudiar esas formas que con la geometría usual parecen no tener forma, es decir, a investigar la morfología de lo "amorfo". En el capítulo III presentamos los fractales, que son la herramienta para estudiar los patrones complejos de la naturaleza.

Con respecto a “Matemática en Nuestro Cuerpo”, los fractales son estructuras geométricas que se pueden usar para analizar muchas estructuras biológicas que no son compatibles con análisis convencionales. Aquí se exhibe el análisis fractal y se muestra cómo se puede aplicar al análisis del hueso trabecular, a la estructura del árbol bronquial y al análisis de las arritmias cardiacas.

Los capítulos I y II reflejan fundamentalmente las áreas de especialidad de Emilio Lluis Puebla y los capítulos III y IV fundamentalmente los de Flor Aceff.

Cabe mencionar que, a propósito, en algunas ocasiones, se ha escrito en primera persona o dirigiéndose al lector directamente. En algunas ocasiones hemos repetido ideas de [A-LL] por considerarlas adecuadas en un lugar específico.

No hay que olvidar que la Matemática es producto de la creatividad de unos cuantos seres humanos que vivieron o viven. Es por esto que deseamos mostrarlos físicamente incluyendo sus imágenes haciendo énfasis en que nueva matemática sigue creándose. Algunas de ellas las hemos tomado de nuestro álbum personal. Si el lector encuentra alguna fórmula inentendible, le rogamos que no se asuste y que felizmente se la salte, pero no deje de admirarla.

Flor de María Aceff
y
Emilio Lluis-Puebla.

Enero de 2007.

CAPÍTULO I

Matemática y matemáticos II

Introducción

Muchas personas, colegas, estudiantes y en especial mis propios alumnos, me han solicitado que escriba acerca de la Matemática y los matemáticos. Correspondo a esta petición esperando que esta información ayude a comprender a la Matemática y a los matemáticos. Esta segunda parte es independiente de la primera [A-LL].

Algunas de las ideas expresadas en este capítulo son mías y otras provienen de las fuentes mencionadas en la bibliografía. En particular, he tomado muchas del gran matemático Michael Atiyah.

Sir Michael Atiyah

Desde mis años de estudio profesional y de posgrado he leído sus artículos de divulgación, las entrevistas que le han realizado, escuchado sus conferencias, estudiado sus textos y artículos de investigación, en particular los de K-Teoría. Sin duda es, no solamente uno de los más destacados matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, sino también uno de los pensadores más acertados acerca de la Matemática misma y por esto deseo transmitirles un poco de su pensamiento y visión de nuestra disciplina las cuales comparto.

La Matemática posee una enorme aplicabilidad y constituye un lenguaje y marco indispensable para todas las ciencias. Ésta es la razón por la cual no solamente unos cuantos individuos dedican su vida a ella sino que es materia de estudio en el sistema educativo y parte de la escena social.

La investigación matemática es la disciplina científica más alejada del hombre de la calle quien no posee absolutamente ninguna idea acerca de ella. Generalmente identifica a la Matemática con las ideas que difícilmente pudo absorber —a menudo sin éxito— en la escuela primaria o secundaria. La Matemática o lo que cree que es, le parece fría y cruda, sin vida (incluso habla de la frialdad de los números). Difícilmente se imagina que la Matemática fue creada en el pasado y sigue creándose en el presente por algunos seres humanos. Le es muy difícil de comprender el hecho de que sea una disciplina intelectual abstracta y de que posea una existencia independiente y floreciente. Una manera de establecer un contacto con ella es a través de libros como este o también a través de conocer y escuchar matemáticos que trabajen en las distintas disciplinas de la Ciencia que utilizan Matemática.

El egresado de una licenciatura generalmente no se dedica al estudio de su profesión, más bien la utiliza o la aplica. Para realmente dedicarse a la Matemática es necesario realizar estudios de posgrado y aún así apenas comenzar a vivir el maravilloso mundo de la Matemática. Los egresados de una licenciatura de Matemática pueden y deben encontrar trabajo como cualquier otro egresado de una licenciatura, es cosa de hacerles ver a quienes contratan personal de las enormes ventajas que tienen al contratar matemáticos, pues sobretodo, una de esas ventajas es de mucho valor para quienes no tienen miedo de contratar a personas que han realizado un entrenamiento en el acto de pensar y que poseen capacidad de aprender. Muchos de los pocos licenciados en Matemática se dedican a la docencia, ojalá hubiera más, hacen mucha falta, sobretodo en los niveles de primaria, secundaria o preparatoria. Se requieren con la licenciatura terminada, con una estupenda preparación y que deseen ser docentes por vocación, capaces de motivar e infundir en los jóvenes (quienes constituyen más de la mitad de la población de México) un verdadero amor al conocimiento científico y artístico. En este capítulo fundamentalmente se expondrán temas relacionados con la Matemática y sus creadores.

Características de la Matemática

La Matemática posee varias características que la hacen diferir de otras disciplinas.

La primera: es muy difícil describir o definir su materia de estudio. Es claro cual es la materia de estudio de algunas áreas de la Astronomía o de la Biología pero no de la K-Teoría Algebraica. Esto se debe fundamentalmente a que los objetos de estudio son conceptos definidos de manera abstracta, los cuales a menudo van encadenados a otros conceptos previamente definidos. Su descripción se reduce a definiciones formales que requieren de conexiones neuronales, las cuales requieren de cierto tiempo para realizarse. Esto, aunado a una madurez matemática o entrenamiento matemático le permite al ser humano asimilar una buena cantidad de ideas abstractas. Por ejemplo, trate usted de explicarle a su “sobrinita preguntona” qué es la adición, o de qué se trata la Geometría Analítica, o qué es un anillo. Requerirá, después de muchas explicaciones intuitivas, establecer definiciones formales y tiempo, mucho tiempo.

La segunda característica es que posee una lógica perfecta.

Euclides de Alejandría (325-265 A. C.)

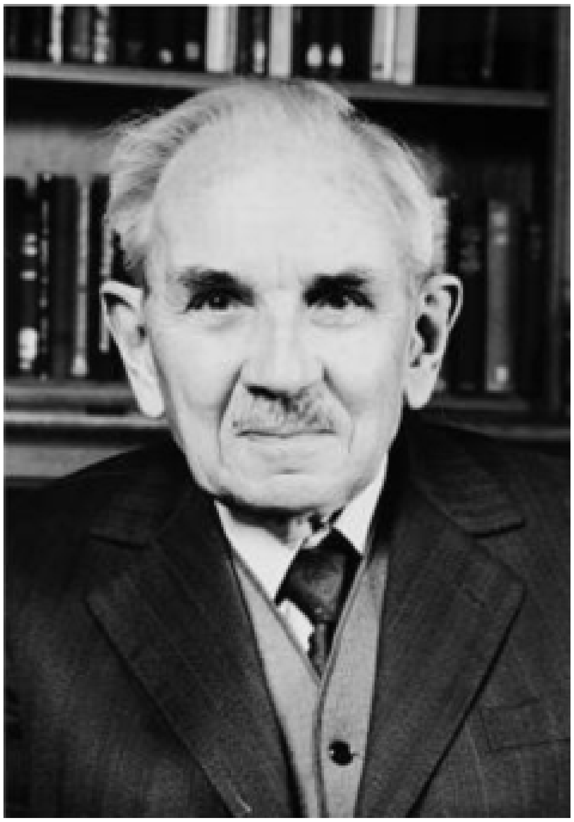
La Matemática de Euclides es tan válida hoy como en la época de Euclides. Esto contrasta con otras teorías, como la de la tierra plana, la del flogisto o la del éter.

La tercera es lo conclusivo de la Matemática, esto es, las diferentes disciplinas toman conclusiones con base en las manipulaciones matemáticas.

La cuarta es su independencia, esto es, no requiere de equipos costosos a diferencia de las ciencias experimentales. Basta a veces lápiz y papel, o ni siquiera esto.

Arquímedes (287-212 A. C.)

Arquímedes dibujaba sobre la arena.



Jean Leray (1906-1999)

Leray escribió su matemática siendo prisionero de guerra.

A pesar de los regímenes políticos de toda índole, la Matemática continúa evolucionando. Es interesante observar que sus bibliotecas son menos grandes que las de otras disciplinas.

¿Qué significa la palabra Matemática?

Arrigo Coen Anitúa y Emilio Lluis Puebla

Según me comentó mi querido amigo Arrigo Coen, mathema significa erudición, manthánein el infinitivo de aprender, el radical mendh significa en pasivo, ciencia, saber. Luego, es lo relativo al aprendizaje. Así que en sentido implícito, Matemática significa: "lo digno de ser aprendido".

¿Qué es la Matemática?

No existe una definición de lo que es la Matemática. Sin embargo, se dice que es una colección de ideas y técnicas para resolver problemas que provienen de cualquier disciplina incluyendo la Matemática misma.

Algunos problemas matemáticos

El famoso último teorema de Fermat (el cual sucede al de la ecuación pitagórica $x^2+y^2=z^2$) que dice que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ nunca tiene soluciones enteras positivas para cualquier entero positivo n mayor que 2. Excepto para n=2, estas ecuaciones no tienen una interpretación geométrica. Aparentemente este problema no pareciera tener mucha importancia, sin embargo, ha tenido una influencia enorme en el desarrollo de la Matemática.

Pierre de Fermat (1601-1665)

Fermat dijo que tenía una demostración, pero que no tenía espacio para escribirla. Por más de 300 años, este problema, aparentemente sencillo, fue el motivo de grandes esfuerzos de muchos matemáticos y es precisamente de éstos esfuerzos que se han creado nuevas técnicas y conceptos, los cuales tienen influencia en muchas áreas de la Matemática.

El problema de los cuatro colores afirma que solamente se requieren 4 colores para iluminar o colorear cualquier mapa del globo terrestre con la condición de que dos países adyacentes deban tener colores diferentes. La solución positiva, más de cien años después, fue obtenida mediante el uso de la computadora, teniendo un impacto muy pequeño en la Matemática. Fue el primer problema no trivial solucionado con computadora.

En la Matemática, si un problema se resuelve mediante métodos estándares, el problema pierde mucho de su interés. Si no se resuelve mediante los métodos conocidos por mucho tiempo, se convierte en un problema clásico. Un buen problema es aquel que da lugar a nuevas técnicas con gran aplicabilidad a otras áreas.

Las ideas nuevas que constituyen los pasos para obtener la solución de algún problema constituyen el progreso de la Matemática. Los matemáticos sabemos apreciar las técnicas ingeniosas.

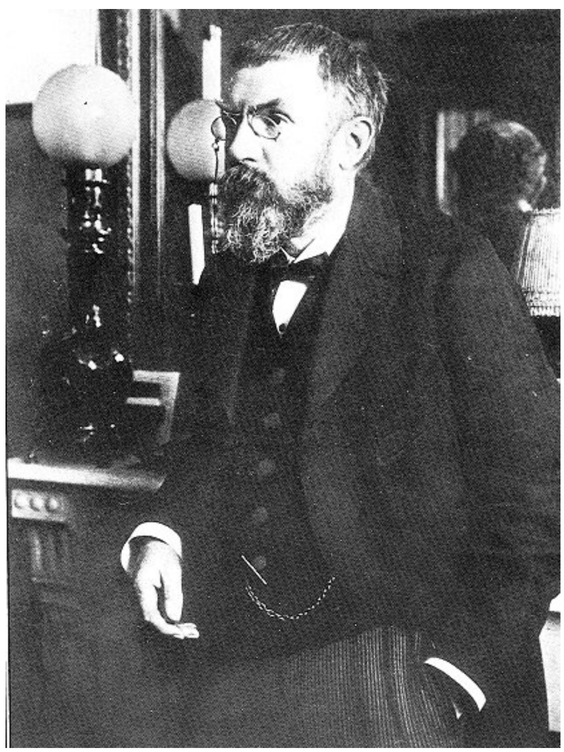
¿Qué es la investigación matemática?

Existen aspectos contrastantes y alternativas dentro de la investigación matemática. A continuación veamos algunos.

Existen diferencias entre lo que realiza un matemático puro y uno aplicado aunque existe también una interrelación entre las dos.

En cuanto a la Matemática Pura, está la alternativa acerca de la teoría matemática y la resolución de problemas. Existe una gran variedad de problemas. Si algunos de ellos se pueden resolver mediante argumentos ingeniosos de una manera parecida, entonces decimos que tenemos un método para resolverlos y si éstos son muchos, entonces decimos que tenemos una "teoría matemática". Así se evoluciona, de una colección de problemas, a una "teoría", la cual difiere del concepto que de ella se tiene en otras disciplinas científicas.

La Matemática es una actividad humana y por ende hay que poderla transmitir a las generaciones siguientes, por lo cual se organiza sistemáticamente para que los que la estudien lo hagan de la manera menos dolorosa posible. Ésta es la forma básica de lo que es una Teoría Matemática.



Henri Poincaré (1854-1912)

Poincaré decía que una casa está hecha de ladrillos pero que los ladrillos por sí solos están lejos de ser una casa.

¿Cómo se da la innovación en la Matemática?

A diferencia de otras disciplinas científicas, en la Matemática, la creación de nuevos métodos o técnicas constituye la innovación, la cual es vital para el progreso de la Matemática.

No se requiere del descubrimiento de antiguos documentos manuscritos, ni del trabajo experimental o de la introducción de nueva tecnología. La innovación se da, entre otras cosas, por la creación de nuevas técnicas.

Évariste Galois (1811-1832)

Por ejemplo, cuando Galois se dio cuenta al trabajar en el problema de la insolubilidad de la ecuación polinomial general de grado al menos 5 que la clave estaba en las simetrías de las cinco soluciones de la ecuación, proveyó los fundamentos de la teoría general de la simetría, la cual es una de las ramas más profundas y de amplio espectro de toda la Matemática, llamada Teoría de Grupos.

También hay innovación interna al tratar de dar cohesión a una teoría matemática, al realizar preguntas adecuadas, las cuales requieren de mucha intuición y compenetración. También puede venir de problemas de otras disciplinas.

Se puede decir que hay progreso matemático cuando existe una aplicación continua de métodos usuales intercalados espectacularmente con nuevos conceptos y problemas.

Un ejemplo: la K-Teoría Algebraica.

A pesar de que desde principios del siglo XX era bien conocido que un monoide conmutativo (un conjunto provisto de una ley de composición asociativa con elemento neutro) sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera, es hasta 1957 (en que Grothendieck pensara en esto) que comienza propiamente la K-Teoría. Es de esta misma manera que los enteros negativos se definen a partir del monoide aditivo de los naturales [M-B] y que los números racionales positivos se definen a partir del monoide multiplicativo de los naturales sin el cero.

Alexander Grothendieck (1928-)

La idea de Grothendieck fue la de asociarle a un monoide conmutativo **M**, un grupo conmutativo **K**(**M**), único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides φ**:M→K**(**M**) tal que para cualquier grupo conmutativo **G**, cualquier homomorfismo de monoides **f: M→ G** se factoriza en forma única como

$$\mathbf{f: M \rightarrow K(M) \rightarrow G}.$$

El grupo de Grothendieck apareció publicado por vez primera en 1958. Aparte de su uso en el teorema de Riemann-Roch, una de las aplicaciones más conocidas de la construcción de Grothendieck la realizaron en 1959 Atiyah y Hirzebruch. Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo **X**.

El grupo de Grothendieck lo denotaron $\mathbf{K^0(X)}$. Definieron $\mathbf{K^{-n}(X)}$ utilizando la suspensión de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{n \geq 1}$. La periodicidad de Bott muestra que $\mathbf{K^n(X) \approx K^{n+2}(X)}$ y es utilizada para definir $\mathbf{K^n(X)}$ para $\mathbf{n \in Z}$. Dichos funtores constituyen una teoría de cohomología conocida como la ***K-Teoría Topológica*** (la referencia clásica es [A-H]) la cual tuvo aplicaciones importantes, entre otras, el Teorema de Atiyah-Singer [A-S] y la solución del problema de obtener el máximo número de campos vectoriales linealmente independientes sobre una esfera [A].

Jean-Pierre Serre (1926-)

Un resultado de Serre [S] generalizado por Swan en 1962 proporcionó una manera de traducir conceptos topológicos en algebraicos. En efecto, si $\mathbf{X}$ es un espacio Hausdorff compacto y $\mathbf{C(X)}$ es el anillo de las funciones complejas en $\mathbf{X}$ entonces existe una equivalencia entre la categoría de los haces vectoriales $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{X}$ y la categoría de los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{C(X)}$ dada por $\mathbf{B \rightarrow \Gamma(B)}$ donde $\mathbf{\Gamma(B)}$ denota las secciones del haz vistas como módulo sobre $\mathbf{C(X)}$. (Véase el artículo de Vaserstein [V] de 1986 para una generalización del teorema de Swan a la categoría de haces vectoriales de tipo finito.)

En pocas palabras, la categoría de los haces vectoriales sobre **X** es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados donde Λ=**C(X)**.

De aquí se tiene una definición de $\mathbf{K(\Lambda)}$ ó $\mathbf{K_0(\Lambda)}$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Así que $\mathbf{K_0(\Lambda)}$ es, entre otras cosas, una herramienta útil para investigar la estructura de los Λ-módulos proyectivos.

Por ejemplo, considere el siguiente problema propuesto por Serre en 1955 [S]. Ya se mencionó que sobre un espacio topológico **X**, es equivalente tener un haz vectorial topológico complejo o un módulo proyectivo finitamente generado sobre el anillo de funciones continuas $\mathbf{C^0(X;\mathcal{C})}$, donde un haz trivial corresponde a un módulo libre (donde $\mathcal{C}$ denota los números complejos).

En particular, cuando $\mathbf{X=\mathcal{C}^n}$, todos los haces topológicos son isomorfos al haz trivial por lo que los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{C^0(\mathcal{C}^n;\mathcal{C})}$ son libres. Si ahora tomamos un campo **k** arbitrario entonces los haces algebraicos sobre $\mathbf{k^n}$, corresponden a los módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de polinomios $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$.

Como en el caso de haces topológicos sobre $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}$, el problema de Serre es si tendremos que todo haz algebraico sobre $\mathbf{k^n}$ es trivial. Es decir, ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$?

En dicho artículo se introducía la Teoría de Gavillas en la Geometría Algebraica. Los haces vectoriales sobre variedades algebraicas se definían como gavillas localmente libres; los haces triviales correspondían a gavillas libres. El espacio afín $\mathbf{A^n_k}$ sobre un campo **k** es el espectro primo **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$. Al ser éste un esquema afín sobre el anillo **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$, las gavillas localmente libres están dadas por módulos proyectivos finitamente generados sobre **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$. Así, los módulos finitamente generados sobre **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$ corresponden a haces vectoriales sobre $\mathbf{A^n_k}$. Entonces, el problema de Serre se leía así: ¿es trivial todo haz sobre $\mathbf{A^n_k}$?

Detrás de esto estaba la idea de que el espacio afín $\mathbf{A^n_k}$ debería comportarse como un espacio contráctil en Topología, y por lo tanto debería tener únicamente haces triviales sobre él. Escrita de otra manera, la conjetura de Serre diría: ¿son libres los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$?

Invitamos al lector a tomar un paseo guiado por Lam [L], por los bellos paisajes matemáticos que llevaron a probar esta conjetura, finalmente, veinte años después independientemente por Quillen y Suslin.

Los intentos por resolver la conjetura de Serre en los años sesenta dieron lugar al nacimiento de otra área: la K-Teoría Algebraica. Una de las metas de la K-Teoría Algebraica fue la de proporcionar técnicas e ideas para atacar el problema de Serre.

A pesar de que la solución final de la conjetura en forma afirmativa no dependió de la K-Teoría Algebraica, no disminuye para nada la gran influencia que tuvo en el enorme desarrollo que ha alcanzado con mayor relevancia de la esperada.

La K-Teoría Algebraica es un fenómeno interdisciplinario dentro de la Matemática y para definir los grupos de K-teoría superior necesitamos de la siguiente construcción debida a Quillen [Q]:

TEOREMA. Sea **X** un CW complejo conexo con punto base **p**. Sea **N** un subgrupo normal perfecto de $\pi_1\mathbf{(X,p)}$. Entonces existe un espacio $\mathbf{X^+}$ y una transformación $\mathbf{f: X \to X^+}$ tal que

(i) $\pi_1\mathbf{(f)}$ induce un isomorfismo $\pi_1\mathbf{(X^+,p)} \cong \pi_1\mathbf{(X,p)/N}$;

(ii) para cualquier $\pi_1(X^+,p)$-módulo **A**, **f** induce un isomorfismo

$$H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+,A);$$

(iii) (X^+,f) está determinado, excepto por equivalencia homotópica por (i) y (ii).

Este teorema se conoce como construcción **+** de Quillen, y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor K_2 de Milnor. La idea de la demostración es la de adjuntar 2-células para aniquilar **N** y 3-células para neutralizar el efecto de las 2-células en homología.

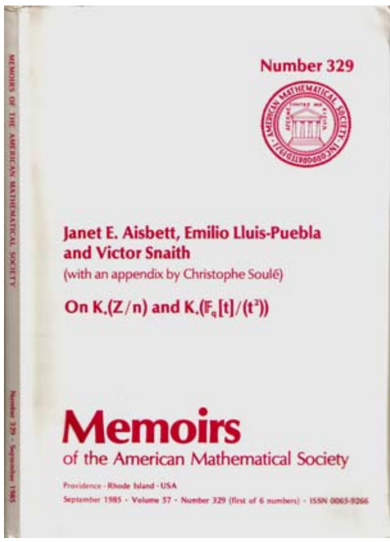
Quillen en los años setenta definió, para $i \geq 1$, el **i**-ésimo K-grupo algebraico de Λ como $K_i\Lambda = \pi_i(BGL\Lambda^+)$. Como en los casos **i=1,2**, K_i es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos [Q].

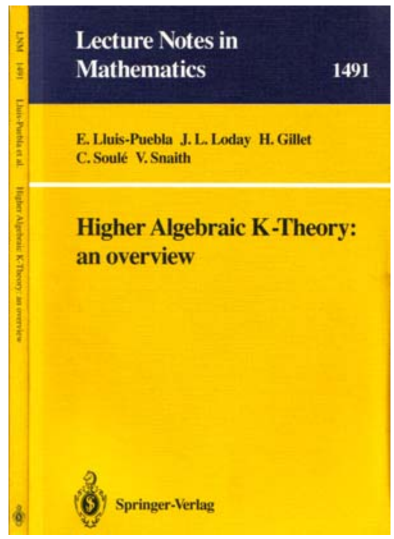
Una de las huellas de avance significativo en la Matemática es el descubrimiento de relaciones inesperadas entre diversas áreas. Quizá uno de los ejemplos más notables de tal avance es el desarrollo de la K-Teoría Algebraica de Quillen en la cual el Álgebra y la Topología se relacionan de una manera nueva y fundamental.

Por un lado, la K-Teoría Algebraica introduce métodos topológicos para definir invariantes algebraicos, tales como los K-grupos de anillos de orden superior. Por otro lado, proporciona una forma de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos. La K-Teoría Algebraica estudia las propiedades de los grupos $K_i(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo Λ.

Uno de los problemas más importantes en la K-Teoría Algebraica es el cálculo de los grupos K_i para diversos anillos Λ, pero, a pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos, únicamente se conoce un número muy reducido de ellos.

El lector podrá encontrar en [A-LL-S-S], [LL1], [LL2] y [LL3] un panorama e introducción a esta área de la Matemática.





La Matemática, una Bella Arte.

Como lo he expresado en múltiples ocasiones, la Matemática es una Bella Arte y una Ciencia. Para los matemáticos, la belleza y la verdad tienen igual estima. Tenemos mucho aprecio por un argumento hermoso, esto es, un argumento que conlleva elegancia en el estilo, economía de esfuerzo, claridad de pensamiento, perfección en el detalle y en la forma de acertar una deducción contundente y convincentemente. Los matemáticos nos dedicamos a un área u otra dependiendo en qué tan bella nos parece una con relación a otra. Buscamos métodos elegantes y evitamos argumentos feos.

Características estéticas de la Matemática.

Hay varias características estéticas de la Matemática. La universalidad, en el sentido de que casi cualquier rama del conocimiento posee aspectos que se pueden analizar matemáticamente. El desarrollo de argumentos simples y concisos es absolutamente indispensable para el progreso de la Matemática. La selección y formulación de problemas son un arte que depende de la intuición del matemático. Aquí, los aspectos estéticos juegan un papel muy importante.

En la primera parte de esta serie [A-LL], describí cómo Poincaré concebía la creación de la Matemática e hice un símil con la creación musical. A manera de broma, pareciera que Poincaré creaba Matemática al subirse o bajarse de un tranvía.

Jacques Hadamard (1865-1963)

Hadamard recomendaba tomarse dos baños de agua caliente para estimular la investigación matemática. Muchos matemáticos beben café, transformándolo en teoremas. También he escuchado que la

Matemática se hace caminando, es decir cuando se dejan las ideas en el “inconsciente” y de repente ocurre una “feliz idea”, la cual es, quizá, una serie de conexiones neuronales que tienen lugar en el tiempo las cuales se logran mejor cuando no interviene un acto consciente demasiado fuerte que las impida.

Formalismo y rigor matemáticos.

Hay una distinción entre formalismo y rigor matemáticos:

En la Matemática formal, uno crea matemática sin preguntarse demasiado acerca del significado mientras ésta dé el resultado correcto.

Uno sigue adelante sin preocuparse demasiado por el rigor matemático esperando que en el futuro éste sea provisto.

La Matemática, hay que insistirlo para no perderlo de vista, **es esencialmente una actividad humana y nuestra meta no solamente es inventarla sino trasmitirla.** Así, el rigor matemático debe existir. Si no se tienen bases sólidas, cualquier construcción basada en ellas podría caer.

Existen matemáticos que se especializan lo más profundamente posible en un área o campo y otros que adquieren una gran cultura matemática, tan amplia como sea posible. Los dos tipos de matemáticos son necesarios.

Sin embargo, muchos recomendamos a los jóvenes que comiencen por obtener una cultura matemática, lo más amplia posible y luego sumergirse en un tema. Esto es debido a que la esencia de la Matemática es la de juntar campos aparentemente disímiles. Después de todo, la Matemática es el grado máximo de abstracción el cual tiene aplicación en toda disciplina que se precie de llamar ciencia.

¿Cómo trabajan los matemáticos?

Existen matemáticos que trabajan individualmente y otros que lo hacen en un pequeño o gran grupo. Es muy difícil el trabajar solo, a menudo uno solo no ve una trivialidad que lo detiene por mucho tiempo y la cual es resuelta inmediatamente por un colega dentro del grupo. Pero a veces, sucede al revés, no siempre tres cabezas piensan más que una. A veces, la interacción con colegas enriquece tanto a la Matemática como a los matemáticos y se encuentran esas interrelaciones de las cuales hablaba anteriormente entre áreas aparentemente disímiles.

A veces la colaboración entre matemáticos es enriquecedora y hace de la investigación matemática, la cual es muy ardua o difícil, una experiencia más humana y social, aunque a veces esto no se puede, por no haber colegas de la misma especialidad cerca o por características de personalidad de cada matemático. El trabajar en grupo no exime del arduo trabajo individual de meditar o pensar en Matemática.

¿Cuáles opciones de áreas tienen los jóvenes matemáticos?

Para los jóvenes que ingresan al apasionante mundo de la creación matemática existen dos posibilidades. O ingresan a un área de investigación de moda o de peso a la cual se considera relevante o crean su propia área. Las dos posibilidades existen con sus ventajas y desventajas. A menudo, dentro de una de las áreas de la corriente que se considera principal, los problemas son muy difíciles y ya grandes matemáticos han realizado lo que han podido y sólo restan temas demasiado difíciles o irresolubles por el momento o por siglos. Mientras que en un área nueva, a menudo hay mucho por hacer y no es tan ardua la labor matemática. Pero también se paga el precio de que sea intrascendente todo lo realizado.

¿Cuáles son los tipos de matemáticos en general?

Coexisten dos tipos de matemáticos, los que utilizan la fuerza bruta y los elegantes. Esto es, quienes utilizan métodos o técnicas aplastantes que los conducen a la resolución del problema y quienes con pocos argumentos colocados adecuadamente lo obtienen sorpresivamente de manera brillante. A veces un mismo matemático puede actuar de las dos formas en distintas ocasiones.

Sin embargo, la transmisión de la Matemática es mucho más apreciada, por la manera que funciona nuestro cerebro, cuando se hace de manera elegante y simple, es decir, de forma artística. Así, la elegancia matemática es muy importante. Ésta se logra, en general, (no en la fuente primaria de la investigación sino) después de haber pasado por muchas mentes matemáticas brillantes.

¿Cómo se está realizando la transmisión de la Matemática actualmente?

En cuanto a la transmisión de la matemática de frontera, ésta se realiza después de un tiempo, debido a lo expresado anteriormente, cada vez más a niveles de gente más joven. Matemática muy difícil se ha compactado y presentado elegantemente facilitando su aprendizaje. Ésta es la manera más eficaz de transmitir Matemática.

Así, hay varios tipos de creación matemática y de matemáticos, todos indispensables.

Hay una inmensidad de matemática creada durante unos cuantos siglos. Sin embargo, a principios del siglo XX solamente unos cuantos grandes matemáticos podían decir que abarcaban una buena parte de la totalidad de ella. Hoy en día es casi imposible que un matemático abarque ni siquiera su propia área de estudio. ¿Querrá decir esto que el gran edificio de la Matemática nos aplastará? Sucede que así como la especialización es inevitable, el desarrollo de nuevos conceptos abstractos absorben otros creados en el pasado. Estas nuevas creaciones son tan importantes como las soluciones de los problemas difíciles o desarrollos de nuevas técnicas.

¿Cómo se selecciona un problema para trabajarlo cuando se comienza a realizar investigación?

Los estudiantes de doctorado en matemática, prácticamente no pueden elegir el problema que les asignará su asesor. Generalmente es el asesor, quien a veces vislumbra la técnica adecuada, el que le pone un problema para que lo resuelva.

Algunos matemáticos que ya realizan investigación por sí solos realizan investigación sobre un tema el cual se da, a veces, por sí solo. Este surge de la comunicación con otros colegas, de la curiosidad, de meditar o de moverse por la literatura matemática adecuadamente. Lo importante es que se tenga la convicción de entender la Matemática.

¿Qué se conoce como Matemática Aplicada?

La actividad en la cual la Matemática encuentra aplicaciones fuera de su propio campo se llama Matemática Aplicada. La Matemática Aplicada es automáticamente multidisciplinaria, e ideal y probablemente debería realizarse por alguien cuyo interés primario no es la Matemática. Sin embargo encontramos que es mucho menos difícil que una persona que adquiere una formación matemática se adentre en otras disciplinas. Esta es una gran ventaja para los estudiantes y egresados de una licenciatura de Matemática.

Si la actividad multidisciplinaria es por ejemplo la Física, es difícil saber qué clasificar como Matemática Aplicada y qué como Física Teórica. La aplicación de la Matemática en áreas diferentes de ella misma da lugar a cuestiones de otra índole. Supongamos que tenemos una aplicación de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales en la teoría matemática de la elasticidad. Podríamos preguntarnos si la teoría de elasticidad tiene aplicación fuera de sí misma. Supongamos que sí la tiene en ingeniería teórica. Luego nos podríamos preguntar si ésta tiene interés en la ingeniería práctica. Supongamos que sí, y que permite realizar un análisis de puertas automotrices. Luego nos podríamos preguntar cómo afecta esto al hombre común. Supongamos que se cumple un requerimiento de ley al tener puertas adecuadas. Así podríamos rastrear la aplicación de la Matemática hasta el nivel de consumo. Podríamos continuar, ¿es útil un automóvil? ¿es útil consumir? etc.

Llamémosle “utilidad común” a la utilidad que llega hasta el hombre de la calle. (Asumimos que sabemos lo que el hombre de la calle desea). No se sugiere que el criterio de la calle sea el único para juzgar la utilidad de la matemática.

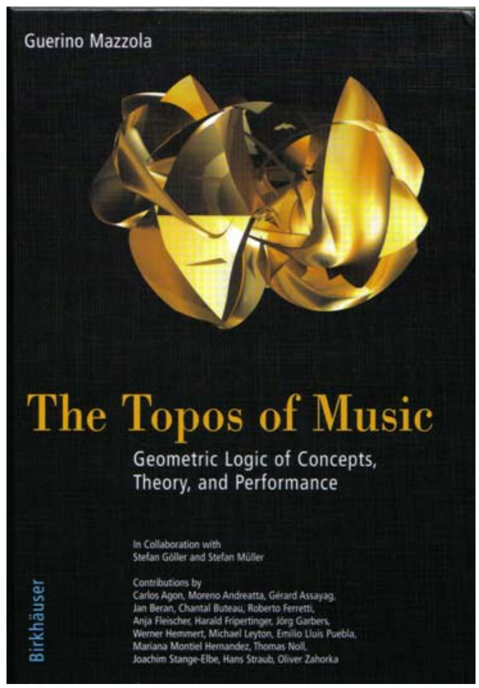
Se dice que la finalidad propia de las aplicaciones de la matemática es la de que la Matemática sea automatizada. Por ejemplo, el descenso del hombre en la luna requirió de muchos cálculos pero que estaban automatizados.

Imaginemos un diagrama [D-H] con el MUNDO FÍSICO, luego EL MUNDO MODELADO CON MATEMÁTICA, luego LAS TRANSFORMACIONES Y OPERACIONES MATEMÁTICAS y finalmente LAS APLICACIONES AL MUNDO FÍSICO.

Las dos de en medio se convierten en un proceso automatizado. Mientras más exitosa y completa sea una aplicación, más automática y programada se debe convertir.

Un ejemplo: la Teoría Matemática de la Música.

Comenzó hace más de dos décadas. Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología. Este marco posee como fundamento a campos científicos establecidos. Incluye un lenguaje formal para los objetos y relaciones musicales y musicológicas.



"The Topos of Music" [Mazz] es un libro de Guerino Mazzola del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, "The Topos of Music", posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión.

Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

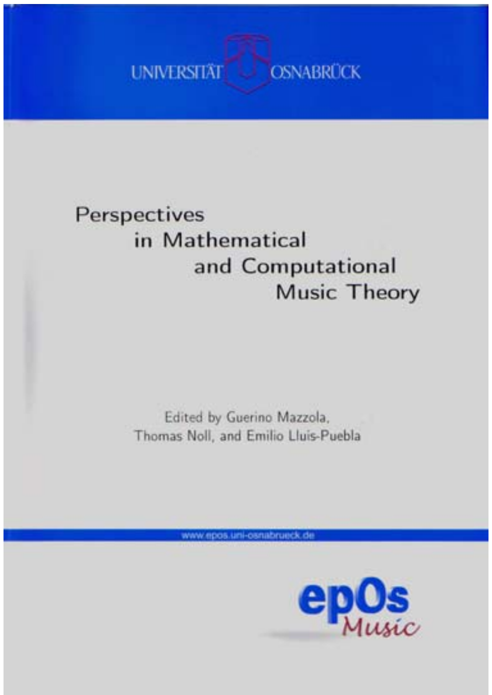
La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica, Teoría de Representaciones. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, ya en su artículo "Status Quo 2000", [M-N-LL] (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo), explicó porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de los años ochenta evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Ese nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos. Cabe mencionar algo notable: dentro de este tema se realiza matemática de alto nivel, no solamente aplicaciones, es decir, se hace matemática nueva, se prueban resultados matemáticos con los objetos definidos.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables. La Matemática provee una base científica para comprender la Música y la Musicología y para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente.

Perspectivas en la Teoría Matemática de la Música.



"Perspectivas en la Teoría Matemática y Computacional de la Música" [M-N-LL] es el libro más reciente que hemos editado. Está publicado en tres versiones (como deben de hacerse ya las publicaciones). La versión en línea, la cual es gratuita; la versión en papel y la versión en CD (éstas dos últimas obviamente tienen un costo para quien las desea así). Se puede consultar gratuitamente en

www.epos.uni-osnabrueck.de/books/m/ma_nl004/pages/.

¿Qué hay acerca de la Matemática y la Computación?

La revolución industrial se medía en siglos, la revolución de la computadora se mide en décadas o lustros y quizás años dentro de poco. En los siglos XVIII y XIX, la mano de obra fue reemplazada por las máquinas y aparentemente el siglo XX se caracterizó por el reemplazo del cerebro por la computadora. En un principio, la ciencia del cómputo creció conjuntamente con la Matemática. Turing y von Neumann son algunos de sus pioneros. Aún ahora, la Matemática es la ciencia más cercana a la del cómputo. La Lógica Matemática proporcionó una base para la computación, refiriéndonos al software. Sin embargo, es el chip de silicón el que permitió la revolución.

Los matemáticos hemos estado interesados siempre en el concepto de “demostración”, es decir, en la rigurosa deducción de varias conclusiones a partir de ciertas suposiciones. Hay que dar instrucciones precisas para que funcione un ordenador o computadora y la Lógica Matemática es el marco adecuado para formularlas.

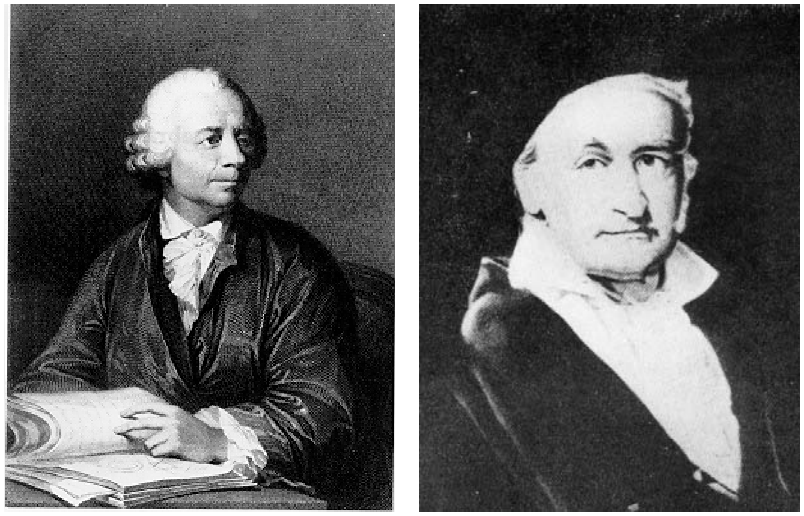
Relacionado con la idea de demostración está la de algoritmo, es decir, la de un método para hacer algo, en particular, para resolver un problema. Éstos son requeridos para que la computadora realice tal o cual cosa. Una rama de la Matemática se dedica al estudio de los algoritmos, en particular los rápidos, a saber, la Teoría de Complejidad. Así que las Teorías de las Demostraciones y Complejidad son dos tipos de matemática creadas por las necesidades del cómputo. Como las computadoras usan Z_2, están relacionadas con la Matemática Discreta ejemplificada por el Álgebra. Atiyah menciona que algunas personas argumentan por esto el que debe de modificarse drásticamente la enseñanza de la Matemática quitando el énfasis en el Cálculo que a menudo se realiza desde hace mucho tiempo.

¿Cómo ha ayudado la computadora a la investigación matemática?

La computadora proporciona una manera muy rápida de obtener soluciones numéricas a distintos problemas. En la Matemática Aplicada un problema tiene una solución satisfactoria si se puede proporcionar un algoritmo en la computadora de tal manera que se tengan disponibles las soluciones numéricas. Pero no todo son números, por ejemplo, las expresiones de lógica no representan números. Las expresiones simbólicas ya han sido consideradas en la computadora y son manipulables. Como ejemplo de esto está la determinación de todos los grupos finitos simples la cual se llevó al cabo utilizando poderosas computadoras.

¿Cuáles son las etapas para generar nuevos resultados en la Matemática y cuál es la utilidad de la computadora en ésta?

En la Matemática, hay varias etapas para generar nuevos resultados. Identificar hechos relevantes, su arreglo en patrones que poseen un significado, la posible extracción de una fórmula, el corroborar la fórmula y hasta el final la demostración. La computadora puede ser útil en las primeras etapas. Es lógico que se trate de probar que ciertas conjeturas son válidas simplemente sustituyendo valores pero cuyos cálculos resultarían demasiado largos y tediosos de realizarlos a mano. Ahora podemos hasta ver los resultados en forma gráfica en algunas ocasiones. Antes se tenían que realizar a mano, tal como los realizaron Euler o Gauss.



Leonhard Euler (1707-1783) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

¿Será la computadora un sustituto para el pensamiento humano o para la Matemática?

Atiyah comenta que sin duda, el problema más importante del siglo XXI, es el de comprender cómo funciona el pensamiento humano. Este proyecto obviamente requerirá de matemáticos, entre otros muchos especialistas de otras disciplinas científicas.

Existe una solución del famoso problema de los cuatro colores, el cual establece que es suficiente el colorear con cuatro colores cualquier mapa del planeta con la condición de que países adyacentes sean coloreados de manera diferente. Este problema data del siglo XIX y en el XX se resolvió utilizando una computadora que comprobó cientos de casos. Fue un gran triunfo pero a la vez una gran desilusión desde el punto de vista estético, además de que no se crearon nuevas técnicas a partir de la demostración. Se usó la fuerza bruta. ¿Será así en el futuro? pregunta Atiyah.

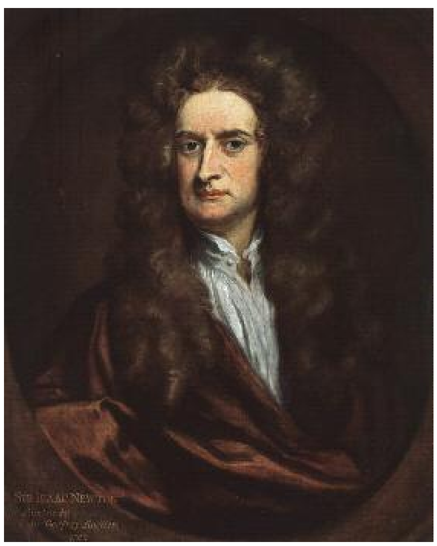
¿Cuál es la naturaleza y propósito de la Matemática y de la Ciencia?

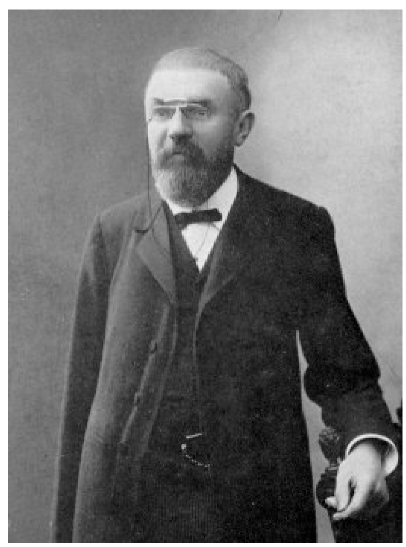
La respuesta usual es la de que el ser humano intenta comprender o entender el mundo físico y eventualmente controlarlo. Pero qué significa comprender o entender. Atiyah duda que entendamos la demostración del teorema de los 4 colores. Las demostraciones por computadora alteran el concepto de demostración publicada. Lo que sucede es que existe una diferencia fundamental entre un experimento diseñado para encontrar hechos acerca del mundo natural y cálculos de computadora que conciernen con un problema puramente matemático propuesto por el hombre. Uno es externo y el otro es interno.

Una de las características más importantes de la Matemática es su arquitectura o diseño global, esto es, la forma elegante y profunda como las ideas abstractas están colocadas. La piedra angular de la buena matemática es la economía y simplicidad del pensamiento. Aunque uno de sus objetivos es el de proporcionar soluciones explícitas, a veces de carácter numérico, los desarrollos teóricos evolucionan esencialmente para evitar largos cálculos. Ese ahorro o flojera conduce a encontrar ideas o métodos alternativos para ese fin. Las computadoras carecen de ellos. Estas ideas o métodos son los necesarios para avanzar un poco.

Dicho de otra manera, dice Atiyah, la Matemática es una (Bella, digo yo) Arte que evita la fuerza bruta, mediante el desarrollo de conceptos y técnicas que nos permiten ligereza. Se dice que si las computadoras hubieran estado en el siglo XV, la Matemática actual sería una mala imitación de sí misma. El peligro real es el de dejar la Matemática a las computadoras. Las debemos de tener simplemente como ayudantes.

Las industrias tradicionales han declinado y las relacionadas con el cómputo han crecido. Esto hace que los empleos estén ligados a las computadoras. Este tipo de empleos alteran las actitudes y expectativas de las generaciones jóvenes. La Matemática está ligada a esto y a las escuelas, universidades, maestros y alumnos. El peligro para la Matemática está en que los nuevos grandes talentos se encaminen a la computación en lugar de a la Matemática. Pero esto puede que no suceda. Los verdaderos matemáticos están motivados por la belleza y poder de la Matemática y no por el dinero. Para aquellos que creen que la computadora puede realizar todo el trabajo oprimiendo un botón, hay que decirles que tienen todavía que enseñar a los niños a pensar cuál botón oprimir.



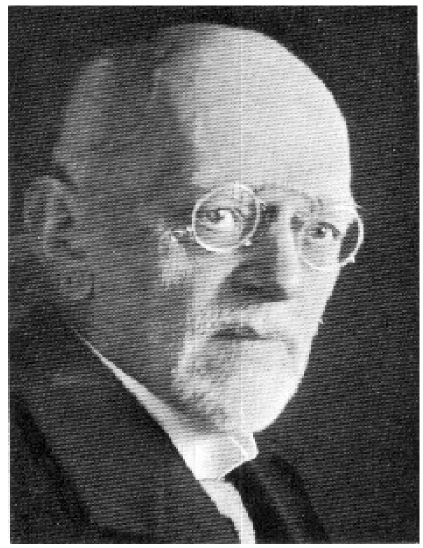


Isaac Newton (1643-1727) y Henri Poincaré (1854-1912)

¿Qué ha sucedido en la Matemática en los siglos anteriores?

Atiyah menciona que los siglos XVIII y XIX podría llamárseles los de la Matemática Clásica. Al final del siglo XIX Poincaré y

Hilbert eran las figuras dominantes, podrían considerarse discípulos de Newton y Leibniz, respectivamente.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y David Hilbert (1862-1943)

Poincaré pensaba más en términos geométricos o topológicos y Hilbert más en el lado del formalismo y axiomatización. Poincaré, quien realizó trabajo pionero en la Topología predijo que ésta sería un ingrediente importante de la Matemática del siglo XX (algunos dicen que si se tuviera que nombrar de alguna manera al siglo XX sería como el siglo de la Topología). Mientras, Hilbert propuso su famosa lista de problemas los cuales no contenían los topológicos y no pudo predecir, según Atiyah, el alcance de la Topología en el siglo XX.

La primera mitad del siglo XX la denomina la era de la especilización, donde la formalización tipo Hilbert y Bourbaki tiene lugar. La segunda mitad del siglo XX la denomina la era de la unificación, donde las áreas se traslapan y las técnicas se implementan entre ellas. Para el siglo XXI Atiyah propone llamarlo el siglo de la matemática cuántica o de la dimensión infinita, entendiendo por esto el entender adecuadamente el análisis, la geometría, la topología y el álgebra de varios espacios de funciones no lineales de tal manera que se obtengan demostraciones rigurosas de cosas hermosas que han estado especulando los físicos entre otras importantes (como la Geometría Diferencial No Conmutativa de Alain Connes).

¿Cuáles paradigmas han sucedido en la Matemática y en otras disciplinas incluyendo la Musicología?

Guerino Mazzola menciona en su libro "The Topos of Music" [Mazz] tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música.

Estos son: las estructuras globales, las simetrías y la Filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial. La Física Clásica concierne con los fenómenos locales y luego hay que estudiar el comportamiento físico en gran escala. La Física concierne realmente con adivinar el futuro cuando se va de lo local a lo global.

La segunda, las simetrías y (los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología

Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia! Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia como si éstos fueran juegos olímpicos.

¿Qué se puede decir de la Geometría y del Álgebra?

Atiyah tiene un bello punto de vista acerca de esto. Menciona que ambas son pilares de la Matemática, ambas muy antiguas. Por un lado, la Geometría se remonta a los griegos o antes y como el entender el mundo en que vivimos es una parte importante de nuestra evolución, la intuición o percepción espacial es nuestra herramienta más poderosa. La Geometría es el área poderosa de la Matemática para estudiar lo geométrico y lo no geométrico también, tratamos de poner en términos geométricos lo no geométrico. La Geometría es el espacio y se puede ver estáticamente.

Por otro lado, el Álgebra se remonta a los árabes y los hindúes y concierne fundamentalmente al tiempo. Cualquier algoritmo tiene lugar en el tiempo, lo requiere para poder llevarse al cabo. Esto se puede ver de manera obvia en una computadora.

Así, dice Atiyah, la Geometría concierne al espacio y el Álgebra concierne a la manipulación en el tiempo. Ambas son indispensables. Piensen ustedes en la Música, con sus estructuras, la cual transcurre en el tiempo y está situada en el espacio (eminentemente terrícola puesto que un violín no suena en la luna).

Para finalizar, vuelvo a expresar que la Matemática es una de las Bellas Artes, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

CAPÍTULO II

Matemática en la Música II*

Actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción, aunque ya se daba esto en la Música desde la época de Pitágoras. Después, en la Edad Media, la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. La Música no se consideraba un arte en el sentido moderno sino una ciencia aliada con la Matemática y la Física (la Acústica).

Es bastante desconocida la aplicación de conceptos matemáticos a la Musicología y en particular la Teoría Matemática de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música y cómo se hace matemática nueva con estos conceptos.

Veamos un poco acerca de lo que es la Musicología y su estado pasado y presente. Musicología es el nombre adoptado del francés "musicologie" para referirse al estudio escolástico de la Música. Del alemán "musikwissenschaft" que significa "ciencia de la Música". Hacer musicología no es fácil. La Musicología carece de un marco conceptual estable. Se dice que es muy difícil comenzar a hacer musicología y navegar sobre un marco conceptual seguro. En la musicología tradicional existe el problema estándar del

---

*Una versión posterior aumentada a ésta apareció bajo el título “Matemática en la Musicología”. Pro-Mathematica. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Volumen XVII. Número 33. (2003).

encapsulamiento. Se da un postulado encapsulado y se previene de cualquier acceso a la (presunta) complejidad escondida. En la Matemática, el acceso a la complejidad es posible y su realización eventualmente da penetración en el concepto mientras que en el encapsulamiento musicólogico los intentos apuntan al vacío, generalmente mediante el rompimiento del flujo de la información mediante un oscuro camino que pretende ser racional, ornamentado con metáforas, transformando un posible concepto profundo en un concepto misterioso, es decir, transformando ciencia en fábula. En uno de los libros de musicología tradicional más ambiciosos, los discursos de las partes importantes se basan en un listado casi infinito de referencias externas.

Afortunadamente, el cubo topográfico ofrece una herramienta compleja que puede proporcionar profundidad del tipo del que se cuenta en la Matemática. Por lo tanto, la Musicología debe de tener ante todo, libre acceso a la complejidad encapsulada: no es posible cultivar regiones del conocimiento privado e inaccesible.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer dicho marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Sin embargo, no trataremos con la realidad completa de la Música, tal y como aparece en los contextos psicológicos, fisiológicos, sociales, religiosos o políticos. Veamos a continuación las actividades fundamentales relacionadas con la Música y luego su fundamento en campos científicos de investigación establecidos.

La Música tradicionalmente descansa en una conexión fuerte entre facticidad artística y reflexión intelectual. En muchas ciencias y aún artes, tal entrelazamiento es un aspecto exótico, pero la musicología tiene que tratar con ambas haciéndola un caso muy especial. Las cuatro actividades relacionadas con la Música son: producción, recepción, documentación y comunicación. Las podemos visualizar en una figura de tetraedro y por supuesto, no es la única clasificación posible, pero son suficientemente grandes para mostrar la inmensa variedad de perspectivas cuando tratamos con la Música. Cada actividad tiene una importancia de por sí pero es cuando están juntas que son las necesarias para comprender el fenómeno musical.

Los dominios fundamentales científicos requeridos para relacionar las actividades descritas incluyen la Semiótica, la Física, la Matemática y la Psicología. Definiremos provisionalmente a la Música como un sistema de signos, compuestos de formas complejas, que pueden ser representados por sonidos físicos y que de esta manera median entre contenidos mentales y psíquicos. Así, se recurre a la Semiótica. Para describir estas formas la Matemática es el lenguaje adecuado. Para representar estas formas en el nivel físico, la Física es indispensable y para entender el contenido psíquico, la Psicología es la ciencia requerida. De ninguna forma se pretende crear un esquema reduccionista de la realidad musical, sino que se busca ubicar a la Musicología en el mismo lugar que ocupa cualquier área de investigación, sea de las Ciencias Naturales o de las Humanidades, y acabar con el aura de misticismo y la fuerte recurrencia a la subjetividad que, en lo tocante a nuestro tema, se invocan con frecuencia. Tenemos una representación mediante el tetraedro imaginario anterior para visualizar en forma sinóptica la situación general donde puede contestarse la pregunta: ¿de qué se trata la Música?

Es fundamental enfatizar que, mientras quien emplee métodos matemáticos, lógicos o computacionales en la Música no tiene que ser docto en la Filosofía de la Música, sí es necesario que tenga una orientación dentro de la compleja ontología de este arte. Tanto en la Música como en otras áreas del conocimiento se ha atestiguado cómo la precisión de la Matemática, más un conocimiento deficiente acerca de la ontología del área de aplicación, provoca un dogmatismo; injustamente, se le suele responsabilizar a la Matemática por este problema, y no cuestionar la falta de capacidad de hacer nexos de quien la aplica.

La Teoría Matemática de la Música ofrece un modelo ontológico con un carácter flexible y abierto a modificaciones. Se intenta aportar un "sistema" de coordenadas para localizar problemas dentro del proceso de hacer Musicología. Se propone desde un principio formular un sistema tridimensional que nos permita decir dónde vive el concepto de la Música, y qué se conoce como Topografía de la Música. Las coordenadas son:

1) Realidad;
2) Comunicación;
3) Semiosis.

Veamos estas coordenadas con un poco más de detalle.

1) La realidad de la Música es física, psicológica y mental. En el nivel fisico se trata de un fenómeno acústico, en tanto en su nivel mental se trata de la partitura como una abstracción. Como realidad psíquica, la Música expresa los estados emocionales de sus creadores y afecta emocionalmente al escucha.

2) La comunicación de la Música pasa por tres instancias: el nivel del creador, o lo que se conoce como la poiesis, seguido por el nivel neutral que es la obra en sí. El nivel estético del escucha es la instancia que percibe al ser interpretada una obra. Desde el momento en que una obra musical es creada, la existencia del creador es fija; en cambio, el número de escuchas e intérpretes crece constantemente.

3) Como la Música es uno de los sistema no-linguísticos más desarrollados de signos, la Semiosis juega un papel en la ubicación de su ontología. Se enfatiza que la Música no se interpreta como un tipo de lenguaje; al contrario, se señala que hay diferencias significativas entre un sistema musical y uno lingüístico. Sin embargo, se describe la Semiótica de la Música desde la perspectiva de la Semiólogía Estructuralista de Roland Barthes como una generalización de la teoría lingüística de Ferdinand de Saussure. Para no desviarnos del propósito de este esbozo, no podremos ahondar en este aspecto tan interesante. Sólo mencionaremos que un sistema es semiótico si se articula según

una estratificación fundamental de signos en su significante, significación y significado, donde el significante (los morfemas, o sea, la mínima forma significativa) llega a lo profundo del mensaje, el significado, por medio de las relaciones de la significación.

Todo lo anterior señala que una ubicación ontológica de la Música puede interpretarse como un punto en un cubo tridimensional generado por los ejes de realidad, comunicación y semiosis, cada uno, a su vez, articulado en tres valores:

realidad : física, psíquica, mental;
comunicación : creador, obra, escucha;
semiosis : significante, significación, significado

Así es, muy brevemente, como tenemos el cubo topográfico de la ontología musical, que consiste en un conjunto de $3^3=27$ posibles ubicaciones topográficas como puntos. Pero cualquier objeto general puede ubicarse en cualquier subconjunto del cubo, y los 27 puntos son sólo ubicaciones elementales, a partir las cuales se componen ontologías más complejas.

Mazzola resume contundentemente lo expuesto: "Es equivocado creer que la Música es un asunto especial de la ciencia porque se trata de objetos que apuntan a un estrato no mental de la realidad. La Psicología, por ejemplo, estudia emociones, la Física estudia partículas elementales. Todos estos objetos comparten aspectos que trascienden la conceptualización humana. Pero podemos concebirlos en un sistema cognoscitivo y modelar su comportamiento con un éxito impresionante para nuestra capacidad de comprensión. La Música no es ni más ni menos accesible que la Física. Pero tenemos que establecer un sofisticado sistema de signos para poder aprehender su significado; el lenguaje común no es la herramienta para el espacio conceptual de la Música."

A fines del 2002 apareció publicado el más reciente libro de Guerino Mazzola, del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, “The Topos of Music”, [ToM] posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica y Teoría de Representaciones, entre otras. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, en un magnífico artículo panorámico, "Towards Big Science" cita los elementos de Pierre Boulez de un programa de los años sesenta que tiene la intención de que las artes y la ciencia se reconcilien. (Yo diría que los artistas y los científicos). Con este postulado, la invocación de Boulez acerca de la "real imaginación" solamente puede ser concebida mediante la realización virtual (esencial) del sistema complejo teórico y práctico de la Música, de sus sonidos y relaciones mediante la tecnología informática de hoy.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables.

Mazzola concuerda con Boulez acerca de que "la Música no puede degenerar o reducirse a una sección de la Matemática: la Música está fundamentalmente enraizada con las realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero requerimos más métodos sofisticados además de los datos empíricos y estadísticos para describir formalmente las instancias musicales.

En los años ochenta, Mazzola observó que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utilizó la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Las cartas se llaman composiciones locales y consisten (vagamente) de subconjuntos finitos K de módulos M sobre un anillo R. Estas cartas K se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías se llaman composiciones globales. Éstos son los conceptos estudiados en lo que ahora se conoce como la Teoría Matemática Clásica de la Música.

Guerino Mazzola y Emilio Lluis

Mazzola menciona tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música. Estos son: las estructuras globales, las simetrías y la Filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial.

La segunda, las simetrías y (los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia! Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia (como si éstas fueran juegos olímpicos).

Recientemente, en su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo hace siete años), explica porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

Abro un paréntesis para mencionar un poco acerca de la Teoría de Topos. Siguiendo la inmejorable y bella introducción de Mac Lane-Moerdijk de su libro sobre Gavillas en Geometría y Lógica [M-M], el aspecto más sobresaliente de la Teoría de Topos es el de unificar dos (aparente y completamente distantes) campos de la Matemática: por un lado la Topología y la Geometría Algebraica y por otro, la Lógica y la Teoría de Conjuntos.

Un topos puede considerarse como un "espacio generalizado" y a la vez como un "universo generalizado de conjuntos". Esto surgió en 1963 independientemente, de los trabajos de Grothendieck (reformulación de la Teoría de Gavillas para Geometría Algebraica), de Lawvere (en su búsqueda por axiomatizar la categoría de conjuntos), y de Paul Cohen (en el uso del "forcing" para nuevos modelos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel).

Vagamente, una gavilla de grupos abelianos A sobre un espacio topológico X es una familia de grupos abelianos A_x, parametrizados por los puntos x en X de una manera "continua" adecuada.

Para Grothendieck, la Topología se convirtió en el estudio de (la cohomología de) gavillas, y las gavillas "situadas" en una topología de Grothendieck dada forman un topos, llamado “topos de Grothendieck”. Las categorías (1945) y los funtores adjuntos (1957) entre ellas, son el lenguaje para entender la Teoría de Topos. Una referencia para los conceptos de categoría, funtor, transformación natural y de adjunto izquierdo es nuestro libro sobre Álgebra Homológica [LL1] y [LL1a].

Las categorías, inicialmente una manera adecuada para formular sucesiones exactas, la "caza de elementos en diagramas" y la homología axiomática para la topología, adquirieron vida independiente.

En 1963 Lawvere se propuso establecer un fundamento puramente categórico de toda la Matemática, comenzando con una axiomatización apropiada de la categoría de conjuntos, reemplazando el concepto de pertenencia con el de composición de funciones.

Casi al mismo tiempo, Tierney observó que el trabajo de Grothendieck podía conducir a una axiomatización del estudio de gavillas. Después, trabajando juntos lograron una axiomatización efectiva de las categorías de gavillas de conjuntos (y en particular de la categoría de conjuntos) vía una formulación apropiada de las propiedades del tipo de los conjuntos.

Así definieron, de una manera elemental, sin suposiciones acerca de los conjuntos, el concepto de topos elemental. La definición original se transformó en una axiomatización de una hermosa y asombrosa simplicidad: un topos elemental es una categoría con límites finitos, objetos función YX (definidos como adjuntos) para cualesquiera dos conjuntos X,Y, y un objeto potencia P(X) para cada objeto X; se requieren que cumplan ciertas axiomas básicos. Invitamos al lector a adentrarse en este maravilloso tema en el libro [M-M].

Con respecto a la Interpretación, Mazzola comenta en sus artículos que, "la Música ha sido estudiada desde el punto de vista de la Estética y la Psico-Fisiológía". Trabajó en desarrollar una Teoría de la Interpretación que describe las estructuras y procesos que definen una interpretación, "aquella que sin las herramientas adecuadas, la Teoría de la Interpretación permanecerá" (y me encanta esta frase) "como una rama de la Literatura en el espíritu de la Crítica Musical". Pero con esta posibilidad de exhibir variedades algebraicas gramaticales tiene una consecuencia profunda para el problema de la clasificación de interpretaciones. Así, el criticismo comparativo se convierte en un campo preciso de investigación y no más un sector de la literatura común.

Recientemente, Mazzola produjo una clasificación de objetos musicales, esto es, "existe un esquema algebraico cuyos puntos racionales representan ciertas clases de isomorfismo de composiciones globales". "Clasificar quiere decir la tarea de comprender totalmente un objeto. Esto es el Lema de Yoneda en su completa implicación filosófica". El comprender obras de arte quiere decir, sintetizar todas sus perspectivas interpretativas.

Veamos lo que es un Denotador de una manera informal. El material que expongo a continuación es tomado del libro de G. Mazzola [Mazz] y de la Tesis de Maestría de mi alumna Mariana Montiel [M] quien desarrolló y creó algunos aspectos de esta teoría en colaboración con G. Mazzola.

Un aspecto de motivación fundamental para el desarrollo del concepto matemático llamado Denotador, es la navegación, el cual esbozo brevemente a continuación.

El conocimiento consiste en dos elementos fundamentales: información y organización mental. La información sola, sin un sistema de "coordenadas" que permita ubicarla y recogerla cuando sea necesario, no es conocimiento. Por este motivo, el paradigma de la información puramente digital, $\mathbf{Z}_2$, ({0,1}, "off" y "on", etc.) nada tiene que ver con el conocimiento. Es así que se precisa de un sistema de conceptos que provea un método completo de "navegación" y que funcione en un espacio de conceptos exhaustivo. El problema estriba en cómo realizar una arquitectura tal de conceptos sin perder rigor y confiabilidad. El Denotador pretende ser la solución a este planteamiento.

El espacio del conocimiento enciclopédico=Encicloespacio se plantea como la actualización del concepto tradicional de enciclopedia (del griego enkyklos paidea=enseñanza en círculo), originalmente desarrollado por Diderot y D'Alembert en el Siglo de las Luces. Con el advenimiento de la computadora personal, esta actualización exige un dinamismo en la estructuración de datos en el espacio-tiempo, en contraposición al contexto estático de antes, así como una relación interactiva con esta estructuración de información. Asimismo, el orden alfabético de la enciclopedia clásica, adecuada para sus volúmenes de textos, se generaliza a la orientación que impone la navegación (de "navigare" y este de "navis"=nave y "agere"=agitar, originalmente una actitud activa y no pasiva). En este sentido, el orden alfabético, adecuado para la enciclopedia de la sala, tiene que ser complementado por órdenes relacionados con presentaciones de datos que no son textos (espacios geométricos, colecciones de conjuntos, etc.).

La navegación tiene dos vertientes: navegación receptiva, más apegada a la enciclopedia clásica, en el que el enciclo-espacio no se modifica, y navegación productiva, donde hay interacción con el Encicloespacio y se agrega conocimiento al ya existente.

Hay tres características de la enciclopedia que son, realmente, principios de la tipología de formatos universales de datos: unidad, completez y discursividad. A cada uno de estos principios hay un aspecto que le corresponde al Denotador. La unidad en la creación de conceptos se realiza por medio de construcciones recursivas; la completez se logra por la ramificación extensiva de estas construcciones y la discursividad se tiene por la libre construcción y recombinación de denotadores. En contraposición a los sistemas comunes de bases de datos, en el trabajo con denotadores no hay ningún conjunto fijo de posibles construcciones.

El concepto llamado “Denotador” permite describir los objetos musicales. Los Denotadores están concebidos de acuerdo con los criterios de navegación en el Encicloespacio y por lo tanto se usa la metodología de navegación, incluyendo la navegación matemática. La fundamentación filosófica de este concepto así como su formalización está fuera de los alcances de este artículo invitando al lector a leer el libro de Mazzola.

Existe la Teoría Enumerativa la cual es un acercamiento cuantitativo a la clasificación de composiciones locales vía acciones de grupos de permutaciones. El trabajo principal en esta área es de Harald Fripertinger. Esta teoría trata de contar las órbitas de acciones de grupos finitos en conjuntos finitos. Estos conjuntos representan objetos particulares especiales, es decir, acordes, particiones de conjuntos de clase de notas o de altura, motivos, sucesiones de 12 notas etc. Los grupos consisten de transformaciones musicales interesantes tales como la transposición y la inversión.

Harald Fripertinger y Emilio Lluis

Se tiene un teorema de H. Fripertinger donde muestra en particular las clases de 72-elementos 2 230 741 522 540 743 033 415 296 821 609 381 912 = 2.23.…$(10)^{36}$ lo cual indica que todavía hay motivos para ser introducidos en la composición musical.

La música pertenece a los humanos y no aparece ya como una revelación de las divinidades de cualquier sabor. También, esta renovación se debe al inmenso arsenal de información y tecnología comunicativa donde la información se convierte en algo muy accesible y la carencia de precisión es de inmediato señalada. Esta situación da lugar a una nueva y fundamental manera de entender el conocimiento humano.

El conocimiento está actualizándose y extendiéndose constantemente y en el cual navegamos y experimentamos con un espíritu de espacio-tiempo dinámico. Ahora tenemos nuevos paradigmas en Musicología. Recordemos el experimento de Galileo acerca de la velocidad instantánea. Su acercamiento fue esencialmente bajo observación y medición y no en reflexiones abstractas especulativas. Su punto clave fue el de pasar del encapsulado especulativo de Oresme y los científicos medievales a accesibilidad "haciendo ciencia" con el método operacional: pensar haciendo. Este episodio tiene un análogo musicológico: velocidad en física con tiempo musical solamente que 500 años después.

Esto coloca a la Física y la Musicología en forma paralela donde hoy, músicos activos y matemáticos entre otros, están al borde de lo explícito dejando las especulaciones irrelevantes donde corresponde. Se están dejando atrás las últimas retóricas vacías. La revolución de Galileo fue la respuesta a la supuesta profundidad del discurso retórico.

Si consideramos los universos creados por el hombre tales como la Matemática y la Música podremos ver que el universo interno de ellas no es menos complicado e incontrolable que la naturaleza externa. Una pieza de naturaleza incontrolable, dada su riqueza de creación tal como la increíble complejidad a partir de un germen que implica procesos combinatorios, estrategias de interpretación, estratificación semiótica, etc. como el Arte de la Fuga de Bach, no es fundamentalmente diferente de una supernova en el espacio interestelar. Estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años. ¡Es un momento maravilloso!

CAPÍTULO III

Matemática en la Naturaleza

En los últimos años, un amplio rango de estructuras complejas de interés para los científicos, ingenieros y médicos ha sido caracterizado cualitativamente usando la idea de una *dimensión fractal*: una dimensión que corresponde de una manera única a la forma geométrica que se estudia, y que con frecuencia no es un entero.

La clave para este progreso es el reconocimiento de que muchas estructuras aleatorias obedecen tanto a una simetría como a un encogimiento dados por estructuras regulares. Esta "simetría a escala" tiene la implicación de que los objetos parecen el mismo en muchas escalas de observación diferentes.

Los no especialistas también están algo familiarizados con los objetos fractales. Todos hemos visto objetos fractales, probablemente en la niñez. Quizá hayamos visto los cristales de la nieve que tienen el mismo patrón, o quizás hayamos observado con detenimiento algunos árboles y hayamos visto que cada rama es similar a todo el árbol. De hecho para "ver" cualquier cosa —fractal o no— requerimos que las células nerviosas en la retina del ojo envíen una señal, y estas células nerviosas de la retina son objetos fractales.

Muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que exhiben muchos niveles de complejidad vistos con la geometría usual, a la cual de ahora en adelante llamaremos Euclidiana.

La existencia de estos patrones nos reta a estudiar esas formas que con la geometría usual parecen ser sin forma, es decir a investigar la morfología de lo "amorfo".

Respondiendo a este reto Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría de la naturaleza e implementó su uso en diversos campos. Esta geometría describe muchos de los patrones irregulares y fragmentados que nos rodean, y nos llevan a nuevas teorías, identificando una familia de formas que les llamó *fractales*. Los fractales más útiles involucran una probabilidad estadística tanto de sus regularidades como irregularidades. También las formas descritas aquí pueden escalarse (es decir, amplificarse o reducirse), implicando que el grado de sus irregularidades y/o fragmentación es el mismo en todas las escalas.

Un fractal es una forma geométrica que es compleja y detallada en estructura en cualquier nivel de amplificación. Con frecuencia los fractales son autosimilares, es decir, tienen la propiedad de que cada porción pequeña del fractal puede verse como una réplica reducida del entero.

El nombre de fractal lo tomó Mandelbrot del adjetivo en latín "*fractus*", que proviene del verbo "*frangere*" que significa romper, crear fragmentos irregulares, por lo que este nombre es apropiado para nuestras necesidades, ya que, además de fragmentar (como en las palabras fracción o refracción) "fractus" también significa irregular.

Algunos objetos fractales son curvas o superficies, otros son polvos disconexos, y aún otros son cuerpos de formas horribles que no están en buenos términos ni con las ciencias ni con las artes.

Muchas de estas ilustraciones son de formas que nunca se habían considerado, pero otras representan construcciones conocidas con anterioridad.

Mientras que la geometría fractal se inició en 1975, muchas de sus herramientas y conceptos se habían desarrollado con anterioridad por diversas razones diferentes a las de Mandelbrot.

"Fractal" es una palabra en la cual está subyacente una inmensa clase de objetos, que han jugado un papel histórico en el desarrollo de las matemáticas puras. Una gran revolución de ideas separa a las matemáticas del siglo XIX de las matemáticas modernas del siglo XX. La matemática clásica tiene sus raíces en las estructuras geométricas (de Euclides) regulares y la dinámica continua de Newton. Las matemáticas modernas empiezan con la Teoría de Conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el espacio. Históricamente la revolución fue forzada por el descubrimiento de estructuras que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas estructuras fueron pensadas como "patológicas", como una galería de monstruos, emparentadas con la pintura cubista y la música atonal que fueron las bases para establecer estándares de gusto en las artes al mismo tiempo. Los matemáticos que crearon a esos monstruos son recordados como importantes ya que mostraron al mundo que las matemáticas puras contienen una riqueza de posibilidades que va más allá de las estructuras simples que veían en la naturaleza. Las matemáticas del siglo XX florecieron en la creencia de que habían trascendido completamente las limitaciones impuestas por sus orígenes naturales.

La naturaleza le ha jugado una broma a los matemáticos. Los matemáticos del siglo XIX pudieron haber tenido mucha imaginación, pero la naturaleza tiene más. Las mismas estructuras patológicas que los matemáticos inventaron para romper la pérdida del naturalismo del siglo XIX se convirtieron en objetos familiares alrededor de nosotros. Así, hemos confirmado la observación de Blaise Pascal, que establece que la imaginación es rebasada por la naturaleza.

La geometría fractal no es una aplicación directa de las matemáticas del siglo XX. Es una nueva rama que nació con la crisis que surgió en 1875 cuando duBois Reymond reportó que Weirstrass había construido una función continua no diferenciable, la crisis duró aproximadamente hasta 1925, teniendo como actores principales a Cantor, Peano, Lebesgue y Hausdorff. Estos nombres al igual que Besicovitch, Bolzano, Cesàro, Koch, Osgood, Sierpinski y Urysohn, no se encuentran en el estudio empírico de la naturaleza, pero el trabajo de estos gigantes ha trascendido.

En 1872 Weierstrass estableció la existencia de curvas continuas sin tangente. Él hizo la función $\boldsymbol{y} = \sum \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \cos \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x}$ donde $0 < \boldsymbol{a} < 1$, **b** es un entero impar y $\boldsymbol{ab} > 1 + \frac{3}{2}\pi(1 - \boldsymbol{a})$. La última condición se debe a Bromwich. Después de la de Weierstrass, otras funciones continuas sin derivada o cuya derivada existe raramente fueron construidas. Por ejemplo, Hardy quién produjo un análisis profundo de la función de Weierstrass mostró que la función de Riemann $\sum \frac{1}{\boldsymbol{n}^2} \boldsymbol{sen}\, \boldsymbol{n}^2 \pi \boldsymbol{x}$ no admite derivadas para cada valor irracional de **x**.

La conmoción que provocaron las funciones sin derivada llevó a Hermite para escribir esto en su carta del 20 de mayo de 1893 a Stieltjies: “me alejo con miedo y horror de esta plaga miserable de las funciones continuas que no tienen derivadas...” Un pequeño reproche comparado con la reacción de Poincaré acerca de estos asuntos: “Cuando uno inventaba una nueva función, estaba en vista de alguna meta conveniente; ahora se inventan intencionalmente para poner los defectos de los razonamientos de nuestros padres”. Poincaré dice una verdad, pero no dice toda la verdad. Poincaré nos pregunta sobre la utilidad de las funciones derivables en ningún punto. La mejor respuesta a esta pregunta es mirar la naturaleza muy atentamente.

Ahora se sabe que el movimiento browniano es el movimiento de partículas en suspensión observada por Brown en 1827, está limitado íntimamente a la ecuación del calor, a los procesos de difusión y los movimientos desorganizados de gases. Desde el principio del siglo XX, después del famoso artículo de Einstein de

1905, Annalen der Physik, se han convencido los físicos de la irregularidad muy grande de trayectorias de partículas pequeñas en el momento de una difusión. Detengámonos a mirar una simulación del movimiento browniano para notar este fenómeno. La simulación se ha reproducido después de **100000** observaciones separadas por $\mathbf{10^{-5}}$ segundos.

En 1933, Paley, Wiener y Zygmund les dieron razón completamente a estos físicos: sobre la trayectoria de un movimiento browniano, $B(t)$, no es derivable en cada uno de sus puntos. Después de esto, Lévy expuso la geometría irregular de las trayectorias de un movimiento browniano en la recta o el plano. De nuevo hoy el estudio local de movimiento browniano es un objeto de estudio.

En las décadas que siguieron el descubrimiento de Weierstrass, algunos curvas notables se han imaginado. Lo que estas tienen en común, es que desafían la intuición y no admiten una tangente para la mayoría de sus puntos. Así es cómo Peano (1890) se propuso llenar el interior de un cuadrado por el trazado de sólo una curva continua, fue toda una sorpresa. Hilbert (1891), Sierpinski (1912) lograron el objetivo de Peano. Después de la paradoja de Peano, Osgood tuvo éxito al crear una curva simple continua del plano cuya medida plana es positiva. Sierpinski tenía una imaginación fecunda y concibió dos curvas; una es una curva en la que todos sus puntos son de ramificación, la otra es capaz aceptar la imagen homeomorfa de cualquier parte compacta del plano cuyo interior sea vacío. Si estas dos curvas son un tipo inusual, todas las otras curvas de las que nosotros discutiremos serán algunas curvas paramétricas continuas.

Presentamos ahora un modelo de construcción de una curva sin tangentes. Primero describiremos lo que es una transformación elemental de Koch. Sean L_0 una línea poligonal formada por $m+1$ puntos del plano P_0, P_1, …, P_m, un entero d y T_1, T_2, …, T_d transformaciones lineales, que tienen la propiedad que su suma da el operador-identidad I. Construyamos entonces la línea poligonal

$\boldsymbol{L_1}$ formada de $\boldsymbol{md}+1$ vértices $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{Q_1}$, ..., $\boldsymbol{Q_{md}}$ donde $\boldsymbol{Q}_{id+j} = \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{S}_j(\boldsymbol{P}_{i+1} - \boldsymbol{P}_i)$, $\mathbf{0} \le \boldsymbol{i} < \boldsymbol{m}$, $\mathbf{0} \le \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{d}$ considerando que $\boldsymbol{S}_0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{S}_j = \sum_{k=1}^{j} \boldsymbol{T}_k$. Todos los vértices de $\boldsymbol{L_0}$ son vértices de $\boldsymbol{L_1}$ y cada uno de lados de $\boldsymbol{L_0}$ ha sido reemplazado por $\boldsymbol{d}$ lados.

Uno puede repetir la transformación elemental de Koch con $\boldsymbol{d}$ y los mismos operadores lineales $\boldsymbol{T_i}$ para conseguir $\boldsymbol{L_2}$ a partir de la línea $\boldsymbol{L_1}$ y después para conseguir $\boldsymbol{L_3}$, $\boldsymbol{L_4}$, etc. Cuando $\boldsymbol{k}$ aumenta, los vértices de $\boldsymbol{L_k}$ están en expansión. Produzcamos la parametrización de la porción de la curva que se extiende de $\boldsymbol{P}_r$ a $\boldsymbol{P}_{r+1}$.

$$(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{P}_r + \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{S}_j(\boldsymbol{T}_{i+1}(\boldsymbol{V})) + \boldsymbol{S}_k\left((\boldsymbol{T}_{j+1}(\boldsymbol{T}_{i+1}(\boldsymbol{V}))\right) + \cdots$$

donde $\boldsymbol{t}$ es un número real y $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}_{r+1} - \boldsymbol{P}_r$.

Diremos que hemos construido una curva de Koch de grado $\boldsymbol{d}$. En general, tiene esta propiedad notable de no admitir una tangente en todos sus vértices. Veamos que este modelo incluye varias construcciones conocidas. La curva que Peano propuso, en 1890, se inicia con la diagonal del cuadrado unitario, $\boldsymbol{L}_0 = (\mathbf{0,0}),(\mathbf{1,1})$ y con la ayuda de 9 operadores lineales: $\boldsymbol{I}/3$, $\boldsymbol{R}/3$, $\boldsymbol{I}/3$, $-\boldsymbol{R}/3$, $-\boldsymbol{I}/3$, $-\boldsymbol{R}/3$, $\boldsymbol{I}/3$, $\boldsymbol{R}/3$ *e* $\boldsymbol{I}/3$ donde $\boldsymbol{R}$ es la rotación de 90 grados e $\boldsymbol{I}$ es la identidad. Está curva es de grado 9.

Por otro lado, Koch en 1904 propuso una construcción geométrica que se forma con 4 operadores lineales que dependen de un parámetro $\boldsymbol{u}$, $1/4 < \boldsymbol{u} < 1$. Estos operadores son: $\boldsymbol{K}_1{}^{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{uI}$,

$$\boldsymbol{K}_2{}^{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \boldsymbol{u} & \sqrt{\boldsymbol{u} - \frac{1}{4}} \\ -\sqrt{\boldsymbol{u} - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_3{}^{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \boldsymbol{u} & -\sqrt{\boldsymbol{u} - \frac{1}{4}} \\ \sqrt{\boldsymbol{u} - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$\boldsymbol{K}_4{}^{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{uI}$. La curva de Koch parte de $\boldsymbol{L}_0$, el segmento de recta que une a $(0,0)$ con $(1,0)$, y se obtienen sucesivamente las transformaciones elementales de Koch con la ayuda de los operadores lineales $\boldsymbol{K}_1{}^{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{K}_2{}^{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{K}_3{}^{\boldsymbol{u}}$ y $\boldsymbol{K}_4{}^{\boldsymbol{u}}$. Si $1/4 < \boldsymbol{u} < 1/2$, la curva límite es una curva simple que no tiene tangentes.

Si $\boldsymbol{L_0}$ está formado por los tres lados de un triángulo equilátero orientado negativamente y si uno guarda el valor $\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}$, la curva final es una curva simple cerrada con la apariencia de un copo de nieve. Si $\boldsymbol{L_0}$ es el segmento unitario del eje de abscisas y si $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}$, la curva de Koch es entonces una curva continua que llena el triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es precisamente $\boldsymbol{L_0}$.

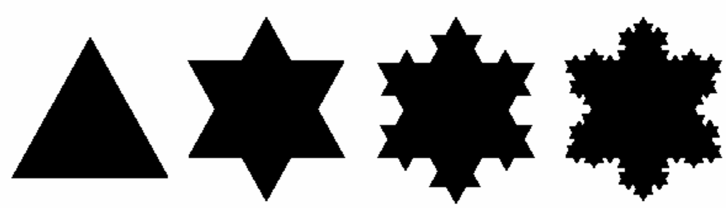
Uno puede modificar la construcción de Koch para conseguir una curva de Osgood que es muy explícito. $\boldsymbol{L_0}$ es un segmento unitario del eje de abscisas. Uno obtiene $\boldsymbol{u_n} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}+2}$. Por recurrencia sobre **n**, se construye la línea poligonal $\boldsymbol{L_n}$ por medio de una transformación elemental de Koch a partir de $\boldsymbol{L_{n-1}}$ y de los cuatro operadores lineales $\boldsymbol{k}_1{}^{\boldsymbol{u_n}}$, $\boldsymbol{k}_2{}^{\boldsymbol{u_n}}$, $\boldsymbol{k}_3{}^{\boldsymbol{u_n}}$ y $\boldsymbol{k}_4{}^{\boldsymbol{u_n}}$. La curva-límite es una curva simple cuya área es $\frac{1}{4}\left(\prod_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} 2\boldsymbol{u_n}\right)^2 = 0.083\cdots$. En la literatura, uno encuentra pocos ejemplos explícitos de curvas de Osgood. Uno de estos ejemplos se debe a Schreiber en 1968. Algunos que los ejemplos menos explícitos son proporcionados por Gelbaum y Olmsted.

¿El tema de curvas sin tangentes es una pura fantasía matemática? Yo diría que no, porque las curvas sin tangentes se presentan espontáneamente en ciertas investigaciones. A esta consideración, Poincaré fue precursor en el estudio de los grupos de Klein y allí observó la presencia de curvas sin tangentes, esto en 1884. De la misma manera, Fatou y Julia en sus trabajos sobre la iteración de funciones racionales establecieron que los dominios invariantes del plano complejo para una función racional admiten en la mayoría de casos una frontera salvaje.

Después de algunas décadas, las curvas sin tangentes forman parte de un grupo más grande de objetos, objetos fractales donde la dimensión fraccionaria de Hausdorff se entiende entre uno y dos en el plano y entre uno y tres en el espacio. Científicos de disciplinas variadas llevaron su atención en las aplicaciones potenciales de los objetos fractales, para la textura de materiales, para la estructura de materia, para la forma de proteínas o litorales, para la geometría de turbulencias, en el estudio del pulmón, en el análisis de ruidos o imágenes, en medidas en geografía o al microscopio,...

Además la geometría fractal revela que algunos de los capítulos más austeros de la matemática tienen una cara escondida: un mundo de belleza plástica insospechada hasta ahora.

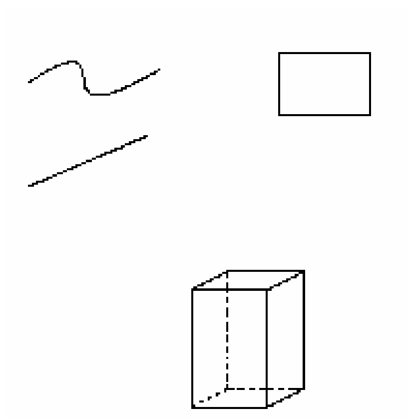
Los conjuntos fractales se definen de una manera rigurosa (como todo en matemáticas), pero la expresión "*fractal natural*" designará un patrón natural que usualmente representaremos con un conjunto fractal. Por ejemplo, las curvas Brownianas son conjuntos fractales, y el movimiento browniano (en física) es un fractal natural.



Construcción del copo de nieve

Un ejemplo de un fractal es el copo de nieve construido tomando un triángulo equilátero y erigiendo triángulos equiláteros más pequeños en el tercio de en medio de los lados de manera progresiva. Teóricamente, el resultado debe ser una figura de área finita pero con perímetro de longitud infinita, el cual consiste de un número infinito de vértices. En términos matemáticos, esta curva (el perímetro de la figura) no puede ser diferenciable en cualquiera de sus puntos. Es decir, de manera intuitiva que la curva no es suave.

En geometría utilizamos la palabra *dimensión* para decir cuántos parámetros necesitamos para medir un objeto. Así, para medir una curva, sólo necesitamos un parámetro, que es la longitud; para medir un área necesitamos dos parámetros (largo y ancho, o radio y ángulo); para medir un volumen necesitamos tres parámetros (largo, ancho y alto).

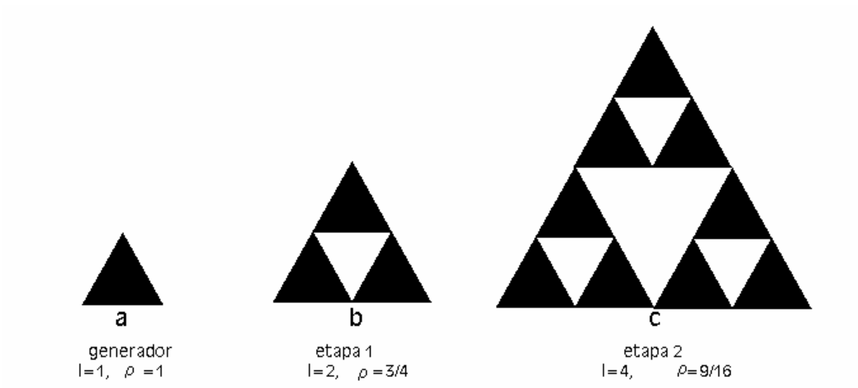


Una curva tiene dimensión euclidiana 1, mientras que una superficie y un cuerpo con volumen tienen dimensión euclidiana 2 y 3 respectivamente.

Mandelbrot adoptó una definición más abstracta de dimensión que la usada en geometría Euclidiana, diciendo que la dimensión de un fractal debe usarse como un exponente cuando se mide su tamaño. El resultado es que un fractal no puede considerarse que tiene dimensión uno, dos o cualquier otro número entero, sino un número fraccionario. El fractal de la curva del copo de nieve tiene una dimensión de 1.2618. El concepto de dimensión fractal juega un papel importante en las investigaciones sobre fractales.

La geometría fractal no es sólo un desarrollo abstracto. La línea costera, si se mide hasta su más pequeña irregularidad, podría tender a una longitud infinita al igual que el copo de nieve. Mandelbrot ha sugerido que montañas, nubes, agregados, conglomerados de galaxias y otros fenómenos naturales son también fractales en la naturaleza, y la aplicación de la geometría fractal en las ciencias se ha vuelto un campo de investigación en expansión. Además la belleza de los fractales los ha convertido en un elemento clave en las gráficas por computadora. Los fractales también han sido utilizados para comprimir imágenes en computadora tanto fijas como de video. En 1987 Michael F. Barnsley descubrió la transformada fractal la cual detecta automáticamente códigos fractales de imágenes del mundo real (fotografías digitalizadas). Este descubrimiento es el que llevó a la compresión de imágenes fractales, usadas en gran variedad de aplicaciones de multimedia y otras aplicaciones basadas en imágenes de computadora.

Los fractales pueden ser de dos categorías, aleatorios y no aleatorios. Los fractales en Física son aleatorios, pero es instructivo primero entender algunos ejemplos de fractales no aleatorios que han sido muy estudiados.



Construcción del triángulo de Sierpinski.

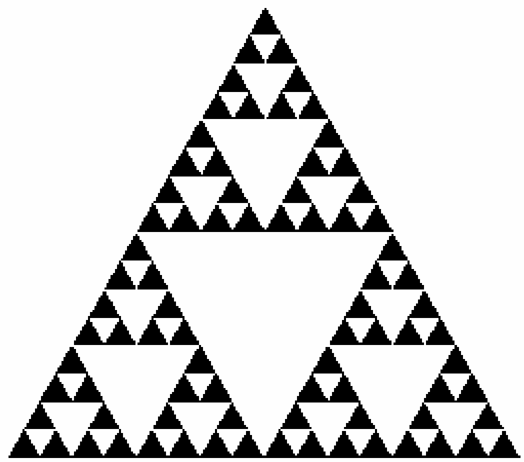
Empezaremos con el triángulo de Sierpinski. Simplemente iteraremos (repetiremos) una *regla de crecimiento*, al igual que un niño puede armar un castillo con bloques. Nuestra unidad básica es una figura triangular como la de la figura 1, la cual tomaremos como unidad de masa $\boldsymbol{M} = 1$ y longitud de los lados $\boldsymbol{L} = 1$.

El triángulo de Sierpinski está definido operacionalmente como un "proceso de agregación" obtenido por un sencillo proceso iterativo. En la etapa uno, unimos bloques para crear la figura 1b la cual es de masa $\boldsymbol{M} = 3$ y la longitud de los lados es $\boldsymbol{L} = 2$. El efecto de la etapa uno es producir una unidad con densidad menor. Si definimos la densidad como

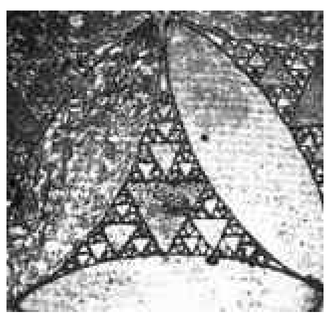
$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{L}) = \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{L})}{\boldsymbol{L}^2} \tag{1}$$

entonces la densidad disminuye de 1 a 3/4 como resultado de la etapa uno. Ahora simplemente iteramos - es decir, repetimos esta regla una y otra vez ad infinitum. Así en la etapa dos ponemos juntos tres de las estructuras de densidad 3/4 construidas en la etapa uno, por lo que hemos construido un objeto con densidad $\boldsymbol{d}(3/4)^2$ En la etapa 3, unimos tres objetos construidos en la etapa dos. Continuamos así hasta que se acaben los bloques (si es físico) o hasta que la estructura sea infinita (si es matemático).

El resultado de la etapa cuatro —con 81 bloques negros y 27+36+48+64 bloques blancos— puede verse en los mosaicos del piso de la iglesia en Anagni, Italia, la cual fue construida en el año 1104. Aunque a este fractal le dio nombre en el siglo XX el matemático polaco Sierpinski, fue conocido ocho siglos antes por todo aquel que iba a la iglesia de esa localidad.



Etapa 4 de la construcción del triángulo de Sierpinski, esta figura puede verse en el piso de la iglesia de Anagni.

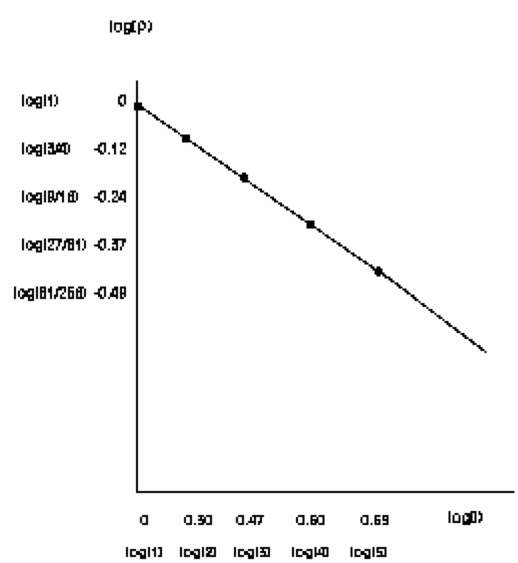


Fotografía del piso de la iglesia de Anagni.

Los habitantes de Anagni no tenían papel logarítmico para graficar en el siglo XII. Si ellos hubieran tenido tal invento, entonces podrían haber graficado la dependencia de ***d*** en ***L***. Podrían haber encontrado que:

- decrece monótonamente con ***L***, sin límite, así que iterando el número suficiente de veces podemos obtener un objeto de densidad tan pequeña como lo deseemos, y

- decrece respecto a $\boldsymbol{L}$ de una manera predecible, decrece como una función de potencias.



Gráfica de log L contra log M(L)

La funciones de potencias tienen la forma genérica $\boldsymbol{y = Ax^b}$ y, como tal tiene dos parámetros, la amplitud $\boldsymbol{A}$ y el exponente $\boldsymbol{b}$. La amplitud no es de interés intrínseco, porque depende de la elección que hayamos hecho de las definiciones de $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{L}$. El exponente, por otro lado depende del proceso mismo, —es decir, de la regla que hemos seguido para iterar—. Diferentes reglas nos llevan a diferentes exponentes. En este ejemplo, $\boldsymbol{d(L) = L^b}$, así que la amplitud es unitaria. El exponente está dado por la pendiente de la recta de la gráfica anterior,

$$
\begin{aligned}
b &= \textbf{\textit{pendiente}} \\
&= \frac{(\log 1 - \log(3/4))}{\log 1 - \log 2} \qquad (2) \\
&= \frac{\log 3}{\log 2} + 2
\end{aligned}
$$

Finalmente estamos listos para definir la dimensión fractal $\boldsymbol{d_f}$, por medio de la ecuación

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{d_f}} \qquad (3)$$

Si sustituimos (3) en (1), obtenemos

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{d_f}-2} \qquad (4)$$

comparando (2) y (4), concluimos que el triángulo de Sierpinski es un objeto fractal con dimensión

$$\boldsymbol{d_f} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58 \qquad (5)$$

En la geometría clásica (Euclidiana) las formas regulares tienen una dimensión al igual que los espacios donde las incluimos. Por ejemplo: una línea tiene $\boldsymbol{d} = 1$ y un cuadrado $\boldsymbol{d} = 2$. Diremos que el triángulo de Sierpinski tiene una dimensión intermedia entre las dimensiones de una línea y de un área —una dimensión "fraccionaria"— de ahí el término *fractal*.

Los sistemas reales en la naturaleza no se ensamblan como el piso de la iglesia de Anagni, de hecho, los fractales no aleatorios no se encuentran en la naturaleza. La naturaleza exhibe numerosos ejemplos de objetos que no son fractales, pero si hacemos un promedio estadístico de alguna propiedad tal como la densidad, encontramos una cantidad que disminuye linealmente con la longitud de la escala cuando graficamos en un papel logarítmico. A tales objetos los denominamos *fractales aleatorios*, para distinguirlos de los fractales geométricos no aleatorios como el ejemplo de la anterior.

Los métodos probabilísticos y estadísticos constituyen una base sólida para el análisis de los sistemas naturales, sin embargo estos métodos no sirven para caracterizar el patrón de heterogeneidad de un sistema natural. La geometría fractal promete ser la herramienta necesaria para resolver este problema además de proporcionar información acerca de los procesos que originaron la heterogeneidad de un sistema dado.

Otra ventaja del uso de los parámetros fractales para la descripción de la heterogeneidad de los sistemas naturales, consiste en la posibilidad de describir no sólo las propiedades geométricas estáticas de las estructuras fractales, sino también sus propiedades dinámicas y sus interacciones con el medio exterior.

Para terminar, a continuación presentamos algunos conjuntos y sus dimensiones fractal **D** y topológica $\mathbf{D_T}$.

Conjunto	**D**	$\mathbf{D_T}$
Un punto	0	0
Un número finito de puntos	0	0
Un conjunto numerable	0	0
Una línea recta	1	1
Un círculo	1	1
Una curva regular	1	1
Un disco en el plano	2	2
Una superficie regular	2	2
Curva de Peano	2	2
Escalera del diablo de Cantor	1	1
Conjunto Ternario de Cantor	log2/log3	0
Curva de Koch (copo de nieve)	log4/log3	1
Triángulo de Sierpinski	log3/log2	1
Membranas pulmonares	2.90	2

Como nos imaginábamos, los primeros ocho conjuntos de la lista no son fractales. Para nuestra sorpresa la curva de Peano y la escalera del diablo de Cantor no son fractales y los últimos ejemplos sí son fractales.

CAPÍTULO IV

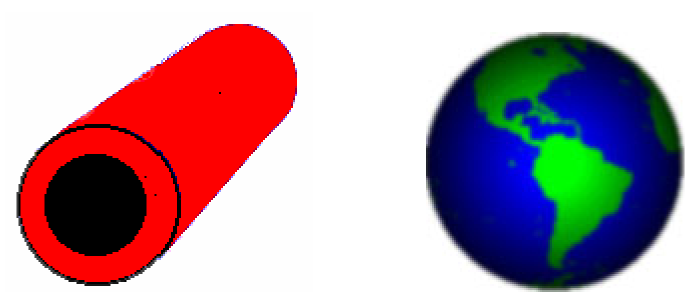
Matemática en Nuestro Cuerpo

Introducción

Los fractales son estructuras geométricas que se pueden usar para analizar muchas estructuras biológicas que no son compatibles con análisis convencionales. El propósito de este capítulo es exhibir el análisis fractal y mostrar cómo se puede aplicar al análisis del hueso trabecular, a la estructura del árbol bronquial y al análisis de las arritmias cardiacas.

Modelos simples de estructuras biológicas se pueden construir con formas simples tales como rectas, círculos, esferas y polígonos simples. Podemos estimar propiedades de la estructura, tales como longitud, área, volumen, dureza, etc.

Una sección de un vaso sanguíneo puede ser modelada como un cilindro mientras que la Tierra puede modelarse como una esfera.



Una sección de un vaso sanguíneo puede ser modelada como un cilindro mientras que la Tierra puede modelarse como una esfera.

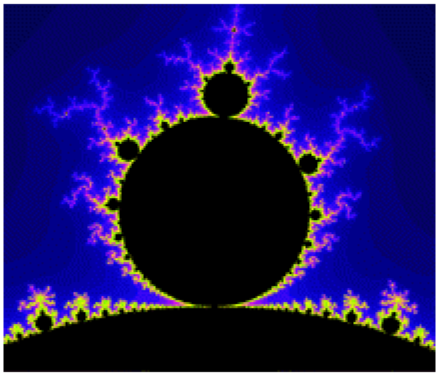
Pero existen muchas estructuras biológicas que no pueden modelarse con formas simples. Uno de los patrones más comunes es la estructura ramificada que aparece en muchas estructuras biológicas. Las estructuras ramificadas en el cuerpo humano incluyen las arterias, venas, nervios, el Haz de His, los ductos de la glándula parótida y el árbol bronquial entre otros.

Las estructuras ramificadas como el sistema circulatorio no pueden modelarse con formas simples.

Otros Procesos Fractales en la Naturaleza

- Distribución Regional del flujo sanguíneo pulmonar
- Estructura Pulmonar alveolar
- Patrón del parénquima mamográfico como un riesgo de cáncer mamario
- Heterogeneidad del flujo sanguíneo en la región del miocardio
- Superficies fractales de las proteínas
- Distribución de las longitudes corporales de los artrópodos

Una de las propiedades más interesantes de los fractales es la autosimilaridad. El conjunto de Mandelbrot es un buen ejemplo de esto. La figura completa se ve repetida en escalas más pequeñas en algunas partes. Un objeto fractal como éste exhibe esta autosimilaridad en muchas escalas de observación, desde el objeto completo hasta niveles microscópicos (infinitesimales).



El conjunto de Mandelbrot presenta autosimilaridad, es decir, la figura se ve repetida en escalas más pequeñas.

Otra propiedad de los objetos fractales es la falta de una escala bien definida. Un ejemplo de esto lo podemos ver en la imagen de abajo o en las nubes, las cuales tienden a verse muy similares sin importar su tamaño. Otra manera de decir esto, es que, es difícil decir qué tan grande es el objeto sin una referencia externa.

No podemos decir de qué tamaño es este objeto fractal, pues no tenemos referencias externas.

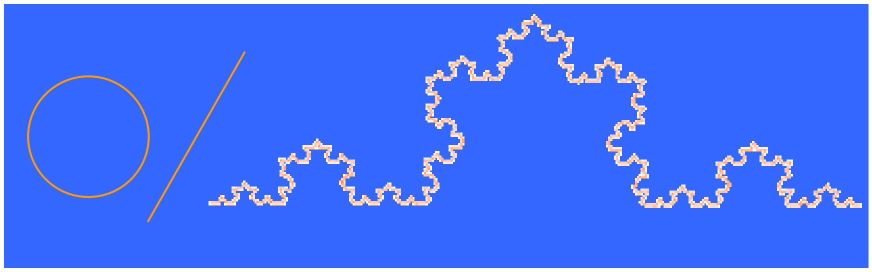
Mostrar que existe una geometría fractal en órganos y organismos vivos es de gran relevancia en las ciencias biomédicas pues permite explicar y proponer nuevas causas y consecuencias que relacionan la estructura y su función. Entre éstas se encuentran la relación de la geometría y la salud, su relación con las leyes alométricas o la dualidad del tiempo intrínseco en el que pueden reconocerse un tiempo Euclideo asociado a la velocidad constante de transporte en estructuras cilíndricas y un tiempo fractal característico de los órganos con estructuras ramificadas autosimilares.

Las propiedades geométricas pueden ser factores limitantes del desarrollo y función de órganos y organismos y pueden ser determinantes en las diferencias entre organismos. West señala a la geometría fractal de las vías de conducción y superficies de intercambio como uno de los tres factores unificadores de las leyes alométricas.

Dimensión fractal

La mayoría de la gente está familiarizada con las tres dimensiones espaciales en que vivimos (largo, ancho y profundo). Estas dimensiones son conocidas como dimensiones topológicas euclidianas y han sido usadas por muchos años para describir la forma y posición de los objetos. Sin embargo Mandelbrot encontró que ciertos objetos geométricos no podían ser descritos con las dimensiones topológicas euclidianas usuales, y formuló la idea de una dimensión fraccionaria o fractal existente entre las dimensiones topológicas euclidianas.

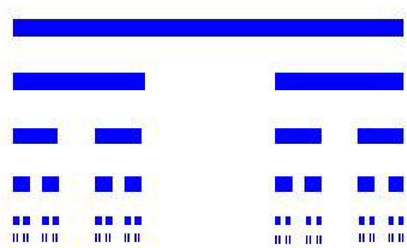
Las curvas regulares rectificables (es decir, las curvas suaves que tienen longitud finita) tienen una dimensión topológica de 1. Además, las que se van volviendo más complejas tienden a llenar el espacio a su alrededor. La cantidad de espacio que llena una de estas curvas es representado por la dimensión fractal o índice $\mathbf{D_f}$, la cual podemos pensar como un “factor de llenado”.



Para la recta y el círculo **D_f** es igual a 1. La curva del perímetro del copo de nieve llena más espacio que la recta o el círculo y su **D_f** es 1.26.

La línea que dibuja el parénquima pulmonar es un patrón y llena aún más espacio. Su **D_f** es de al rededor 1.82

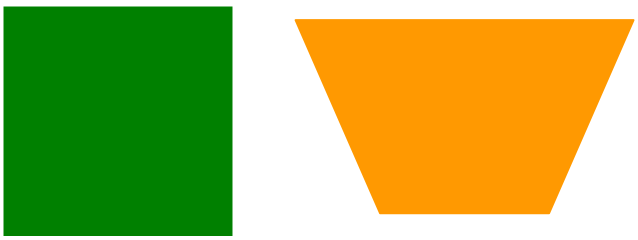
La dimensión fractal de un subconjunto de una de recta varía de 0 a 1, es 0 cuando se tiene un conjunto finito de puntos, es 1 cuando es un segmento de recta (es decir, un intervalo), está entre 0 y 1 cuando es un conjunto de puntos que "llena" parcialmente a la recta (es decir, no contiene ningún intervalo, pero tiene "muchos" puntos), por ejemplo: el conjunto ternario de Cantor tiene una dimensión fractal de $\log(2)/\log(3) \approx 0.63$.



El conjunto de Cantor se obtiene al tomar la intersección de los conjuntos C_j donde el conjunto C_0 es un segmento de recta, C_1 es el conjunto C_0 menos el interior del tercio de en medio del segmento, y en general C_j , es el conjunto C_{j-1} menos el interior de los tercios de en medio de los segmentos de recta que forman a $C_{j.1}$.

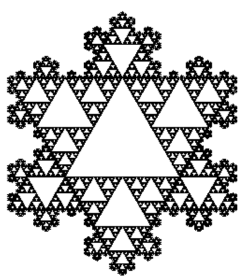
La dimensión fractal de un subconjunto de un plano varía entre 0 y 2. Está entre 0 y 1 cuando el conjunto es un conjunto de puntos que "llena" parcialmente a una curva regular rectificable (es decir, no contiene la imagen de algún intervalo bajo una función continua no constante), es 1 cuando la estructura es una curva regular rectificable como una recta o una circunferencia.

Cuando una estructura llena todo el espacio posible en un área del plano tal como el cuadrado verde o el trapecio anaranjado de abajo, su dimensión fractal es 2.



La dimensión fractal de una superficie plana como un cuadrado o un trapecio es de 2.

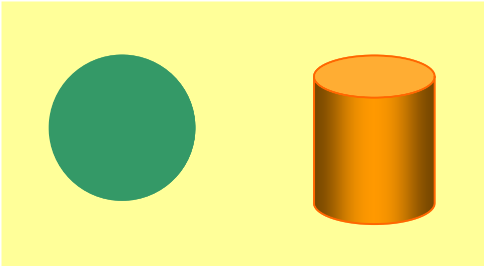
La dimensión fractal está entre 1 y 2 cuando "llena" parcialmente el espacio en un área (es decir, no contiene ninguna región con área positiva, pero puede contener alguna curva de longitud positiva); por ejemplo la carpeta de Sierpinski que se ilustra abajo tiene una dimensión fractal de 1.79



Esta carpeta de Sierpinski tiene una dimensión fractal de 1.79

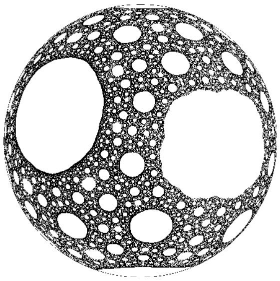
La dimensión fractal de un subconjunto de un objeto tridimensional, varía entre 0 y 3. Está entre 0 y 1 cuando el conjunto es un conjunto de puntos que “llena” parcialmente a una curva regular rectificable (es decir, no contiene la imagen de algún intervalo bajo una función continua no constante), es 1 cuando la estructura es una curva regular rectificable como una recta, una circunferencia o una hélice.

Cuando una estructura llena todo el espacio posible en una superficie de área positiva, como un círculo o la superficie de un cilindro, su dimensión fractal es 2.



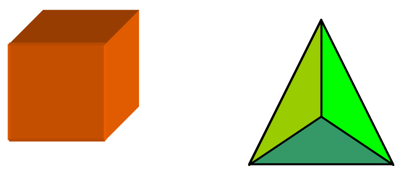
Una superficie tiene dimensión fractal 2.

La dimensión fractal está entre 1 y 2 cuando “llena” parcialmente el espacio sobre una superficie (es decir, no contiene la imagen de algún rectángulo con área positiva bajo una función continua no constante, pero puede contener alguna curva de longitud positiva).



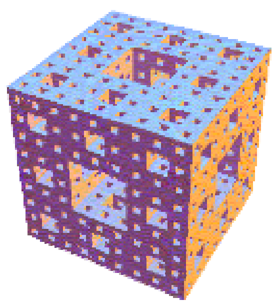
La dimensión fractal de un conjunto (que no contiene segmentos con área, pero que contiene segmentos de curvas con longitud positiva) contenido en una superficie está entre 1 y 2.

Cuando una estructura llena todo el espacio posible en un volumen del espacio tridimensional, tal como el cubo sólido o la pirámide sólida que se muestran abajo, su dimensión fractal es 3.



Un cuerpo sólido tridimensional tiene dimensión fractal 3.

La dimensión fractal está entre 2 y 3 cuando “llena” parcialmente el espacio en un volumen (es decir, no contiene ninguna región con volumen positivo, pero puede contener alguna superficie con área positiva); por ejemplo la esponja de Menger que tiene una dimensión fractal de 2.1



Esponja de Menger

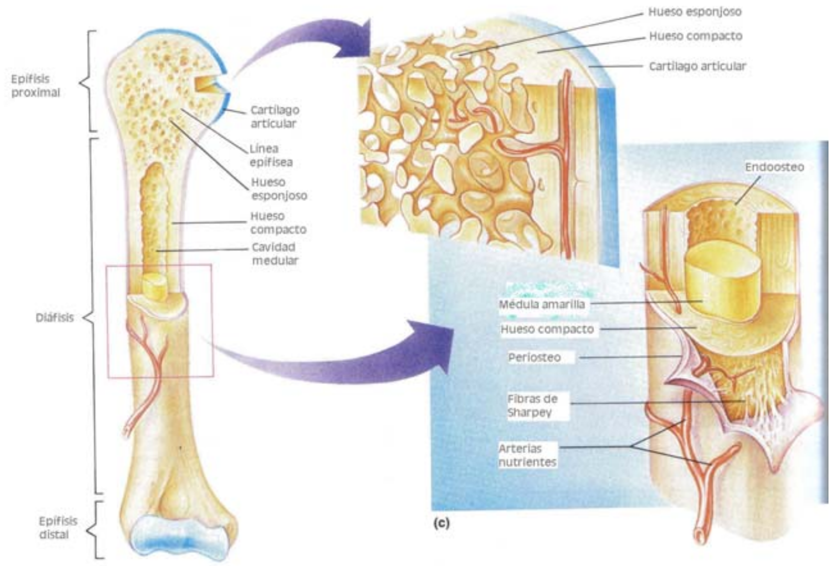
Dimensiones fractales en los huesos

Los huesos se clasifican de acuerdo a su forma como: largos, cortos, planos o irregulares.

Clasificación de huesos.

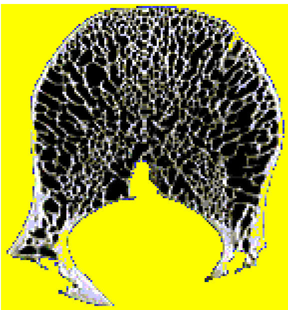
Todos los huesos del esqueleto tienen una capa exterior densa que parece suave y sólida a simple vista. Esta capa externa es llamada hueso compacto. Bajo esta capa está el hueso esponjoso, una especie de panal de pequeñas piezas parecidas a agujas o piezas planas, como trabes, llamadas trabéculas. Dentro de esta red, los espacios entre las trabéculas están llenos de médula.

Fotografía de la trabécula de una sección de la cabeza de un fémur.



Partes de un hueso.

El hueso trabecular tiene un patrón de ramificaciones, como podemos apreciar en este hueso vertebral. También podemos ver que exhibe autosimilaridad. Es decir, las trabéculas y los espacios de médula entre sí se ven muy similares sin importar su tamaño.

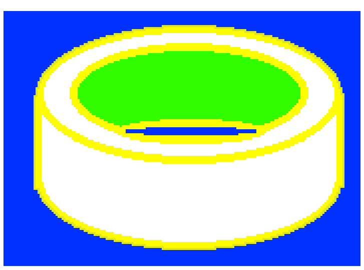


Muchos modelos de los huesos en el pasado se habían realizado modelando la fuerza de rompimiento como una simple función de la densidad mineral del hueso. La densidad del hueso está fuertemente relacionada con la fuerza de rompimiento. Además existen variaciones biológicas en la fuerza de rompimiento en pacientes con la misma densidad de hueso.

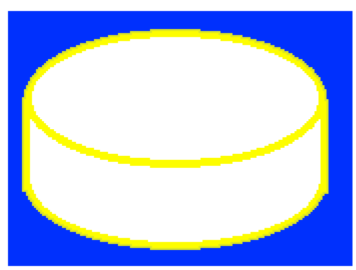
Los investigadores han podido crear modelos más refinados de fuerza ósea. Algunos de éstos modelos están basados en la idea de que no es sólo la cantidad de mineral que se tiene en un hueso dado, sino también cómo está acomodado en ese hueso lo que determina la fuerza del hueso.

Actualmente se utilizan modelos de análisis de elemento finito de la fuerza ósea con poco éxito en la predicción de fuerza ósea. Además estos modelos son muy complejos y es poco probable que se conviertan clínicamente útiles para los pacientes en un futuro cercano. La idea del índice fractal del hueso trabecular puede relacionarse con la fuerza ósea, es de llamar la atención, ya que calcular el índice fractal del hueso trabecular es simple a partir de imágenes de Tomografía Computariza de un hueso dado.

La imagen de abajo muestra dos modelos posibles para un hueso. Un hueso normal es algo que se encuentra entre el cilindro hueco del hueso a la izquierda y el cilindro sólido a la derecha. Si analizamos estos dos huesos, podríamos rebanadas de tomografía computarizada de estos dos huesos, mediríamos un índice fractal de 1.0 en el hueso hueco y un índice de 2.0 en el hueso sólido. Medidas de huesos normales caen entre estos dos valores extremos (al rededor de 1.7 a 1.8), y es posible esperar que el índice fractal pueda probar ser útil en la estimación de la fuerza del hueso.



Hueso sin trabécula
(“osteoporosis”) D=1.0

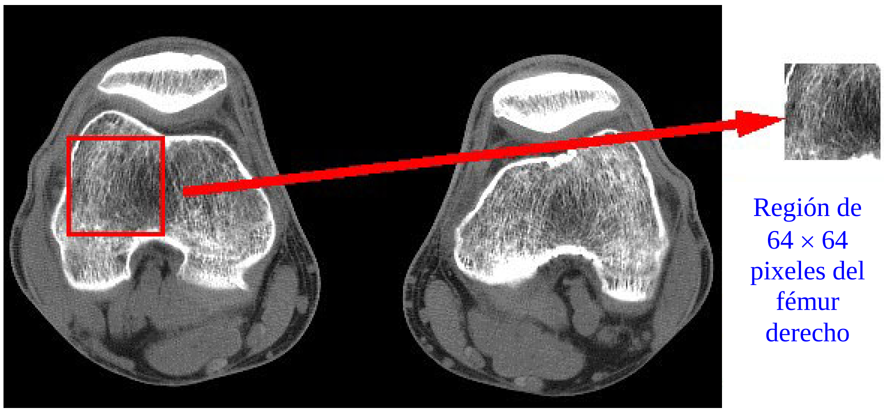


Hueso con centro sólido
(“osteoporosis”) D = 2.0

¿Cómo entonces, estimamos el índice fractal de una estructura compleja como un hueso trabecular como la vértebra de abajo?

Primero tenemos que decirle a nuestro programa de análisis de imágenes qué parte es hueso y qué parte no lo es. Esto es generalmente simple porque el hueso es mucho más denso que los tejidos suaves. En nuestro programa de análisis de imágenes, ajustamos la ventana y los controles de nivel de tal manera que sólo tejido con densidad de la tomografía computarizada sea mayor de un cierto nivel podría ser incluida en el análisis. Esto se puede hacer visualmente en nuestro software ajustando la ventana y los controles de nivel hasta que sólo el tejido de interés se muestre (en rojo), como abajo.

Una vez que estos umbrales de nivel se han puesto, el software de imágenes ahora sabe qué es hueso y que no. Ahora podemos seleccionar la región del hueso trabecular de interés para analizarla, como se muestra abajo.

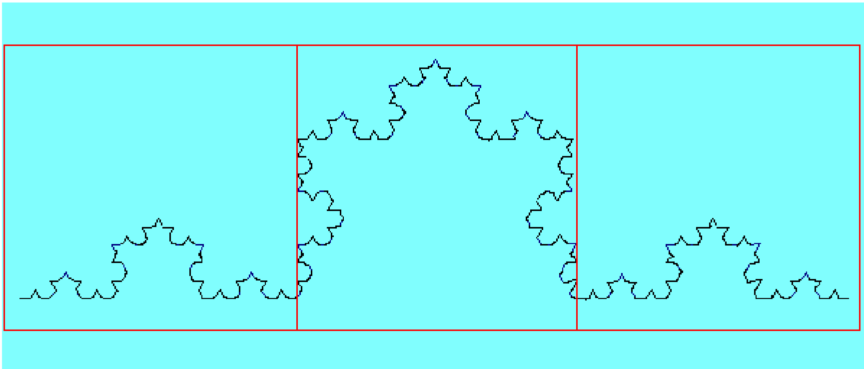


Hay una amplia variedad de algoritmos para calcular el índice fractal de una estructura, tales como el algoritmo de conteo de caja, el método de dilatación de pixel, el método de calipher, el método del espectro de la potencia radial, y otros.

Cómo calcular la dimensión fractal con el método de conteo de caja

Mostraremos el algoritmo de conteo de caja, por su sencillez. Este algoritmo estima qué tanto espacio es ocupado por la estructura fractal. Primero, se pone una malla arbitraria sobre la estructura que se medirá. Luego, contamos cuántas cajas definidas por la malla son ocupadas por la estructura fractal.

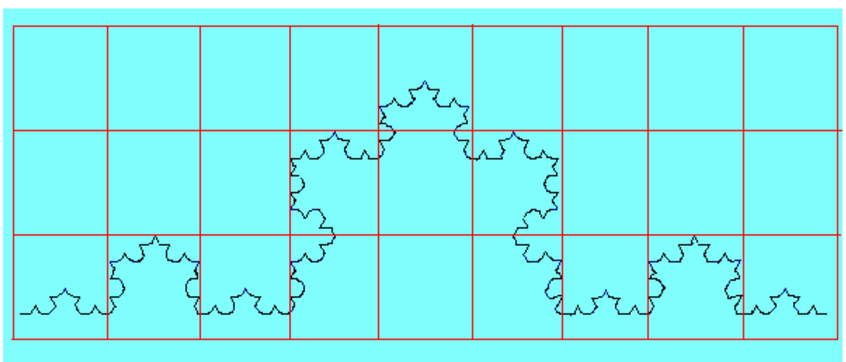
Para el objeto mostrado la estructura ocupa 3 cajas.



Este objeto fractal ocupa 3 cajas de la malla.

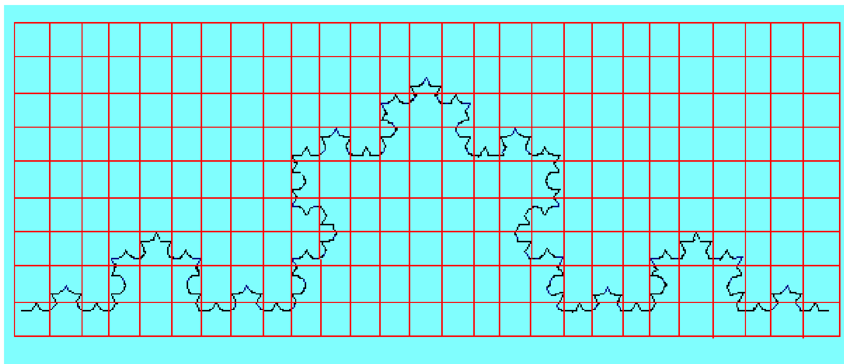
El proceso se repite con una malla con longitudes de la n-ésima parte del tamaño de la anterior, en nuestro caso es de la tercera parte.

Con la malla de abajo, (que se obtuvo dividiendo en 3 partes iguales los lados de las cajas de la malla anterior, dando lugar a 9 cajas nuevas por cada caja de la malla anterior) la estructura ocupa 12 cajas.



Al dividir en 3 partes iguales cada uno de los lados de la malla anterior, obtenemos una malla más fina y el objeto fractal ocupa 12 cajas de la nueva malla.

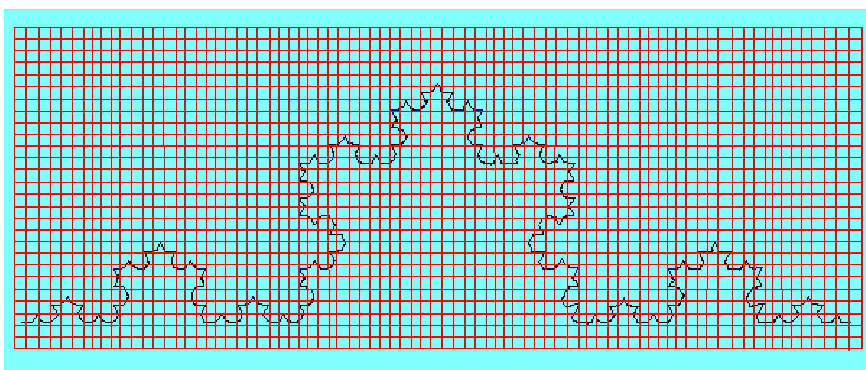
El proceso se repite otra vez con una malla con longitudes de la n-ésima parte del tamaño de la anterior (en nuestro caso, la tercera parte). Con la malla de abajo, la estructura ocupa 55 cajas.



Volvemos a dividir en 3 partes iguales cada uno de los lados de la malla anterior, obtenemos una malla más fina y el objeto fractal ocupa 55 cajas de la nueva malla.

Este proceso puede realizarse indefinidamente, usando mallas cada vez más pequeñas.

Para este ejemplo, contaremos las cajas una vez más. Con la malla de abajo, la estructura llena 405 cajas.

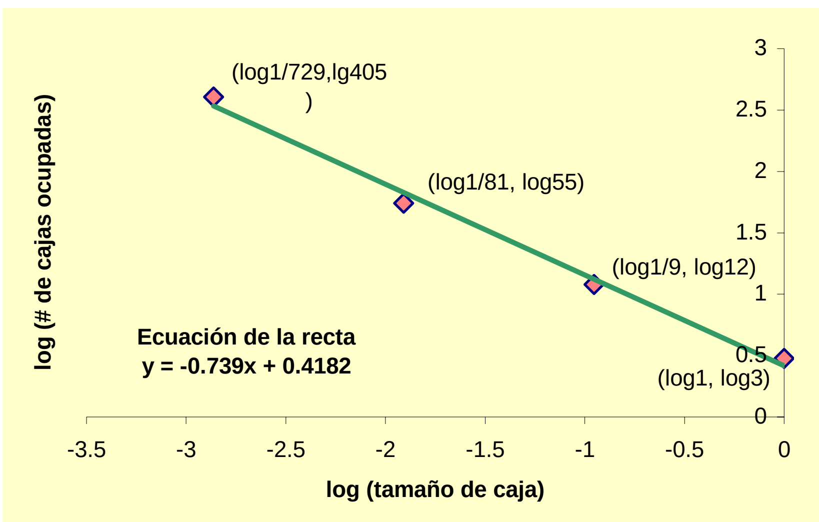


Volvemos a dividir en 3 partes iguales cada uno de los lados de la malla anterior, obtenemos una malla más fina y el objeto fractal ocupa 405 cajas de la nueva malla.

Así que nuestros datos de conteo de caja son puestos en la siguiente tabla:

Tamaño de la caja	# de cajas ocupadas
1	3
1/9	12
1/81	55
1/729	405

Los datos son graficados en una gráfica log-log (es decir, en el eje de las abscisas se pone el logaritmo del tamaño de la caja y en el eje de las ordenadas se pone el logaritmo del número de cajas ocupadas) como se muestra abajo.

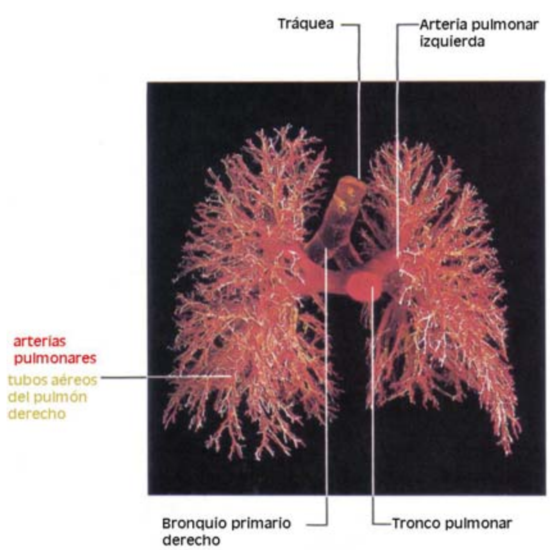


Se hace una regresión lineal para encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos. La pendiente de esta recta es usada para calcular la dimensión fractal. En el caso del ejemplo la ecuación de la recta que mejor se ajusta es $\boldsymbol{y} = -0.739\boldsymbol{x} + 0.4182$. La dimensión fractal es igual a 2 más la pendiente de la recta, entonces para este objeto fractal, la dimensión fractal es $\boldsymbol{D_f}$=2+(– 0.739)=1.261.

Árbol bronquial

Uno de los sistemas en que es más evidente la estructura geométrica, es el sistema respiratorio, pues su objetivo es distribuir un volumen de aire inhalado (por la vía aérea) en una superficie de intercambio (superficie alveolar) que se encuentra dentro de una región de volumen acotado (el tórax). Sin embargo, el diseño de un órgano no depende únicamente de su forma geométrica sino también del ajuste de las partes a su función.

El diseño del árbol bronquial de los mamíferos se ha asociado con un adecuado flujo de gases a los alvéolos, una mínima producción de entropía en la mecánica respiratoria y con un mínimo costo en materia y energía. Mandelbrot fue el primero en proponer que el pulmón de los mamíferos presenta una geometría fractal. Posteriormente varios científicos han mostrado que la reducción del diámetro de los bronquios, la superficie alveolar y el flujo pulmonar presentan propiedades fractales.



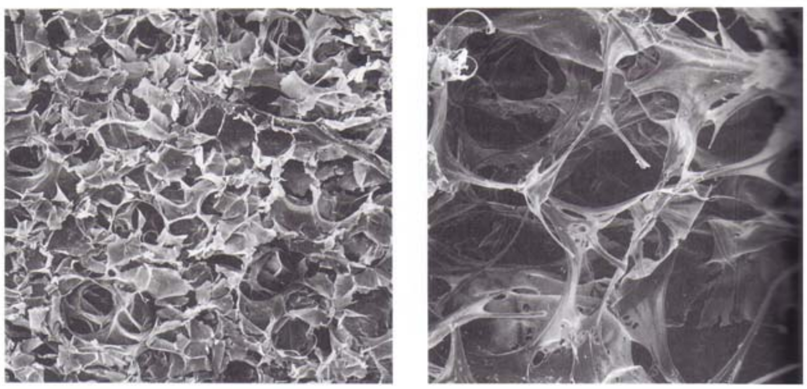
Respecto al diámetro de las vías aéreas, en los primeros estudios (en 1962) se encontraron evidencias de que el calibre de los bronquios seguían una curva exponencial del tipo $\boldsymbol{d_n} = \boldsymbol{d_o} \cdot \boldsymbol{2^{-n/3}}$, denominando con $\boldsymbol{d_n}$ al diámetro de un tallo de rama bronquial de la $\boldsymbol{n}$-ésima generación y con $\boldsymbol{d_o}$ el diámetro inicial, además (en 1991) se encontró que esta curva se encontraba asociada a la acomodación de un máximo flujo con mínimo volumen, mínima disipación de energía o mínima producción de entropía.

Posteriormente, se mostró que el diámetro de los bronquios más allá de la décima generación disminuye más lento que lo predicho por la relación exponencial dada en 1962, y que esto podría estar relacionado con la transición desde una zona de transporte por convección a una zona de difusión pasiva, lo cual llevó a que se propusiera como alternativa un decaimiento según la ley de potencias $\boldsymbol{d_n = A_n \cdot n^{-u}}$, modulado por una función $\boldsymbol{A_n}$, que introduce desviaciones periódicas en el factor de escala. (renormalización) que tiene como importante consecuencia un efecto de protección de errores durante el desarrollo del pulmón, evitando que una anomalía en el calibre de un bronquio se propague o aumente hacia el distal.

Algunos científicos han usado el modelo de renormalización para simular la vía aérea. Sin embargo, otros destacan que ambos tipos de modelos (el exponencial y el potencial) son válidos y obedecen a la geometría fractal unida a la asimetría del patrón de dicotomía bronquial. La cual es muy evidente en las observaciones hechas en broncografías.

A pesar de que existen muchos estudios donde se calcula la dimensión fractal del árbol bronquial no se disponen medidas directas de la forma en que el árbol bronquial ocupa el espacio (de tres dimensiones) o de la autosimilitud de éste. Aunque algunos científicos chilenos han podido tener una representación tridimensional en acrílico del árbol bronquial de algunas especies de mamíferos, cuando hacen el estudio del cálculo de las dimensiones fractales, lo hacen sobre fotografías de estos moldes, lo cual lleva a que sólo se ha medido la dimensión fractal de proyecciones del árbol bronquial y no de él como objeto en el espacio tridimensional.

Las dimensiones fractales de estas proyecciones del árbol bronquial se encuentran entre 1.57 y 1.59. La forma en que el árbol bronquial ocupa el espacio parece ser esencialmente la misma, independientemente de diferencias importantes en la masa corporal de las distintas especies observadas.



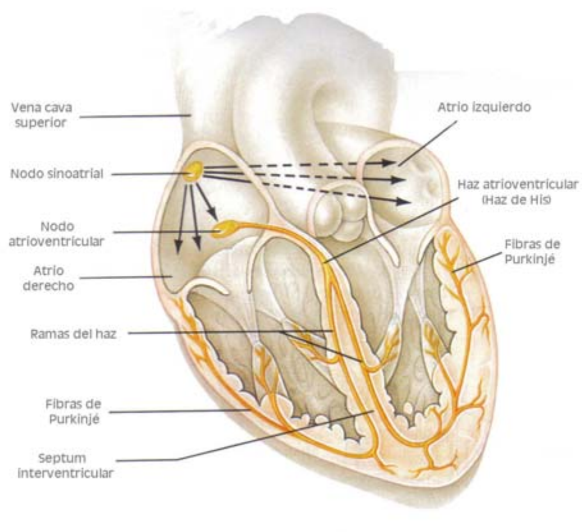
La imagen de la izquierda muestra los alvéolos de una persona sana no fumadora, la de la derecha son los alvéolos de una persona fumadora.

Caos cardiaco

Uno de los ritmos biológicos más conocidos es el latido del corazón. La forma en que se acostumbra estudiarlo es investigando su comportamiento biológico, químico y físico. A partir de los años ochenta del siglo pasado se ha dirigido el estudio de las propiedades globales de su comportamiento biológico considerándolas no lineales.

Existen varias áreas del corazón de los mamíferos capaces de tener una auto-excitación rítmica espontánea, pero bajo condiciones fisiológicas el regulador normal es el nodo sino-atrial (SA).

Un impulso generado por el nodo sino-atrial se propaga a través del músculo atrial (provocando contracción atrial). La onda de despolarización se propaga a través del nodo atrio-ventricular (AV) y debajo del sistema de His-Purkinjé en los ventrículos derecho e izquierdo.



Existen muchos modelos lineales y no-lineales que describen este proceso de conducción entre los nodos sino-atrial y atrio-ventricular.

Hay estudios experimentales que usan herramientas no lineales para distinguir caos y ruido y ayudar así a entender la dinámica fisiológica.

Para ello se hacen 3 suposiciones:

i. Un oscilador cardiaco en condiciones normales se puede describir con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con un solo estado estacionario inestable generando un ciclo de oscilación límite asintóticamente estable el cual está globalmente atrayendo excepto para un conjunto de medida cero de puntos singulares.

ii. Siguiendo una perturbación corta, el curso del tiempo de retorno al ciclo límite es mucho más corto que el período espontáneo de oscilación o del tiempo entre pulsos periódicos.

iii. Las características topológicas de la curva de transición de fase cambian en formas estereotipadas cuando la fuerza del estímulo aumenta.

Si Φ_i es la fase del oscilador cardiaco inmediatamente antes del i-ésimo estímulo de una estimulación periódica con período τ para Φ_i la relación recursiva es:

$$\Phi_{i+1} = g(\Phi_i) + \frac{\tau}{T_0} \tag{1}$$

donde $g(\Phi)$ es la respuesta fase y está determinada experimentalmente por esos estímulos y $g(\Phi + j) = g(\Phi) + j$ para cualquier j en el conjunto de los números enteros y T_0 es el período del ciclo límite.

La ecuación (1) mide la contracción de los agregados como función de la fase para la contracción en el tiempo de la perturbación.

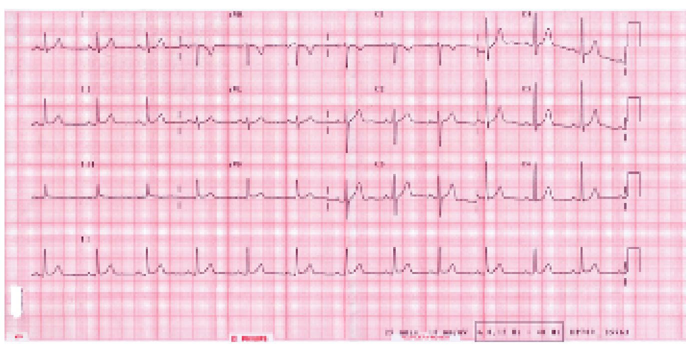
Si graficamos la nueva fase siguiendo un estímulo contra la vieja fase, la curva resultante es llamada la curva de transición.

Si ahora iteramos $g(\Phi)$ para calcular la respuesta de los agregados a estimulación periódica. Las respuestas observadas son de período doble y de dinámica caótica cuando la frecuencia del conductor periódico es aumentada.

En resumen, las dinámicas en respuesta a estimulación periódica son predichas iterando la función derivada experimentalmente y lleva cercanamente a lo que se observó experimentalmente.

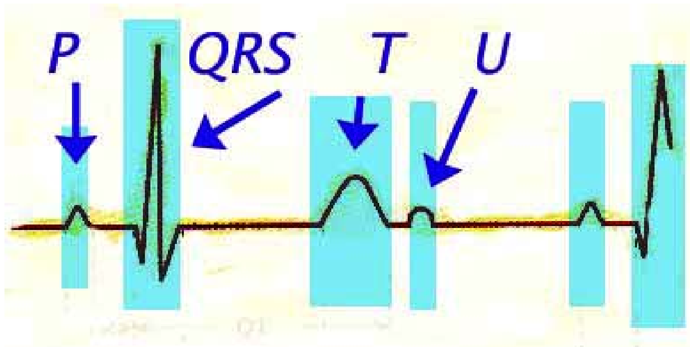
Experimentalmente algunos investigadores observaron patrones similares a muchas arritmias comúnmente observadas, otros investigadores utilizan las propiedades de la respuesta fase para explicar para-sístoles ventriculares, algunos más asocian bloqueos intermitentes o variables con el comportamiento irregular complejo característico de dinámicas caóticas observadas en el modelo de respuesta fase.

Consideremos la actividad eléctrica de un corazón normal donde la diferencia del potencial entre varios puntos de la superficie del cuerpo es llamada electrocardiograma (ECG).



Electrocardiograma

La serie de tiempo del ECG consiste de las ondas ***P***, el complejo ***QRS***, las ondas ***T*** y las ondas ***U***. Las ondas ***P*** reflejan la excitación de los atrios, el complejo ***QRS*** refleja la excitación de los ventrículos (red de His-Purkinjé), las ondas ***T*** se asocian con la recuperación del estado eléctrico inicial de los ventrículos y las ondas ***U*** se asocian con la despolarización de fibras de Purkinjé.



En la imagen se muestran las ondas principales que componen un electrocardiograma.

Como hemos visto en el corazón se dan varios tipos de ritmos, que es posible distinguirlos en los electrocardiogramas. Sus irregularidades han sido reconocidas como signos de alguna enfermedad, pero todavía falta analizar desde distintos puntos de vista su dinámica, ya que aún se desconoce el origen de algunos casos de infarto, por lo que todavía no son prevenibles todos los infartos.

Muy importante es la fibrilación, que causa miles de muertes súbitas al año. En muchos casos, estas muertes se deben al bloqueo de las arterias, que causan la falta de alimentación de las células del músculo que bombea la sangre.

En un corazón normal las células se contraen y relajan de manera periódica y coordinada, mientras que cuando hay fibrilación, las células se contorsionan sin coordinación alguna y no pueden bombear sangre. En un corazón normal las señales eléctricas viajan de manera coordinada a lo largo del corazón. Cuando la señal llega, cada célula se contrae, enseguida la célula se relaja durante un intervalo determinado, dentro del cual no puede volver a contraerse. En cambio, cuando hay fibrilación la onda se esparce sin coordinación dando como resultado que el corazón nunca está del todo contraído ni del todo relajado.

Una forma de ayudar a un paciente que está sufriendo un ataque de fibrilación es aplicarle una corriente eléctrica —un “shock eléctrico”— con lo que a menudo su corazón vuelve a trabajar normalmente.

En un corazón en fibrilación, cada una de sus partes puede estar funcionando normalmente, pero de manera descoordinada. Las autopsias de personas que murieron por estas causas muestran que los músculos no están dañados y que sin embargo, el corazón en conjunto no funcionó.

El corazón es un sistema complejo, que ahora se estudia desde el punto de vista del Caos. Se ha encontrado que su actividad eléctrica presenta secuencias de doblamiento de períodos hasta llegar a un comportamiento caótico, similar al de otros sistemas que desarrollan caos. Cuando se presenta fibrilación se está en un régimen caótico, y al dar un “shock eléctrico” los parámetros del corazón se modifican y éste regresa a un régimen que ya no es caótico, por lo que su comportamiento vuelve a ser regular.

La modificación de algún parámetro relacionado con el funcionamiento del corazón, como por ejemplo el cambio en la conductividad en los músculos o en el tiempo de llegada de alguna señal, puede alterar el régimen en que se encuentra el órgano.

El comportamiento caótico de algún sistema biológico no siempre está relacionado con alguna enfermedad. Aunque pueda parecer increíble, se ha empezado a considerar el caos como fuente de salud. Los sistemas no lineales tienen la capacidad de regulación y de control. Si a un sistema que se comporta linealmente se le produce una pequeña perturbación, entonces se comportará de manera cercana a como lo haría si no se le hubiera perturbado. Sin embargo, si se da la misma perturbación a un sistema no lineal, éste tiende a volver a su condición inicial.

Si un sistema llegara siempre a un valor final de sus variables, sin importar el valor de sus parámetros, entonces este sistema no podría ajustarse a cambios. Sin embargo los seres vivientes deben poder adaptarse a los cambios. Por lo tanto en un sistema como el tratado, si las circunstancias externas hacen que el valor de q se altere, entonces los valores finales que adquirirá la variable x serán distintos de los que tenía antes del cambio. Si el sistema biológico es capaz de vivir con los nuevos valores finales significa que se ha podido adaptar a las nuevas circunstancias. Si no, desaparecerá.

El hecho de que muchos sistemas biológicos sean no lineales y se comporten caóticamente ha permitido la posibilidad de adaptación. Algunos investigadores han sugerido que para que estos sistemas sobrevivan bajo nuevas circunstancias tendrán que desarrollar estructuras fractales. Por ejemplo, las fibras conductoras del corazón o las redes que forman los bronquios tienen estructura fractal que permite una gran variedad de ritmos.

Por lo tanto, se puede llegar a la sorprendente conclusión de que el caos permite la salud, mientras que si un sistema fuera totalmente pronosticable, al ocurrir cualquier cambio se enfermaría y poco después desaparecería.

De estas consideraciones se obtiene una sugerencia muy interesante: cuando una enfermedad se debe a la inadaptabilidad del organismo a los posibles nuevos ritmos debidos al cambio de circunstancias, el tratamiento debería consistir en ampliar sus capacidades para que estos nuevos ritmos fueran capaces de darse. Esta idea puede abrir una nueva forma de tratar ciertas enfermedades.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

[A] Adams J.F. Vector fields on spheres. Ann. Math. 75 (1962) p.603-632.

[A-LL] Aceff F., Lluis-Puebla E. Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica. Pub. Electr. Serie: Divulgación. Vol. 1 (2006)

[A-LL-S-S] Aisbett J, Lluis-Puebla E., Snaith V and Soulé C. On K*(Z/n) and K*(Fq[t]/(t2)). Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 57, No. 329 (1985).

[A-H] Atiyah M, Hirzebruch F. Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. of Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. 3 (1961) p.7-38.

[A-S] Atiyah M, Singer I. The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) p.422-433.

Atiyah, M. F. How Research is Carried Out. Bull. IMA. 10 (1974) p.232-234.

Atiyah, M. F. Mathematics and the Computer Revolution. Nuova Civilta delle Macchine II (No. 3) (1984) p. 27-32 y The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. Cambridge University Press. (1986) p. 43-51.

Atiyah, M. F. Identifying progress in mathematics. ESF Conference in Colmar. Cambridge University Press (1985) p. 24-41.

Atiyah, M. F. Mathematics in the 20 th. century. Reimpreso de Doctor Honoris Causa 2001. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Matemáticas. UNAM. (2001).

Barnsley, M. Fractals everywhere. Boston: Academic Press. (1993)

Bassingthwaighte JB, King RB, Roger SA. Fractal nature of regional myocardial blood flow heterogeneity. Circ Res 1989; 65(3):578-90.

[B-S] Borel A, Serre J-P. Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) p.97-136.

Braun, E. Caos, fractales y cosas raras. Fondo de Cultura Económica.

Canales, M., Olivares, R et al. Caracterización del árbol bronquial en mamíferos. Rev. Chil. anat. Vol 16. No.2 p 237-244 (1998)

[D-H] Davis, P.J., Hersh R. The Mathematical Experience. Houghton Mifflin Co. Boston. (1981).

Debuc, S. Une Foire de courbes sans tangentes. G.M.E.L. Actualités Mathématiques Gauthier-Villars p 99-119. (1981)

[D] Dieudonné J. A Panorama of Pure Mathematics. Academic Press, (1982).

Field, M. and Golubitsky, M. Symetry in Caos: a search for pattern in mathematics, art and nature. Oxford University Press. (1992)

Kaandorp, J. Fractal modelling growth and form in Biology. Springer Verlag. (1994)

[L] Lam T.Y. Serre's conjecture. Lecture Notes in Mathematics 635. Springer-Verlag (1978).

[LL1] Lluis-Puebla E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Addison Wesley Iberoamericana, (1990).

[LL1a] Lluis-Puebla E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Segunda Edición. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana. Serie Textos. Volumen 5. (2005).

[LL2] Lluis-Puebla, E. et al. Higher Algebraic K-Theory: an overview. Lecture Notes in Mathematics 1491. Springer-Verlag. (1992).

[LL3] Lluis-Puebla, E. Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica. SITESA. (1997).

[LL4] Lluis-Puebla, E. Videograbación de la Conferencia Magistral "Matemática: lo digno de ser aprendido". Conferencia de clausura del VII Congreso de la Sociedad Boliviana de Matemática. Videoteca de la Sociedad Boliviana de Matemática. Cochabamba, Bolivia. (10/XI/2000).

Lluis-Puebla, E. Mazzola,G. Noll,T. eds. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. Universität Osnabrück. 2004. epOs. ISSN: 3-923486-57-x papel, 3-923486-58-8 CD ROM. http//dnb.ddb.de versión electrónica.

Mandelbrot, B. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman. (1983)

Mandelbrot, B. Fractals and Chaos: the Mandelbrot set and beyond. New York: Springer Verlag. (2004)

Meakin, P. A new model for biological pattern formation. Journal Theor. Biology. 118, (1986) p 101-113.

[M] Montiel, M. El Denotador: Su Estructura, Construcción y Papel en la Teoría Matemática de la Música. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. UNAM. 1999.

[M-B] MacLane S, Birkhoff G. Algebra. Macmillan. (1968).

[M-M] Mac Lane S, Moerdijk I. Sheaves in Geometry and Logic. Springer (1994).

[Mazz] Mazzola, G., (contribuyente Lluis-Puebla, E. et al.) The Topos of Music. Birkhäuser Verlag. Basel, Suiza. (2002).

[M-N-LL] Mazzola, G. Noll, T. Lluis-Puebla, E. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. epOs. Alemania. (2004).

Minio R. An inteview with Michael Atiyah. The Mathematical Intelligencer. Vol. 6 No. 1 (1984) p. 9-19.

Peitgen, H., Jürgens, H., and Saupe, D. Chaos and Fractals: new frontiers of science. Springer Verlag. (2004)

[Q] Quillen D. Higher Algebraic K-Theory. Proc. Int. Con. of Math. Vancouver (1974).

Richardson, M. and Gillespy, T. Fractal analysis of trabecular bone. Dept. of Radiology of Washington University (2000)

[S] Serre J.P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61 (1955) p.197-278.

[Sw] Swan R.J. Vector bundles and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) p.264-277.

[ToM] Mazzola, G. The Topos of Music. Birkhauser. (2002)

[V] Vaserstein L.N. Vector bundles and projective modules revisited. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986).

West, J. B. Fractal Physiology and Chaos in medicine. Singapore: World Scientific. (1990)

LOS AUTORES

Flor de María Aceff

Flor de María Aceff nació en la Ciudad de México. Obtuvo el título de Profesora de Educación Primaria en la Escuela Nacional de Maestros en 1982. Después, en 1989, la Licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Posteriormente, en 1990 se graduó como Maestra en Ciencias Matemáticas. Finalmente obtuvo su Doctorado en Matemáticas en 1995, este último con la realización de la tesis "Teoría de Dispersión para la Ecuación de Onda con Perturbaciones de rango corto".

La Dra. Aceff es Profesora de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Realiza actividades de investigación, difusión y docencia tanto en el ámbito de licenciatura como de posgrado. Perteneció al Sistema Nacional de Investigadores y es miembro del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística, de la American Mathematical Society, de la Real Sociedad Matemática Española y de la Sociedad Matemática Mexicana.

Emilio Lluis-Puebla

En Emilio Lluis se conjugan la Ciencia y el Arte paralelamente. Nació en la Ciudad de México en septiembre de 1952. Por un lado, Emilio Lluis realizó sus Estudios Profesionales y de Maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su Doctorado (Ph.D) en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional

Autónoma de México en sus Divisiones de Estudios Profesionales y de Posgrado desde hace veintinueve años. Ha formado varios profesores e investigadores que laboran tanto en México como en el extranjero.

Es autor de varios libros sobre K-Teoría Algebraica, Álgebra Homológica, Álgebra Lineal y Teoría Matemática de la Música publicados en las editoriales con distribución mundial Addison Wesley, Birkhäuser y Springer Verlag entre otras.

Es miembro de varias asociaciones científicas como la Real Sociedad Matemática Española y la American Mathematical Society. Es presidente de la Academia de Ciencias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, presidente de la Academia de Matemática de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística y presidente 2000-2002 de la Sociedad Matemática Mexicana.

Paralelamente, Emilio Lluis, inició sus estudios pianísticos a los 6 años de edad tras haber mostrado desde pequeño una gran disposición hacia la música. En México estudió con distinguidos pianistas. Durante los años setenta realizó estudios en Canadá con el extraordinario pianista Peter Katin y a lo largo de su carrera participó en diversos cursos pianísticos como los de Jörg Demus y Daniel Ericourt.

Es presidente de la Academia de Música de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística. Frecuentemente ofrece conferencias y cursos de perfeccionamiento pianístico en México y en el extranjero. En los años ochenta presentó el Ciclo Completo de las 32 Sonatas para piano de Beethoven. Es el primer pianista mexicano que interpreta tan majestuosa obra en salas de concierto. La Colección de "Emilio Lluis en CD y DVD" acaba de ser editada y consta de treinta y cuatro CD y treinta y tres DVD.

Sus actuaciones incluyen giras en repetidas ocasiones por Sudamérica y Europa, actuando como recitalista en Canadá, Dinamarca, Alemania, Suiza, Portugal, República Dominicana, Costa Rica, Perú, Bolivia, Brasil, etc. y como solista de diversas orquestas sinfónicas nacionales así como extranjeras incluyendo la Sinfónica Nacional de La Paz y la Filarmónica de Río de Janeiro interpretando obras como el Concierto Emperador de Beethoven, el Concierto 2 de Brahms y el segundo concierto para piano y orquesta de Rachmaninoff.

Contraportada

Este segundo volumen, al igual que el primero, tiene como propósito el de servir como motivación y orientación vocacional a los jóvenes deseosos de dedicarse a una de las aventuras más formidables del Ser Humano, la Matemática. También está dedicado a toda persona que desee obtener un concepto más aproximado acerca de la Matemática y sus practicantes. Está dirigido tanto para un público en general como para un lector de nivel matemático diverso. Hemos tratado de dejarle algo a cada uno de ellos.

En "Matemática y matemáticos II" se escribe acerca de la Matemática, sus características, la investigación y progreso en ella. Como ejemplo del surgimiento de una teoría matemática se presenta la K-Teoría Algebraica. También, como matemática aplicada se hace lo correspondiente con la Teoría Matemática de la Música. Finalmente, se exponen pensamientos acerca de la Computación y su relación con la Matemática.

Con respecto a "Matemática en la Música II", actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer un marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Se expone el acercamiento de Mazzola para muchos problemas musicales el cual está basado en la Teoría de Topos. Se introduce el concepto de Denotador el cual permite describir los objetos musicales y se mencionan las ideas detrás del mismo. Se concluye que estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años.

Muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que exhiben varios niveles de complejidad vistos con la geometría usual. La existencia de estos patrones nos reta a estudiar esas formas que con la geometría usual parecen no tener forma, es decir, a investigar la morfología de lo "amorfo". En el capítulo III presentamos los fractales, que son la herramienta para estudiar los patrones complejos de la naturaleza.

Con respecto a "Matemática en Nuestro Cuerpo", los fractales son estructuras geométricas que se pueden usar para analizar muchas estructuras biológicas que no son compatibles con análisis convencionales. Aquí se exhibe el análisis fractal y se muestra cómo se puede aplicar al análisis del hueso trabecular, a la estructura del árbol bronquial y al análisis de las arritmias cardiacas.