

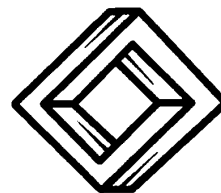
**Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana**

**Memorias del Foro de
Matemáticas del Sureste**

**Víctor Castellanos Vargas
(Editor)**

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

**Serie: Memorias. Vol. 2 (2004)
ISBN: 968-5748-58-6**



Memorias
Foro de Matemáticas del Sureste

Cunduacán Tabasco
México

COLECCIÓN
JUARDO CABALLERO Y
CABALLERO
MEMORIAS DE CONGRESOS Y SIMPOSIOS

Candita Victoria Gil Jiménez
Rectora

María Isabel Zapata Vazquez
Secretaria de Servicios Académica

José Manuel Piña Gutiérrez
Secretario de Servicios Administrativos

Gilda María Berttolini Díaz
Secretaria de Finanzas

Fernando García Lucas
Director de la División Académica de Ciencias Básicas

Comité Editorial

Víctor Castellanos Vargas
División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lucas López Segovia
División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

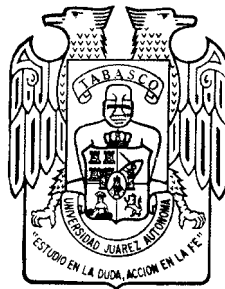
Raquel López Ramírez
Facultad de Matemáticas
Universidad Veracruzana

Matías Navarro
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán

Memorias

Foro de Matemáticas del Sureste

Víctor Castellanos Vargas
Editor



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
División Académica de Ciencias Básicas

D.R.® Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División Académica de Ciencias Básicas
Km 1 Carretera Cunduacán – Jalpa de Méndez
C. P. 86690
Cunduacán, Tabasco
México

Memorias: Foro de Matemáticas del Sureste

ISBN: 968-5748-58-6

Editor: Víctor Castellanos Vargas

Impreso en México 2004 / Printed in México 2004

Imagen portada: Costera Sanchez Magallanes, Cardenas Tab. / Pelicano

El contenido y los puntos de vista expresados en los diversos trabajos que se presentan en este documento, son responsabilidad exclusiva de los autores.

El contenido puede ser reproducido total o parcialmente, dando el justo crédito a los autores y a la Institución.

Contenido

Prefacio	10
Jawad Snoussi <i>Singularidades de curvas planas</i>	11
Fuensanta Aroca <i>Parametrizaciones de espacios analíticos</i>	19
Víctor Castellanos Vargas <i>El grado de gérmenes analítico reales de tipo no finito</i>	33
Matías Navarro <i>Dinámica local de configuraciones principales de superficies en \mathbf{R}^4</i>	39
Gerardo Emilio García Almeida <i>Estimaciones para Convoluciones en Espacios de Nikol'skiĭ-Besov Anisotrópicos</i> ..	49
Juan Víctor Mondragón G. <i>Un modelo de optimización del movimiento de equipos de perforación de pozos</i> ...	61
Mario Miguel Ojeda <i>La modelación estadística</i>	69
Raquel López Ramírez <i>El enfoque de programación convexa para un problema de control de Markov con restricciones</i>	77
Salvador Medina-Peralta, Ligia Ancona-Méndez <i>Análisis de las preferencias de comidas preparadas con el hongo comestible <i>Pleurotus djamor</i>(setas), en la comunidad de Baca, Yucatán, México</i>	85

Prefacio

El Foro de Matemáticas del Sureste se celebró en las instalaciones de la División Académica de Ciencias Básicas (DACB) de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), en la ciudad de Cunduacán, Tabasco, del 26 al 30 de Mayo de 2003.

En este volumen, se publican algunos trabajos presentados en dicho evento como artículos de investigación y expositivos.

En esta edición de las memorias, se trató de establecer un alto nivel de calidad, por lo que todos los artículos aquí publicados fueron sometidos a un proceso de evaluación. Se procuro que los árbitros escogidos para las evaluaciones de los trabajos, fuesen especialistas en las diversas áreas. Agradecemos sinceramente a todos los árbitros su dedicación y profesionalismo.

Expresamos de manera afectuosa, nuestro agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de este evento, el cual, sin duda, marcará el inicio de colaboraciones e intercambio de ideas, principalmente entre las instituciones del sur-sureste mexicano. A la División Académica de Ciencias Básicas de la UJAT por la publicación de estas memorias y a la Sociedad Matemática Mexicana por el apoyo económico otorgado para la realización del evento y el cual fue destinado para becas de hospedaje y manutención de alumnos que asistieron de otras instituciones como la Universidad de Yucatán y Universidad Veracruzana. Al entusiasta y dedicado Justino Alavez Ramírez, por su entregada labor en la coordinación general de la organización, a los miembros de la Academia de Matemáticas de nuestra división de Ciencias Básicas de la UJAT quienes tuvieron la iniciativa y esmero de proponer y colaborar en la realización de este importante evento, a Eric Ávila Vales y Raquiel López de la Universidad de Yucatán y la Universidad Veracruzana, respectivamente, por la labor realizada en sus instituciones que permitieron acercar los grupos de investigación de las diferentes instituciones participantes.

Finalmente, agradecemos a Edith Morales Torres por su ayuda en la captura en \LaTeX de algunos trabajos.

Víctor Castellanos Vargas
Cunduacán, Tabasco
Diciembre 2004

Singularidades de curvas planas

Jawad Snoussi

Instituto de Matemáticas UNAM, unidad Cuernavaca
jsnoussi@matcuer.unam.mx

1. Diccionario de Geometría y Álgebra

Los objetos básicos de la geometría algebraica son los conjuntos definidos por ecuaciones algebraicas.

Definición 1.1. Sea K un campo. Un subconjunto $E \subset K^n$ es un conjunto algebraico afín o simplemente un conjunto algebraico (C.A.) si existe un subconjunto $A \subset K[x_1, \dots, x_n]$ del anillo de polinomios en n variables y coeficientes en K tal que:

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall P \in A\}.$$

A este conjunto se le conoce como el conjunto de los ceros de A denotado por $Z(A)$.

Observación 1.2. Aquí denotaremos de la misma manera al polinomio P en $K[x_1, \dots, x_n]$ y a la función polinomial que le corresponde.

Ejemplo 1.3. En \mathbb{R}^2 , para el polinomio $P = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos que $Z(P)$ es una recta.

Si $P = x^2 + y^2$ entonces tenemos que, en \mathbb{R}^2 , $Z(P) = \{0\}$. Sin embargo, en \mathbb{C}^2 , $Z(P)$ es la unión de las rectas complejas $x + iy = 0$ y $x - iy = 0$.

Sea $A \subset K[x_1, \dots, x_n]$ y sea $\langle A \rangle$ el ideal generado por A . Tenemos que

$$Z(A) = Z(\langle A \rangle).$$

En lugar de trabajar con subconjuntos arbitrarios de $K[x_1, \dots, x_n]$ se puede trabajar con ideales de $K[x_1, \dots, x_n]$, y así aprovechar la estructura algebraica de ese anillo. En particular tenemos:

Teorema 1.4 (Finitud de Hilbert). Si K es un campo, el anillo $K[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano, es decir, cualquier ideal tiene un número finito de generadores.

Para una demostración ver [6].

Como corolario, tenemos que cualquier conjunto algebraico es el cero de un número finito de polinomios.

Mencionaremos algunas propiedades de los conjuntos algebraicos:

Proposición 1.5.

$$Z\left(\sum_{i \in I} \mathcal{A}_i\right) = \bigcap_{i \in I} Z(\mathcal{A}_i)$$
$$Z\left(\prod_{\text{finito}} \mathcal{A}_i\right) = \bigcup_{\text{finito}} Z(\mathcal{A}_i)$$

donde los \mathcal{A}_i 's son ideales.



Dejamos al lector la prueba de estas propiedades.

Consideremos ahora un conjunto $E \subset K^n$. Sea

$$I(E) = \{P \in K[x_1, \dots, x_n] \mid P(x) = 0 \forall x \in E\}.$$

Es fácil ver que $I(E)$ es un ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$ al cual lo llamaremos *el ideal de E*.

Se puede verificar que si $E \subset K^n$ es un conjunto algebraico entonces $Z(I(E)) = E$.

De manera inversa, si J es un ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$ tendremos que: $J \subset I(Z(J))$ sin que la inclusión sea una igualdad en general.

Ejemplo 1.6. En \mathbb{R} consideremos $P = x^2$. En este caso tenemos: $Z(P) = \{0\}$ y $I(\{0\}) = \langle x \rangle \neq \langle x^2 \rangle$.

Si el campo K es algebraicamente cerrado, tenemos un resultado más preciso. Primero necesitamos unas definiciones.

Si A es un anillo conmutativo y J un ideal de A . Se define el radical de J como el conjunto $\{f \in K[x_1, \dots, x_n], \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in J\}$ y se denota \sqrt{J} . Es un ideal de A . Si un ideal satisface la relación $J = \sqrt{J}$ se le dice un ideal radical.

Teorema 1.7 (Ceros de Hilbert). Sea K un campo algebraicamente cerrado. Si J es un ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$ entonces:

$$I(Z(J)) = \sqrt{J}.$$

Para una demostración ver [6].

Este teorema establece, en el caso que el campo base es algebraicamente cerrado, una correspondencia 1-1 entre los conjuntos algebraicos afines y los ideales radicales.

Trataremos de ir más adelante en esta correspondencia.

En todo lo que sigue vamos a suponer que el campo K es algebraicamente cerrado.

Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$, es claro que $\{a\}$ es un C.A. por ser cero del ideal generado por: $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Este ideal es maximal. Vamos a probar que todos los ideales maximales de $K[x_1, \dots, x_n]$ son de la forma $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, en efecto:

Sea \mathcal{M} un ideal maximal. Por el teorema 1.7, $Z(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe un punto $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$, tal que $a \in Z(\mathcal{M})$. Como $I(a) \neq K[x_1, \dots, x_n]$ y por maximalidad de \mathcal{M} tenemos $\mathcal{M} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$.

Esto establece una correspondencia 1-1 entre los ideales maximales del anillo y los puntos del espacio afín.

Vamos ahora a ver la relación entre el concepto topológico de la irreducibilidad y el hecho de que un ideal sea primo.

Definición 1.8. Un conjunto algebraico E , es reducible si existen E_1 y E_2 conjuntos algebraicos tales que: $E = E_1 \cup E_2$ con $E_i \not\subseteq E_j$. Si no, se dice que E es irreducible.

Ejemplo 1.9. Sea $P(x, y) = xy \in \mathbb{C}[x, y]$. El C.A. $Z(P)$ es la unión de dos rectas complejas, $Z(x)$ y $Z(y)$. Por lo tanto $Z(P)$ es un C.A. reducible.

Tenemos la caracterización algebraica siguiente:

Proposición 1.10. Un conjunto algebraico E es irreducible si y sólo si $I(E)$ es primo.

Prueba. Supongamos que E es irreducible. Sean $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ tales que $fg \in I(E)$. Tenemos que $E \subset Z(fg)$ entonces:

$$E = (E \cap Z(f)) \cup (E \cap Z(g)).$$



Por irreducibilidad de E es necesario que $E \subset Z(f)$ o $E \subset Z(g)$. Lo que implica $f \in I(E)$ o $g \in I(E)$.

De manera inversa supongamos $I(E)$ primo. Sea $E = E_1 \cup E_2$ una descomposición de E . Tenemos que:

$$I(E) = I(E_1) \cap I(E_2).$$

Como $I(E)$ es primo, $I(E) = I(E_1)$ o $I(E) = I(E_2)$ ([1]). Por lo tanto E es irreducible. \square

Entonces tenemos, en nuestra correspondencia, que los ideales primos corresponden a los conjuntos algebraicos irreducibles.

Ahora, si tenemos un conjunto algebraico E , lo queremos ver como unión de conjuntos algebraicos irreducibles.

Proposición 1.11. *Si E es un conjunto algebraico en el campo K^m entonces existen E_1, \dots, E_n irreducibles únicos tales que:*

$$E = E_1 \cup \dots \cup E_n.$$

A los E_i se les denomina componentes irreducibles de E .

La prueba de este resultado solo necesita el uso de la “Noetherianidad” del anillo $K[x_1, \dots, x_n]$ para llegar a un número finito de componentes irreducibles. La dejamos al lector.

Ejemplo 1.12. *Sea $P(x, y) = xy \in \mathbb{C}[x, y]$ como en el ejemplo anterior. $Z(P) = Z(x) \cup Z(y)$ es la descomposición de $Z(P)$ en componentes irreducibles.*

Observación 1.13. *El equivalente algebraico de la descomposición en componentes irreducibles de un conjunto algebraico es la descomposición en ideales primos de un ideal radical en un anillo Noetheriano (para detalles sobre la descomposición primaria ver [1]).*

Hace falta introducir ahora la noción de *dimensión*, lo cual hacemos de una manera intuitiva como sigue:

Un punto tiene dimensión cero; la recta no tiene conjuntos algebraicos intermedios entre un “punto” y “recta” entonces diremos que es de dimensión 1. Más formalmente tenemos:

Definición 1.14. *Sea E un conjunto algebraico. Definimos la dimensión de E como el número máximo n tal que:*

$$E \supseteq E_0 \supsetneq E_1, \dots, \supsetneq E_n$$

es una sucesión de conjuntos algebraicos irreducibles.

El equivalente algebraico es dado por la dimensión de Krull de un anillo Noetheriano:

Definición 1.15. *Si \mathcal{A} es un anillo Noetheriano, definimos $\dim_{\text{Krull}}(\mathcal{A})$ como el número máximo n tal que:*

$$\mathcal{A} \supsetneq P_0 \supsetneq P_1, \dots, \supsetneq P_n$$

es una cadena de ideales primos.

La correspondencia entre las dos definiciones es dada por:

Proposición 1.16. *Si $E \subset K^n$ es un conjunto algebraico entonces:*

$$\dim E = \dim_{\text{Krull}} \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(E)}.$$

La prueba de la igualdad es una consecuencia de la correspondencia entre ideales primos y C.A. irreducibles. La dejamos al lector.

Dejamos aquí la correspondencia entre álgebra y geometría. Para aprender más sobre el tema ver [4].



2. Vocabulario adicional

Introducimos un poco de vocabulario útil. Una **curva** es un conjunto algebraico de dimensión 1.

Una **superficie** es un conjunto algebraico de dimensión 2.

Una **curva plana** es una curva definida en K^2 . Sin embargo notamos que una curva no es necesariamente una curva plana.

Ejemplo 2.1. En \mathbb{C}^3 el conjunto:

$$\{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

Es una curva en \mathbb{C}^3 , por ser la unión de los 3 ejes coordenados. Es el cero del ideal generado por: (xy, xz, yz) , y no se puede escribir como cero de un ideal con menos de 3 generadores.

Una **hipersuperficie** es un conjunto algebraico definido por un solo polinomio (es decir su ideal es principal).

Teorema 2.2. Si $P \in K[x_1, \dots, x_n]$ donde K es algebraicamente cerrado y P no es constante, $\dim(Z(P)) = n - 1$.

El teorema nos dice que una hipersuperficie es siempre de codimensión 1. Para una prueba de la versión algebraica del teorema ver [1, p. 122]

Una curva plana es una hipersuperficie de K^2 .

Una **intersección completa** es un conjunto algebraico cuyo ideal tiene tantos generadores como su codimensión.

Observemos que la unión de los tres ejes del ejemplo anterior no es una intersección completa. Una hipersuperficie es una intersección completa.

3. Singularidades

Nos concentraremos ahora en $K = \mathbb{C}$. Uno quiere siempre comparar los nuevos objetos que tiene con los antiguos. Una pregunta natural es: ¿Un conjunto algebraico se puede considerar como una variedad diferencial? La respuesta es que no siempre es posible.

Ejemplo 3.1. Consideremos en $\mathbb{C}[x, y]$ los dos polinomios $f = y - x^2$ y $g = y^2 - x^3$. $Z(f)$ es una sub-variedad diferencial de \mathbb{C}^2 mientras $Z(g)$ no lo es.

En el ejemplo de arriba, la diferencia entre los 2 espacios reside en que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ no se anulan simultáneamente con f , mientras $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ se anulan simultáneamente con g en el punto $(0, 0)$. En el caso de la curva $Z(g)$ se dice que el punto $(0, 0)$ es un punto singular.

En el caso general, se define una singularidad como sigue.

Sea E un conjunto algebraico y sea $I(E) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ el ideal asociado. Se define la jacobiana de $\{f_1, \dots, f_r\}$ en el punto a como

$$\mathcal{J}_a(f_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Definición 3.2. Un punto $p \in E \subset \mathbb{C}^n$ es un punto singular si:

$$\text{rg}(\mathcal{J}_p(f_i)) < n - \dim_p E$$

donde $\text{rg}(\mathcal{J}_p(f_i))$ denota el rango de la matriz jacobiana y $\dim_p E$ es la dimensión más grande de las componentes irreducibles de E que contienen al punto p .



En el caso de una hipersuperficie definida por una función f , un punto es singular si y sólo si todas las derivadas parciales de f se anulan en dicho punto. Lo que es equivalente a decir que el vector gradiente de f se anula en dicho punto.

Ejemplo 3.3. En \mathbb{C}^2 consideremos $P = y^2 - x^2(x+1)$. Es fácil verificar que 0 es un punto singular, pues: $\frac{\partial P}{\partial y}(0) = \frac{\partial P}{\partial x}(0) = P(0) = 0$.

4. Singularidades de curvas planas

Nos vamos a restringir al caso de curvas complejas planas. Es decir que nos interesa ahora estudiar conjuntos algebraicos definidos en \mathbb{C}^2 por una sola función.

Consideremos una curva plana $\mathcal{C} = Z(f)$. Si suponemos que la curva no es singular en un punto p dado, por el teorema de la función implícita, uno puede probar que existe una vecindad bastante pequeña V del punto p en \mathbb{C}^2 y una vecindad U bastante pequeña del origen en \mathbb{C} tal que, $\mathcal{C} \cap V$ sea biholomorfo a $\mathbb{C} \cap U$; un biholomorfismo es una función holomorfa que tiene un inverso también holomorfo.

Por lo tanto, una curva no-singular es localmente biholomorfa a una vecindad de 0 en \mathbb{C} . Ahora, nos interesa hacer este tipo de comparaciones entre curvas singulares.

Para hacerlo necesitamos introducir unos cambios.

Ya hemos visto que el teorema de la función implícita usa el vocabulario de las funciones holomorfas y no solo el de polinomios. En efecto, necesitamos ahora trabajar con funciones holomorfas y el siguiente ejemplo es una buena motivación para ello.

Ejemplo 4.1. Sea $P(x, y) = y^2 - x^2(x+1) \in \mathbb{C}[x, y]$. El polinomio P es irreducible y por lo tanto el conjunto algebraico $Z(P)$ es irreducible.

Sin embargo, cuando uno considera la intersección de la curva con una bola centrada en el origen y de radio pequeño, lo que se ve parece la unión de dos curvas.

Lo que pasa, es que se puede escribir al polinomio P como producto de dos funciones que ya no son polinomios.

$$y^2 - x^2(x+1) = (y - x\sqrt{1+x})(y + x\sqrt{1+x}).$$

Cada una de las raíces cuadradas es una función holomorfa en una vecindad del origen.

De ahora en adelante vamos a trabajar no solo con polinomios, sino también con funciones holomorfas.

Observación 4.2. En el caso de un campo K diferente de los complejos, se trabaja en general con series formales. El problema es que ya no se les puede ver como funciones sobre el espacio afín. Pero se puede trabajar de manera abstracta con estos objetos usando la construcción “Spec”(ver [4]).

Una función holomorfa en general tiene un radio de convergencia finito. Pero cuando uno hace un estudio local de una singularidad se puede trabajar en una vecindad del punto singular.

Lo que queremos hacer ahora es comparar o clasificar localmente las singularidades de curvas complejas planas. Este estudio se puede llevar de dos puntos de vista diferentes:

Analíticamente: consiste en verificar si dos curvas singulares son localmente biholomorfas.



Ejemplo 4.3. Sean $P = y^2 - x^3$ y $Q = y^2 - 2x^3$. Las dos curvas $Z(P)$ y $Z(Q)$ tienen una singularidad en el punto $(0,0)$. denotemos por $\mathbb{C}\{x,y\}$ el anillo de funciones holomorfas en una vecindad del origen. Las dos curvas $Z(P)$ y $Z(Q)$ son biholomorfas o analíticamente equivalentes en el punto $(0,0)$ si y sólo si los anillos $\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{y^2-x^3}$ y $\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{y^2-2x^3}$ son isomorfos. Lo que está dado por el morfismo de anillos definido por $(x,y) \mapsto (2x,y)$. Por lo tanto las curvas $Z(P)$ y $Z(Q)$ son analíticamente equivalentes en el origen.

Esta manera de clasificar la curvas lleva a una rama muy importante y activa de la geometría algebraica que es “los espacios de módulos”.

Topológicamente: consiste en comparar la topología de dos curvas en sus puntos singulares.

Por eso no basta buscar homeomorfismos entre dos curvas.

Ejemplo 4.4. Sean $P = x$ y $Q = y^2 - x^3$. La primera función define una recta compleja y la segunda una curva singular “la cuspide”. El morfismo

$$\begin{aligned} Z(P) &\rightarrow Z(Q) \\ (0,t) &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo entre las dos curvas. Pero obviamente no queremos identificar una curva singular con otra no-singular.

Por esta razón lo que vamos a comparar entre dos curvas es lo que llamamos el tipo topológico.

Definición 4.5. Las curvas planas X y Y tienen el mismo tipo topológico en x y y respectivamente si existen $B_{\epsilon,x}$ y $B_{\epsilon',y}$ vecindades de x y y en \mathbb{C}^2 y un homeomorfismo

$\varphi : B_{\epsilon,x} \rightarrow B_{\epsilon',y}$ tal que

$$\varphi(B_{\epsilon,x} \cap X) = B_{\epsilon',y} \cap Y.$$

Se dice que

$$\varphi : (B_{\epsilon,x}, B_{\epsilon,x} \cap X) \rightarrow (B_{\epsilon',y}, B_{\epsilon',y} \cap Y)$$

es un homeomorfismo de pares.

Estamos pidiendo que un homeomorfismo del espacio ambiente mande localmente una curva a la otra.

Observación 4.6. Por la definición que hemos dado de un punto singular, se puede verificar que una curva plana tiene singularidades aisladas (en el caso de tener singularidades), lo que significa que si p es un punto singular, existe una vecindad de p en la curva cuyas puntos son todos no-singulares.

Para la prueba basta ver que si una función holomorfa no tiene factores múltiples, sus derivadas parciales no la van a dividir.

La topología de singularidades de curvas complejas planas esta relacionada con el estudio de “nudos” por el teorema siguiente:

Teorema 4.7 (Estructura cónica). Sea $X \subset \mathbb{C}^2$ una curva compleja plana, y sea $x \in X$. Existe $\epsilon_0 \ll 1$ tal que: $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$ la intersección $X \cap S_\epsilon^3$ sea transversal y

$$(B_{\epsilon,x}, B_{\epsilon,x} \cap X) \approx (\text{Cono}(S_\epsilon^3), \text{Cono}(S_\epsilon^3 \cap X))$$

donde $B_{\epsilon,x}$ y S_ϵ^3 son respectivamente la bola y la esfera de \mathbb{R}^4 de centro x y radio ϵ . Por el cono queremos decir el conjunto de las semirectas pasando por el espacio dado y el punto considerado.

Este teorema tiene una versión mucho mas general que se puede encontrar por ejemplo en [3].



Definición 4.8. *La intersección $X \cap S_\epsilon^3$ para un ϵ suficientemente pequeño, se le llama el link o el borde de la singularidad.*

El teorema nos da dos informaciones importantes, la primera es que por un radio bastante pequeño, la intersección de la curva con la esfera es una variedad diferencial. La segunda, es que el tipo topológico de la singularidad esta determinado por el encaje del borde de la singularidad en la esfera S^3 .

Miramos ahora al borde de una singularidad aislada de curva compleja plana. Es una variedad diferencial de dimension uno encajada en la esfera S^3 . Cada una de sus componentes conexas es un nudo. El borde de la singularidad es un enlace de nudos.

La relación completa entre las singularidades de curvas complejas planas y los nudos es dada por el teorema siguiente.

Teorema 4.9. *Sea X una curva compleja plana con una singularidad aislada en el punto x . El borde de X en x tiene tantas componentes conexas como el número de ramas (componentes analíticamente irreducibles de la curva) en x . El tipo topológico de cada rama está dado por el tipo topológico del nudo correspondiente. El número de enlace de cada dos nudos es igual al número de intersección de las dos ramas correspondientes.*

Para más detalles y explicaciones a cerca deste teorema ver [2].

El número de intersección mencionado en el teorema es un número que mide la intersección entre dos curvas complejas. Se le puede calcular de manera completamente algorítmica (ver [5]).

El teorema da una correspondencia completa entre la topología de las singularidades de curvas planas y la topología de su borde.

Se puede “codificar” esta topología, mediante las parametrizaciones de Newton-Puiseux de una curva plana. Estas parametrizaciones exhiben unos números llamados pares de Puiseux que permiten determinar de manera completa los nudos del borde como nudos tóricos iterados.

Otra manera de estudiar la topología de las singularidades de curvas planas es mediante una desingularización de las curvas. Una desingularización es la construcción de un “modelo” no-singular de la curva. Esta construcción se puede hacer usando *explosiones* de las singularidades. La información obtenida por estas explosiones es equivalente a la información dada por los pares de Puiseux o por el enlace del borde. Tres maneras diferentes de estudiar localmente la topología de las singularidades de curvas complejas planas.

Referencias

- [1] M.F. Atiyah and M.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [2] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, 1986.
- [3] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces*, Springer verlag, 1992.
- [4] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1994.
- [5] W. Fulton, *Algebraic curves, an introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley, 1969.
- [6] R.Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, Cambridge university press, 1990.



Foro de Matemáticas del Sureste 2003
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
22 – 28 de mayo de 2003
Cunduacán Tabasco
México

Enviado: Mayo, 2003

Publicado: Diciembre, 2004

Parametrizaciones de espacios analíticos

Fuensanta Aroca
Instituto de Matemáticas UNAM
fuen@matcuer.unam.mx

1. Introducción

Uno de los principales problemas de la matemática es el de resolver sistemas de ecuaciones.

Cualquier ecuación $h(x) = g(x)$ es equivalente a $h(x) - g(x) = 0$. Entonces podemos reducir el problema de resolver ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) a encontrar los ceros de una (o varias) funciones.

Cuando un sistema de ecuaciones tiene un número finito de soluciones resolver este sistema significa encontrarlas todas. Cuando hay una infinidad de soluciones debemos describir este conjunto en función de parámetros. Se dice que el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones

$$\mathcal{S} = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^N \mid f_i(\underline{x}) = 0, i = 1, \dots, n\}$$

está dado en *implícitas*.

Muchos conjuntos pueden describirse como imágenes de funciones:

$$\mathcal{S} = \{(\varphi_1(\underline{t}), \dots, \varphi_N(\underline{t})) \mid \underline{t} \in \mathbb{K}^M\}$$

en este caso se dice que el conjunto está dado en *paramétricas*.

Las implícitas son útiles cuando queremos comprobar si un punto pertenece o no al conjunto. Con las paramétricas es más sencillo producir puntos del conjunto.

Si \mathbb{K} es un campo y N un número natural, un subconjunto \mathcal{S} de \mathbb{K}^N que puede ser expresado como ceros de un sistema de funciones lineales es un *subespacio lineal*. Si las funciones son polinómicas es un *conjunto algebraico* y si las funciones son analíticas (se pueden escribir como series de potencias) se dice que es un *conjunto analítico*.

El problema de pasar de implícitas a paramétricas y viceversa está completamente resuelto en el caso lineal. Más aún, la mayoría de los programas de cálculo simbólico (Maple, Singular,...) tienen implementados algoritmos efectivos para realizar este paso.

En el caso de conjuntos algebraicos y analíticos generales no sólo no tenemos un método para calcular las ecuaciones paramétricas sino incluso la pregunta ¿Cuándo existen ecuaciones paramétricas? Aún no tiene respuesta.

El objetivo de estas notas es explicar el método de Newton para dar paramétricas locales de una curva analítica en el plano complejo y sus posibles generalizaciones.

Notación

En lo que sigue utilizaremos las siguientes notaciones estándar:

© Campo complejo.



- \mathbb{R} Campo real.
- \mathbb{Q} Campo de números racionales.
- \mathbb{Z} Grupo de números enteros.
- \mathbb{N} Conjunto de números naturales.
- \mathbf{B}_ϵ Bola de radio ϵ con centro el origen de coordenadas.
- \mathbb{D}_δ Disco de radio δ y centro cero.
- $\underline{0}$ El origen de coordenadas ($:= (0, \dots, 0)$).
- $\mathbb{R}_{>0}$ El conjunto de números reales mayores que cero.

$f(x, y(x)) = 0$ para todo x en el dominio de definición. En otras palabras, $\Phi(t) = (t, y(t))$ son unas paramétricas de la curva (1) intersección una vecindad del origen.

En el campo complejo el desarrollo de Taylor de una función diferenciable es siempre convergente y su suma es la función de partida. En las hipótesis del teorema de la función implícita, el desarrollo de Taylor de $y(x)$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i y}{\partial x^i}(0) x^i$$

puede calcularse término a término a partir de las derivadas parciales sucesivas de f .

2. Curvas Planas

Sea \mathcal{C} una curva en el plano complejo definida en implícitas:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \cap \mathbf{B}_\epsilon \mid f(x, y) = 0\} \quad (1)$$

donde $f : \mathbb{C}^2 \cap \mathbf{B}_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y $f(0, 0) = 0$.

Queremos escribir \mathcal{C} en ecuaciones paramétricas:

$$\mathcal{C} = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in \mathbb{C} \cap \mathbb{D}_\delta\}$$

donde $\Phi : \mathbb{C} \cap \mathbb{D}_\delta \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ es analítica.

Ejemplo 2.1. Si \mathcal{C} es una recta, $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid ax + by = 0\}$, $\Phi(t) = (bt, -at)$ son unas paramétricas de \mathcal{C} .

Ejemplo 2.2 (Teorema de la Función Implícita). Si $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, $f(0, 0) = 0$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, entonces existe una función analítica definida en una vecindad del origen, $x \mapsto y(x)$ tal que $y(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y(x)) = h(x), & y(0) &= 0 \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial x}(0) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)} \\ 0 &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0) &= \frac{\dots}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)} \\ 0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Nótese que al hacer los cálculos dividimos por $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, operación que es posible sólo si f cumple las hipótesis del teorema de la función implícita.

Definición 2.3. Cuando $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ se dice que $(0, 0)$ es un punto singular de \mathcal{C} .

La siguiente curva se puede parametrizar fácilmente a pesar de ser singular.



Ejemplo 2.4 (La cúspide). Si \mathcal{C} es como en (1) con $f(x, y) = y^p - x^q$ entonces $\Phi(t) = (t^p, t^q)$ son paramétricas de \mathcal{C} .

Observación 2.5. Si intentamos escribir las paramétricas del ejemplo 2.4 en la forma del ejemplo 2.2 obtenemos $y(x) = 1^{\frac{q}{p}} x^{\frac{q}{p}}$. El polinomio $y^p - x^q$ tiene $\frac{p}{m.c.d.(p,q)}$ y -raíces distintas en el conjunto de series con exponentes fraccionarios.

En virtud de la observación anterior es lógico buscar las soluciones de la ecuación $f(x, y) = 0$ entre las series con exponentes fraccionarios. Como una serie tiene infinitos términos no podemos calcularlos todos. Buscamos, por tanto, un método para calcular estas soluciones término a término. Para hacer esto necesitamos precisar el significado de *primer término*:

Definición 2.6. Sea $y(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}} c_{\mu} x^{\mu}$ una serie de potencias con exponentes fraccionarios. Diremos que el **orden** de $y(x)$ es

$$\nu(y) = \inf\{\mu \mid c_{\mu} \neq 0\}.$$

Si $\nu(y)$ es un número racional y $c_{\nu(y)} \neq 0$ diremos que

$$\text{In}(y) = c_{\nu(y)} x^{\nu(y)}$$

es el **primer término** de y . Definimos de manera inductiva el n -ésimo término de y como el $(n - 1)$ -ésimo término de $y - \text{In}(y)$.

Ejemplo 2.7. El orden de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} ix^{\frac{i}{3}}$ es $\frac{1}{3}$, su primer término es $x^{\frac{1}{3}}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, su i -ésimo término es $ix^{\frac{i}{3}}$. El orden de la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} x^i$ es $-\infty$ y el de $\sum_{i=1}^{\infty} x^{\frac{1}{i}}$ es cero. Estas dos últimas series no tienen primer término. La serie $1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^{\frac{1}{i}}$ tiene primer término pero no tiene segundo término.

Para poder calcular una serie término a término es necesario que su i -ésimo término exista para todo número natural i y que la suma de éstos sea la serie de partida.

Ejemplo 2.8. Para cada número natural i el i -ésimo término de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (x^{\frac{i}{i+1}} + x^{1+\frac{i}{i+1}})$ es $x^{\frac{i}{i+1}}$. La suma de los i -ésimos términos no es la serie de partida.

Observación 2.9. Una serie $y(x)$ con primer y segundo término puede escribirse de la forma $y = \text{In}(y) + (y - \text{In}(y)) = \text{In}(y) + \bar{y}$ con $\nu(\bar{y}) > \nu(y)$.

Supongamos que $y(x)$ es una serie solución de la ecuación $f(x, y) = 0$. Supongamos que $c_0 x^{\mu_0}$ es el primer término de $y(x)$ y supongamos también que $y(x)$ tiene segundo término. ¿Qué podemos decir sobre c_0 y μ_0 ?

Sea $\bar{y} = y - \text{In}(y)$ y sea $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{(i,j)} x^i y^j$ el desarrollo en serie de potencias de f . Se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, c_0 x^{\mu_0} + \bar{y}) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{(i,j)} x^i (c_0 x^{\mu_0} + \bar{y})^j \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{(i,j)} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} c_0^k x^{i+k\mu_0} \bar{y}^{j-k}. \end{aligned}$$

Como $\nu(\bar{y}) > \mu_0$ se tiene que $\nu(x^{i+k\mu_0} \bar{y}^{j-k}) \geq i + k\mu_0 + (j - k)\mu_0 = i + j\mu_0$ siendo la desigualdad estricta si y sólo si $k \neq j$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, c_0 x^{\mu_0} + \bar{y}) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{(i,j)} c_0^j x^{i+j\mu_0} + \tilde{y}_{i,j} \end{aligned}$$

donde $\nu(\tilde{y}_{i,j}) > i + \mu_0 j$ para todo par (i, j) . Sea $m = \min\{i + \mu_0 j \mid a_{(i,j)} \neq 0\}$. Como los términos del mismo orden deben cancelarse

se tiene que necesariamente:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\substack{i+j\mu_0=m \\ (i,j) \in \mathbb{N}^2}} a_{(i,j)} c_0^j x^{i+j\mu_0} \\
 &= x^m \sum_{\substack{i+j\mu_0=m \\ (i,j) \in \mathbb{N}^2}} a_{(i,j)} c_0^j.
 \end{aligned}$$

En particular c_0 debe ser una raíz del polinomio

$$\Phi(c) = \sum_{\substack{i+j\mu_0=m \\ (i,j) \in \mathbb{N}^2}} a_{(i,j)} c^j. \quad (2)$$

Este polinomio tiene raíces distintas de cero si y sólo si tiene más de un término. En resumen:

Resultado 2.10. Si $c_0 x^{\mu_0}$ es el primer término de una solución de la ecuación $f(x, y) = 0$ entonces:

- Existen al menos dos pares (i_1, j_1) e (i_2, j_2) tales que $a_{(i_1, j_1)} \neq 0$, $a_{(i_2, j_2)} \neq 0$ y $m = i_1 + \mu_0 j_1 = i_2 + \mu_0 j_2$ donde

$$m = \min\{i + j\mu_0 \mid a_{(i,j)} \neq 0\}. \quad (3)$$

- c_0 es una raíz distinta de cero de (2).

Interpretemos geoméricamente este resultado.

Definición 2.11. Sea $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{(i,j)} x^i y^j$ el desarrollo en serie de potencias de f . El **conjunto de exponentes de f** es el subconjunto del plano real

$$\mathcal{E}(f) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; \quad a_{(i,j)} \neq 0\}.$$

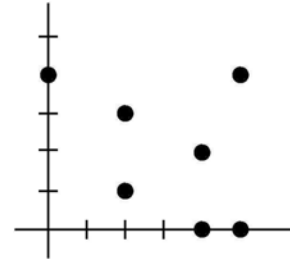


Figura 1: Los puntos dibujados representan el conjunto de exponentes de $f := x^4 + x^5 + y^4 + x^2 y + x^4 y^2 + x^2 y^3 + x^5 y^4$.

Observación 2.12. Si el conjunto de exponentes de f está contenido en una recta de pendiente $-\frac{1}{\mu}$, $\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$ (i.e. $i + \mu j = m$ para todo $(i, j) \in \mathcal{E}(f)$) y c es una raíz del polinomio $\phi(c) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(f)} a_{(i,j)} c^j$ se tiene

$$\begin{aligned}
 f(x, cx^\mu) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(f)} a_{(i,j)} x^i c^j x^{\mu j} \\
 &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(f)} a_{(i,j)} c^j x^m \\
 &= x^m \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(f)} a_{(i,j)} c^j = 0.
 \end{aligned}$$

También se observa que:

- Como $f(0, 0) = 0$ el punto $(0, 0)$ no está en el conjunto de exponentes de f .
- Si el conjunto de exponentes no tiene ningún punto en eje de las x entonces y divide a f .
- Si el conjunto de exponentes no tiene ningún punto en el eje de las y entonces x divide a f .
- f es un polinomio si y sólo si el conjunto de exponentes de f es acotado.



Con la notación introducida, la ecuación (3) se escribe (ver figura 2) $m = \min\{i + j\mu_0 \mid (i, j) \in \mathcal{E}(f)\}$.

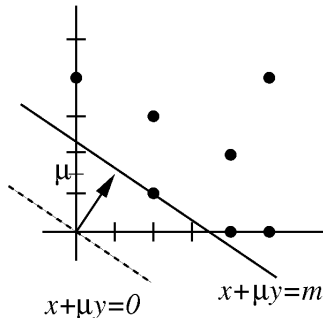


Figura 2: El significado de m .

Observación 2.13. *El primer punto del resultado 2.10 se interpreta geoméricamente: La recta $x + \mu_0 y = m$ contiene al menos dos puntos del conjunto de exponentes de f (ver figura 3).*

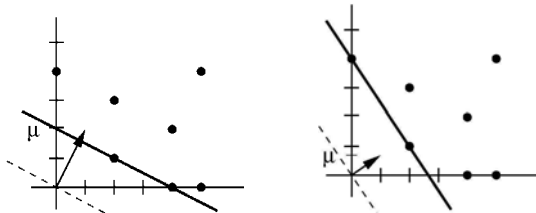


Figura 3: Posibles valores para el primer exponente del primer término.

Es lógico entonces introducir:

Definición 2.14. *El polígono de Newton es la envolvente convexa de $\{(i, j) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid (i, j) \in \mathcal{E}(f)\}$.*

La observación 2.13 es equivalente a: La recta $x + \mu_0 y = m$ contiene un lado del polígono de Newton de f .

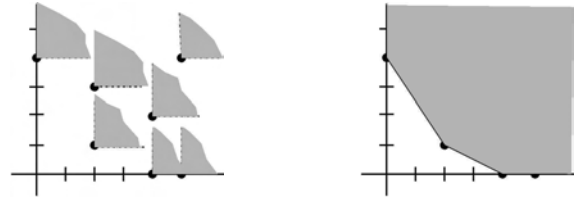


Figura 4: En la izquierda el conjunto $\{(i, j) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \mid (i, j) \in \mathcal{E}(f)\}$. En la derecha el polígono de Newton de f .

Definición 2.15. *Sea L un lado finito del polígono de Newton de f el polinomio característico asociado a L es el polinomio*

$$\Psi_L(x, y) := \sum_{(i,j) \in L \cap \mathcal{E}(f)} a_{(i,j)} x^i y^j.$$

De la observación 2.12 se sigue que las y -raíces de los polinomios característicos asociados a lados del polígono son monomios de la forma cx^μ donde $-\frac{1}{\mu}$ es la pendiente de la recta que contiene a L y c es una raíz de $\phi(c) = \Psi_L(1, c)$.

El resultado 2.10 es equivalente a:

Resultado 2.16. *Si $c_0 x^{\mu_0}$ es el primer término de una solución de la ecuación $f(x, y) = 0$ entonces:*

- $-\frac{1}{\mu_0}$ es la pendiente de la recta que contiene a un lado L del polígono de Newton de f .
- c_0 es una raíz distinta de cero del polinomio $\Phi(c) = \Psi_L(1, c)$.

Si cx^μ es el primer término de una solución de la ecuación $f(x, y) = 0$ con $f := x^4 + x^5 + y^4 + x^2y + x^4y^2 + x^2y^3 + x^5y^4$ los únicos posibles valores para μ son $\mu = \frac{2}{3}$ y $\mu = 2$. Si $\mu = \frac{2}{3}$ entonces c es raíz de $w^4 + w = 0$, es decir c es una de las tres raíces cúbicas de -1 . Si



$\mu = 2$ entonces c es raíz de $w + 1 = 0$, es decir $c = -1$.

Obsérvese que en este caso hemos obtenido tantos posibles primeros términos como el grado de la ecuación en y .

El siguiente método fue explicado por Newton en 1676 en una carta a Oldenburg [13].

MÉTODO 2.17 (de Newton). *Dada f analítica. Sea $f_1 := f$, sea N igual al número de términos que queremos calcular, sea $\mu_0 := -1$, y sea $\text{sol} := 0$*

desde $i = 1$ hasta $i = N$

*Si $f_i(x, 0) = 0$ devolver:
sol es una solución de $f = 0$ con i términos.*

Si $f_i(x, 0) \neq 0$ hacer:

1. *Elegir un lado L_i del polígono de Newton de f_i con la propiedad de*

$$\frac{-1}{\text{Pendiente de } L_i} > \mu_{i-1}.$$

2. *Elegir una raíz c_i distinta de cero del polinomio característico $\phi_{L_i}(c) = \Psi_{L_i}(f_i)(1, c)$.*

3. *Hacer*

a. $\mu_i := \frac{-1}{\text{Pendiente de } L_i},$

b. $\text{sol} := \text{sol} + c_i x^{\mu_i},$

c. $f_{i+1} := f_i(x, y + c_i x^{\mu_i}).$

Para demostrar que el método de Newton funciona falta probar:

- El paso

1. *Elegir un lado L_i del polígono de Newton de f_i con la propiedad de*

$$\frac{-1}{\text{Pendiente de } L_i} > \mu_{i-1}.$$

siempre puede realizarse.

- $f(x, y(x)) = 0$, es decir $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu(f(x, \sum_{i=1}^N c_i x^{\mu_i})) = \infty$. Este punto se prueba mostrando que los denominadores de los exponentes μ_i no crecen indefinidamente.

- Haciendo $N = \infty$ la serie

$$y(x) := \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$$

converge en una vecindad del origen.

La demostración de estos puntos puede encontrarse en [5], [9] o [16].

Como consecuencia de los puntos anteriores se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 2.18 (Teorema de Puiseux). *Sea f una función analítica en una vecindad del origen de \mathbb{C}^2 , con $f(0, 0) = 0$. Existe un número natural N y una serie convergente $y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\frac{i}{N}}$ tal que $f(x, y(x)) = 0$.*

Si $y(x)$ es como en el teorema anterior la curva $\{f = 0\}$ se escribe en paramétricas como $\{(t^N, \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i)\}$.

La generalización del método de Newton para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias fue introducida en 1889 por Fine [8]. Utilizando estas ideas se han probado muchos resultados en este campo. Véase por ejemplo [10], [6], [7].

3. Hipersuperficies

Dada una hipersuperficie en el espacio complejo de dimensión $N + 1$ definida en im-



plícitas:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_N, y) \in \mathbb{C}^{N+1} \cap \mathbf{B}_\epsilon \mid f(x_1, \dots, x_N, y) = 0\} \quad (4)$$

donde $f : \mathbb{C}^{N+1} \cap \mathbf{B}_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y $f(0, \dots, 0) = 0$.

Para escribir \mathcal{H} en ecuaciones paramétricas:

$$\mathcal{H} = \{(\varphi_1(t_1, \dots, t_N), \dots, \varphi_{N+1}(t_1, \dots, t_N)) \mid (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{C}^N \cap \mathbb{D}_\delta\} \quad (5)$$

nos gustaría diseñar un método que calculase soluciones del tipo

$$y(x_1, \dots, x_N) = \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Q}^N} c_{\mu_1, \dots, \mu_N} x_1^{\mu_1} \dots x_N^{\mu_N} \quad (6)$$

término a término.

Denotamos x por (x_1, \dots, x_N) . Dado $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Q}^N$ denotaremos por x^μ al monomio $x_1^{\mu_1} \dots x_N^{\mu_N}$. Con esta notación la ecuación (6) se escribe

$$y(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}^N} c_\mu x^\mu.$$

La definición 2.11 se generaliza a series en N variables con exponentes fraccionarios de manera natural:

Definición 3.1. Sea $y(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}^N} c_\mu x^\mu$ una serie de potencias. El **conjunto de exponentes de $y(x)$** es el subconjunto de \mathbb{R}^N

$$\mathcal{E}(y(x)) = \{\mu \in \mathbb{Q}^N \mid c_\mu \neq 0\}.$$

¿Cuál es el primer término de la serie en dos variables $y(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{9}{8}} + x_1^3x_2^{\frac{7}{8}} +$

$x_1^{\frac{1}{3}}x_2^7$? Esta pregunta es equivalente a ¿Cuál de los pares del conjunto de exponentes $(\frac{1}{3}, \frac{9}{8}), (3, \frac{7}{8}), (\frac{1}{3}, 7)$ es menor? Si utilizamos el orden lexicográfico el menor de estos pares es $(\frac{1}{3}, \frac{9}{8})$, si utilizamos el lexicográfico inverso el menor es $(3, \frac{7}{8})$. No existe ninguna razón lógica para utilizar un orden u otro.

Definición 3.2. Dado $\omega \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ se define el ω -orden de la siguiente manera:

Dados $\mu, \mu' \in \mathbb{Q}^N$

$$\mu \leq_\omega \mu' \iff \omega \cdot \mu \leq \omega \cdot \mu'$$

donde “ \cdot ” denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^N y “ \leq ” el orden usual en \mathbb{R} .

Variando ω se obtienen diferentes órdenes

Si $\omega = (1, 0)$ entonces $(\frac{1}{3}, \frac{9}{8}) \equiv_\omega (\frac{1}{3}, 7) <_\omega (3, \frac{7}{8})$.

Si $\omega = (0, 1)$ entonces $(3, \frac{7}{8}) <_\omega (\frac{1}{3}, \frac{9}{8}) <_\omega (\frac{1}{3}, 7)$.

Si $\omega = (1, 1)$ entonces $(\frac{1}{3}, \frac{9}{8}) <_\omega (3, \frac{7}{8}) <_\omega (\frac{1}{3}, 7)$.

Esta manera de representar órdenes fue introducida en 1921 por Ostrowsky [14].

El ω -orden no es siempre un orden total. Para definir órdenes totales podemos combinar varios ω -órdenes. Por ejemplo el orden lexicográfico en \mathbb{Q}^2 se describe en función de ω -órdenes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu \prec_L \mu' &\iff \mu <_{(1,0)} \mu' \text{ o} \\ &\mu \equiv_{(1,0)} \mu' \text{ y } \mu <_{(0,1)} \mu'. \end{aligned}$$

Observación 3.3. Si las coordenadas del vector $\omega \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ son racionalmente independientes, entonces el ω -orden es un orden total en \mathbb{Q}^N .



Una vez elegido un orden entre los exponentes de una serie, la definición 2.6 se generaliza de forma natural:

Definición 3.4. Sea $y(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}^N} c_\mu x^\mu$ una serie de potencias. Dado $\omega \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ diremos que el ω -orden de $y(x)$ es

$$\nu_\omega(y) = \inf\{\omega \cdot \mu \mid \mu \in \mathcal{E}(y(x))\}.$$

Si $\{\mu \in \mathbb{Q}^N \mid \omega \cdot \mu = \nu_\omega(y)\} \cap \mathcal{E}(y) \neq \emptyset$, diremos que

$$In_\omega(y) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{Q}^N \\ \omega \cdot \mu = \nu_\omega(y)}} c_\mu x^\mu$$

es la ω -parte inicial de y .

Cuando $In_\omega(y)$ tiene sólo un término decimos que éste es el ω -primer término de y .

Para $y(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{9}{8}} + x_1^3x_2^{\frac{7}{8}} + x_1^{\frac{1}{3}}x_2^7$ se tiene:

Si $\omega = (1, 0)$ entonces $\nu_\omega(y) = \frac{1}{3}$ y $In_\omega(y) = x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{9}{8}} + x_1^{\frac{1}{3}}x_2^7$.

Si $\omega = (0, 1)$ entonces $\nu_\omega(y) = \frac{7}{8}$ y $In_\omega(y) = x_1^3x_2^{\frac{7}{8}}$.

Si $\omega = (1, 1)$ entonces $\nu_\omega(y) = \frac{1}{3} + \frac{9}{8}$ y $In_\omega(y) = x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{9}{8}}$.

Observación 3.5. Dado $\omega \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ se tiene:

- $\nu_\omega(yy') = \nu_\omega(y) + \nu_\omega(y')$.
- $\nu_\omega(y + y') \geq \min\{\nu_\omega(y), \nu_\omega(y')\}$.

Razonemos ahora como lo hizo Newton en el caso de curvas planas.

Dado $\omega \in \mathbb{R}_{>0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes (ver observación 3.3).

Supongamos que $y(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}^N} c_\mu x^\mu$ es una serie solución de la ecuación $f(x, y) = 0$. Supongamos también que $y(x)$ tiene ω -primer y ω -segundo término. Si $In_\omega = c_{\mu_0}x^{\mu_0}$ ¿Qué podemos decir sobre c_{μ_0} y μ_0 ?

Sea $\bar{y} = y - In_\omega(y)$ y $f(x, y) = \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{(\alpha, j)}x^\alpha y^j$ el desarrollo en serie de potencias de f . Se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, c_{\mu_0}x^{\mu_0} + \bar{y}) \\ &= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{(\alpha, j)}x^\alpha (c_{\mu_0}x^{\mu_0} + \bar{y})^j \\ &= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{(\alpha, j)} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} c_{\mu_0}^k x^{\alpha+k\mu_0} \bar{y}^{j-k}. \end{aligned}$$

Como $\nu_\omega(\bar{y}) > \nu_\omega(y) = \omega \cdot \mu_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \nu_\omega(x^{\alpha+k\mu_0}\bar{y}^{j-k}) &\geq \omega \cdot (\alpha + k\mu_0) + \\ &\quad (j - k)\omega \cdot \mu_0 \\ &= \omega \cdot (\alpha + j\mu_0) \\ &= \omega \cdot \alpha + j(\omega \cdot \mu_0) \\ &= \omega \cdot \alpha + j\nu_\omega(y) \\ &= (\omega, \nu_\omega(y)) \cdot (\alpha, j) \end{aligned}$$

siendo la desigualdad estricta si y sólo si $k \neq j$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, c_{\mu_0}x^{\mu_0} + \bar{y}) \\ &= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{(\alpha, j)}c_{\mu_0}^j x^{\alpha+j\mu_0} + \tilde{y}_{\alpha, j} \end{aligned}$$

donde $\nu_\omega(\tilde{y}_{\alpha, j}) > (\omega, \nu_\omega(y)) \cdot (\alpha, j)$ para toda $(N + 1)$ -upla (α, j) .

Sea $m = \min\{(\omega, \nu_\omega(y)) \cdot (\alpha, j) \mid (\alpha, j) \in \mathcal{E}(f)\}$. Como los términos del mismo orden deben cancelarse se tiene que necesariamente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}} a_{(\alpha, j)}c_{\mu_0}^j x^{\alpha+j\mu_0}. \\ (\omega, \nu_\omega(y)) \cdot (\alpha, j) &= m \\ (\alpha, j) &\in \mathbb{N}^{N+1} \end{aligned} \tag{7}$$



Según la definición (3.4) m es el $(\omega, \nu_\omega(y))$ -orden de f , y el lado derecho de la igualdad anterior es la $(\omega, \nu_\omega(y))$ -parte inicial de f . Se tiene entonces:

$$\text{In}_{(\omega, \nu_\omega(y))} f(x, \text{In}_\omega(y)) = 0.$$

Como ω es de coordenadas racionalmente independientes el hiperplano $\{\zeta \in \mathbb{R}^N \mid \omega \cdot \zeta = m\}$ tiene sólo un punto ζ_q de coordenadas racionales. En este caso la igualdad (7) es equivalente a

$$0 = x^{\zeta_q} \sum_{\substack{(\omega, \nu_\omega(y)) \cdot (\alpha, j) = m \\ (\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}}} a_{(\alpha, j)} c_{\mu_0}^j.$$

En particular c_{μ_0} debe ser una raíz del polinomio

$$\begin{aligned} \Phi(c) &= \text{In}_{(\omega, \nu_\omega(y))} f(1, \dots, 1, c) \\ &= \sum_{\substack{(\omega, \nu_\omega(y)) \cdot (\alpha, j) = m \\ (\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}}} a_{(\alpha, j)} c^j. \end{aligned}$$

Este polinomio tiene raíces distintas de cero si y sólo si tiene más de un término.

¿Cómo varía la ϑ -parte inicial de f cuando hacemos $\vartheta = (\omega, \nu)$ y variamos ν ? ¿Cómo son las ϑ -partes iniciales diferentes que podemos obtener?

Para $f(x, y) = y^4 + x^5 + y^4 + x^2y + x^4y^2 + x^2y^3 + x^5y^4$ (figura 1) se tiene:

Si $\vartheta = (1, \frac{1}{3})$ entonces $\text{In}_\vartheta(f) = x^4$.

Si $\vartheta = (1, \frac{2}{3})$ entonces $\text{In}_\vartheta(f) = x^2y + y^4$ (figura 3 abajo).

Si $\vartheta = (1, \frac{3}{2})$ entonces $\text{In}_\vartheta(f) = x^2y$ (figura 2).

Si $\vartheta = (1, 2)$ entonces $\text{In}_\vartheta(f) = x^2y + x^4$ (figura 3 arriba).

Si $\vartheta = (1, 3)$ entonces $\text{In}_\vartheta(f) = x^4$.

y estas son las todas las ϑ -partes iniciales distintas que podemos obtener con $\vartheta = (1, \nu)$ y $\nu > 0$.

Necesitamos una generalización de la definición de polígono de Newton (definición 2.14):

Definición 3.6. Sea f una serie de potencias en N indeterminadas. El **poliedro de Newton de f** es la envolvente convexa de $\{\alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}^N \mid \alpha \in \mathcal{E}(f)\}$.

Un polígono tiene vértices y lados. Un poliedro tiene caras de distintas dimensiones.

Definición 3.7. Sea P un poliedro en \mathbb{R}^{N+1} y sea ϑ un vector no nulo de \mathbb{R}^{N+1} . Definimos

$$\text{cara}_\vartheta(P) = \{u \in P \mid \vartheta \cdot u \leq \vartheta \cdot v, \forall v \in P\}.$$

Un subconjunto de P que puede escribirse de esta manera es una **cara** de P . La **dimensión** de una cara es la dimensión del mínimo subespacio afín que la contiene. Llamamos **vértices** a las caras de dimensión cero y **aristas** a las de dimensión uno.

Llamaremos **altura** a la última coordenada de un punto. Diremos que una arista es **horizontal** si está contenida en un hiperplano de altura constante.

Sea P un poliedro contenido en $\mathbb{R}_{\geq 0}^{N+1}$ con vértices de coordenadas racionales. Si $\vartheta = (\omega, \nu) \in \mathbb{R}_{> 0}^{N+1}$ con $\omega \in \mathbb{R}_{> 0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes, entonces $\text{cara}_\vartheta(P)$ es un vértice o una arista no horizontal.

Definición 3.8. Sea P un poliedro contenido en $\mathbb{R}_{\geq 0}^{N+1}$ con vértices de coordenadas racionales. Y sea $\omega \in \mathbb{R}_{> 0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes. El **camino de aristas** de P seleccionado por ω es:

$$\text{camino}_\omega P = \bigcup_{\nu \in \mathbb{R}_{> 0}} \text{cara}_{(\omega, \nu)} P$$



Generalicemos ahora el concepto de polinomio característico (definición 2.15)

Definición 3.9. Sea C una cara finita del poliedro de Newton de $f = \sum_{(\alpha,j) \in \mathcal{E}(f)} a_{(\alpha,j)} x^\alpha y^j$ el **polinomio característico** asociado a C es el polinomio

$$\Psi_C(f) = \sum_{(\alpha,j) \in \mathcal{E}(f) \cap C} a_{(\alpha,j)} x^\alpha y^j.$$

El polinomio característico asociado a un vértice tiene sólo un término. El polinomio característico asociado a una arista tiene más de un término, si la arista es no horizontal el conjunto de exponentes del polinomio asociado contiene puntos de alturas distintas.

Si $C = \text{cara}_\vartheta(\text{PN}(f))$ entonces $\text{In}_\vartheta(f) = \Psi_C(f)$. Tenemos ya un análogo para hipersuperficies del resultado 2.16.

Resultado 3.10. Sea f una función analítica de una vecindad del origen de \mathbb{C}^{N+1} en \mathbb{C} con $f(\underline{0}) = 0$. Sea $\omega \in \mathbb{R}_{>0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes. Supongamos que existe $y(x)$ con $f(x, y(x)) = 0$ y sea $c_{\mu_0} x^{\mu_0}$ el ω -primer término de $y(x)$. Entonces:

- $A := \text{cara}_{(\omega, \omega \cdot \mu_0)} NP(f)$ es un arista.
- c_{μ_0} es raíz del polinomio $\Phi_A(c) = \Psi_A(f)(1, \dots, 1, c)$.

Ya estamos en condiciones de dar un método para calcular series solución término a término

MÉTODO 3.11. Dadas $f : (\mathbb{C}^{N+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ analítica y $\omega \in \mathbb{R}_{>0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes. Sea $f_1 := f$, sea N igual al número de términos que queremos calcular, sea $\nu_0 := -1$, y sea $\text{sol} := 0$

Desde $i = 1$ hasta $i = N$

Si $f_i(x, 0) = 0$ devolver:

sol es una solución de $f = 0$ con i términos

Si $f_i(x, 0) \neq 0$ hacer lo siguiente:

1. Elegir una arista $A_i = \text{cara}_{(\omega, \nu_i)} NP(f_i)$ del camino de aristas seleccionado por ω del poliedro de Newton de f_i con la propiedad de que

$$\nu_i > \nu_{i-1}.$$

2. Elegir una raíz c_i distinta de cero del polinomio característico $\Phi_{A_i}(c) = \Psi_{A_i}(f)(1, \dots, 1, c)$.

3. Hacer

- a. Sea μ_i el único vector de coordenadas racionales con la propiedad $\omega \cdot \mu_i = \nu_i$,
- b. $\text{sol} := \text{sol} + c_i x^{\mu_i}$,
- c. $f_{i+1} := f_i(x, y + c_i x^{\mu_i})$.

Como ya dijimos en la introducción, el teorema 2.18 no es válido para hipersuperficies generales. Para un tipo de hipersuperficies llamadas *casi-ordinarias* se sabe que siempre existen paramétricas. El método para encontrar estas paramétricas utilizando el poliedro de Newton está descrito en [1].

En el caso general diferentes órdenes pueden dar lugar a diferentes soluciones. Además, en general, aparecen exponentes negativos. De todas formas se puede probar

- El paso

1. Elegir una arista $A_i = \text{cara}_{(\omega, \nu_i)} NP(f_i)$ del camino de aristas seleccionado por ω del poliedro de Newton de f_i con la propiedad de que

$$\nu_i > \nu_{i-1}.$$



siempre puede realizarse.

- $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_\omega(f(x, \sum_{i=1}^N c_i x^{\mu_i})) = \infty$. Este punto se prueba mostrando que
 - los denominadores de las coordenadas de los μ_i no crecen indefinidamente.
 - El conjunto $\{\mu_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ está contenido en un cono σ con la propiedad $\omega \cdot u > 0$ para todo $u \in \sigma \setminus \{0\}$.
- Haciendo $N = \infty$ la serie

$$y(x) := \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$$

converge en un punto de $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^N$.

Estos puntos están demostrados en [11].

Al igual que el método de Newton podía ser generalizado para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, el método 3.11 se generaliza a ecuaciones en derivadas parciales [3], [4].

4. Espacios Analíticos Generales

Sea \mathcal{A} un conjunto analítico de \mathbb{C}^{N+M} de dimensión N . Denotamos x por (x_1, \dots, x_N) e y por (y_1, \dots, y_M) . Un conjunto analítico \mathcal{A} se escribe como

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^{N+M} \mid f(x, y) = 0, \forall f \in \mathcal{I}\}$$

donde \mathcal{I} es un ideal del anillo de funciones analíticas en una vecindad del origen. Este hecho está explicado en [15] para conjuntos algebraicos. El caso analítico es análogo.

En [2] se demuestra que si la proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{C}^N \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

es finita. Entonces, para todo $\omega \in \mathbb{R}_{>0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes, existe $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, un cono σ con la propiedad $\omega \cdot u > 0$ para todo $u \in \sigma \setminus \{0\}$, y M series

$$y_i(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^N \cap \sigma} c_\mu^{(i)} x^\mu, \quad i = 1, \dots, M$$

tales que $f(x, y(x)) = 0$, donde $y(x) := (y_1(x), \dots, y_M(x))$.

Actualmente no existen métodos de cálculo que siempre funcionen para encontrar estas series. Siguiendo el razonamiento de Newton se llega a:

Resultado 4.1. *Sea $\omega \in \mathbb{R}_{>0}^N$ de coordenadas racionalmente independientes. Sea σ un cono con la propiedad $\omega \cdot u > 0$ para todo $u \in \sigma \setminus \{0\}$. Sea $y(x) := (y_1(x), \dots, y_M(x))$ con $\mathcal{E}(y_i) \subset \frac{1}{N}\mathbb{Z}^N \cap \sigma$. Denotemos $In_\omega(y)$ por $(In_\omega(y_1), \dots, In_\omega(y_M))$ y $\nu_\omega(y)$ por $(\nu_\omega(y_1), \dots, \nu_\omega(y_M))$. Se tiene:*

$$f(x, y(x)) = 0 \implies In_{(\omega, \nu_\omega(y))} f(x, In_\omega(y)) = 0.$$

Para diseñar un método de cálculo a partir de este resultado pensamos que se debe reemplazar el poliedro de Newton por el *abanico de Groebner* introducido por Mora y Robbiano en [12].

Referencias

- [1] M. E. Alonso, I. Luengo, and M. Raimondo. An algorithm on quasi-ordinary



- polynomials. In *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Rome, 1988)*, volume 357 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 59–73. Springer, Berlin, 1989.
- [2] F. Aroca. Puiseux parametric equations of analytic sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004) no. 10, 3035–3045
- [3] F. Aroca and J. Cano. Formal solutions of linear PDEs and convex polyhedra. *J. Symbolic Comput.*, 32(6):717–737, 2001. Effective methods in rings of differential operators.
- [4] F. Aroca, J. Cano, and F. Jung. Power series solutions of pde's. In *Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Philadelphia)*, New York, 2003. ACM.
- [5] E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Translated from the German by John Stillwell.
- [6] J. Cano. An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solutions of Pfaffian forms. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43(1):125–142, 1993.
- [7] J. Della Dora and F. Richard-Jung. About the Newton algorithm for non-linear ordinary differential equations. In *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Kihei, HI)*, pages 298–304 (electronic), New York, 1997. ACM.
- [8] H. Fine. On the functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux Polygon construction to these equations. *Amer. Jour. of Math.*, XI:317–328, 1889.
- [9] G. Fischer. *Plane algebraic curves*, volume 15 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1994 German original by Leslie Kay.
- [10] B. Malgrange. *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, volume 96 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.
- [11] J. McDonald. Fiber polytopes and fractional power series. *J. Pure Appl. Algebra*, 104(2):213–233, 1995.
- [12] T. Mora and L. Robbiano. The gröbner fan of an ideal. *J. Symbolic Comput.*, 6:183–208, 1988.
- [13] I. Newton. *The correspondence of Isaak Newton*, volume 2, chapter (1676-1687). Cambridge University Press, 1960. Cartas del 13 de junio y 24 de octubre de 1676.
- [14] Ostrowsky. über die bedeutung der theorie der konvexen polyeder für die formale algebra. *Jahresberichte Deutsche Math. Verein.*, 30:98–99, 1921.
- [15] J. Snoussi. Singularidades de curvas planas. En *Memorias del Foro de Matemáticas del Sureste*, Mayo 2003.



- [16] R. J. Walker. *Algebraic Curves*. Princeton Mathematical Series, vol. 13. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950.

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
22 – 28 de mayo de 2003
Cunduacán Tabasco
México

Enviado: Mayo, 2003

Publicado: Diciembre, 2004

El grado de gérmenes analítico reales de tipo no finito

Víctor Castellanos Vargas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
vicas@ujat.mx

Resumen

Dado un germen de función analítico real que define un cero aislado en el origen tal que los ceros del germen complejificado define una hipersuperficie reducida en los complejos, probamos que el grado de dicho germen, es la signatura de una forma bilineal definida sobre una sub-álgebra de dimensión finita (como \mathbb{R} -espacio vectorial) del anillo de coordenadas del germen real cuya dimensión es infinita.

1. Introducción

Sea $g := (g_1, \dots, g_n) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germen de función analítico real en el origen con un cero aislado en 0 y denotemos por $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ al anillo de gérmenes de funciones analítico reales en 0. Al germen g , le asociamos el ideal generado por sus componentes g_i , $I_g = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ en el anillo \mathcal{A} y hacemos $Q_g = \frac{\mathcal{A}}{I_g}$. Cuando el cero aislado de g permanece aislado para el germen complejificado, se dice que el mapeo g es de tipo finito y en ese caso, Eisenbud y Levine por un lado y Khimshiasvilli por otro, encontraron una fórmula algebraica para calcular el grado del germen en 0, vía la signatura de una forma bilineal, definida sobre el álgebra Q_g

que resulta ser de dimensión finita (como \mathbb{R} -espacio vectorial) [EL, AGV, K]. En otro caso, el álgebra Q_g es de dimensión infinita y la fórmula de Eisenbud y Levine no funciona, ya que la signatura de una forma bilineal sobre un espacio de dimensión infinita no está bien definida.

En este trabajo, mostraremos como se puede obtener una fórmula algebraica, al estilo Eisenbud–Levine–Khimshiasvilli, cuando el germen g no es de tipo finito y considerando que los ceros complejos del germen forman una hipersuperficie reducida fuera del origen.

El caso general, es decir, para gérmenes que dan lugar a una variedad de ceros complejos de cualquier dimensión, este es un problema abierto. En [C1, C2] se estudia el problema, dando una respuesta para una clase especial de gérmenes de funciones analítico reales, el cual el autor las denomina del **tipo \mathbf{A}_k** .



2. La naturaleza de los gérmenes reales C^∞ que dan lugar a una hipersuperficie de ceros complejos

Simple que hablemos de g , nos estaremos refiriendo a un germen de función analítico real en \mathbb{R}^n en cero, con una singularidad aislada en cero y ceros complejos de codimensión 1, es decir, una hipersuperficie. Como de costumbre, los ceros reales de g los denotamos por $Z_{\mathbb{R}}(g)$ y los ceros complejos por $Z_{\mathbb{C}}(g)$. Lo primero que tenemos que observar, es que un germen como g tiene la siguiente propiedad.

Lema 2.1. *Dado el germen g , existe una función analítico real $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

1. f es un factor común de las g_i , esto es, existe un germen r tal que

$$g(x) = f(x)r(x). \quad (1)$$

2. f no cambia de signo fuera de cero y $f(0) = 0$.

Demostración. Como $Z_{\mathbb{C}}(g)$ es una hipersuperficie, entonces existe una función h holomorfa, que es factor común de las g_i ([GH], [Gun] y [W]), esto es

$$g_i = hr_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Por otro lado, como \mathcal{O} (el anillo de gérmenes de funciones holomorfas) es un dominio de factorización única (DFU), tenemos la descomposición en factores primos de cada g_i ,

$$g_i = u_i \prod_{j=1}^{k_i} g_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

En $\mathbb{C}\{x\}$ (series de potencias) tenemos definida la conjugación en los coeficientes,

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{C}\{x\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{x\} \\ p = \sum_{|I|=0}^{\infty} a_I x^I &\longmapsto \bar{p} = \sum_{|I|=0}^{\infty} \bar{a}_I x^I \end{aligned}$$

En particular, como $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que $\bar{g}_i = g_i$ para toda i . Por lo tanto, para cada i fijo, se tiene que, en la descomposición en factores primos de g_i , cualquier $g_{i,j}$ tiene su conjugado, por lo que g_i se escribe de la forma

$$g_i = u_i \left(\prod_{j=1}^{k_{i_0}} g_{i,j} \right) \left(\prod_{j=1}^{k_{i_0}} \bar{g}_{i,j} \right).$$

Ahora, por (2) hay elementos $g_{i,j}$ que pertenecen a la descomposición en primos de todos los g_i y en consecuencia su conjugado, por lo tanto, los g_i tienen un factor común f que es analítico real, así

$$g_i = fr_i$$

con f analítico real y en consecuencia, los r_i también son analítico reales. Luego $r = (r_1, \dots, r_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es analítico real y $g(x) = f(x)r(x)$.

Claramente, $f(0) = 0$ y f es de un solo signo fuera de cero, pues de lo contrario la singularidad de g no sería aislada. \square

La siguiente propiedad sobre el grado de g , es fundamental para establecer una fórmula algebraica para calcular éste.

Lema 2.2. *El grado de g está relacionado con el grado de r , mediante la ecuación*

$$\deg(g, 0) = (\text{signo de } f)^n \deg(r, 0) \quad (3)$$

Demostración. Por el lema (2.1) tenemos que $g = fr$ donde $f(0) = 0$ y $f|_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$ es positiva o negativa. Así que,

$$\frac{g}{\|g\|} = \frac{fr}{\|fr\|} = \frac{f}{\|f\|} \frac{r}{\|r\|} = (\text{signo de } f) \frac{r}{\|r\|}$$



Claramente el grado de $g/||g||$ es el grado de g , por lo que

$$\text{deg}(g, 0) = (\text{signo de } f)^n \text{deg}(r, 0).$$

□

Por otro lado, el determinante Jacobiano de g en el álgebra Q_g también se relaciona con el determinante Jacobiano de r .

Lema 2.3. *El determinante Jacobiano J_g de g en el álgebra Q_g , satisface*

$$J_g = (f)^n J_r, \tag{4}$$

donde J_r es el determinante Jacobiano de r .

Demostración. Por el lema 2.1 tenemos que $g = fr$ y definimos

$$r^t = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad r_{x_j}^t = \begin{pmatrix} r_{1,x_j} \\ \vdots \\ r_{n,x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_n}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

$$A_j = f_{x_j} r^t, \quad B_j = f r_{x_j}^t,$$

donde $f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ y $j = 1, \dots, n$. Con esta notación, se tiene que el jacobiano de g se escribe como

$$J_g = \det(A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n).$$

Una propiedad de los determinantes, dice que si una columna tiene la forma $B + sC$ con s una constante, entonces el determinante de dicha matriz es la suma del determinante de la matriz con la columna B mas s veces el determinante de la matriz con la columna C . Usando esta propiedad, tenemos que J_g es una suma de determinantes de matrices de la forma $S = (S_1, \dots, S_n)$, donde $S_j = A_j$ ó $S_j = B_j$. Así, cualquier matriz S que tiene

entre sus columnas a A_j y A_k para algunos j y k , se tiene que

$$\begin{aligned} \det(S) &= \det(S_1, \dots, A_j, \dots, A_k, \dots, S_n) \\ &= f_{x_j} f_{x_k} \det(S_1, \dots, r^t, \dots, r^t, \\ &\quad \dots, S_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues hay dos columnas iguales. Por otro lado, si S es tal que $S_j = B_j$ para todo j excepto para una única $j = k$ para la cual $S_k = A_k$, se tiene que

$$\begin{aligned} \det(S) &= \det(B_1, \dots, \\ &\quad B_{k-1}, A_k, B_{k+1}, \dots, B_n) \\ &= \det(fr_{x_1}^t, \dots, \\ &\quad fr_{x_{k-1}}^t, f_{x_k} g^t, fr_{x_{k+1}}^t, \dots, fr_{x_n}^t) \\ &= f^{n-2} f_{x_k} \det(r_{x_1}^t, \dots, \\ &\quad r_{x_{k-1}}^t, f g^t, r_{x_{k+1}}^t, \dots, r_{x_n}^t), \end{aligned}$$

es un elemento de I_g y por lo tanto es cero en Q_g . Por último, cuando S es tal que $S_j = B_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, se sigue que

$$\begin{aligned} \det(S) &= \det(B_1, \dots, B_n) \\ &= \det(fr_{x_1}^t, \dots, fr_{x_n}^t) \\ &= f^n \det(r_{x_1}^t, \dots, r_{x_n}^t) \\ &= f^n J_r. \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye la prueba. □

Como se puede ver, el lema anterior se satisface en general para dos gérmenes y una función cualquiera que relacione ámbas, mediante la ecuación (1).

3. La fórmula algebraica

En esta sección, vamos a establecer y probar el resultado principal de este trabajo. Mediante un ejemplo, mostraremos la forma de operar de la fórmula.



Teorema 3.1. *Sea g , un germen de función analítico real en cero, con una singularidad aislada en 0 y una variedad reducida de ceros complejos de codimensión 1. Si el germen r que se obtiene del lema (2.1) es de tipo finito, entonces el álgebra*

$$M = \frac{\mathcal{A}}{(I_g : \sqrt{I_g})}$$

es de dimensión finita como \mathbb{R} -espacio vectorial, la clase J_0 de J_g/f^n en M es no cero y si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier funcional lineal con la propiedad de que en J_0 es positiva, entonces la forma bilineal \langle, \rangle_ϕ definida como

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M &\rightarrow M \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \mapsto \phi(ab) \end{aligned}$$

es simétrica, no degenerada, su signatura no depende de ϕ y

$$\begin{aligned} \text{deg}(g, 0) = \\ (\text{signo de } f)^n (\text{signatura de } \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi) \end{aligned} \quad (5)$$

Demostración. Es claro que $I_g = (f)I_r$, por lo que

$$\begin{aligned} \sqrt{I_g} &= \sqrt{(f)I_g} \\ &= \sqrt{(f) \cap I_g} \\ &= \sqrt{(f)} \cap \sqrt{I_g}. \end{aligned}$$

Como f es reducida y $Z_{\mathbb{C}}(r) = \{0\}$, se tiene que $\sqrt{(f)} = (f)$ y $\sqrt{I_r} = (x_1, \dots, x_n)$ (el ideal maximal). Por lo tanto,

$$\sqrt{I_g} = (f) \cap (x_1, \dots, x_n) = f.$$

Luego, $(I_g : \sqrt{I_g}) = (fI_r : f) = I_r$ y en consecuencia

$$M = Q_r,$$

la cual es un álgebra finito dimensional, pues r tiene una singularidad algebraicamente aislada. Así, la clase J de J_r en M es no cero,

y por el teorema de Eisenbud–Levine, se concluye que la forma bilineal definida es no degenerada, su signatura no depende de la funcional lineal y el grado de r es la signatura de dicha forma cuadrática. Usando el lema 2.2 se concluye el teorema. \square

Ejemplo 3.1. *El germen $g = (g_1, g_2) = (x^4 - y^4, 2x^3y + 2xy^3)$ de \mathbb{R}^2 tiene grado $+2$.*

Claramente, el germen g tiene una singularidad aislada en cero y ceros complejos de codimensión 1 (son dos rectas en \mathbb{C}^2). El radical del ideal I_g es $\sqrt{I_g} = x^2 + y^2 = f$ y el ideal cociente de I_g con su radical es $(I_g : \sqrt{I_g}) = (x^2 - y^2, 2xy) = I_r$.

Luego, $J_0 = 8y^2$ y una base para M es $E = \{1, x, y, y^2\}$. Para definir la funcional lineal $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(J_0) > 0$ basta con definirla como cero en cada elemento de la base excepto en y^2 donde la definimos como $+1$.

Así pues, la matriz que representa la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual tiene signatura $+2$. Por lo tanto el grado de g es

$$\text{deg}(g, 0) = (+1)^2(+2) = +2.$$

Para realizar los cálculos del ejemplo anterior, puede uno apoyarse en un software de computación como, Singular, Macaulay 2, CoCoA, Mathematica o Maple.

Referencias

[AGV] V. I. Arnold, S. M. Gusein–Zade and A. N. Varchenko, *Singulari-*



- ties of differentiable maps, Vol. I*, Birkhäuser (1985).
- [C1] V. Castellanos–Vargas *Una fórmula algebraica del índice de Poincaré–Hopf para campos vectoriales reales con una variedad de ceros complejos* Ph. D. Thesis, CIMAT (2000).
- [C2] V. Castellanos–Vargas, *The index of non algebraically isolated singularities*, Bull. SMM., 17(2002), 200-222.
- [EL] D. Eisenbud and H. Levine, *An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ.*, Annals of Math. **106** (1977) 19–44.
- [GH] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons (1978).
- [Gun] R. C. Gunning, *Lectures on complex analytic varieties: Finite analytic mapping*, Princeton N. J. (1974).
- [K] G. N. Khimshiashvili, *On the local degree of a smooth map* Comm. Acad. Sci. Georgian SSR **85:2** (1977) 309–311.
- [W] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison–Wesley (1972).

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
 22 – 28 de mayo de 2003
 Cunduacán Tabasco
 México

Enviado: Mayo, 2003
Publicado: Diciembre, 2004

Dinámica local de configuraciones principales de superficies en \mathbf{R}^4

Matías Navarro*

Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

nsoza@tunku.uady.mx

Resumen

Una ν -configuración principal de una superficie M inmersa en \mathbb{R}^4 es el conjunto formado por los puntos umbílicos y las líneas de curvatura principal respecto a un campo vectorial unitario ν normal a M . Se describe aquí el conjunto de bifurcación de las ν -configuraciones principales de una superficie local M , lo cual permite analizar los cambios en la geometría de las ν -configuraciones principales. Estos cambios dependen de dos parámetros de la superficie, así como del campo vectorial ν parametrizado en el espacio de los 1-jets de los campos vectoriales normales a la superficie que definen puntos umbílicos aislados simples en M .

MSC: 53A05, 34C23, 57R25.

Palabras clave: ν -configuración principal, punto umbílico, conjunto de bifurcación

1. Introducción

Sea M una superficie inmersa en \mathbb{R}^4 y sea ν un campo vectorial diferenciable unitario normal a M . Mediante el operador de forma

y la segunda forma fundamental respecto a ν podemos definir dos campos de líneas ortogonales, las ν -direcciones principales, cuyas singularidades son los puntos ν -umbilical points. Una ν -configuración principal en M es el conjunto formado por los puntos ν -umbílicos y las familias de las líneas de curvatura maximal y minimal respecto a ν , que están definidas por las curvas integrales de las ν -direcciones principales. Ramírez-Galarza y Sánchez-Bringas [10] probaron que para configuraciones principales de superficies inmersas en \mathbb{R}^4 , existe una clase genérica de pares estructuralmente estables (\mathcal{I}, ν) , donde \mathcal{I} es una inmersión local de una superficie compacta M en \mathbb{R}^4 y ν es un campo vectorial normal que define un punto umbílico aislado. Además, los tipos topológicos de las correspondientes configuraciones principales son los mismos tipos D_i , $i = 1, 2, 3$, que aparecen en la familia genérica de configuraciones principales Darbouxianas de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 , descrita por Sotomayor y Gutierrez [12]. Es por esto que la clase genérica de pares (\mathcal{I}, ν) con $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ también es llamada Darbouxiana. Estas foliaciones genéricas también aparecen en un contexto más general en [4], [2], y [3]. En contraste con estas similitudes entre las configuraciones principales de superficies en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 existe una diferen-

* Parcialmente apoyado por el proyecto CONA-CyT: 2002-C01-42404



cia notable respecto a los índices admisibles de un punto umbílico. El índice de un punto ν -umbílico es el índice de Poincaré-Hopf de una singularidad de cualquiera de las dos ν -direcciones principales, ya que los índices de ambas direcciones coinciden. Una famosa conjetura de Loewner afirma que cualquier punto umbílico de una superficie diferenciable inmersa en \mathbb{R}^3 debe tener índice menor o igual a uno. Esto ha sido demostrado afirmativamente para superficies e inmersiones analíticas por H. Hamburger [6], G. Bol [1], T. Klotz [7], C. J. Titus [13], y H. Scherbel [11], motivados todos ellos por la conjetura de Carathéodory de 1926, aún sin resolver en su totalidad, que afirma lo siguiente: existen al menos dos puntos umbílicos en toda superficie cerrada y convexa suficientemente diferenciable. Por otro lado, Gutiérrez y Sánchez-Bringas [5] probaron que, dado cualquier entero n , existe una superficie analítica M inmersa en \mathbb{R}^4 y un campo vectorial analítico ν normal a M con un punto ν -umbílico aislado de índice $n/2$. Esto implica que la conjetura de Loewner no puede extenderse a superficies inmersas en \mathbb{R}^4 . Los pares (\mathcal{T}, ν) con puntos umbílicos de índice mayor que uno aparecen en el complemento de la clase Darbouxiana de la superficie correspondiente, el cual constituye el conjunto de bifurcación estudiado aquí. Dado un punto ν -umbílico Darbouxiano $p \in M$, es posible obtener otros tipos de configuraciones Darbouxianas en p variando solamente los parámetros del campo vectorial normal ν de la superficie M inmersa en \mathbb{R}^4 . En [8] y [9] Navarro y Sánchez-Bringas obtuvieron el diagrama de bifurcación de las ν -configuraciones principales locales dependiendo de:

- (1) los parámetros del 1-jet de los campos vectoriales normales que definen un pun-

to umbílico aislado simple en $p \in M$, y

- (2) los parámetros importantes de la superficie M en este análisis.

En estas notas se da un panorama de los resultados obtenidos por los autores en [9].

2. Configuraciones Principales en \mathbb{R}^4

Sea M una superficie diferenciable orientada inmersa en \mathbb{R}^4 con la métrica Riemanniana inducida de la métrica Riemanniana estándar de \mathbb{R}^4 . Para cada $p \in M$ consideremos la descomposición $T_p\mathbb{R}^4 = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$, donde $(T_pM)^\perp$ es el complemento ortogonal de T_pM en \mathbb{R}^4 . Sea $\bar{\nabla}$ la conexión Riemanniana de \mathbb{R}^4 . Si $p \in M$ y $\nu \in (T_pM)^\perp$, $\nu \neq 0$, el operador de forma está definido por

$$S_\nu : T_pM \rightarrow T_pM, \quad S_\nu(V) = -(\bar{\nabla}_{\bar{\nu}}\bar{\nu})^\top,$$

donde $\bar{\nu}$ es una extensión local a \mathbb{R}^4 del campo vectorial normal ν en p y \top significa la componente tangencial. La segunda forma fundamental de M en p es la forma cuadrática en T_pM dada por

$$II_\nu(V) = \langle S_\nu(V), V \rangle.$$

Existe para cada $p \in M$ una base ortonormal de vectores propios de S_ν en T_pM debido al hecho de que el operador de forma es auto-adjunto. Por continuidad, la restricción de la segunda forma fundamental a los vectores unitarios en T_pM alcanza sus valores máximo y mínimo. Los correspondientes valores propios k_1 y k_2 son las ν -curvaturas principales máxima y mínima, respectivamente. El punto $p \in M$ es ν -umbílico si las ν -curvaturas principales coinciden en p . Sea \mathcal{U}_ν el conjunto



de los puntos ν -umbílicos en M . Para todo $p \in M \setminus \mathcal{U}_\nu$ existen dos ν -direcciones principales definidas por los vectores propios de S_ν . Estos campos de direcciones son diferenciables e integrables, definiendo dos familias de curvas ortogonales, la cuales reciben el nombre de ν -líneas de curvatura. Las dos foliaciones ortogonales \mathcal{L}_ν, l_ν y los puntos ν -umbílicos \mathcal{U}_ν forman la ν -configuración principal de M , $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{U}_\nu, \mathcal{L}_\nu, l_\nu)$. La ecuación diferencial que determina la ν -configuración principal está dada por

$$S_\nu(c'(t)) = \lambda(c(t))c'(t), \quad (1)$$

donde $c : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ es una curva diferenciable determinando una ν -línea de curvatura. Para estudiar las configuraciones principales locales de una superficie inmersa en \mathbb{R}^4 en una vecindad de un punto ν -umbílico $p \in M$, introduzcamos un sistema de coordenadas (x, y, z, w) , donde la superficie puede parametrizarse por

$$X(u, v) = (u, v, \varphi(u, v), \psi(u, v)). \quad (2)$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que p es el origen de \mathbb{R}^4 , que el plano tangente en p es el plano xy , y que el campo vectorial ν coincide con $(0, 0, 1, 0)$ en el origen. Entonces, los polinomios de Taylor de tercer orden alrededor de p de las funciones componentes φ y ψ de (2) son

$$\varphi(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{d}{2}u^2v + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3, \quad (3)$$

$$\psi(u, v) = \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \frac{\delta}{6}u^3 + \frac{\epsilon}{2}u^2v + \frac{\zeta}{2}uv^2 + \frac{\eta}{6}v^3,$$

donde $k, \dots, c, \alpha, \dots, \eta \in \mathbb{R}$. El término en uv de ψ ha sido eliminado por una rotación del plano xy . La ecuación diferencial (1) puede escribirse en este sistema de coordenadas como

$$(f_\nu E - e_\nu F) du^2 + (g_\nu E - e_\nu G) du dv + (g_\nu F - f_\nu G) dv^2 = 0, \quad (4)$$

donde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = \langle X_v, X_v \rangle$ son los coeficientes de la primera forma fundamental de la parametrización X y $e_\nu = \langle X_{uu}, \nu \rangle$, $f_\nu = \langle X_{uv}, \nu \rangle$, $g_\nu = \langle X_{vv}, \nu \rangle$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental respecto al campo vectorial normal ν . Suponiendo que el campo vectorial normal ν define un umbílico aislado en el origen, su 1-jet puede escribirse en este sistema como

$$\nu_1 = (-ku, -kv, 1, mu + nv), \quad (5)$$

donde k es el valor de las curvaturas principales en el origen respecto a ν y $m, n \in \mathbb{R}$. Llamaremos *umbilicales* a los campos vectoriales normales ν dados por (5). No es difícil probar que para cada par $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ existe un campo vectorial normal ν con su primer jet como se describe arriba. Entonces, el 1-jet de la ecuación diferencial de las líneas de curvatura (4) se escribe como

$$A(u, v) dv^2 + B(u, v) du dv + C(u, v) du^2 = 0, \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} A(u, v) &= d u + b v, \\ B(u, v) &= (a - b + (\alpha - \gamma) m) u + (-c + d + (\alpha - \gamma) n) v, \\ C(u, v) &= -d u - b v. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ una inmersión diferenciable de la superficie M en \mathbb{R}^4 y consideremos el haz proyectivo $\Pi : P\mathcal{I}(M) \rightarrow$



$\mathcal{I}(M)$, donde $P\mathcal{I}(M)$ se define como sigue. Sea $T(M) - \{\mathbf{0}\}$ el haz tangente sin la sección nula e identifiquemos cualesquiera dos elementos (x, \bar{v}) y (y, \bar{w}) que satisfagan las ecuaciones $x = y$ y $\bar{v} = \lambda \bar{w}$ para $\lambda \neq 0$. El conjunto de las clases de equivalencia definidas por esta identificación constituyen el conjunto $P\mathcal{I}(M)$. Sea $\mathcal{I}(x)$ cualquier punto umbílico en $\mathcal{I}(M) \subset \mathbb{R}^4$. Entonces existe una vecindad $V(\mathcal{I}(x))$ con una parametrización canónica (2) que identifica $\mathcal{I}(x)$ con el origen. En estos términos las ν -líneas de curvatura están definidas por la ecuación (3). El espacio $P\mathcal{I}(M)$ puede parametrizarse por dos cartas coordenadas:

$$(u, v, q = du/dv), \text{ y } (u, v, p = dv/du).$$

La ecuación (6) define en $P\mathcal{I}(M)$ una superficie $S(\mathcal{I}, \nu)$. En la carta coordenada (u, v, p) esta superficie está definida por $\mathcal{F}(u, v, p) = 0$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, v, p) = & (d u + b v) p^2 + \\ & ((a - b + (\alpha - \gamma) m) u + \\ & (-c + d + (\alpha - \gamma) n) v) p \\ & - (d u + b v). \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{U}_{\mathcal{I}, \nu}$ el conjunto de los puntos ν -umbilicales de $\mathcal{I}(M)$. Fuera de $\Pi^{-1}\mathcal{U}_{\mathcal{I}, \nu}$, $S(\mathcal{I}, \nu)$ es una superficie regular de $P\mathcal{I}(M)$, de hecho es una cubierta doble de $\Pi^{-1}\mathcal{I}(M) - \mathcal{U}_{\mathcal{I}, \nu}$. Si el origen de \mathbb{R}^4 es un punto umbílico, la línea proyectiva real $\Pi^{-1}(0, 0)$ está contenida en $S(\mathcal{I}, \nu)$.

Condición (T). El par (\mathcal{I}, ν) satisface la *condición de transversalidad* en el origen si las curvas definidas por los ceros de los coeficientes $A(u, v)$ y $B(u, v)$ de la ecuación (6) se intersectan en el origen transversalmente.

Esto es equivalente a la condición de que $S(\mathcal{I}, \nu)$ sea regular a lo largo de $\Pi^{-1}(0, 0)$. Esta propiedad es independiente de la parametrización. Definimos ahora el campo vectorial \mathcal{F}' en $P\mathcal{I}(M)$ por

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}_p \frac{\partial}{\partial u} + p \mathcal{F}_p \frac{\partial}{\partial v} + (-\mathcal{F}_u - p \mathcal{F}_v) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (7)$$

Este campo vectorial tiene las siguientes propiedades:

1. \mathcal{F}' es tangente a $S(\mathcal{I}, \nu)$.
2. $\Pi_*(\mathcal{F}')$ se anula solamente en el origen.
3. Sea $(u, v; p_i) \in S(\mathcal{I}, \nu)$, entonces $\Pi_*(\mathcal{F}'(u, v; p_i))$ genera la línea principal con la dirección p_i .
4. Los valores propios de la parte lineal del campo vectorial \mathcal{F}' en $(0, 0, p_i)$ son:
 - a) $\beta_1 = 0$,
 - b) $\beta_2 = 2b - a - (\alpha - \gamma)m + 2(c - 2d - (\alpha - \gamma)n)p_i - 3bp_i^2$,
 - c) $\beta_3 = (a - b + (\alpha - \gamma)m) + (3d - c + (\alpha - \gamma)n)p_i + 2bp_i^2$.

Las singularidades de $\mathcal{F}' \mid S(\mathcal{I}, \nu)$ en $\Pi^{-1}(0, 0)$ son las raíces del polinomio

$$f(p) = bp^3 + (2d - c + (\alpha - \gamma)n)p^2 + (a - 2b + (\alpha - \gamma)m)p - d. \quad (8)$$

El polinomio f definido por (8) se llama el *polinomio separatriz* del par (\mathcal{I}, ν) . Sus raíces son la herramienta que usamos para describir el tipo de configuración principal. De hecho, para la clase genérica Darbouxiana definida abajo, estas raíces están en correspondencia



directa con las direcciones tangentes con las líneas de curvatura que contienen el origen en su cerradura.

Definición 1. Sea el origen un punto ν -umbílico aislado de la superficie parametrizada por (2). Decimos que el origen es un punto ν -umbílico simple si es un mínimo no degenerado de la función

$$H(u, v) = B^2(u, v) - 4A(u, v)C(u, v),$$

donde A, B, C son los coeficientes de la ecuación diferencial de líneas de curvatura (6).

Cálculos directos muestran que si p es un punto ν -umbílico aislado simple de M , entonces las siguientes desigualdades se cumplen:

$$4d^2 + (a - b + (\alpha - \gamma)m)^2 > 0, \quad (9)$$

$$((a - b)b + (c - d)d + (\alpha - \gamma)(bm - dn))^2 > 0. \quad (10)$$

Definición 2. Sea p un punto ν -umbílico simple de una superficie M inmersa en \mathbb{R}^4 y sea f el polinomio separatriz del par (\mathcal{I}, ν) , donde $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la inmersión en p con campo normal umbilical ν . Entonces el punto p es llamado

- (a) **Darbouxiano** si f tiene solamente raíces simples y se cumple la condición (T).
- (b) D_{12} si f tiene una raíz simple y una doble.
- (c) \tilde{D}_1 si f tiene una raíz triple.

Existen tres tipos topológicos distintos de puntos ν -umbílicos Darbouxianos de acuerdo a los casos definidos abajo.

Definición 3. La clase Darbouxiana de (\mathcal{I}, ν) es el conjunto de las ν -configuraciones principales D_i , $i = 1, 2, 3$, definidas por los siguientes casos:

D_1 : El polinomio separatriz f tiene solamente una raíz real p_1 y los valores propios β_2, β_3 del campo vectorial \mathcal{F}' satisfacen $\beta_2(p_1)\beta_3(p_1) < 0$.

D_2 : f tiene tres raíces reales y distintas p_i , $i = 1, 2, 3$, $p_1 < p_2 < p_3$, y $\beta_2(p_2)\beta_3(p_2) > 0$ mientras que $\beta_2\beta_3 < 0$ para las otras raíces.

D_3 : f tiene tres raíces reales y distintas p_i , $i = 1, 2, 3$, y $\beta_2\beta_3 < 0$ para todas las raíces.

Estas condiciones determinan el comportamiento topológico de la configuración principal alrededor del punto umbílico de la siguiente forma. Las propiedades 1, 2, y 3 enlistadas arriba acerca del campo vectorial \mathcal{F}' dado en (7) pueden ser usadas para obtener una explosión del umbílico con el campo vectorial \mathcal{F}' tangente al "pull back" de las líneas de curvatura. Para el caso D_1 , se tiene solamente una singularidad de \mathcal{F}' en $(0, 0, p_1)$ de tipo silla. Para el caso D_2 tenemos tres singularidades a lo largo del divisor, un nodo entre dos sillas, y finalmente, para el caso D_3 , tenemos tres sillas a lo largo del divisor. La proyección sobre la superficie M de los retratos fase en la superficie $S(\mathcal{I}, \nu)$ de estas singularidades del campo \mathcal{F}' nos dan las ν -configuraciones principales Darbouxianas D_i . Estos tipos topológicos fueron descritos por Ramírez-Galarza y Sánchez-Bringas [10] y son los mismos que describen Sotomayor and Gutierrez [12] para superficies inmersas en



\mathbb{R}^3 . El tipo D_{12} se obtiene variando las condiciones del tipo D_2 hasta que una de las singularidades tipo silla coincide con la singularidad tipo nodo dando lugar a la aparición de una singularidad de tipo silla-nodo correspondiendo a la doble raíz del polinomio separatriz. Análogamente, el tipo \tilde{D}_1 se obtiene variando la condición del tipo D_{12} hasta que coinciden una silla y una silla-nodo, dando lugar a una única singularidad de tipo silla correspondiendo a la raíz triple del polinomio separatriz. El resultado es el mismo tipo topológico que tiene el caso D_1 .

3. Diagramas de Bifurcación

Consideremos una superficie local arbitraria M inmersa en \mathbb{R}^4 con un punto ν -umbílico aislado p . Genéricamente, cualquier perturbación de la dirección normal $\nu \in (T_p M)^\perp$ hace que p deje de ser umbílico. Supondremos que esta dirección está fija y solamente variaremos el primer jet del campo normal manteniendo la condición de definir un umbílico aislado en p . Sea \mathcal{N}_1 el conjunto de los 1-jet de los campos normales umbilicales ν en p . La forma normal de $\nu \in \mathcal{N}_1$ dada en (5) nos permite identificar \mathcal{N}_1 con \mathbb{R}^2 . Sean (m, n) las coordenadas de un elemento de \mathcal{N}_1 . Usando la parametrización canónica (2) de la superficie M alrededor de p y las inecuaciones (9) y (10), vemos que para $d \neq 0$ la inecuación (9) se satisface para toda $(m, n) \in \mathcal{N}_1$. En consecuencia, para obtener el conjunto de los puntos no simples sólo resta ver en cuales puntos no se satisface (10). Esto pasa para los puntos

(m, n) en la línea L que cumplen la ecuación

$$n = \left(\frac{b}{d}\right)m + \frac{(a-b)b + (c-d)d}{(\alpha-\gamma)d}, \quad (11)$$

$$(\alpha-\gamma)d \neq 0.$$

En [8] se probó que para $\nu \in \mathcal{N}_1$ con coordenadas (m, n) y $bd \neq 0$, el conjunto de bifurcación de los puntos ν -umbilicales aislados simples en el espacio \mathcal{N}_1 es la línea (11) y una curva algebraica real Γ con dos componentes conexas. Una componente tiene un punto singular de tipo cúspide y la otra es una curva difeomorfa a una línea recta. El punto singular de Γ es de tipo \tilde{D}_1 de codimension dos y los puntos regulares de Γ son del tipo D_{12} de codimension uno excepto en el único punto de tangencia T con la línea (11). Esto se obtiene usando en hecho de que los tipos D_{12} y \tilde{D}_1 están caracterizados por las raíces múltiples del polinomio separatriz f , las cuales ocurren donde se anula su discriminante Δ . En términos de los parámetros (m, n) del campo normal $\nu \in \mathcal{N}_1$, la ecuación $\Delta(m, n) = 0$ representa una curva algebraica real Γ de grado cuatro [8]. En un sistema conveniente de coordenadas esta curva puede escribirse como

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y) = 0, \quad (12)$$

donde $f_i(x, y)$, $i = 2, 3, 4$, son polinomios homogéneos de grado i dados por

$$f_2(x, y) = 27(bd)^{2/3}(\sqrt[3]{bx} + \sqrt[3]{dy})^2,$$

$$f_3(x, y) = 2(\alpha - \gamma)(2(\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{dy})^3 + 9(bd)^{1/3}(\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{dy})xy),$$

$$f_4(x, y) = -(\gamma - \alpha)^2 x^2 y^2.$$

El diagrama de bifurcación de las ν -configuraciones principales en el espacio \mathcal{N}_1 se obtuvo en [8], (Corolario 6). Este diagrama es topológicamente equivalente al que se



muestra en el primer cuadrante de la Figura 1. La componente cúspide de la curva Γ tiene su posición determinada por su línea tangente (doble) en el punto singular. Esta línea está dada por

$$\sqrt[3]{bx} + \sqrt[3]{dy} = 0.$$

Por lo tanto, los parámetros b, d de la superficie local M definidos en (3) por la función φ son los parámetros más importantes de la superficie en este análisis. En términos de estos parámetros de la superficie se obtienen los cambios del diagrama de bifurcación descritos en el siguiente teorema.

Teorema 1. Sea $\nu \in \mathcal{N}_1$ con coordenadas (m, n) , y $a, c, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ fijos, con $\gamma > \alpha$, $a > 0$, $c > 0$. Entonces, el diagrama de bifurcación de los puntos ν -umbilicales en el espacio \mathcal{N}_1 depende de los parámetros b y d de la parametrización canónica (2) de la superficie como se muestra en la Figura 1.

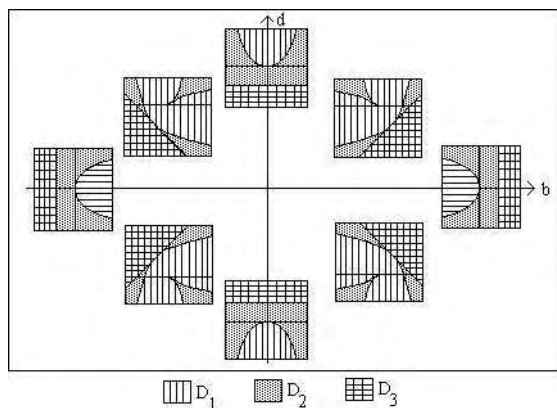


Figura 1: ν -configuraciones principales en \mathbb{R}^4 .

Prueba. El diagrama de bifurcación para los casos en que $bd \neq 0$ son topológicamente equivalentes al que se muestra en el primer cuadrante de la Figura 1. Ahora, sea $\nu \in \mathcal{N}_1$

con coordenadas (m, n) y $d = 0$, $b \neq 0$. En este caso demostraremos que el conjunto de bifurcación es la unión de la parábola $\tilde{\Gamma}$ definida por

$$m - \frac{a - 2b}{\gamma - \alpha} = -\left(\frac{\gamma - \alpha}{4b}\right)\left(n - \frac{c}{\alpha - \gamma}\right)^2$$

y la línea \tilde{L} definida por

$$(\gamma - \alpha)m = a - b.$$

La parábola menos su vértice es de tipo D_{12} de codimensión uno, y el vértice es de tipo \tilde{D}_1 de codimensión dos. El diagrama de bifurcación para $b > 0$, $\gamma > \alpha$ es el que se muestra en la Figura 1 sobre el eje b positivo. Para probar esto observamos primero que la condición $d = 0$ impuesta en la parametrización canónica (2) nos da

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3, \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \mathcal{O}(3) \right),$$

que junto con el 1-jet del campo normal umbilical $\nu \in \mathcal{N}_1$ dado por (5) determinan la ecuación diferencial de las ν -líneas de curvatura en la forma

$$bvdv^2 + [(a - b + (\alpha - \gamma)m)u + (-c + (\alpha - \gamma)n)v] dudv - bvdv^2 = 0.$$

Estas condiciones también implican que (9) y (10) se satisfacen si, y sólo si $a - b + (\alpha - \gamma)m \neq 0$. Por lo tanto, el conjunto de los puntos no simples es la línea \tilde{L} definida por $m = (a - b)/(\gamma - \alpha)$. Ahora, el polinomio separatriz es

$$f(p) = bp^3 + (-c + (\alpha - \gamma)n)p^2 + (a - 2b + (\alpha - \gamma)m)p,$$



el cual tiene las raíces

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_2 &= \frac{1}{2b}(c + (\gamma - \alpha)n + \sqrt{\Delta_2}), \\ p_3 &= \frac{1}{2b}(c + (\gamma - \alpha)n - \sqrt{\Delta_2}), \end{aligned}$$

donde Δ_2 está dada por

$$\Delta_2 = (c + (\gamma - \alpha)n)^2 + 4b(2b - a + (\gamma - \alpha)m).$$

La curva $\Delta(m, n) = 0$ se expresa en un sistema apropiado de coordenadas como

$$(\alpha - \gamma)x^2(4bx - (\alpha - \gamma)y^2) = 0. \quad (13)$$

De (13) obtenemos la línea $x = 0$ y la parábola $\tilde{\Gamma}$ definida por

$$4bx = (\alpha - \gamma)y^2.$$

La parábola divide el plano en dos regiones donde Δ_2 es diferente de cero. En el lado convexo tenemos $\Delta_2 < 0$, mientras que en el otro lado $\Delta_2 > 0$. La parábola y la línea menos el vértice es el lugar donde ocurre el tipo D_{12} . El vértice es del tipo \tilde{D}_1 . Ahora, debido al hecho de que las ν -configuraciones principales Darbouxianas definen componentes abiertas en el complemento de la unión de la parábola $\tilde{\Gamma}$ con la línea \tilde{L} , basta determinar el tipo de la ν -configuración principal en cualquier punto particular de cada componente. El complemento de estas curvas define cinco regiones. Podemos usar los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 0), \\ P_2 &= (b/(2(\gamma - \alpha)), 0), \\ P_3 &= (2b/(\gamma - \alpha), 0), \\ P_4 &= (-(\gamma - \alpha)/4b, 2), \\ P_5 &= (-(\gamma - \alpha)/4b, -2). \end{aligned}$$

Para cada uno de estos puntos P_i obtenemos las raíces del polinomio separatriz correspondiente f y los valores propios β_2, β_3 del campo vectorial \mathcal{F}' . Entonces los tipos de las ν -configuraciones principales Darbouxianas se determinan en cada punto de prueba P_i por el signo de estos valores propios de acuerdo a la Definición 3. Cuando $d \neq 0$ y $b = 0$, el diagrama de bifurcación es topológicamente equivalente al que se tiene en el caso donde $d = 0$ y $b \neq 0$. Finalmente, tomando los límites de la curva (12) cuando $d \rightarrow 0$, con $b \neq 0$ y cuando $b \rightarrow 0$, con $d \neq 0$, obtenemos el resultado del análisis de estos casos y del resultado de [8] mencionado arriba. \square

Referencias

- [1] G. Bol, *Über Nabelpunkte auf einer Eifläche*, Math. Z., 49 (1943/1944), 389–410.
- [2] J. W. Bruce and F. Tari, *On binary differential equations*, Nonlinearity 8 (1995), 255–271.
- [3] J. W. Bruce and F. Tari, *Generic 1-parameter families of binary differential equations of Morse type*, Discrete Contin. Dynam. Systems 3 (1997), no. 1, 79–90.
- [4] V. Guíñez, *Positive Quadratic Differential Forms and Foliations with Singularities on Surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), 477–502.
- [5] C. Gutierrez and F. Sánchez-Bringas, *On a Loewner's umbilic-Index-Conjecture for Surfaces in \mathbb{R}^4* , J. Dynam. Control Systems; Vol. 4, 1 (1998), 127–136.



- [6] H. Hamburger, *Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung*, Ann. of Math. 41 (1940), 63-68, II, III, Acta Math. 73 (1941), 174-332.
- [7] T. Klotz, *On Bol's proof of Carathéodory's Conjecture*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 277-311.
- [8] M. Navarro and F. Sánchez-Bringas, *Bifurcations of Simple Umbilical Points defined by Vector Fields Normal to a Surface Immersed in \mathbb{R}^4* , Qual. Theory Dyn. Sys., 2 (2001), 359-380.
- [9] M. Navarro and F. Sánchez-Bringas, *Dynamics of principal configurations near umbilics for surfaces in \mathbb{R}^4* , Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, May 24-27, Wilmington, NC, USA, (2002).
- [10] A. I. Ramírez-Galarza and F. Sánchez-Bringas, *Lines of Curvature near Umbilical Points on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4* , Ann. Global Anal. Geom. (13) (1995), 129-140.
- [11] H. Scherbel, *A new proof of Hamburger's Index Theorem on umbilical points*, PhD Dissertation. ETH No. 10281, (1995).
- [12] J. Sotomayor and C. Gutierrez, *Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature*, Astérisque 98-99 (1982), 195-215.
- [13] C. Titus, *A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points*. Acta Math. 131 (1973), 43-77.

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
 22 – 28 de mayo de 2003
 Cunduacán Tabasco
 México

Enviado: Mayo, 2003
Publicado: Diciembre, 2004

Estimaciones para Convoluciones en Espacios de Nikol'skiĭ-Besov Anisotrópicos

Gerardo Emilio García Almeida
Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas
galmeida@tunku.uady.mx

Resumen

En este trabajo se resuelve un problema mal planteado (de acuerdo con Hadamard) mediante el método de regularización de Tikhonov, usando espacios con derivadas de orden fraccionario al implementar dicho método.

1. Introducción

1.1. Antecedentes

Este problema surge a partir de un modelo matemático empleado en Geofísica, planteado originalmente en Rusia y fue considerado por los matemáticos rusos V. I. Burenkov, I. F. Dorofeev y A. S. Pankratov, quienes resolvieron este problema para el caso isotrópico. En este artículo se obtienen resultados similares para el caso anisotrópico.

1.2. Descripción del problema

El problema consiste en estudiar ecuaciones integrales de convolución, del primer tipo que tienen la forma

$$(K * z)(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} K(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t), \quad (1)$$

donde z es la función a encontrar, N es un entero y $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Denotamos por z_E a la solución exacta de la ecuación (1) correspondiente a los valores exactos u_E del lado derecho de la misma. Dado que este problema es mal planteado en el sentido de Hadamard, hallaremos soluciones regularizadas aproximadas de la Ec. (1) usando los funcionales suavizadores introducidos por A. N. Tikhonov, los cuales tienen la forma

$$M^\alpha [z, u_\delta] = \|K * z - u_\delta\|_F^2 + \alpha \|z\|_{F_0}^2, \quad (2)$$

donde F y F_0 son espacios normados, u_δ es una aproximación dada para el lado derecho ($u_\delta = u_E + \delta$, donde δ es el error del lado derecho), y α es un número positivo conocido como el parámetro de regularización. Denotemos por z_α^δ al elemento que minimiza el funcional (2) ($z_\alpha := z_\alpha^0$). Si z_α^δ es único, entonces es considerado como una solución aproximada de la Ec. (1).

Este problema ha sido analizado en el artículo "ESTIMATES OF REGULARIZED SOLU-



TIONS OF CONVOLUTION-TYPE EQUATIONS IN THE SPACES OF FUNCTIONS WITH DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDERS” escrito por V.I. Burenkov y A. S. Pankratov. Ellos emplearon como F y F_0 dos espacios de Nikol’skii-Besov isotrópicos.

El propósito de este trabajo es generalizar el resultado contenido en este artículo para el caso anisotrópico

El punto de partida es información adicional a priori sobre la solución y el error, siendo ésta caracterizada como la pertenencia a algún espacio de Nikol’skiĭ-Besov anisotrópico $B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)$ con vector de orden de suavidad $\vec{s} = (s_1, \dots, s_N)$; $s_i > 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$ positivo arbitrario, pudiendo éste ser pequeño.

Consideraremos kernels $K \in L^{loc}(\mathbb{R}^N)$ cuyas transformadas de Fourier $F(K)$ satisfagan determinadas condiciones. Si $K \in L(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$(F(K))(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} K(t) e^{i(\omega,t)} dt.$$

En el caso general $F(K)$ es interpretada en el sentido de la Teoría de Distribuciones. En lo sucesivo siempre asumiremos que

$$(F(K))(\omega) \neq 0 \text{ para c.t. } \omega \in \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

y para $\omega \in \mathbb{R}^N$ una (o ambas) de las siguientes condiciones se satisface(n):

$$|(F(K))(\omega)| \geq K_1 \left[1 + |\omega_1|^{\frac{l_1}{L}} + \dots + |\omega_N|^{\frac{l_N}{L}} \right]^{-n_1}, \quad (4)$$

$$|(F(K))(\omega)| \leq K_2 \left[1 + |\omega_1|^{\frac{l_1}{L}} + \dots + |\omega_N|^{\frac{l_N}{L}} \right]^{-n_2}, \quad (5)$$

donde $K_1, K_2 > 0$ son independientes de ω y $n_1, n_2 \geq 0, l_i > 0$ para toda $i \in \{1, \dots, N\}$, y $L = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} l_i$.

1.3. Objetivos

Como ya se ha mencionado brevemente en los antecedentes y en la descripción del problema, el objetivo central de este trabajo es entender los resultados obtenidos por V. I. Burenkov, I. F. Dorofeev y A. S. Pankratov al caso anisotrópico. Dichos resultados son estimaciones (cotas superiores) para convoluciones, para la diferencia entre soluciones regularizadas y la solución exacta y una estimación de la velocidad de convergencia de las soluciones regularizadas a la solución exacta.

2. Definiciones

2.1. Definiciones generales

Definición 1. [Espacio S de funciones rápidamente decrecientes] Sea φ una función compleja valuada definida en \mathbb{R}^N , infinitamente diferenciable en \mathbb{R}^N . Uno dice que $\varphi \in S = S(\mathbb{R}^N)$, el espacio de funciones rápidamente decrecientes, si para cualquier número no negativo l (es suficiente que l sea un entero) y vector entero no negativo $\vec{k} = (k_1, \dots, k_N)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^l) |\varphi^{(k)}(x)| < \infty,$$

donde

$$\varphi^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}, \quad |k| = \sum_{j=1}^N k_j.$$



Definición 2. [Espacio de Schwartz S' de funciones generalizadas (o distribuciones) de crecimiento lento] *Uno denota por $S' = S'(\mathbb{R}^N)$, el espacio de funciones generalizadas (o distribuciones) de crecimiento lento, al conjunto de funcionales lineales continuos definidos en S .*

Definición 3. [Convolución] *Sea*

$$\tilde{S}'(\mathbb{R}^N) := \{f \in S'(\mathbb{R}^N) : f, F(f) \in L^{loc}(\mathbb{R}^N)\}$$

y sean $f, g \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$. Si el producto (puntual) $F(f) \cdot F(g) \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$, entonces la convolución de f y g está definida por

$$f * g := F^{-1}(F(f) \cdot F(g)). \quad (6)$$

Nótese que bajo las suposiciones admitidas uno tiene que $F(\tilde{S}'(\mathbb{R}^N)) = \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f * g \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$ y $F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$.

2.2. Definición de los espacios de Nikol'skiĭ-Besov anisotrópicos

Supóngase que $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$; $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ con $a_j > 0$, $j = 1, \dots, N$ y $\sum_{j=1}^N a_j = N$. Defínase $\vec{s} = (s_1, \dots, s_N) = (\frac{s}{a_1}, \dots, \frac{s}{a_N})$. Puede verificarse fácilmente que

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_j}.$$

Así, s es de cierta manera una suavidad media y \vec{a} mide la anisotropía. Ahora, uno puede definir la distancia anisotrópica de

$$t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$$

al origen como

$$|t|_{\vec{a}} = \left(\sum_{j=1}^N |t_j|^{\frac{2}{a_j}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la bola

$$B_r = \{t \in \mathbb{R}^N : |t|_{\vec{a}} < r\}.$$

A continuación, para $k \in \mathbb{N}_0$, sea $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi_k \geq 0$, y $\text{supp } \varphi_0 \subset B_2$; $\text{supp } \varphi_k \subset B_{2^{k+1}} \setminus B_{2^{k-1}}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Además, supóngase que para todo multiíndice α

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{t \in \mathbb{R}^N} 2^{k \langle \vec{a}, \alpha \rangle} |(D^\alpha \varphi_k)(t)| < \infty,$$

donde $\langle \vec{a}, \alpha \rangle = \sum_{k=1}^N a_k \alpha_k$, y para toda $t \in$

$$\mathbb{R}^N \sum_{k=0}^\infty \varphi_k(t) = 1 \quad (\text{véase, por ejemplo,}$$

Triebel[5]). Uno define $\Phi^{\vec{a}}(\mathbb{R}^N)$ como el conjunto de todas las colecciones $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ con las propiedades enlistadas arriba. Finalmente, uno dice que $f \in B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)$ si $f \in S'(\mathbb{R}^N)$, el espacio de distribuciones definidas en el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^N)$, y

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{k=0}^\infty \left(2^{ks} \|F^{-1}(\varphi_k F(f))\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \quad (7)$$

para $1 \leq \theta < \infty$ o

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \left(2^{ks} \|F^{-1}(\varphi_k F(f))\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \right) < \infty \quad (8)$$

para $\theta = \infty$. Para diferentes colecciones $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi^{\vec{a}}(\mathbb{R}^N)$ las normas (7) (o (8))



son equivalentes y la norma $\|f\|_{B_2^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)} := \|f\|_{B_{2,2}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)}$, donde $s_j \geq 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, es equivalente a

$$\|(1 + |\omega_1|^{s_1} + \dots + |\omega_N|^{s_N})(F(f))(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}$$

Esta definición es debida a Triebel y es la más general disponible. Otra definición equivalente, aunque menos general, de los espacios de Nikol'skiĭ-Besov anisotrópicos, debida a Nikol'skiĭ (Escuela Rusa) es la siguiente:

Sea $\vec{s} = (s_1, \dots, s_N)$, $0 < s_j < +\infty$, $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq \theta < +\infty$, $s_j = r_j + \gamma_j$ donde $r_j \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \gamma_j \leq 1$; $j = 1, \dots, N$. Definimos para $1 \leq \theta < \infty$

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_G + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^\infty \left(h^{-\gamma_j} \left\| \Delta_{h,j}^2 \left(\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}} \right) \right\|_G \right)^\theta \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{\theta}};$$

donde $G = L_p(\mathbb{R}^N)$. Para $\theta = \infty$ definimos

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_G + \sum_{j=1}^N \sup_{h \in \mathbb{R}} \left(|h|^{-\gamma_j} \left\| \Delta_{h,j}^2 \left(\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}} \right) \right\|_G \right).$$

Aquí $\Delta_{h,j}^2 = f(x + 2he_j) - 2f(x + he_j) + f(x)$, donde $h \in \mathbb{R}$, y e_j es el j -ésimo vector unitario en \mathbb{R}^N , el que tiene 1 en la j -ésima posición y 0 en las otras posiciones. Decimos que $f \in B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si $\|f\|_{B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)} < \infty$. Cuando $s_1 = \dots = s_N = s$ tenemos el caso isotrópico.

Véase Nikol'skiĭ [3], Besov [4], y Triebel [5] para encontrar otras definiciones equivalentes, incluyendo las definiciones ya proporcionadas, y para consultar más propiedades de dichos espacios y sus aplicaciones en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

2.3. Propiedades de los espacios de Nikol'skiĭ-Besov anisotrópicos

Encajes:

1.-

$$B_{p,1}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B_{p,\theta'}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B_{p,\infty}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N) = H_p^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N), \quad (9)$$

donde $1 \leq \theta \leq \theta' < \infty$.

2.-

$$B_{p,\theta}^{\vec{s}+\vec{\varepsilon}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H_p^{\vec{s}+\vec{\varepsilon}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H_p^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N), \quad (10)$$

donde $\vec{\varepsilon} > 0$, i.e. $\varepsilon_j > 0$ para toda $j \in \{1, \dots, N\}$. (Véase Nikol'skiĭ [3], §6.2, página 235, encajes (9), (11) y (12)).

3.-

$$B_{p,\theta}^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B_{p,\theta}^{\vec{s}'}(\mathbb{R}^N), \quad (11)$$

Este último encaje se cumple si las siguientes condiciones se satisfacen:

$$1 \leq p \leq p' \leq \infty, 1 \leq \theta \leq \infty,$$

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right) \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_j},$$

$$\vec{s}' = \varkappa \vec{s}.$$

Aquí suponemos que $\vec{s} > 0$. (Véase Nikol'skiĭ [3], §6.3, encaje (1), página 236.

2.4. Definición de la solución regularizada \mathbf{z}_α^δ

Definición 4. [Solución exacta z_E] *Dados $K, u_E \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$, la función $z_E \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$ es una solución de la ecuación*

$$K * z_E = u_E, \quad (12)$$



y en virtud de la Definición 3 se tiene que la solución exacta z_E es una función en $\tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$ que satisface

$$F(K) \cdot F(z_E) = F(u_E) . \quad (13)$$

Aquí suponemos que $\frac{F(u_E)}{F(K)} \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$. Entonces la solución exacta z_E existe, es única (por la suposición (3)) y

$$z_E = F^{-1} \left(\frac{F(u_E)}{F(K)} \right) . \quad (14)$$

Para definir el problema de la búsqueda de aproximaciones estables a la solución de la ecuación (1) consideramos la siguiente definición:

Definición 5. [Solución regularizada z_α^δ]
 Por la solución regularizada de la ecuación (1) nos referiremos a la función

$$z_\alpha^\delta = F^{-1} \left(\frac{(F(K))(-\omega)(F(u_\delta))(\omega)}{|(F(K))(\omega)|^2 + \alpha(S_N)} \right) . \quad (15)$$

donde $S_N = 1 + |\omega_1|^{2l_1} + \dots + |\omega_N|^{2l_N}$.

Esta elección de z_α^δ está relacionada con la minimización del funcional (2) donde

$$\begin{aligned} F_1 &= B_{2,2}^{\vec{l}_1}(\mathbb{R}^N), \\ F_2 &= B_{2,2}^{\vec{l}_2}(\mathbb{R}^N), \\ \vec{l}_2 &> \vec{l}_1, \quad y \\ \vec{l} &= \vec{l}_2 - \vec{l}_1. \end{aligned}$$

Para $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$ y $\vec{b} = (b_1, \dots, b_N)$ las desigualdades $\vec{a} < \vec{b}$, $\vec{a} \leq \vec{b}$ significan que $a_j < b_j$, $a_j \leq b_j$ respectivamente, para toda $j \in \{1, \dots, N\}$.

3. Estimaciones para convoluciones

Teorema 1. Supongamos que $\vec{s}_1, \vec{s}_2 > 0$; $1 \leq p_1 \leq 2 \leq p_2 \leq +\infty$, $1 \leq \theta_1 \leq 2 \leq \theta_2 \leq +\infty$, y $1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_{1,j}} > 0$. Además, sean $f \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$, $g \in B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_1 &= \vec{s}_1 \left(1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_{1,j}} \right), \\ \vec{\rho}_2 &= \vec{s}_2 \left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2} \right) \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_{2,j}} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

y $\frac{1 + |\omega_1|^{\rho_{2,1}} + \dots + |\omega_N|^{\rho_{2,N}}}{1 + |\omega_1|^{\rho_{1,1}} + \dots + |\omega_N|^{\rho_{1,N}}} (F(f))(\omega) \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces la convolución $f * g$ existe y

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} &\leq \\ c_1 \left\| \frac{1 + |\omega_1|^{\rho_{2,1}} + \dots + |\omega_N|^{\rho_{2,N}}}{1 + |\omega_1|^{\rho_{1,1}} + \dots + |\omega_N|^{\rho_{1,N}}} \right. & \\ \left. (F(f))(\omega) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \cdot \|g\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}, & \quad (17) \end{aligned}$$

donde $c_1 > 0$ es independiente de f y g .

En el caso isotrópico $\vec{s}_1 = (s_1, \dots, s_1)$, $\vec{s}_2 = (s_2, \dots, s_2)$ la fórmula (17) se reduce a

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{B_{p_2, \theta_2}^{s_2}(\mathbb{R}^N)} &\leq \\ c_1 \left\| (1 + |\omega|)^{s_2 - s_1 + N \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \right. & \\ \left. (F(f))(\omega) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \cdot \|g\|_{B_{p_1, \theta_1}^{s_1}(\mathbb{R}^N)}. & \quad (18) \end{aligned}$$

Teorema 2. Supongamos que $-\infty < s_1, s_2, s_3 < \infty$, $0 < p_1, p_2, p_3 \leq \infty$, $0 < \theta_1, \theta_2,$



$\theta_3 \leq \infty$, donde s_i son parámetros de suavidad media definidos por

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_{i,j}}; \vec{s}_i = (s_{i,1}, \dots, s_{i,N}) = \left(\frac{s_i}{a_{i,1}}, \dots, \frac{s_i}{a_{i,N}} \right),$$

para $i = 1, 2, 3$. (Véase la definición de los espacios de Nikol'skiĭ-Besov) Entonces existe un número $d_1 > 0$ tal que, para cualesquiera $f \in B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)$, $g \in B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)$ cumpliendo que $f, g \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$ y el producto (puntual) $F(f) \cdot F(g) \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^N)$, la convolución $f * g$ existe y la desigualdad

$$\|f * g\|_{B_{p_3, \theta_3}^{\vec{s}_3}(\mathbb{R}^N)} \leq d_1 \|f\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \quad (19)$$

se cumple si las condiciones siguientes son satisfechas:

1. $p_3 \geq p_1$ y $p_3 \geq p_2$,
2. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - 1 \geq 0$,
3. O

$$(3a) \quad s_3 < s_1 + s_2 - aN \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - 1 \right), \text{ o}$$

$$(3b) \quad s_3 = s_1 + s_2 - aN \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - 1 \right) \text{ y } \frac{1}{\theta_3} \leq \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}.$$

Aquí

$$a = \max_{\substack{i=1, 2, 3 \\ j \in \{1, \dots, N\}}} a_{i,j},$$

donde $a_{i,j} = \frac{s_i}{s_{i,j}}$, $i = 1, 2, 3$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

En el caso isotrópico $\vec{s}_1 = (s_1, \dots, s_1)$, $\vec{s}_2 = (s_2, \dots, s_2)$, $\vec{s}_3 = (s_3, \dots, s_3)$, $a = 1$ la fórmula (19) se reduce a

$$\|f * g\|_{B_{p_3, \theta_3}^{s_3}(\mathbb{R}^N)} \leq d_1 \|f\|_{B_{p_1, \theta_1}^{s_1}(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{B_{p_2, \theta_2}^{s_2}(\mathbb{R}^N)} \quad (20)$$

4. Estimaciones para soluciones regularizadas

Nuestro siguiente paso es obtener estimaciones para soluciones regularizadas. Se obtuvieron las estimaciones que se muestran a continuación:

Teorema 3. [Estimación para z_α] Supongamos que $\vec{s}_1, \vec{s}_2, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ son como en el Teorema 1. Si el kernel K satisface la condición (5) y

$$\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1 + 2\vec{l} \left(1 + \frac{n_2}{L} \right), \quad (21)$$

entonces para cualquier $\alpha > 0$ existe un número positivo $c_2(\alpha)$ (que depende únicamente de los parámetros ya mencionados, y también de K_2, n_2 , y N) tal que

$$\|z_\alpha\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq c_2(\alpha) \|z_E\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}. \quad (22)$$

En el caso isotrópico $\vec{s}_1 = (s_1, \dots, s_1)$, $\vec{s}_2 = (s_2, \dots, s_2)$ la s_2 máxima que satisface (21) es igual a $s_1 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) + 2l \left(1 + \frac{n_2}{L} \right)$ donde $l = \min_{j \in \{1, \dots, N\}} l_j$.

Teorema 4. [Estimación para z_α^δ] Supongamos que $\vec{s}_1, \vec{s}_2, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ son como en el Teorema 1.



1.- Si el kernel K satisface la condición (5) y

$$\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1 + \vec{l} \left(2 + \frac{n_2}{L} \right), \quad (23)$$

entonces para cualquier $\alpha > 0$ existe un número positivo $c_3(\alpha)$ (que depende únicamente de los parámetros ya mencionados, y también de K_2 , n_2 , y N) tal que

$$\|z_\alpha^\delta\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq c_3(\alpha) \|u_\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}. \quad (24)$$

2.- Si el kernel K satisface la condición (4) y

$$\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1 + \vec{l}, \quad (25)$$

entonces para cualquier $\alpha > 0$ existe un número positivo $c_4(\alpha)$ (que depende únicamente de los parámetros ya mencionados, y también de K_1 , n_1 , y N) tal que

$$\|z_\alpha^\delta\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq c_4(\alpha) \|u_\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}. \quad (26)$$

En el caso isotrópico la máxima s_2 que satisface (23) es igual a $s_1 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) + l \left(2 + \frac{n_2}{L} \right)$, y la máxima s_2 que satisface (25) es igual a $s_1 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) + l$.

5. Estimaciones para la diferencia entre la solución exacta y las soluciones regularizadas

Nuestro paso final es obtener estimaciones para la diferencia entre la solución exacta y las soluciones regularizadas, así como una estimación para la razón (o velocidad) de convergencia de dichas soluciones a la exacta.

Teorema 5. [Estimación para $z_\alpha - z_E$] Supongamos que \vec{s}_1 , \vec{s}_2 , p_1 , p_2 , θ_1 , θ_2 , $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$ son como en el Teorema 1. Además sean $\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1$ y

$$\sigma_1 = \min \left\{ 1, \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \frac{\rho_{1,i} - \rho_{2,i}}{2\rho_{1,i} \left[\max_{j \in \{1, \dots, N\}} \frac{l_j}{\rho_{1,j}} \left(1 + \frac{n_1}{L} \right) \right]} \right\}. \quad (27)$$

Si el kernel K satisface la condición (4) y

$$\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1 - 2\sigma_1 \vec{\rho}_1 \left[\max_{j \in \{1, \dots, N\}} \frac{l_j}{\rho_{1,j}} \left(1 + \frac{n_1}{L} \right) \right], \quad (28)$$

Entonces existe un número positivo c_5 (que depende únicamente de los parámetros ya mencionados, y también de K_1 , n_1 y N) tal que para toda $\alpha > 0$ uno tiene que

$$\|z_\alpha - z_E\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq c_5 \alpha^{\sigma_1} \|z_E\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}. \quad (29)$$

En el caso isotrópico $\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1$, (28) toma la forma

$$s_2 \leq s_1 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) - 2\sigma_1 (L + n_1)$$



y σ_1 se convierte en

$$\min \left\{ 1, \frac{s_1 - s_2 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)}{2(L + n_1)} \right\}.$$

Teorema 6. [Estimación para $z_\alpha^\delta - z_\alpha$]
Supongamos que $\vec{s}_1, \vec{s}_2, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ son como en el Teorema 1.

1.- Si el kernel K satisface la condición (5) y

$$\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1 + \vec{l} \left(2 + \frac{n_2}{L} \right), \quad (30)$$

Entonces existe un número positivo c_6 (que depende únicamente de los parámetros ya mencionados, y también de $K_2, n_2, y N$) tal que para toda $\alpha > 0$ uno tiene que

$$\|z_\alpha^\delta - z_\alpha\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq c_6 \alpha^{-\sigma_2} \|\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}, \quad (31)$$

donde

$$\sigma_2 = \max \left\{ \frac{1}{2}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \left\{ 1 + \frac{L(\rho_{2,i} - \rho_{1,i} - l_i(2 + \frac{n_2}{L}))}{2l_i(L + n_2)} \right\} \right\}. \quad (32)$$

2.- Si el kernel K satisface la condición (4) y

$$\vec{\rho}_2 \leq \vec{\rho}_1 + \vec{l}, \quad (33)$$

Entonces existe un número positivo c_7 (que depende únicamente de los parámetros ya

mencionados, y también de $K_1, n_1, y N$) tal que para toda $\alpha > 0$ uno tiene que

$$\|z_\alpha^\delta - z_\alpha\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq c_7 \alpha^{-\sigma_3} \|\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}, \quad (34)$$

donde

$$\sigma_3 = \max \left\{ \frac{1}{2} \frac{n_1}{L + n_1}, \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{L(\rho_{2,i} - \rho_{1,i} - l_i)}{l_i(L + n_1)} + 1 \right] \right\} \right\}. \quad (35)$$

En el caso isotrópico (30) se reduce a

$$s_2 \leq s_1 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) + l \left(2 + \frac{n_2}{L} \right)$$

y (33) se reduce a

$$s_2 \leq s_1 - N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) + l;$$

σ_2 se convierte en

$$\max \left\{ \frac{1}{2}, 1 + \frac{L \left(s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) - l \left(2 + \frac{n_2}{L} \right) \right)}{2l(L + n_2)} \right\}$$

si $s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \geq 0$, y se convierte en

$$\max \left\{ \frac{1}{2}, 1 + \frac{s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) - L \left(2 + \frac{n_2}{L} \right)}{2(L + n_2)} \right\}$$



si $s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) < 0$; σ_3 se convierte en

$$\left. \begin{aligned} & \text{máx} \left\{ \frac{1}{2} \frac{n_1}{L + n_1}, \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[\frac{L \left(s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) - l \right)}{l(L + n_1)} + 1 \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

si $s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \geq 0$, y se convierte en

$$\left. \begin{aligned} & \text{máx} \left\{ \frac{1}{2} \frac{n_1}{L + n_1}, \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[\frac{s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) - L}{(L + n_1)} + 1 \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

si $s_2 - s_1 + N \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) < 0$.

6. Estimación para la razón de convergencia de las soluciones regularizadas a la exacta

6.1. Elección cuasióptima del parámetro de regularización

Suponiendo que la solución exacta $z_E \in B_{p_0, \theta_0}^{\vec{s}_0}(\mathbb{R}^N)$ y el error $\delta \in B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)$, los Teoremas 5 y 6 y la desigualdad del triángulo

implican que para toda $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} & \|z_\alpha^\delta - z_E\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq \\ & c_5 \alpha^{\sigma_1} \|z_E\|_{B_{p_0, \theta_0}^{\vec{s}_0}(\mathbb{R}^N)} + \\ & c_7 \alpha^{-\sigma_3} \|\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Aquí asumimos que el kernel K satisface la condición (4). Además asumimos que $p_1, \theta_1, p_2, \theta_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2$, y σ_3 satisfacen las hipótesis de la segunda parte del Teorema 6 y que también $p_0, \theta_0, p_2, \theta_2, \vec{s}_0, \vec{s}_2$, y σ_1 satisfacen las hipótesis del Teorema 5 donde p_1, θ_1, \vec{s}_1 deben ser reemplazadas por p_0, θ_0, \vec{s}_0 . Si los valores de $\|z_E\|_{B_{p_0, \theta_0}^{\vec{s}_0}(\mathbb{R}^N)}$ y $\|\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}$ son conocidos, el parámetro de regularización puede ser escogido de tal manera que minimice el lado derecho de (36):

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_0(\delta) = & \left(\frac{c_7 \sigma_3 \|\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}}{c_5 \sigma_1 \|z_E\|_{B_{p_0, \theta_0}^{\vec{s}_0}(\mathbb{R}^N)}} \right)^{\frac{1}{\sigma_1 + \sigma_3}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Con esta elección de α obtenemos una estimación multiplicativa

$$\begin{aligned} & \|z_{\alpha_0(\delta)}^\delta - z_E\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} \leq \\ & c_8 \|z_E\|_{B_{p_0, \theta_0}^{\vec{s}_0}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}} \|\delta\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3}}, \end{aligned} \quad (38)$$

donde

$$\begin{aligned} c_8 = & (c_5)^{\frac{\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}} (c_7)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3}} \left(\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3}} + \right. \\ & \left. \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)^{\frac{\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}} \right). \end{aligned}$$



6.2. Convergencia de las soluciones regularizadas a la exacta

Las estimaciones (36) y (38) nos permiten construir una sucesión de soluciones regularizadas de (1) que convergen a la solución exacta.

Teorema 7. *Supongamos que $p_0, \theta_0, p_1, \theta_1, p_2, \theta_2, \vec{s}_0, \vec{s}_1, \vec{s}_2, \sigma_1, \sigma_3$, y el kernel K satisfacen las condiciones descritas en la sección 6.1. Además, sean $z_E \in B_{p_0, \theta_0}^{\vec{s}_0}(\mathbb{R}^N)$ y una sucesión $\delta_m \in B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)$ tales que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\delta_m\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

y sea

$$z_m = z_{\alpha_0(\delta_m)}^{\delta_m}. \quad (39)$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|z_m - z_E\|_{B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)} = 0. \quad (40)$$

Demostración. Esto se sigue claramente a partir de (38). Además, (38) nos da una estimación para la razón de convergencia. \square

También podemos notar que con cualquier elección de una sucesión de parámetros de regularización α_m que satisfagan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0 \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m^{-\sigma_3} \|\delta_m\|_{B_{p_1, \theta_1}^{\vec{s}_1}(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

la sucesión de soluciones regularizadas $z_{\alpha_m}^{\delta_m}$ converge a la solución exacta z_E en $B_{p_2, \theta_2}^{\vec{s}_2}(\mathbb{R}^N)$.

Referencias

- [1] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods of solving ill-posed problems*, 3rd ed., “Nauka”, Moscow, 1986; English transl. of 1st ed., Wiley, 1977.
- [2] A. N. Tikhonov *et al.*, *Regularizing algorithms and a priori information*, “Nauka”, Moscow, 1983. (Russian)
- [3] S. M. Nikol’skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, “Nauka”, Moscow, 1969; English transl., Springer-Verlag, 1975.
- [4] O. V. Besov, V. P. Il’in, and S. M. Nikol’skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, “Nauka”, Moscow, 1975; English transl., Vols. 1, 2, Wiley, 1979.
- [5] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser Verlag, 1983.
- [6] V. I. Burenkov, I. F. Dorofeev, and A. S. Pankratov, *Estimates for regularized solutions of convolution type equations in function spaces with noninteger order of differentiation*, Dokl. Acad. Nauk, USSR, Vol. 303, No. 2, 1988; English transl., Soviet Math. Dokl., Vol. 38, No. 3, 1989.
- [7] V. I. Burenkov and A. S. Pankratov, *Estimates of regularized solutions of convolution-type equations in the spaces of functions with derivatives of fractional orders*, Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, No. 18, 1995; English transl., Journal of Mathematical Sciences, Vol. 80, No. 5, 1996.
- [8] V. I. Burenkov and G. E. García Almeida, *Equivalent quasinorms for the anisotropic Nikol’skiĭ-Besov spaces on a cone of functions with a regular Fourier transform*, Mathematical Inequalities and Applications, to appear.



- [9] V. S. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics*, “Mir”, Moscow, 1979; English transl., Mir Publishers, 1979.

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
22 – 28 de mayo de 2003
Cunduacán Tabasco
México

Enviado: Mayo, 2003

Publicado: Diciembre, 2004

Un modelo de optimización del movimiento de equipos de perforación de pozos

Juan Victor Mondragón G.
Instituto Mexicano del Petróleo
vmondra@imp.mx

Resumen

Se describe el problema de asignación y calendarización de cargas de trabajo para los equipos de perforación de pozos petroleros en tierra. Se presenta un modelo de programación entera para determinar la secuencia de trabajos que deben realizar los equipos de perforación, de tal forma que se maximice el incremento de producción en la región o bien se minimicen los costos por traslado de los equipos. Se muestran simplificaciones lineales del modelo.

1. Introducción

1.1. Antecedentes

La explotación óptima de los yacimientos petroleros requiere de la perforación y el mantenimiento de un gran número de pozos. Estas actividades son muy costosas, por lo que es indispensable un análisis detallado para determinar la prioridad con que serán realizados los trabajos.

El problema que se estudia es la logística del movimiento de equipos de perforación y reparación de pozos en la Región Sur de Pemex Exploración y Producción (PEP). En esta zona operan alrededor de 40 equipos de

perforación y un programa típico de actividades para tres años contempla trabajos en 400 pozos.

La programación se inicia con un conjunto de necesidades de perforación de nuevos pozos y reparación o mantenimiento de algunos otros. Cada uno de estos trabajos implica el acondicionamiento de las vías de acceso hasta el pozo o la localización en que se va a perforar. Esta preparación del sitio se hace mediante licitación de contratos. Una vez terminado el acondicionamiento de las vías de acceso y cuando el equipo asignado está disponible se procede a su desarmado, traslado y rearmado en el nuevo sitio de trabajo. Debido a los tiempos y costos involucrados en el movimiento de equipos, debe haber una calendarización adecuada para el inicio de la licitación de la obra de acondicionamiento del sitio y la fecha de disponibilidad del equipo para su traslado.

El programa de trabajo de un equipo también debe incluir los tiempos fuera de operación debidos al mantenimiento preventivo de las propias unidades.

La relación donde se indican los pozos en que operará cada equipo, junto con la duración estimada de cada trabajo se conocen en PEP como Programa de Movimiento de Equipos.



1.2. Criterios empíricos para programar

Para elaborar el Programa de Movimientos se deben tener en cuenta los tiempos de traslado de los equipos de un pozo a otro, la duración de los trabajos y las profundidades de perforación, ya que la capacidad de los equipos para sostener la columna de tubería varía de una unidad a otra. Adicionalmente, hay equipos que han sido modificados para poder trabajar en pozos con cabezales especiales¹. Debido a la complejidad del problema, una opción intuitiva es asignar los equipos a trabajar en áreas delimitadas, para no incurrir en costos de traslado de un extremo a otro de la región. Esta opción resulta natural si se asigna un subconjunto de equipos para trabajar en un sólo Activo de Producción². La calendarización se puede hacer verificando la fecha probable de terminación del trabajo actual de cada equipo y escogiendo cuál será el siguiente pozo, con un criterio de cercanía o de prioridad.

Preparar el calendario de trabajos de la manera descrita no proporciona elementos de análisis basados en costos o beneficios.

1.3. Necesidad de optimizar

Los beneficios que resultan de la perforación y reparación de pozos dependen de la fecha en que dichos pozos quedan terminados para

¹Es el caso de la cavidades de almacenamiento de crudo en Tuzandépetl, que tienen árboles de válvulas de dimensiones que imposibilitan el acceso de equipos convencionales.

²La Región Sur de PEP está dividida geográficamente en cinco unidades de productivas, denominadas Activos de Producción. Cada Activo tiene encomendada la explotación de yacimientos cercanos entre sí.

producir hidrocarburos³. Así que entre más rápido se pueda incorporar producción nueva, mejores resultados globales se obtendrán.

Una forma de mejorar los resultados globales es que cuando se requiera reparar o perforar un pozo se considere no sólo los equipos asignados al Activo correspondiente, sino que se incluyan en el análisis los equipos que pudieran estar próximos a liberarse en los Activos cercanos.

Debido a que los equipos de perforación disponibles deben atender todos los requerimientos de trabajo, incluyendo las maniobras no productivas como la perforación de pozos exploratorios o el mantenimiento de las cavidades de almacenamiento, se requiere definir prioridades globales de los pozos con base en los beneficios esperados y atendiendo las urgencias del mantenimiento.

Pareciera natural que se puedan lograr beneficios mayores si se considera toda la infraestructura disponible en la Región en lugar de limitar la programación de los trabajos a la infraestructura local.

2. Objetivos del modelo

Desarrollar una representación de las restricciones de logística del movimiento de equipos y describir el valor económico de los beneficios de la perforación y reparación de pozos. Con esta modelación es posible cuantificar el valor económico de las operaciones y por tanto se pueden definir prioridades objetivas para decidir el orden en que se realizarán los trabajos.

³En el caso de reparaciones de pozos, se considera sólo el incremento de producción por encima de la producción actual, pues si no se realizara la reparación, el pozo continuaría operando en su nivel actual



Proporcionar elementos de análisis para la toma de decisiones, cuando por causas externas surgen cambios en el programa de movimientos. Por ejemplo, cuando por razones externas resulta forzoso que un cierto equipo realice determinada perforación, es conveniente considerar como elemento de juicio el costo que tienen los ajustes que resulten en el programa de toda la Región.

Ayudar a identificar las estrategias que maximizan el aprovechamiento de los recursos técnicos y económicos con que cuenta la Región Sur de PEP.

3. Enfoques desarrollados

Para establecer la prioridad que tiene cada pozo, se utilizan criterios de maximización de la producción esperada o minimización del costo de transporte. La modelación del problema se realiza usando variables binarias⁴ en forma generalizada, pues el problema es de naturaleza combinatoria. Algunas formas en que se modelan las restricciones y la función objetivo se enumeran a continuación.

- Maximizar producción (modelo de programación de tareas)
 - Considerando la declinación de la producción, la función objetivo resulta no-lineal y sus restricciones lineales.
 - Sin declinación de la producción, la función objetivo es lineal y sus restricciones también son lineales.

- Minimizar costo de transporte

⁴Variables que sólo toman los valores 0 ó 1.

- Modelando el costo en forma aproximada y con restricciones completas, la función objetivo y restricciones resultan lineales.
- Con un modelo de costo exacto y restricciones completas, la función objetivo y las restricciones resultan no-lineales.

La utilidad práctica de cada enfoque depende de la disponibilidad de software de implementación de algoritmos de solución. Por ejemplo, si se dispone sólo de algoritmos de programación entera, se puede maximizar el incremento de producción pero no se puede hacer una maximización de utilidades debido a que se requeriría un modelo exacto de costo y este enfoque condujo a expresiones no-lineales.

4. Modelo algebraico

4.1. Definición de variables

Los pozos que requieren intervenciones se representarán por $Z_i, i = 1, \dots, n$. La duración del trabajo requerido en cada uno de ellos será τ_i . El incremento de producción esperada al completar el trabajo será de Δ_i^a unidades de aceite y de Δ_i^g unidades de gas. El factor de declinación⁵ de la producción será ϕ_i .

El horizonte de planeación va desde el día cero hasta el día \mathcal{L} . Este es el periodo en que deben realizarse todos los trabajos. La producción de los pozos se contabiliza sólo en este intervalo de tiempo.

⁵Es el porcentaje constante en que se reduce la producción del pozo de un día al siguiente. Este valor se determina a partir del factor de declinación mensual



Los equipos de perforación se denotarán por $\mathcal{E}_j, j = 1, \dots, m$. Para el modelado de costos de traslado se simboliza por ψ_j el peso del equipo.

Los trabajos asignados a cada equipo se identificarán mediante las variables p_{ij} . Estas variables son binarias; $p_{ij} = 1$ si el pozo \mathcal{Z}_i lo atenderá el equipo \mathcal{E}_j ; en caso contrario $p_{ij} = 0$.

Las variables más relevantes del modelo son $s_i, i = 1, \dots, n$, las cuales representan el inicio de la intervención del pozo \mathcal{Z}_i y sus valores deben ser no negativos⁶. Se asume que sus unidades son días. Estas variables resultan con valores enteros si los tiempos de traslado y la duración de los trabajos se indican en días completos, es decir, si no se usan fracciones de día.

Se definirá un conjunto de parámetros λ_{ik}^j , los cuales representan el tiempo que tarda el equipo \mathcal{E}_j en ser trasladado del pozo \mathcal{Z}_i al pozo \mathcal{Z}_k , incluyendo su desarmado y rearmado. Esta cantidad de parámetros se pueden reducir durante la implementación del modelo si se consideran los mismos tiempos para todos los equipos de potencias similares. Incluso se puede reducir a unos pocos valores si se asume que la mayor parte del tiempo de traslado se debe al desarmado y rearmado.

Se requiere definir variables de precedencia d_{ik} . Estas servirán para indicar si el pozo \mathcal{Z}_i se empieza a atender antes o después que cuando inicia el trabajo del pozo \mathcal{Z}_k .

Existen algunas otras variables que se usan como auxiliares para modelar la lógica de algunas restricciones, pero serán definidas en las secciones en que se utilizan.

⁶Por simplicidad se supone que los trabajos en el pozo inician a primera hora del día s_i , por lo que este día cuenta en la duración del trabajo

4.2. Restricciones fundamentales del problema

4.2.1. Unicidad de la asignación

Cada pozo sólo puede ser atendido por un único equipo de perforación, lo que significa que cada trabajo es iniciado y terminado por el mismo equipo.

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Además, estas igualdades fuerzan a que todos los pozos sean asignados a algún equipo. Observe que no se excluye el caso en que algún equipo no tuviera trabajos asignados.

4.2.2. Capacidad de los equipos

La capacidad de los equipos de perforación se describe principalmente por la profundidad máxima de operación posible. Con estos valores se definen los parámetros auxiliares α_{ij} para indicar qué equipos pueden realizar cuáles trabajos.

Si el equipo \mathcal{E}_j tiene capacidad suficiente para realizar el trabajo del pozo \mathcal{Z}_i entonces $\alpha_{ij} = 1$. En caso contrario $\alpha_{ij} = 0$.

Ahora hay que asegurar que no se asignen equipos cuya capacidad sea inferior a los requerimientos del pozo.

$$p_{ij} \leq \alpha_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

4.2.3. Precedencia de los trabajos

Antes de poder modelar las restricciones para evitar el traslape de los trabajos que son asignados a un mismo equipo, se requiere modelar el comportamiento de las variables binarias de



precedencia d_{ik} .

$$s_k - s_i \leq d_{ik} * \mathcal{K} \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$d_{ik} + d_{ki} = 1 \quad i < k, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (4)$$

Donde el parámetro \mathcal{K} es una constante suficientemente grande para asegurar que si el término a la derecha no es cero, entonces todas las combinaciones de diferencias sean menores que dicha constante⁷.

Ahora puede observarse que la variable $d_{ik} = 1$ si el trabajo en el pozo \mathcal{Z}_i empieza antes que el del pozo \mathcal{Z}_k . Y $d_{ik} = 0$ cuando ocurre lo contrario.

4.2.4. Evitar el empalme de trabajos

Los pozos que se asignan en secuencia a un mismo equipo deben programarse de tal forma que haya tiempo suficiente para que se concluyan los trabajos del primer pozo y el equipo se desarme y traslade hasta la nueva localización, antes de empezar el trabajo del segundo pozo.

$$s_i + \tau_i + \lambda_{ik}^j - s_k \leq \mathcal{K} * (1 - d_{ik} + 2 - p_{ij} - p_{kj}) \quad (5)$$

$$j = 1, \dots, m \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, n$$

4.2.5. Ventanas de tiempo

En el caso de zonas inundables hay ventanas de tiempo permisibles para realizar los trabajos, pues sólo en ciertas épocas del año pueden transitar los equipos en dichos lugares.

Digamos que el pozo \mathcal{Z}_i debe ser atendido entre los días η_i y θ_i , entonces la variable de

⁷Esta misma constante \mathcal{K} se utiliza en otro conjunto de restricciones que se describen posteriormente, con lo cual se puede ver que un valor adecuado es $\max(\tau_i) + \max(\lambda_{ik}^j) + \mathcal{L}$

inicio debe cumplir con las siguientes restricciones.

$$\begin{aligned} \eta_i &\leq s_i \\ s_i + \tau_i - 1 &\leq \theta_i \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

4.2.6. Mantenimiento de los equipos

La programación del mantenimiento de los equipos se puede modelar agregando pozos virtuales con ventanas de tiempo adecuadas y con asignaciones forzosas en las variables p_{ij} . Digamos que el pozo virtual \mathcal{Z}_{i^*} representa el mantenimiento preventivo del equipo \mathcal{E}_{j^*} , entonces se agrega la restricción

$$p_{i^*j^*} = 1$$

con lo cual se vuelve forzosa la asignación deseada para cualquier solución factible del modelo.

4.2.7. Localizaciones ya licitadas

En el caso de la preparación de localizaciones con contratos ya licitados, es necesario ajustar las ventanas de tiempo a fin de que la programación resultante del modelo coincida con los compromisos contractuales. Incluso puede ser necesario incluir la asignación forzosa de un determinado equipo de perforación.

4.3. Función objetivo

Con el conjunto de restricciones fundamentales se puede establecer la función objetivo de ganancias.

4.3.1. Maximización de producción

La perforación del pozo \mathcal{Z}_i se inicia el día s_i , dura τ_i días en completarse, así que termina

el día $s_i + \tau_i - 1$ y al día siguiente ($s_i + \tau_i$) se inicia la producción, la cual continúa hasta el término del periodo de programación en el día \mathcal{L} . La producción posterior a este día ya no se considera.

La producción total de aceite durante el periodo de programación sería

$$\sum_{l=s_i+\tau_i}^{\mathcal{L}} \Delta_i^a * (1 - \phi_i)^{l-s_i-\tau_i}$$

Esta suma se puede reducir con una fórmula de suma de una progresión. Resultando la función objetivo no-lineal siguiente:

$$INC_i^a = \Delta_i^a * \frac{1 - (1 - \phi_i)^{\mathcal{L}-s_i-\tau_i+1}}{\phi_i} \quad (7)$$

El incremento en gas INC_i^g durante todo el horizonte de programación se trata en forma similar.

La función objetivo sería la suma de incrementos de todos los pozos, ponderando adecuadamente el gas y el aceite, digamos con los precios \mathcal{G} y \mathcal{A} respectivamente, para expresarlos en una base común⁸.

$$Max \sum_{i=1}^n (\mathcal{A} * INC_i^a + \mathcal{G} * INC_i^g) \quad (8)$$

Si no se considera el efecto de declinación de la producción, entonces la ecuación 7 se reduciría a una expresión lineal.

$$INC_i^a = \Delta_i^a * [\mathcal{L} - s_i - \tau_i + 1] \quad (9)$$

Con esta reducción la función objetivo resulta lineal, por lo que puede resolverse con software de programación lineal mixta (MILP).

⁸Estos ponderadores pueden ser los precios de cada hidrocarburo por unidad volumétrica. También pueden ser factores de equivalencia energética, incluso uno de ellos puede ser igualado a cero para tomar en cuenta sólo el otro.

4.3.2. Minimización de costos por traslado de equipos, enfoques lineales

Para modelar el costo de traslado de los equipos se asume que la base de cobro de estos servicios es el peso de las unidades y la distancia del transporte. La distancia de traslado entre los pozos \mathcal{Z}_i y \mathcal{Z}_k se simboliza por δ_{ik} . El costo unitario de transporte es \mathcal{C} . Si el equipo \mathcal{E}_j tiene asignados los pozos i y k consecutivamente en su ruta, entonces el correspondiente costo de traslado sería

$$\mathcal{C} * \psi_j * \delta_{ik}$$

Para definir una función objetivo para minimización de costos se requiere sumar los costos de los traslados entre pozos, pero sólo en los casos de los pozos consecutivos en la ruta de un mismo equipo. Escribir una fórmula explícita de esta suma de costos y que además sea lineal parece bastante complejo. En su lugar se presenta primero una modelación lineal de un concepto que se denominará *intensidad de transporte*.

Se definen variables binarias h_{ik}^j . Se desea modelarlas para que valgan 1 si los pozos \mathcal{Z}_i y \mathcal{Z}_k están ambos asignados al equipo \mathcal{E}_j y el pozo \mathcal{Z}_i aparece antes en la ruta que el \mathcal{Z}_k . Estas variables valen 0 en otro caso. Observe que no se asegura que ambos pozos sean contiguos en la ruta para que $h_{ik}^j = 1$.

Si las variables h_{ik}^j tienen el comportamiento deseado, se podría plantear la función objetivo lineal

$$Min \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n (h_{ik}^j * \psi_j * \delta_{ik}) \quad (10)$$

Observe que sólo se minimiza el peso-distancia total, pues éste es un modelo aproximado que está relacionado en forma directa



con el costo por traslados, pero no en una proporción constante.

Las restricciones que modelan el comportamiento de las variables h_{ik}^j son las siguientes.

$$h_{ik}^j \leq p_{ij} \tag{11}$$

$$h_{ik}^j \leq p_{kj}$$

$$h_{ik}^j \leq d_{ik}$$

$$h_{ik}^j \geq (p_{ij} - 1) + (p_{kj} - 1) + (d_{ik} - 1) + 1$$

$$i, k = 1, \dots, n \quad i \neq k \quad j = 1, \dots, m$$

Una ventaja importante del modelo de función objetivo es que también puede resolverse con software tipo MILP.

4.3.3. Minimización de costos por traslado de equipos, enfoques no-lineales

Ahora, sólo para ilustrar un modelo exacto del costo, se definen variables binarias para utilizar en lugar de h_{ik}^j . Estas variables se denominarán f_{ik}^j , y se modelarán para que tengan valor 1 cuando los pozos Z_i y Z_k están ambos asignados al equipo \mathcal{E}_j y aparezcan contiguos en la ruta, es decir, uno después del otro, sin importar el orden específico.

Si estas variables se modelan en la forma descrita, el modelo de función objetivo del costo de traslados es el siguiente:

$$Min \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n f_{ik}^j * d_{ik} * \psi_j * \delta_{ik} * C \tag{12}$$

Este es un modelo exacto del costo, así que puede ser combinado con la función objetivo 8 para definir una función general de utilidades. Tiene la desventaja de incluir un producto de

variables de decisión, por lo que no es manejable con software estándar tipo MILP. Adicionalmente, las restricciones que se presentan para modelar el comportamiento de las variables f_{ik}^j incluyen términos no lineales.

Si alguno de los pozos Z_i y Z_k no está asignado al equipo \mathcal{E}_j , entonces $f_{ik}^j = 0$.

$$f_{ik}^j \leq p_{ij} \tag{13}$$

$$f_{ik}^j \leq p_{kj}$$

$$i, k = 1, \dots, n \quad i \neq k \quad j = 1, \dots, m$$

La principal limitación del modelo de costo estimado es que no se representa la condición de que los pozos sean contiguos en la ruta del equipo de perforación.

Digamos que se tienen dos pozos Z_i y Z_k y se trata de identificar si están contiguos en la ruta, si ambos están asignados al mismo equipo \mathcal{E}_j . La expresión siguiente es de utilidad para esto, pues permite determinar si hay otros pozos intermedios en la ruta entre el i y k .

$$Inter(i, k, j) = \sum_{l=1, l \neq i, l \neq k}^n (d_{il} - d_{kl}) * (d_{ik} - d_{ki}) * p_{lj}$$

Ahora se presentan las restricciones que aseguran que si los pozos Z_i y Z_k están asignados al equipo \mathcal{E}_j y son contiguos en la ruta, entonces $f_{ik}^j = 1$. Para esto se agregan variables binarias γ_{ik}^j .

$$(1 - p_{ij}) + (1 - p_{kj}) + Inter(i, k, j) \geq \gamma_{ik}^j \tag{14}$$

$$f_{ik}^j \geq 1 - \gamma_{ik}^j$$

$$i, k = 1, \dots, n \quad i \neq k \quad j = 1, \dots, m$$



La restricción anterior no asegura que si los pozos no son contiguos $f_{ik}^j = 0$. Para garantizar esto se agregan más variables binarias χ_{ik}^j y las siguientes restricciones.

$$\text{Inter}(i, k, j) \leq \chi_{ik}^j * m \quad (15)$$

$$f_{ik}^j \leq 1 - \chi_{ik}^j$$

$$i, k = 1, \dots, n \quad i \neq k \quad j = 1, \dots, m.$$

5. Conclusiones

Los modelos de programación mixta permiten analizar y resolver problemas de tipo combinatorio.

La programación mixta también se puede usar para linealizar funciones objetivo no lineales o discontinuas.

La principal limitación práctica para aprovechar estos modelos es la disponibilidad de software de solución y el ambiente de cómputo en que está implementado.

Referencias

- [1] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity*, Dover 1998.

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
22 – 28 de mayo de 2003
Cunduacán Tabasco
México

Enviado: Mayo, 2003

Publicado: Diciembre, 2004

La Modelación Estadística

Mario Miguel Ojeda
Universidad Veracruzana
mojeda@uv.mx

Resumen

Se presenta una visión panorámica de la modelación estadística, planteándola como una línea de investigación. Se hace énfasis en los modelos paramétricos considerando la situación de muestras complejas y se identifican algunas áreas de desarrollo en este contexto.

1. Introducción

Los modelos estadísticos han sido ampliamente utilizados en las aplicaciones, para resolver problemas concretos de la ingeniería y de las diferentes áreas científicas, y constituyen la base de la formulación teórica de la inferencia y muchos de los métodos estadísticos. Podemos asegurar que hoy en día la modelación estadística cuenta con los respaldos metodológicos y tecnológicos que le dan una gran viabilidad como un área de desarrollo de la matemática aplicada.

La modelación estadística se puede ya considerar como un área de estudio y especialización, en la que convergen los aspectos teóricos, metodológicos y computacionales de los modelos estadísticos, considerando éstos en el marco de un proceso en el que

se pretende postular, ajustar y evaluar la capacidad y sensibilidad del modelo para describir una relación causa efecto sobre un colectivo de unidades de estudio (Ojeda, 1993). Quizá el evento que marca la incuestionable consolidación de esta área es la aparición, en el 2001, de la revista *Statistical Modelling: An International Journal* (www.arnoldpublishers.com/journals), que estaría dedicada a constituirse en una fuente primaria para las contribuciones en esta línea.

Este trabajo tiene el propósito de presentar una visión panorámica de la modelación estadística, revisando las diferentes vertientes de su desarrollo. Se pretende ubicar la perspectiva de la utilización de los modelos estadísticos paramétricos, particularmente de las formulaciones conocidas como modelos multinivel lineales (Goldstein, 1987; 1995), también llamados modelos de coeficientes aleatorios (Longford, 1993; 1995), modelos de componentes de la varianza (Searle et al., 1992) o modelos de efectos aleatorios (Sahai y Ojeda, 2003). Para el logro de este propósito se revisa el concepto de modelo estadístico, caracterizando e identificando las diferentes familias de modelos y sus diferentes usos genéricos. Finalmente se traza una perspectiva de las áreas de desarrollo y se apuntan



algunas conclusiones.

2. El concepto de modelo estadístico

Un modelo matemático, de manera muy genérica, puede concebirse como un constructor mental con el que se aspira a estudiar y entender de mejor forma un fenómeno en el que subyace una relación causa efecto del tipo $X \rightarrow Y$. En este sentido, el modelo expresa un postulado acerca de esta relación que se define a través de una formulación matemática.

El concepto clave para definir y entender muchos procesos de inferencia estadística es el de modelo estadístico, el cual se plantea considerando la medición en una variable explicatoria, sobre una unidad de estudio u_i , que produce una observación $y_i = Y(u_i)$. Esta observación se concibe en dos componentes (señal, ruido; patrón, dispersión), que se denominan genéricamente la parte sistemática ($f(x)$) y la parte aleatoria (e); así entonces, el modelo estadístico se formaliza como una ecuación del tipo

$$Y_i = f(x_i) + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que representa las observaciones sobre un colectivo de estudio (u_1, u_2, \dots, u_n) , donde la parte sistemática explica la respuesta a partir de las condiciones x_i , que son a las que sometió a las que se asocia u_i en el momento de la medición.

La parte aleatoria e se supone que es una variable no observable con distribución probabilística, generalmente asumida como la distribución Gaussiana. Aunque esta suposición también se puede generalizar a otras distribuciones de la familia exponencial.

3. Orígenes y desarrollo de los modelos estadísticos

La evolución que culmina abriendo el área de la modelación estadística ha acumulado una serie de acontecimientos, que inician desde la aparición del concepto de modelo, en el contexto de la física, en la segunda década del siglo pasado. En el marco de la metodología estadística el desarrollo se traza a partir del descubrimiento de la Ley de Regresión Filial por parte de Galton alrededor de 1890, y la subsecuente teorización matemática elaborada por Karl Pearson en 1900-1910, que dio origen a los modelos de regresión lineal. Sin embargo, el surgimiento de los modelos estadísticos se puede identificar en el planteamiento del método de estimación de mínimos cuadrados, cuya autoría se acredita a Gauss, en el siglo XVIII.

Cualquiera que sea el origen de la modelación estadística, hay que reconocer que es hasta la década de los años treinta del siglo XX cuando Ronald A. Fisher desarrolló de forma integral una familia de modelos para resolver un tipo genérico de problemas, inventando el análisis de la varianza (ANOVA) y los correspondientes modelos, hoy conocidos como modelos ANOVA.

Siguiendo esta perspectiva, Bartlett en 1935 publicó un trabajo para modelar tablas de contingencia donde ya se percibe el germen de un modelo equivalente a los modelos ANOVA para datos discretos. Sin embargo, no es hasta los años cincuenta cuando Lancaster, Roy y Kastenbaun desarrollan los modelos loglineales y Bhapkar, Koch, Grizzle y Starmer, los modelos lineales generales para datos en tablas de contingencia. Después de



las propuestas de estos modelos, una gran cantidad de autores han contribuido a su desarrollo (para una literatura hasta 1944, ver Killion and Zahn, 1976), destacándose Goodman, Mosteller y Cox, entre los más importantes. Hay que resaltar aquí la contribución de Birch (1963), quién expresó el modelo log-lineal en la forma actual, equivalente a los modelos ANOVA.

Sin temor a equívoco, es posible asegurar que el detonante de la modelación estadística en datos discretos lo constituyen el trabajo de Nelder y Wedderburn (1972), que presenta, a partir de los modelos lineales generalizados, un marco teórico general para el estudio de los modelos estadísticos, incluyendo los modelos de regresión lineal para respuestas continuas, dicotómicas (logística), de conteos (Poisson) y los modelos de medias (ANOVA). Muchos otros modelos desarrollados en esa época recibieron un tratamiento muy general y han sido presentados en este enfoque (Cox, 1970, 1972; McCullagh y Nelder, 1989).

La modelación para muestras complejas tiene su origen en los modelos de efectos mixtos que se propusieron originalmente en las aplicaciones de genética animal (Henderson, 1975; 1986). Aunque hay que destacar que en la década de los años setenta ya se había propuesto una formulación teórica en el marco de la inferencia Bayesiana (Lindley y Smith, 1972). No obstante, tuvieron que pasar más de quince años para que aparecieran los primeros textos que presentaron aplicaciones específicas y estrategias de modelación, considerando la complejidad de la estructura muestral (Goldstein, 1987; Aitkin y Longford, 1986), esto para investigaciones sociales y educativas.

4. Modelos paramétricos lineales

Los modelos estadísticos paramétricos son la clase más amplia y popular. La forma general de estos modelos es

$$Y_i = f(x_i; \theta) + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $f(x_i; \theta)$ es una familia determinada por una forma funcional específica, la cual está indexada en el espacio paramétrico Θ , para lo que θ , el parámetro de interés, determina el miembro particular.

Como un ejemplo de modelo estadístico paramétrico se tiene al modelo de regresión lineal simple,

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$f(x_i; \theta) = \alpha + \beta x_i$$

y por tanto $\theta = (\alpha, \beta)$

Este modelo es un caso particular de una familia más general que se conoce como el Modelo Lineal General (MLG), que tiene la forma genérica:

$$Y_i = \alpha + \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $x_i^t = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ son las mediciones sobre variables explicatorias (x_1, x_2, \dots, x_p) y los β_j son los coeficientes asociados, que junto con α son los parámetros de interés.

Los modelos de regresión lineal múltiple se presentan como caso particular del MLG cuando las X_1, X_2, \dots, X_j , que producen los datos $x_i^t; \quad i = 1, 2, \dots, n$, son cuantitativas. Estos modelos son muy populares por varias

razones: (1) por sus diversos usos (descripción, estimación, predicción, pronóstico y calibración); (2) porque son modelos muy sencillos para interpretar; (3) porque aproximan bien a relaciones funcionales complejas; y (4) porque existe una buena teoría y facilidades computacionales para su uso en el proceso de modelación.

Los modelos ANOVA también son casos particulares del MLG, que se presentan cuando las $X_j; j = 1, 2, \dots, p$, son cualitativas, y pueden ser modelos de efectos fijos, de efectos aleatorios o de efectos mixtos. Usualmente se expresan en formas funcionales que utilizan las variables indicadoras para representar las categorías de las variables explicatorias. Por ejemplo, un modelo con dos criterios de clasificación sería:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$$

donde se modela un conjunto de observaciones ubicadas en $(a \times b)$ categorías de 2 variables cualitativas, la primera con a categorías y la segunda con b ; en cada entrada de esta clasificación se tienen n_{ij} unidades de estudio e igual número de observaciones; $i = 1, 2, \dots, a$; y $j = 1, 2, \dots, b$.

Si este fuera uno de los modelos de efectos mixtos, se asume que las τ_i son realizaciones de una variable aleatoria con media cero y varianza σ_τ^2 ; y por tanto también son variables aleatorias los efectos de las interacciones γ_{ij} . Para mayor información sobre este tema ver Sahai y Ojeda (2004).

Los modelos de análisis de covarianza (ANCOVA) son una combinación de un modelo de regresión lineal y un modelo ANOVA; en el caso de que el modelo de regresión sea lineal simple, y el ANOVA sea el de un criterio de clasificación de efectos fijos, entonces la Figura 1 presenta la representación gráfica

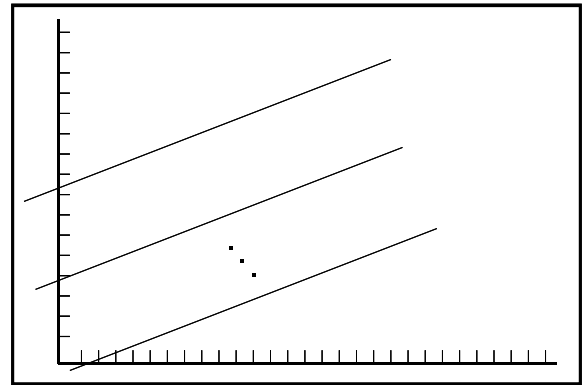


Figura 1: Representación gráfica de modelos ANCOVA simples.

de estos modelos.

Nótese que en estos modelos se asume el supuesto de que las rectas de regresión son paralelas. Cuando este supuesto no es razonable se puede recurrir a los modelos de regresión con variables indicadoras, que toman la forma general:

$$y_i = \sum_{j=1}^q a_j z_{ij} + \sum_{i=1}^p \beta_i x_{ij} + \sum_{j < i} z_{ij} x_{ij} \gamma_j + e_i,$$

donde la z_{ij} pueden ser 1 ó 0, dependiendo de la pertenencia de las unidades de estudio a los diferentes grupos. La Figura 2 presenta la correspondiente representación gráfica.

5. Modelos lineales generalizados.

Para modelar datos en tablas de contingencia se propusieron los modelos loglineales, pero un interés más general en el análisis de respuestas categóricas en estudios complejos, como lo son los epidemiológicos y en

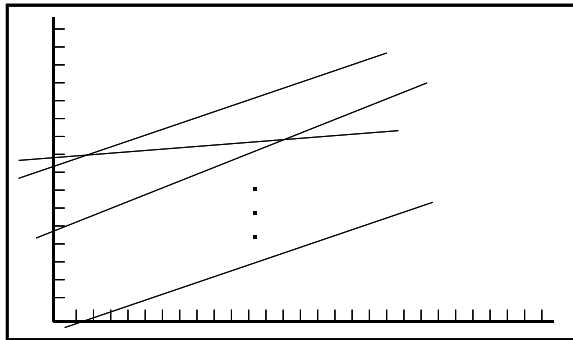


Figura 2: Representación gráfica de modelos lineales simples con variables indicadoras.

ciencias sociales y económicas, pronto propició el surgimiento de otros modelos, como los de regresión logística, regresión Poisson, modelos probit y quantit y los modelos lineales generales (Lindsey, 1995). Usando algunas de estas contribuciones se propusieron metodologías generales para modelación de datos categóricos (Freeman, 1988). Este contexto dio la motivación para la contribución de Nelder y Wedderburn (1972): los modelos lineales generalizados. Estos modelos permiten considerar la situación en que un modelo de efectos fijos tiene asociada una distribución de probabilidad que es miembro de la familia exponencial (Normal, Binomial, Poisson, Gamma, Lognormal, etc.). La teoría desarrollada permite contar con un enfoque unificador para la modelación, donde la regresión lineal y los modelos ANOVA son casos particulares. A partir de tales propuestas, se promueve ampliamente la metodología de datos discretos, dando origen a planteamientos más generales. Una generalización natural que pronto aparece es la inclusión de un efecto aleatorio en el componente sistemático, esto en analogía a los modelos lineales de efectos mixtos, con lo que surgen

los modelos lineales generalizados mixtos, los cuales consideran al efecto aleatorio en la parte sistemática suponiendo una distribución normal. Esta suposición responde fundamentalmente a razones de facilidad para el tratamiento teórico y computacional, pero enfrenta limitaciones de generalidad. Finalmente Lee y Nelder (1996) proponen los modelos lineales generalizados jerárquicos y una teoría unificada de estimación y prueba de hipótesis basada en la h-verosimilitud, de manera equivalente a lo planteado por Henderson (1975) para los modelos lineales mixtos. La monografía de McCulloch y Searle (2001) presenta un tratamiento unificado que establece una conexión armoniosa entre las ideas de los modelos lineales generalizados mixtos y los modelos lineales mixtos, identificando el cómo las ideas básicas de la modelación lineal se recuperan en las generalizaciones y circunstancias más complejas.

6. Modelos no lineales y modelos no paramétricos.

Cuando la forma funcional $f(x_i; \theta)$ no se expresa como una combinación lineal en los parámetros se da el caso de los modelos no lineales. Algunos de éstos son linearizables aplicando transformaciones, pero otros deben ajustarse en su forma funcional sin transformar. Hay modelos paramétricos no lineales de uso amplio en ecología, ciencias biológicas en general, y en economía, como los modelos de Gompertz, los de Weibull y los de Michaelis-Menten (Giltian y Davidian, 1995).

En la Figura 3 podemos observar el ajuste de un modelo no paramétrico a un conjunto de

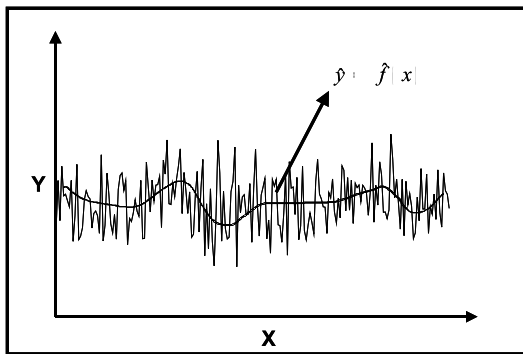


Figura 3: Ajuste de un modelo no paramétrico

datos, donde no interesa la forma funcional en sí, y se requiere tener la estimación de un patrón de comportamiento de los datos sobre el dominio X . Generalmente este tipo de aplicaciones cuenta con grandes volúmenes de observaciones sobre cambios pequeños en X , usualmente series de datos económicos, climatológicos o de procesos industriales monitoreados en tiempo real. Para una revisión de este tipo de modelos ver, por ejemplo, Green y Silverman (1994).

7. Modelos para muestras complejas

Los modelos lineales convencionales asumen que la muestra de unidades de estudio tienen una estructura simple, aunque ya desde el nacimiento de los modelos ANOVA y de efectos aleatorios se consideran muestras estratificadas y por conglomerados. Las muestras pueden tener un mayor nivel de complejidad, como el de anidamiento, o unidades de varios niveles (multinivel) o estructuras espaciotemporales o de estudios longitudinales.

El Modelo Lineal General Jerárquico (MLGJ) fue propuesto y estudiado en la

perspectiva teórica por Lindley y Smith (1972). Así mismo, desde la década de los setenta, existe la teoría y desarrollos metodológicos para el Modelo Lineal General de Efectos Mixtos, que se postula para una muestra de m conglomerados, cada uno de tamaño $n_i; i = 1, 2, \dots, m$. La ecuación matricial de este modelo es

$$y_i = X_i W_i \Gamma + X_i u_i + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Aquí y_i es un vector de n_i observaciones, e_i el correspondiente vector de errores aleatorios, X_i son la matriz de observaciones en las variables explicatorias a nivel de unidad de estudio, W_i son las observaciones de las variables explicatorias a nivel de conglomerados y u_i los correspondientes errores aleatorios.

En muchos casos se puede suponer que $E(y_i | \Gamma) = x_i W_i \Gamma$ y que $V(y_i | \Gamma) = x_i \Omega x_i^t + \sigma^2 I n_i$, donde Ω es la matriz de varianzas y covarianzas de los errores aleatorios a nivel de conglomerados y σ^2 es la varianza de los errores aleatorios a nivel de unidades. Por eso a estos modelos se les llama también modelos de componentes de varianza y covarianza (Henderson, 1986; Laird y Ware, 1982).

Los modelos lineales generales de efectos mixtos han sido utilizados en aplicaciones diversas, como en el análisis de encuestas (Skinner et al., 1989; Lelhtonen y Pahkinen, 1995), estudios educativos (Goldstein, 1995), estudios de ambiente organizacional (Bryk y Raudenbush, 1992), estudios multinacionales y multicentro (Longford, 1993), estudios ecológicos (Laird y Ware, 1982), estudios de curvas de crecimiento y medidas repetidas (Vonesh y Chinchilli, 1997) y series de experimentos (Ojeda y Gutiérrez, 2003).

Estos modelos tienen sus orígenes en estudios longitudinales y en análisis de series de tiempo, pero recientemente se han vinculado a los



modelos espaciales que surgieron en el área de la geoestadística.

En la actualidad se plantean generalizaciones que consideran simultáneamente las dimensiones espacial y temporal, considerando efectos fijos y aleatorios, pero también dando la posibilidad de considerar modelos paramétricos y no paramétricos.

8. Conclusiones

Con el advenimiento del computo intensivo, la teoría y la matemática numérica y la necesidad de abordar los fenómenos en una mayor complejidad, la modelación estadística surge como un área de investigación donde el conocimiento experto de los fenómenos bajo estudio juega un papel determinante. La transdisciplinariedad y el enfoque multidisciplinario promueve el desarrollo de esta perspectiva de la metodología estadística.

Cabe señalar algunas áreas de desarrollo, como la minería de datos y la inferencia Bayesiana, las cuales son ejes que empujan proyectos y nuevas contribuciones de la modelación estadística.

Referencias

- [1] Aitkin, M. and Longford, N. T. (1986). Statistical modeling issues in school effectiveness studies. *Journal the Royal Statistical Society. Series A*, 149, 1-43.
- [2] Birch, M. W. (1963). Maximum likelihood in three-way contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 25, 220-233.
- [3] Bryk, A. S. and Raudenbush, S. W. (1992). *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods*. Sage, London.
- [4] Cox, D. R. (1970). *Analysis of Binary Data*. Chapman and Hall, London.
- [5] Cox, D. R. (1972). The analysis of multivariate binary data. *Applied Statistics*, 21, 113-1120.
- [6] Freeman, D. H. (1988). Sample survey analysis: analysis of variance and contingency tables. In Krishnaiah P. R. and Rao C. R. (eds). *Handbook of Statistics 6. Sampling*, North Holland, Amsterdam, 265-284.
- [7] Giltinan, D. A. Davidian, M. (1995). *Nonlinear Models for Repeated Measurement Data*. Chapman & Hall, London.
- [8] Goldstein, H. (1995). *Multilevel Statistical Models*. (2nd edn). Edward Arnold, copublished in the Americas by Halsted Press, and imprint of Wiley, New York-Toronto.
- [9] Green, P. J. and Silverman, B. W. (1994). *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models*. Chapman & Hall, London.
- [10] Henderson, C. R. (1975). Best linear unbiased estimation and prediction under a selection model. *Biometrics*, 31, 423-447.
- [11] Henderson, C. R. (1986). Recent developments in variance and covariance estimation. *Journal of Animal Sciences*, 63, 208-216.
- [12] Killion, R. A. and Zahn, D. A. (1976). A bibliography of contingency table literature: 1900-1974. *International Statistical Review*, 44, 71-112.



- [13] Laird, N. M. and Ware, J. H. (1982). Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics*, 38, 963-974.
- [14] Lee, Y. and Nelder, J. A. (1996). Hierarchical generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58, 619-678.
- [15] Lehtonen, R. and Pahkinen, E. J. (1995). *Practical Methods for Design and Analysis of Complex Surveys*. Wiley, New York.
- [16] Lindley, D. V. and Smith, A. F. M. (1972). Bayes estimates for the linear model. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 34, 1-41.
- [17] Lindsey, J. K. (1995). *Modelling Frequency and Count Data*. Oxford university Press, Oxford.
- [18] Longford, N. (1987). A fast scoring algorithm for maximum likelihood estimation in unbalanced mixed models with nested random effects. *Biometrika*. 74, 817-827.
- [19] Longford, N. T. (1993). *Random Coefficient Models*. Oxford University Press, New York.
- [20] McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*. (2da edn). Chapman and Hall, London.
- [21] McCulloch, C. E. and Searle, S. R. (2001). *Generalized, Linear, and Mixed Models*. John Wiley & Sons, Inc, New York-Toronto.
- [22] Nelder, J. A. and Wedderburn, R.W. M. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 135, 370-384.
- [23] Ojeda, M. M. (1993). *Aspectos Teóricos Metodológicos y Computacionales de la Modelación de Datos de Encuestas Complejas*. Tesis Doctoral. Universidad de la Habana, Cuba.
- [24] Ojeda, M. M. y Gutierrez, G. (2003). Un modelo de efectos aleatorios para estudiar series de experimentos. *Agrociencia* (en revisión).
- [25] Sahai, H. and Ojeda, M. M. (2004). *Analysis of Variance for Random Models*. Birkhuser, Boston.
- [26] Searle, S. R., Casella, G., and McCulloch, C. E. (1992). *Variance Components*. John Wiley and Sons, New York.
- [27] Skinner, C. J., Holt, D., and Smith, T. M. F. (1989). *Analysis of Complex Surveys*. Wiley, New York.
- [28] Vonesh, E. F. and Chinchilli, V. M. (1997). *Linear and Nonlinear Models for the Analysis of Repeated Measurements*. Dekker, New York.
-
- Foro de Matemáticas del Sureste 2003
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
22 – 28 de mayo de 2003
Cunduacán Tabasco
México
- Enviado: Mayo 30, 2003*
Publicado: Diciembre, 2004

El enfoque de Programación Convexa para un problema de Control de Markov con Restricciones.

Raquel López Ramírez
Universidad Veracruzana
rlopez@uv.mx

Resumen

En este artículo consideramos procesos de control de Markov (PCM) con restricciones en espacios de Borel, con costos no acotados. El criterio a minimizar es el costo descontado total esperado, y las restricciones se imponen sobre costos descontados similares. Primero damos condiciones bajo las cuales el problema con restricciones es equivalente a un problema de programación convexa, y entonces presentamos un teorema de punto silla para la función de Lagrange asociada con el programa convexo. Este teorema da la existencia de una solución óptima para el problema con restricciones.

1. Introducción

La teoría de control estocástico, en particular, la teoría de los procesos de control Markovianos en tiempo discreto, también conocidos como cadenas de Markov controladas, procesos de decisión Markovianos y programas dinámicos estocásticos, forman una clase de problemas de control estocástico cuyo estudio se inició en la década de los años cincuenta con trabajos de Richard Bellman, y a la fecha se aplican en una gran variedad

de áreas, incluyendo economía, finanzas, ingeniería, biotecnología, control de poblaciones, control de epidemias, administración de recursos renovables y no renovables y muchos más; ver, por ejemplo, los libros [1] y [7] y sus extensas bibliografías.

Aquí estudiamos PCM con restricciones sobre espacios de Borel, con costos no acotados y usamos el criterio costo descontado esperado tanto en la función objetivo como en las restricciones. Estos problemas con restricciones (PC) han sido estudiados por algunos autores utilizando diferentes técnicas, pero principalmente sobre espacios de estados numerables o compactos. En este trabajo consideramos a PC como un problema de programación convexa. Este método ha sido usado suponiendo que el espacio de estados es compacto [7] o numerable [1], [8], y también ha sido usado en [4], [9] para el criterio de costo promedio.

Objetivos Mostrar la equivalencia de un problema con restricciones PC con un cierto problema de programación convexa.

2. Problema de Control Óptimo

En general un problema de control óptimo requiere de dos componentes: (1) Un sistema



dinámico controlado y (2) un criterio de funcionamiento (o función objetivo) que de alguna manera mide, y así nos permite comparar el comportamiento del sistema cuando se utilizan diferentes políticas de control. El problema de control óptimo es determinar una política que optimiza la función objetivo. Aquí describiremos tales componentes para el caso de un PCM a tiempo discreto.

En un PCM el sistema dinámico de interés es de la forma

$$X_{t+1} = F(x_t, a_t, w_t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

donde F es una función dada (Ley de Movimiento) y $\{x_t\}$, $\pi = \{a_t\}$ y $\{w_t\}$ son procesos estocásticos con las siguientes características:

1. El proceso $\{x_t\}$ toma valores en un conjunto de Borel y se le llama conjunto de estados.
2. La sucesión $\pi = \{a_t\}$ se le llama estrategia o política de control, es una sucesión de variables aleatorias con valores en un conjunto de Borel. Este conjunto se conoce como espacio de acciones de control. Se establece que a_t pertenece a un conjunto no vacío $A(x) \subset A$ si el estado $x_t = x$. Además el conjunto de todas las políticas se denota por Π .
3. $\{w_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), con valores en un conjunto S , e independientes del estado inicial x_0 . A $\{w_t\}$ se le llama proceso de perturbaciones.

Sea Y cualquier espacio de Borel, denotaremos por $\mathbb{B}(Y)$ su σ álgebra.

La política $\pi = \{a_t\}$, el proceso $\{w_t\}$ y la función $F : X \times A \times S \rightarrow X$ en (2.1) describen

la evolución del proceso de estados $\{x_t\}$ en el sentido que nos permiten calcular la ley de transición $Q(B|x, a)$ del proceso definida como:

$$Q(B|x, a) := \text{Prob}(x_{t+1} \in B | x_t = x, a_t = a). \quad (2.2)$$

Para todo $B \in \mathbb{B}(X)$, $x \in X$, $a \in A(x)$ y $t = 1, \dots$

Sea \mathbb{K} el conjunto de todas las parejas admisibles estado-acción, es decir,

$$\mathbb{K} := \{(x, a) | x \in X, a \in A(x)\} \quad (2.3)$$

Denotemos por $c : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ la función costo por etapa, de modo que $c(x_t, a_t)$ representa el costo incurrido en la t -ésima etapa cuando el estado del sistema es x_t y se aplica a la acción de control $a_t \in A(x_t)$, $d = (d_i, K, d_q) : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_q$ es una función dada y $K = (k_1, \dots, k_q)$ un vector dado en \mathbb{R}_q , los cuales son usados para definir el problema con restricciones. Así mismo, denotamos E_v^π y P_v^π la esperanza y la probabilidad cuando se utiliza la política π y la distribución v , respectivamente.

Un núcleo estocástico φ sobre A dado X es una función $(x, B) \mapsto \varphi(B|x)$ sobre $X \times \mathbb{B}(A)$, tal que $\varphi(B|\cdot)$ es una función medible sobre X para cada $B \in \mathbb{B}(A)$, y $\varphi(\cdot|x)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{B}(A)$ para cada x fijo en X .

Sea Φ el conjunto de todos los núcleos estocásticos φ sobre A dado X tal que $\varphi(A(x)|x) = 1$ para todo $x \in X$.

Enseguida introduciremos un índice de funcionamiento y el problema de control óptimo: consideramos un factor de descuento $\delta \in (0, 1)$ y una distribución inicial fija $v \in \mathbb{P}(X)$, donde $\mathbb{P}(X)$ denota el conjunto de medidas de probabilidad sobre X . Sean las funciones c



y d como anteriormente y para cada política $\pi \in \Pi$, definimos los costos descontados,

$$V_0(\pi, \nu) := (1 - \delta) E_\nu^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} S^t(x_t, a, \cdot) \right] \quad (2.4)$$

$$V_1(\pi, \nu) := (1 - \delta) E_\nu^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} S^t(x_t, a, \cdot) \right] \quad (2.5)$$

para $i = 1, \dots, q$.

Además, definimos el subconjunto Δ de Π como:

$$\Delta := \{ \pi | V_0(\pi, \nu) < \infty, \\ V_i(\pi, \nu) \leq k_i \quad (i = 1, \dots, q) \}$$

En resumen, tenemos ya una descripción del tipo de sistema dinámico que deseamos estudiar, como en (2.1), y el tipo de función objetivo que deseamos optimizar. Con estas dos componentes podemos definir el problema de control óptimo como el problema de encontrar una política óptima para la función objetivo dada. Luego el problema con restricciones se plantea como sigue:

$$\begin{aligned} \text{PC : Minimizar } & V_0(\pi, \nu) \\ \text{sujeto a : } & \pi \in \Delta \end{aligned} \quad (2.7)$$

Entonces el problema se reduce a encontrar una política π^* que alcanza el mínimo en (2.7), es decir,

$$V_0(\pi^*, \nu) = \inf (V_0(\pi, \nu) | \pi \in \Delta = V^*(\nu)) \quad (2.8)$$

En tal caso se dice que π^* es óptima.

Con esto concluimos la descripción del problema de control óptimo. En particular, de (2.7) y (2.8) vemos que un problema de control es un problema de optimización. Sin embargo, en un problema de optimización clásico, digamos

$$\text{Minimizar } \{F(y) | y \in Y\} \quad (2.9)$$

en donde F es una función dada, el conjunto de restricciones, Y , está contenido en un espacio de dimensión finita y, además, es “estático”, es decir, no varía con el tiempo. En contraste ninguna de estas dos condiciones se tiene en el problema de control. El conjunto de políticas Π es un conjunto muy complicado en general, que no tiene estructura topológica, ni algebraica.

A pesar de estos aspectos tan peculiares del problema de control hay varias técnicas muy bien establecidas para su análisis; de hecho hay técnicas que permiten reducir (2.7) a un problema estático de la forma (2.9) en donde Y es un conjunto de un cierto espacio de dimensión infinita y $F(y)$ es una función lineal o convexa.

Una de estas técnicas es la programación convexa, que enseguida se muestra cómo se utiliza:

Primero introducimos, para cada política $\pi \in \Pi$ las medidas de ocupación μ_ν^π sobre el espacio producto $X \times A$, definidas como

$$\mu_\nu^\pi[\Gamma] := \sum a^t P_\nu^\pi[(x_t, a_t) \in \Gamma]$$

con $\Gamma \in \mathbb{B}(X \times A)$.

Usando estas medidas podemos escribir los costos $V_0(\pi, \nu)$ y $V_1(\pi, \nu)$, ($i = 1, \dots, q$) como

$$\begin{aligned} V_0(\pi, \nu) &:= \int_{X \times A} c(x, a) \mu_\nu^\pi(d(x, a)) \\ V_i(\pi, \nu) &:= \int d_i(x, a) \mu_\nu^\pi(d(x, a)), \\ & \quad i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

en forma abreviada como “producto interior”.

$$\begin{aligned} V_0(\pi, \nu) &= \langle \mu_\nu^\pi, c \rangle \\ V_i(\pi, \nu) &= \langle \mu_\nu^\pi, d_i \rangle, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (2.10)$$



La función en (2.10) es el análogo de $F(y)$ en (2.9).

Así pues, sólo nos falta encontrar el análogo del conjunto Y en (2.9).

Esto se puede hacer de la siguiente manera:

Las medidas de ocupación son equivalentes a las medidas que satisfacen

$$\hat{\mu}(B) - \alpha \int_{X \times A} Q(B \setminus x, a) \mu(d(x, a)) = \nu(B) \quad \forall B \subset X \quad (2.12)$$

donde $\hat{\mu}$ es la medida marginal de μ . Luego, definiendo

$$\mathbb{P}_0(\mathbb{K}) = \{ \mu \in \mathbb{P}(\mathbb{K}) \mid \mu \text{ satisface (2.12)} \}$$

y

$$\Delta_\delta := \{ \mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K}) \mid \langle \mu, d_i \rangle \leq K_i, i = 1, \dots, q \}$$

Con esta notación podemos establecer el siguiente hecho:

Lema 2.1 *PC es equivalente al problema:*

$$PC' : \text{Minimizar } \langle \mu, \nu \rangle \\ \text{sujeto a : } \mu \in \Delta_\delta.$$

Demostración. El Lema es una consecuencia de (2.10), (2.11) y (2.12). \square

Como podemos ver, Δ_δ es el análogo de Y en (2.9)

3. PC Como un Problema de Programación Convexa.

En el Lema 2.1 transformamos PC en un problema de optimización “estático” PC’.

Usaremos PC’ para describir PC como un programa convexo.

Sean f y G funciones sobre $\mathbb{P}_0(\mathbb{K})$ definidas como

$$f(\mu) := \langle \mu, c \rangle \text{ y } G(\mu) := (G_1(\mu), \dots, G_q(\mu))$$

con $G_i(\mu) = \langle \mu, c_i \rangle$, para $i = 1, \dots, q$.

Obviamente, f y G son funciones convexas. También es obvio que $\mathbb{P}_0(\mathbb{K})$ es un conjunto convexo. Así, por el Lema 3.1 podemos representar a PC como el problema convexo.

$$\text{Minimizar } f(\mu) \quad (3.1) \\ \text{sujeta a : } \mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K}) \text{ y } G(\mu) \leq 0$$

donde 0 es el vector cero en \mathbb{R}^q y $G(\mu) \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, q$.

El Lagrangeano $L : \mathbb{P}_0(\mathbb{K}) \times \mathbb{R}_t^q \rightarrow \mathbb{R}$ asociado con el problema (3.1) se define por

$$L(\mu, \alpha) := f(\mu) + G(\mu) \cdot \alpha \quad (3.2)$$

donde $\alpha = (a_1, \dots, a_q)$ está en \mathbb{R}^q y “ \cdot ” denota el producto interior en \mathbb{R}^q .

Observación 3.1: Si μ está en $\mathbb{P}(\mathbb{K})$, entonces existe $\varphi \in \Phi$ tal que μ puede desintegrarse como

$$\mu(B \times C) = \int_B \varphi(c|x) \mu(dx), \\ \forall B \in \mathbb{B}(X), C \in \mathbb{B}(A) \quad (3.3)$$

Por brevedad escribimos (3.3) como $\mu = \hat{\mu} \cdot \varphi$. El siguiente resultado de punto silla da condiciones para que el problema (3.1) tenga una solución.

Teorema 3.2 *Supóngase que existe un $(\mu^*, \alpha^*) \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K}) \times \mathbb{R}_t^q$ tal que el Lagrangeano L tiene un punto silla en (μ^*, α^*) , es decir,*

$$L(\mu^*, \alpha^*) \leq \langle \mu^*, \alpha^* \rangle \leq L(\mu^*, \alpha^*) \quad (3.4)$$

para todo (μ, α) en $\mathbb{P}_0(\mathbb{K}) \times \mathbb{R}_t^q$ Entonces



- (a) μ^* resuelve (3.1) y
- (b) la desintegración $\mu^* = \hat{\mu}^* \cdot \varphi^*$ de μ^* satisface que φ^* es una solución óptima para PC.

Demostración La demostración de la parte (a) es similar a la del Teorema 2 en [6], p. 221, y, por lo tanto se omite. La parte (b) se sigue de (a), la observación 3.1 y la equivalencia de PC y el problema (3.1). \square

En vista del Teorema 3.2, probar que el (3.1) es soluble, es suficiente mostrar la existencia de un punto silla para L . Esto es verdad, en particular, si las siguientes condiciones se cumplen:

Hipótesis 3.3

- (a) El conjunto \mathbb{K} es cerrado,
- (b) Las funciones c y d para $i = 1, \dots, q$ son no negativas y semicontinuas inferiormente y al menos una de ellas es inferiormente compacta, por decir, c , lo cual significa que para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{(x, a) \in \mathbb{K} | c(x, a) \leq r\}$ es compacto.
- (c) La ley de transición Q es débilmente compacta, es decir (denotando por $C_b(S)$ el espacio de funciones continuas y acotadas sobre el espacio topológico S), Q es tal que $\int_x u(y)Q(d_y \cdot)$ pertenece a $C_b(\mathbb{K})$ para cada función u en $C_b(S)$.
- (d) PC es consistente, es decir, el conjunto Δ es no vacío.

Hipótesis 3.4 (Condición de Slater). Existe $\mu_1 \in \mathbb{P}_0$ tal que $G(\mu_1) < 0$, es decir $G_i(\mu_i) < 0$, para $i = 1, \dots, q$.

Teorema 3.5 Bajo las Hipótesis 3.3 y 3.4, existe un punto silla $(\mu^* a^*)$ para el Lagrangeano L y, por lo tanto, PC es soluble.

Demostración La prueba del Teorema se basa en los siguientes hechos, para más detalle ver [5] Capítulo 4. \square

Considerar las funciones

$$L_1(\alpha) := \inf\{L(\mu, \alpha) : \mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K})\} \quad (3.5)$$

$$L_2(\mu) := \sup_{\alpha \geq 0} L(\mu, \alpha) \quad (3.6)$$

y sea $V^*(v)$ como en (2.8).

Observación 3.6 Como $\Delta_\delta \subset \mathbb{P}_0(\mathbb{K})$, para cada $\alpha \in (\mathbb{R}_+^q)$ tenemos

$$\sup_{\alpha \geq 0} L_1(\alpha) \leq V^*(v) \leq \inf\{L_2(\mu) | \mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K})\} \quad (3.7)$$

Los siguientes Lemas muestran que la igualdad se satisface en (3.7)

Lema 3.7 Bajo las Hipótesis 3.3 y 3.4, existe α^* en \mathbb{R}_+^q tal que

$$L_1(\alpha^*) = \sup_{\alpha \geq 0} L_1(\alpha) = V^*(v)$$

Demostración La demostración es similar a la del Teorema 1 en [6], pp. 217-218; y, por lo tanto, se omitirá. \square

Lema 3.8 Bajo las Hipótesis 3.3 y 3.4, tenemos

$$\sup_{\alpha \geq 0} L_1(\alpha) = \inf\{L_2(\mu) | \mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K})\} V^*(v) \quad (3.8)$$

Demostración Como $G(\mu) \cdot \alpha \leq 0$ para todo $\mu \in \Delta_\delta$ y $\alpha \geq 0$, tenemos que

$$L_2\{\mu\} = \sup_{\alpha \geq 0} L(\mu, \alpha) = \langle \mu, c \rangle$$

para todo $\mu \in \Delta_\delta$. Luego,

$$\inf\{L_2(\mu) | \mu \in \Delta_\delta\} = V^*(v).$$



Por lo tanto,

$$\inf\{L_2(\mu)|\mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K})\} = V^*(v)$$

así que, por (3.7) y el Lema 3.7, la igualdad (3.8) se cumple. \square

Lema 3.9 *Bajo la Hipótesis 3.3 existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{P}_0(\mathbb{K})$ tal que*

$$L_2(\mu^*) = \inf\{L_2(\mu)|\mu \in \Delta_\delta\} = V^*(v)$$

Demostración Si μ estén $\mathbb{P}_0(\mathbb{K})$ pero no está en Δ_δ , entonces existe i_0 en $\{1, \dots, q\}$ tal que $G_{i_0}(\mu) > 0$, el cual implica que $L_2(\mu) = +\infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \inf\{L_2(\mu)|\mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K})\} &= \inf\{L_2(\mu)|\mu \in \Delta_\delta\} \\ &= V^*(v) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otra parte, para todo μ en Δ_δ y $\alpha \geq 0$, tenemos que $G(\mu) \cdot \alpha \leq 0$, y así se sigue que

$$\begin{aligned} L_2\{\mu\} &= \sup_{\alpha \geq 0} L(\mu, \alpha) \\ &= \langle \mu, c \rangle \quad \forall \mu \in \Delta_\delta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, de (3.8), (3.9) y el Corolario 3.6 en [2], se sigue la conclusión deseada. \square

Estamos ya listos para la demostración del Teorema 3.5.

Demostración del Teorema 3.5 Sea α^* y μ^* como en los Lemas 3.7 y 3.9, respectivamente. Del Lema 3.8 tenemos que

$$L(\mu^*, \alpha^*) = V^*(v).$$

Ahora, por la última igualdad junto con los Lemas 3.7 y 3.9 y la definición de L_1 y L_2 se sigue que

$$L(\mu^*, \alpha^*) = L_1(\alpha^*) \leq L(\mu, \alpha^*)$$

para todo $\mu \in \mathbb{P}_0(\mathbb{K})$ y, similarmente,

$$L(\mu^*, \alpha^*) = L_2(\alpha^*) \geq L(\mu^*, \alpha)$$

para todo $\alpha \geq 0$.

Por lo tanto, el par (μ^*, α^*) es un punto silla. \square

4. Conclusiones

Estudiamos los procesos de Markov con restricciones en los cuales el criterio de funcionamiento es el costo descontado. Hemos demostrado que bajo algunas condiciones el problema restricciones es equivalente a un problema de programación convexa. Entonces usamos la método de Lagrange para obtener la existencia de soluciones óptimas para PC.

Referencias

- [1] E. Altman, *Constrained Markov Decision Processes & Hall/CRC*, Boca Raton, FL, 1999.
- [2] O. Hernández Lerma, J. González Hernández, *Constrained Markov Decision Processes in Borel Spaces: the discounted case*, *Math. Methods. Oper. Res.*, 52(2000), pp. 271-285.
- [3] O. Hernández Lerma, J. González Hernández y R.R. López Martínez, *Constrained average cost Markov control processes in Borel spaces*, *SIAM J. CONTROL OPTIM.*, por aparecer.
- [4] M. Kurano, J Nakagami, y Y. Huang, *Constrained Markov decision processes with compact state and action spaces: the average case*, *Optimization*, 48 (2000), pp. 255-269.
- [5] R. R. López Martínez, *Procesos de control de Markov con restricciones*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN, México, 2001.



- [6] D.G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, Wiley, New York, 1969.
- [7] A.B. Piunovskiy, Optimal Control of Random Sequences in Problems with Constraints, Kluwer, Boston, 1997.
- [8] L.I. Sennott, Constrained discounted Markov decision chains, Prob. Eng. Inform. Sci., 5(1991), pp. 463-475.
- [9] L.I. Sennott, Constrained average cost Markov decisions chains, , Prob. Eng. Inform. Sci., 7(1993), pp. 69-83.

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
22 – 28 de mayo de 2003
Cunduacán Tabasco
México

Enviado: Mayo, 2003
Publicado: Diciembre, 2004

Análisis de las preferencias de comidas preparadas con el hongo comestible *Pleurotus djamor*(setas), en la comunidad de Baca, Yucatán, México.

Salvador Medina-Peralta^{1,*} y Ligia Ancona-Méndez *

Universidad Autónoma de Yucatan

¹mperalta@tunku.uady.mx

Resumen

En el estado de Yucatán se han realizado investigaciones sobre el cultivo y transferencia de la biotecnología del género *Pleurotus* en municipios del noreste del estado con resultados alentadores. Considerando que es uno de los estados del país con problemas de desnutrición y poco conocimiento sobre el consumo de los hongos, se realizó un estudio sobre su aceptación y con los resultados poder establecer estrategias para la adopción de los hongos comestibles dentro de la dieta del yucateco. Se midió la preferencia de seis comidas a través de un cuestionario aplicado a campesinos de la comunidad de Baca, Yucatán. Tres fueron preparadas con setas y las restantes correspondieron a las testigo. Las respuestas a ¿Qué tanto le gusto?, se analizaron mediante la prueba de Friedman seguido de la prueba de cuatro contrastes para determinar diferencias entre las comidas con y sin setas y cada comida con su testigo. Las respuestas a otras preguntas sólo fueron

descritas. Los resultados obtenidos fueron: a) La percepción visual de las comidas fue “buena”, con un incremento para las comidas testigo y solo en ceviche con setas se registró apreciación “mala”, b) Prevaleció que tienen “buen olor” y ninguna persona indicó que “huelen mal”, c) La textura fue considerada “suave” con un incremento para las comidas testigo, excepto para el ceviche. Las comidas con setas fueron calificadas en mayor proporción como “elástica o xichosa” en comparación con su respectiva comida testigo, excepto para el ceviche, d) Pipián con y sin setas fue considerado como “dulce” u “otro”, ceviche con y sin setas como “agrio o ácido” y rajas con y sin setas como “dulce”, e) En general prefieren las comidas sin setas, f) Prefieren pipián y ceviche sin setas y rajas con setas, g) En general, la de mayor predilección fue el pipián sin setas y la comida con setas de mayor preferencia fue la de rajas, seguido del pipián.

1. Introducción

El cultivo y consumo de hongos comestibles surge como alternativa alimenticia debido a su fácil manejo y la habilidad de crecer sobre residuos de carácter lignocelulósicos, co-

* Financiado por: CONACYT-SISIERRA No. 2000-112. Proyecto “Procesos Biotecnológicos a Escala como una Alternativa de Producción de Alimento Humano (Hongos Comestibles) y Animal (Ruminantes y Lombrices) a Partir de Subproductos Agrícolas en Baca, Yucatán”



mo lo son una gran variedad de desechos principalmente agrícolas, al mismo tiempo contribuyen a tener un mejor aprovechamiento de los recursos naturales. No solo aporta ventajas nutritivas, sino también económicas y sociales para el país, ya que representa una fuente de empleo aun no explotada, por otra parte su cultivo en subproductos agrícolas ha dado buenos resultados, por el bajo costo de producción y los desechos que quedan pueden usarse como alimento para animales, y así minimiza el problema de contaminación, erosión y ocupación ociosa de superficies cultivables (Martínez, D. y Guzmán, G. 1984; Mata y Martínez, 1988, Guzmán et al., 1993).

Los estudios sobre el cultivo de *Pleurotus* se inició utilizando cepas extranjeras, introduciéndolo al mercado mexicano con el nombre de Setas (Martínez-Carrera et al., 1991), y en años recientes se ha detectado que en México está ampliamente distribuida la especie de *Pleurotus djamor* (Guzmán et al., 1993; Sánchez-Vázquez, 1994). La tecnología para producir *Pleurotus* en México es rústica ya que no es mecanizada ni climatizada como sucede con el champiñón. Por otro lado el uso de materia prima como son los desechos agrícolas, los cuales son abundantes, disponibles y baratos o sin costo en muchas regiones del país, hacen que al ser utilizados en el cultivo de hongos comestibles conlleven a que esta tecnología no dañe los recursos naturales y tenga gran importancia ambiental; así como un impacto social y económico al generar fuentes de trabajo y con ello mejorar la economía familiar.

En el Estado de Yucatán, fue hasta principios de los 80's cuando se hizo ver que algunas especies de hongos comestibles en nuestro estado son susceptibles de ser cultivadas, y en 1990 se inicia los estudios sobre el culti-

vo de hongos comestibles en la Licenciatura de Biología de la Universidad Autónoma de Yucatán (Ancona, 1993).

La producción de hongos comestibles en México en forma comercial, se ubica en los estados de Veracruz, Puebla, Tlaxcala, Estado de México, Hidalgo, Morelos, Michoacán, Jalisco y Guanajuato mientras que en Yucatán el cultivo de los hongos comestibles ha pasado de la fase de estudio de laboratorio a la de lograr implementar su producción en el medio rural (Ancona et al., 2000).

El consumo de los hongos comestibles es desde hace mucho tiempo una actividad ampliamente aceptada en diversas partes del mundo, por lo adecuado de su calidad nutricional aroma y sabor, por lo que el cultivo de manera industrial constituye actualmente una fuente de ingreso. Los hongos comestibles son de gran importancia alimenticia para los humanos, ya que cuentan con proteína de muy buena calidad, adecuado balance de aminoácidos esenciales como el Triptófano, Cistina y Treonina y contienen altas concentraciones de vitaminas como la Tiamina, Niacina y Riboflavina y carecen de colesterol (Ocaña et al., 1996).

En México el consumo per cápita de hongos comestibles cultivados se ha incrementado en un 209 % de 1990 -1997, de 0.112 Kg a 0.346 Kg que si se compara con aproximadamente el 1 Kg per cápita anual en los Estados Unidos y más de 2 Kg per cápita por año en Canada e Inglaterra el consumo en nuestro país es bajo (Martínez-Carrera, 2000).

En Yucatán el consumo de hongos comestibles esta dirigido principalmente al Champiñón en forma fresca e industrializada y las setas solo en forma fresca, esta producción para la comercialización es abastecida desde otras partes del país y el consumo se encuentra localizado principalmente en la



capital del estado de Yucatán. Sin embargo desde 1990 se ha empezado a consumir hongos comestibles silvestres como *Pleurotus djamor* y *Volvarilla volvacea* y desde 1996 el cultivo y consumo de *Pleurotus djamor*, *Pleurotus ostreatus* producidos en laboratorios de hongos comestibles de la licenciatura en Biología, en 1998 en la planta de setas ubicada en la comunidad de Dzidzantún y en el 2000 en la planta de setas de la comunidad de Baca (Ancona, 2001).

En la zona rural de Yucatán, no existe una tradición por el consumo de hongos comestibles, pero existen especies comestibles como el género *Pleurotus* factible de cultivarse en desechos agrícolas y su producción representa una alternativa de alimento para este sector social (Ancona, 2001). Para tal efecto, se han realizado pláticas sobre su cultivo y consumo, así como muestras gastronómicas en diferentes comunidades y en la escuela de agricultura de Maní (Ancona, 1997), talleres y exposiciones de hongos, para presentar su morfología, donde crecen, y su importancia, en especial aquellos que son comestibles, concursos de muestras gastronómicas de platillos preparados con hongos comestibles, en los que han participado la población yucateca de la zona urbana de Mérida, así como del medio rural, dato relevante pues no se tenían registros de su consumo en esta zona (Ancona, 2001).

En el estado de Yucatán se han realizado investigaciones sobre el cultivo y transferencia de la biotecnología del género *Pleurotus* en municipios del noreste del estado como: Chenchén de las Torres-Temax, Santa María Cansacab, Maní, Dzidzantún y Baca (Ancona et al., 2000) con resultados alentadores, en las que se han utilizado diferentes desechos lignocelulósicos generados en la entidad (An-

cona, 1997). Por otro lado, la demanda de los hongos comestibles es muy pobre por no existir una tradición sobre su consumo (Ancona, 1997), el cual ha ido cambiando debido a exposiciones, concursos de muestras gastronómicas y conferencias sobre los hongos realizadas en el estado (Ancona, 2001), y considerando que es uno de los estados del país con altos índices de desnutrición y poco conocimiento sobre el consumo de los hongos comestibles, es necesario realizar estudios sobre su aceptación, para que con los resultados se puedan establecer estrategias para la adopción de los hongos comestibles dentro de la dieta del yucateco y así poder contribuir a aliviar el problema de desnutrición.

Por lo anterior, en la comunidad de Baca se esta cultivando el género *Pleurotus* y se han realizado muestras gastronómicas para promover su consumo entre sus habitantes, sin embargo no se tiene registro sobre su aceptación

Objetivo.

Determinar la preferencia del consumo de comidas preparadas con y sin *Pleurotus djamor* en la comunidad de Baca, Yucatán.

2. Materiales y Métodos

El municipio de Baca se encuentra localizado en la región centro-norte del estado de Yucatán (INEGI, 2001), cuenta con una superficie de $118,78\text{km}^2$ localizados entre los $89^{\circ}25'$ de longitud oeste y los $21^{\circ}05'$ de latitud norte. Su población considerada rural, hasta el 14 de febrero de 2000 ascendía a 5,095 habitantes. Entre las actividades productivas que se desarrollan en el Municipio, está la agricultura, destacando por su importancia los cultivos de henequén, maíz, sandía y hortalizas. En cuanto a la agroindustria, hay en opera-



ción dos desfibradoras de henequén (Programa Nacional de Solidaridad, 1992). Una de las cuales es la desfibradora San Carlos, ubicada a la altura del kilómetro 1.5 de la carretera Baca-Motul, donde se encuentra ubicada la planta de cultivo de *Pleurotus*.

3. Recolección de datos

Se midió la preferencia a través de un cuestionario aplicado a los campesinos de la comunidad de Baca Yucatán sobre seis comidas, tres preparadas con setas y las restantes correspondieron a las testigo (sin setas) (Ver el Cuadro 1 al final del artículo). El cuestionario fue elaborado usando un lenguaje “no técnico” y hasta donde fue posible se empleó términos propios de la comunidad.

Las seis comidas fueron preparadas por la misma persona, la cual mantuvo la uniformidad en la elaboración de cada una de ellas, siendo la diferencia entre una comida y su testigo, la sustitución del pollo, pescado y rajitas por setas.

Días previos al estudio con la colaboración de la presidencia municipal, se invitó a la comunidad a una muestra gastronómica preparada con setas, y el día 21 de noviembre de 2001 a las 18:00 horas con ayuda de 25 estudiantes y 3 profesores se seleccionó a las personas que aceptaron participar en la prueba sensorial (adultos sin importar edad) y las aproximadas 160 restantes fueron atendidas en la parte central del patio de la Presidencia municipal, las cuales degustaron sólo de los alimentos preparados con setas.

Para los 35 participantes en la prueba sensorial se acondicionaron asientos para su espera en tanto se indicaba pasar al frente a probar las seis comidas las cuales fueron aleatorizadas previamente para cada individuo. Los

participantes fueron pasando uno por uno, llegándose a atender hasta un máximo de cuatro, en dos mesas largas rectangulares, una por cada lado a lo largo de cada mesa.

Las mesas fueron acondicionadas con manteles blancos y en el lado más largo en una hilera de seis, se ofrecieron a cada participante, la misma cantidad de comida depositada (una cucharada sopera), en platos de plástico blanco del número 19 (diámetro 15 cm), sin indicarles el tipo de comida de que se trataba. También, al inicio de la prueba, a cada participante se le dio una servilleta y una botella de agua purificada de 250 mililitros indicándosele tomar agua después de cada comida para tratar de disminuir los residuos de sabor de la comida anterior y así reducir algunos sesgos en la medición.

Por cada participante se tenía un entrevistador que lo acompañaba en el tiempo que duraba el probar las seis comidas con la correspondiente aplicación del cuestionario.

4. Análisis estadísticos

Las respuestas a las preguntas del cuestionario: ¿Cómo ve la comida?, ¿Cómo huele la comida?, ¿Al masticar la comida como la siente?, ¿El sabor de la comida fue? y ¿De todas las comidas diga dos que le hayan gustado más?, se describieron. En cuanto a las respuestas a la pregunta ¿Qué tanto le gusto?, éstas se analizaron mediante la prueba de Friedman seguido de la prueba de cuatro contrastes (Zar, 1999), para determinar diferencias entre las comidas con y sin setas y cada comida con su testigo.

Cabe señalar que los datos del individuo 14 fueron eliminados para el análisis de las respuestas a ¿Qué tanto le gusto?, debido a que no indicó preferencia en dos comidas.



El nivel de significación empleado en las pruebas estadísticas fue $\alpha = 0,05$.

5. Resultados

De los 35 individuos que participaron en la prueba, 24 fueron mujeres y 11 hombres.

La apreciación visual de las comidas, en términos generales, fue “buena” con un incremento en el porcentaje para las comidas testigo (PS-P: 74.29%-88.57%, CS-C: 80.00%-88.57% y RS-R: 85.29%-88.24%) y solo en CS se registró apreciación “mala” y fue del 8.57%.

En cuanto al olor, ninguna persona manifestó que “huelan mal” y prevaleció que tienen “buen olor” (PS-P: 88.24%-94.12%, CS-C: 85.29%-76.47% y RS-R: 84.85%-78.79%).

La textura de las comidas fue considerada generalmente suave con un incremento para las comidas testigo, excepto para el ceviche, (PS-P: 74.29%-80.00%, CS-C: 80.00%-62.86% y RS-R: 76.47%-97.06%), y en el caso de las rajadas con y sin setas, no fueron consideradas duras. También, se observó que las comidas con setas fueron calificadas en mayor proporción como “elástica o xichosa” en comparación con su respectiva comida testigo, con excepción para el ceviche (Figura 1).

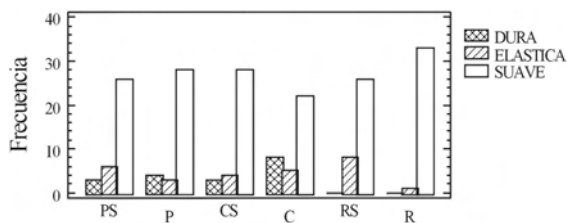


Figura 1: Distribución de las respuestas de ¿Al masticar la comida como la siente?.

Con respecto a ¿El sabor de la comida fue?, se observó que las seis comidas fueron clasificadas, en mayor porcentaje, en las distintas categorías de sabor establecidas. Pipián con y sin setas fue considerado como “dulce” u “otro”, CS y C como “agrio o ácido” y RS y R como “dulce” (Ver el cuadro 2 al final del texto).

El análisis a las respuestas de ¿Qué tanto le gusto?, la prueba de Friedman determinó diferencias entre las comidas ($F_{14, gl.} = 5, p = 0.0156$).

El contraste de no diferencia entre las comidas con y sin setas resultó significativo, es decir, difiere la preferencia (gusto) entre las comidas con y sin setas ($S = 14,3204, gl. = 5, p < 0,0001$) y en promedio prefieren las comidas sin seta ($\sum_{i=1}^6 C_i \bar{R}_i = -1,18$).

También, difiere la preferencia entre pipián con y sin setas ($S = 10,5042, gl. = 5, p < 0,0001$) y en promedio prefieren pipián sin setas ($\sum_{i=1}^6 C_i \bar{R}_i = -0,5$). De igual forma para el ceviche con y sin setas ($S = 18,4874, gl. = 5, p < 0,0001$) y en promedio prefieren ceviche sin setas ($\sum_{i=1}^6 C_i \bar{R}_i = -0,88$).

Difiere la preferencia entre rajadas con y sin setas ($S = 4,2017, gl. = 5, p < 0,01$) y en promedio prefieren rajadas con setas ($\sum_{i=1}^6 C_i \bar{R}_i = 0,2$).

En cuanto a las respuestas a ¿De todas las comidas que probó diga dos que le hayan gustado más?, se observó que la comida con setas que obtuvo mayor predilección fue la de rajadas, seguido del pipián (RS: 18.48% y PS: 12.00%). La de mayor predilección fue el pipián sin setas (24.00%).

6. Conclusiones

La percepción visual de las comidas fue “buena”, con un incremento para las comidas tes-



tigo y solo en ceviche con setas se registró apreciación “mala”.

Prevaleció que tienen “ buen olor” y ninguna persona indicó que “huelen mal”. La textura fue considerada “ suave” con un incremento para las comidas testigo, excepto para el ceviche.

Las comidas con setas fueron calificadas en mayor proporción como “elástica o xichosa” en comparación con su respectiva comida testigo, excepto para el ceviche.

Pipián con y sin setas fue considerado como “dulce” ü “otro”, ceviche con y sin setas como “ agrio o ácido” y rajas con y sin setas como “dulce”.

En general prefieren las comidas sin setas.

Prefieren pipián y ceviche sin setas y rajas con setas.

En general, la de mayor predilección fue el pipián sin setas y la comida con setas de mayor preferencia fue la de rajas, seguido del pipián.

Referencias

- [1] Ancona, L. (1993). Perspectivas del cultivo de hongos comestibles sobre bagazo de henequén. En: Memorias de la Conferencia Nacional sobre el Henequén y la Zona Henequenera de Yucatán. Mérida. 447 - 451
- [2] Ancona, L. (1997). Inicio al cultivo de *Pleurotus* en la zona rural de Yucatán. II Congreso Internacional de Etnobotánica. México. 54 - 55
- [3] Ancona L. (2000). Guía para el cultivo de setas. Universidad Autónoma de Yucatán. Ancona, L. (2001). I Exposiciones de hongos en Yucatán. Revista de la Universidad Autónoma de Yucatán. 216: 43-47
- [4] Ancona, L., R. Belmar; C. Sandoval; H. Mendoza (2000). Experiencias sobre el aprovechamiento integral de subproductos regionales en el cultivo de *Pleurotus djamor* en Dzidzantún, Yucatán, México. I Simposio Latinoamericano de Cultivo de Hongos Comestibles. PP.18
- [5] Guzmán, G; Mata, G; Salmones, D; Soto- Velazco, C; Guzmán-Dávalos, L. (1993). El cultivo de los hongos comestibles, con especial atención a especies tropicales y subtropicales en esquilmos y residuos agroindustriales. IPN. México. 245.
- [6] Guzmán, G. (1993) El conocimiento tradicional de los hongos comestibles en México. I Simposium sobre hongos comestibles en México. México, D.F.P.9
- [7] INEGI. (2001). Anuario Estadístico Yucatán. E 2001. INEGI. P 25.
- [8] Martínez D. y G. Guzmán. 1984 "Investigación y prospecto sobre el cultivo de los hongos comestibles en México". En: Simposium sobre el cultivo de hongos. Subsecretaría forestal, SARH, Puebla.
- [9] Martínez-Carrera, D., R. Leben, P. Morales, M. Sobal, A. Larqué - Saavedra (1991). Historia del cultivo comercial de hongos comestibles en México. Ciencia y desarrollo 16(96): 33-43.



- [10] Martínez-Carrera, D. (2000). Mushroom biotechnology in tropical America. The International Journal of Mushroom Sciences. 3(1):9-20.
- [11] Mata y Martínez- Carrera (1988). Memorias de la conferencia nacional sobre el henequén y la zona henequenera de Yucatán.
- [12] Ocaña, R., G. Martínez, M. Duarte, R. Serwatowski, O. Paredes. (1996). Tecnología para la producción y conservación de setas (*Pleurotus ostreatus*). Acta Universitaria. Universidad de Guanajuato 6(1):52-63.
- [13] Programa Nacional de Solidaridad. (1992). Programa de desarrollo regional de la zona henequenera de Yucatán 1992 - 1994. Mééxico. P 82.
- [14] Sánchez Vázquez, J.E. (1994). Generalidades sobre los hongos. En: Sánchez Vázquez (comp.). Producción de hongos comestibles. Centro de Investigaciones Ecológicas del Sureste. PP 7-12.
- [15] Zar, J. H. (1999). Biostatistical Analysis. 4^a Ed. Prentice Hall. New Jersey. PP 263-268.

Foro de Matemáticas del Sureste 2003
 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
 22 – 28 de mayo de 2003
 Cunduacán Tabasco
 México

Enviado: Mayo, 2003
Publicado: Diciembre, 2004



Tablas

Cuadro 1: Comidas preparadas con y sin Pleurotus setas.

COMIDAS	INGREDIENTES
Pipián con setas (PS)	Pepita de calabaza molida, achiote, masa, epazote, setas crudas, sal al gusto
Pipián con pollo (P)	Pepita de calabaza molida, achiote, masa epazote, pollo crudo, sal al gusto.
Ceviche con setas (CS)	Setas crudas, cebolla, tomate, cilantro, limones, chile habanero.
Ceviche de pescado (C)	Filete de pescado, cebolla, tomate, cilantro, limones, chile habanero.
Rajas con setas (RS)	Setas crudas, chile poblano, cebolla, ajo en polvo, crema de leche, leche evaporada, mantequilla
Rajas sin setas (R)	Chile poblano, cebolla, ajo en polvo, crema de leche, leche evaporada, mantequilla



Cuadro 2: Distribución de respuestas para ¿El sabor de la comida fue?.

COMIDAS	OTRO	AGRIO O ACIDO	SALADA	AMARGA	DULCE
PS	11 31.43 %	2 5.71 %	9 25.71 %	1 2.86 %	12 34.29 %
P	10 28.57 %	3 8.57 %	8 22.86 %	0 0.00 %	14 40.00 %
CS	3 8.57 %	23 65.71 %	3 8.57 %	3 8.57 %	3 8.57 %
PC	3 8.57 %	25 71.43 %	3 8.57 %	1 2.86 %	3 8.57 %
RS	4 11.76 %	3 8.82 %	3 8.82 %	1 2.94 %	23 67.65 %
R	6 18.18 %	4 12.12 %	4 12.12 %	1 3.03 %	18 54.55 %

Memorias del Foro de Matemáticas del Sureste, se imprimio
en los talleres Litomar S. A. en Villaherrmosa, Tab.
Dicimbre de 2004. Derechos reservados UJAT.

Al Foro de Matemáticas del Sureste asistieron e impartieron conferencia investigadores de las siguientes instituciones:

- Centro de Investigación en Matemáticas
- Instituto Mexicano del Petróleo
- Universidad Autónoma de Yucatán
- Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
- Universidad Nacional Autónoma de México
 - Instituto de Matemáticas
 - Facultad de Ciencias
- Universidad Veracruzana

Patrocinadores:

- Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
- Sociedad Matemática Mexicana
- Conacyt: Proyectos J – 41787 y J – 42249

Editor:

Víctor Castellanos Vargas

División Académica de Ciencias Básicas

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

vicas@ujat.mx



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

COLECCIÓN
JUARDO CABALLERO Y
CABALLERO
OPORTUNIDADES DE CONGRESOS Y SIMPOSIOS



ISBN: 968-5748-58-6