Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Álgebra Lineal y Geometría I
Prácticas Informáticas con MATLAB

Néstor Thome Coppo

www.smm.org.mx

Serie: Textos. Vol. 25 (2023)

ISBN: 978-607-8008-18-6

Álgebra Lineal y Geometría I
Prácticas Informáticas con MATLAB

Néstor Thome Coppo

Catedrático de Universidad
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València, España
njthome@mat.upv.es

Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Índice general

Prólogo

Este libro contiene Prácticas Informáticas resueltas con MATLAB correspondientes al temario desarrollado por el propio autor en el libro Álgebra Lineal y Geometría I, Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, 2023, destinado a estudiantes de un primer curso universitario del doble grado en Matemáticas con diferentes Ingenierías; se utiliza en la Universitat Politècnica de València.

Todas las notaciones y referencias a resultados como teoremas, proposiciones, corolarios, etc. que se hacen en el presente libro son en relación al libro de teoría citado anteriormente.

La idea es introducir al estudiante en el programa MATLAB de modo que disponga de una herramienta potente que le permita realizar cálculos complejos de forma rápida, una vez que haya comprendido los conceptos a partir de ejemplos sencillos. Este programa es adecuado para la práctica del Álgebra Lineal por permitir un tratamiento eficaz de la teoría de matrices.

Se han diseñado 6 prácticas que abarcan los diferentes temas del libro. Las mismas se titulan:

- Introducción a MATLAB. Cálculo matricial
- Matrices particionadas. Sistemas de ecuaciones lineales
- Inversas, equivalencia de matrices y determinantes
- Espacios vectoriales
- Cambio de bases en espacios vectoriales

- Espacios euclídeos

Con la intención de que resulten más amenas, se van introduciendo los comandos necesarios de MATLAB a medida que se van necesitando. Después de un pequeño resumen teórico necesario para el desarrollo de la sección correspondiente, la exposición es eminentemente práctica. Además de los ejemplos resueltos, se proponen ejercicios que permitirán al estudiante tomar contacto con el programa y con el propio temario de la asignatura y, también, conseguir ciertas destrezas. Al finalizar cada práctica se proponen ejercicios a modo de autoevaluación.

Las fotos que aparecen a lo largo de este material han sido tomadas en su mayoría de Wikipedia.

Se agradecerá cualquier sugerencia o comentario que sea enviada al correo electrónico `njthome@mat.upv.es`.

El autor.

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$i\,\mathbb{R}$	conjunto de los números imaginarios puros
$\mathbb{I}_k = \{1, 2, \dots, k\}$	intervalo natural inicial
$\emptyset$	conjunto vacío
$:$ o bien $/$	tal que
$\in$	pertenece a
$\sim$	no
$\exists$	existe
$\forall$	para todo
$\wedge$	y
$\vee$	o (incluyente)
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\oplus$	suma directa
$\perp$	ortogonal
$\oplus^\perp$	suma directa ortogonal

Práctica 1

Introducción a MATLAB. Cálculo matricial

Índice

1.1. Introducción al Programa MATLAB

MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, laboratorio de matrices) es un programa interactivo diseñado especialmente para operar y manipular matrices; es una herramienta de cálculo numérico, simbólico[1] y de simulación. Esta práctica está dedicada a una familiarización con el programa y al trabajo con escalares, vectores y matrices en MATLAB.

1.1.1. Primeros comandos

Al iniciar una sesión MATLAB se observa un espacio de trabajo compuesto por varias ventanas. En la ventana de comandos (Command Window) aparece una señal de espera de entrada ("prompt del sistema") indicado mediante

```
>>
```

Para una primera toma de contacto con el programa se puede ver que escribiendo en la ventana de comandos

```
>> help diary
```

y tecleando *enter* se obtiene información sobre el tema **diary**. En general, **help** *tema* proporciona información sobre el tema solicitado. La opción **helpwin** *tema* produce el mismo resultado en una nueva ventana.

Ejercicio 1.1. ¿Qué información proporciona la ejecución de la siguiente sentencia?

```
>> helpwin complex
```

Al escribir

```
>> diary Practica1.txt
```

se guardará en el fichero Practica1 el texto que se escriba en la ventana de comandos a partir de dicha sentencia.

[1] Es decir, efectúa cálculos exactos sin realizar aproximaciones permitiendo operar incluso con parámetros.

En la la carpeta actual (Current Folder) aparecen los ficheros que son visibles desde MATLAB. Si no se indica la carpeta donde guardarlo, lo hará en la carpeta actual; si se desea cambiar de carpeta, no hay más que navegar para buscar la carpeta adecuada. Al finalizar la sesión se escribirá

```
>> diary off
```

a partir de la cual se grabará la sesión del diaro en el fichero llamado Practica1 y se dejará de grabar en él. Si a posteriori se desea introducir más información, se indicará

```
>> diary on
```

lo que añadirá la nueva información a continuación de la existente (y el correspondiente

```
>> diary off
```

al terminar).

El comando % convierte en un comentario el texto que se escriba a continuación suyo. Por ejemplo,

```
>> % Esto es un comentario
```

1.1.2. MATLAB como calculadora

Las operaciones habituales se introducen en la línea de comandos como sigue:

```
>> 2+3
ans =
      5
>> 4*5
ans =
      20
>> 1/10
ans =
      0.1000
>> 2^4
ans =
```

```
        16
```

observando que MATLAB permite realizar operaciones como una calculadora científica. Incluso, es posible la introducción de paréntesis como es el caso de las siguientes operaciones

```
>> (5+3)^2
ans =
        64
>> (-1)*(5+3)/2
ans =
        -4
```

Ejercicio 1.2. Realizar las siguientes operaciones:

(a) $3^2 + \frac{7}{2} - 15 \cdot 2$.

(b) $\frac{7}{2} \cdot 3$.

(c) $(\frac{7}{2}) \cdot 3$.

(d) $\frac{7}{2 \cdot 3}$.

1.1.3. Variables

Para asignar un valor a una variable se selecciona un nombre para la variable teniendo en cuenta que MATLAB distingue letras mayúsculas de minúsculas. Si, por ejemplo, se desea que la variable se llame a, se escribirá $a = 4$ para asignar el valor 4 a la variable a. Tras presionar la tecla *enter* aparecerá

```
>> a=4
```

a lo que MATLAB devolverá

```
a =
        4
```

Observando la ventana del espacio de trabajo (Workspace), se habrá creado una variable cuyo *nombre* es a y tiene asignado el *valor* 4. Se pueden añadir o quitar atributos a esta ventana utilizando el desplegable llamado Show Workspace Actions (situado en el margen derecho superior del espacio de trabajo). Puede ser interesante agregar la columna *size*, que indicará el tamaño de la variable introducida; en este caso será una matriz de tamaño 1×1.

Ejercicio 1.3. Añadir la columna *size* en el espacio de trabajo y comprobar que indica el tamaño correcto de la variable a.

Se pueden introducir dos valores en la misma línea de comandos como sigue:

```
>> a=4, b=2
```

separados por una coma, a lo que MATLAB devolverá

```
a =
     4
b =
     2
```

Ahora en el espacio de trabajo aparecen las variables a y b. Si bien esta información se observa directamente en el espacio de trabajo, se puede consultar también en la línea de comandos a partir de la instrucción **who**.

Si se desean realizar las asignaciones pero que no se muestre el resultado por pantalla, basta poner un punto y coma al finalizar la segunda asignación.

Se propone comprobar que el comando **clc**, limpia la ventana de comandos pero no se borran las asignaciones realizadas previamente. Observar que, tras escribirlo, no se ha vaciado el contenido del espacio de trabajo.

En la línea de comandos, al escribir la instrucción **clear**, ahora sí se borran las asignaciones realizadas hasta el momento y si se desea utilizarlas, deberán ser introducidas de nuevo.

Ejercicio 1.4. Realizar de nuevo las asignaciones $a = 4$ y $b = 2$ separadas por un punto y coma y terminando con un punto y coma. Observar que no se ha mostrado el resultado de las asignaciones por pantalla. ¿Cuál es ahora el contenido del espacio de trabajo?

Como ha ocurrido en las operaciones habituales realizadas anteriormente en el apartado 1.1.2, al no haber asignado el resultado de una operación a una variable, por defecto MATLAB lo asigna a la variable del sistema llamada **ans**, y la misma también puede ser utilizada para operar.

Ejercicio 1.5. Realizar la operación $a + b$ asignándola primero a la varaible ans y luego a la variable c. Calcular ahora $d = ans + c$. ¿Qué resultado hay almacenado en la variable d? ¿Y en ans?

1.1.4. Constantes y formatos numéricos

MATLAB tiene predeterminadas algunas constantes, es decir, reserva nombres de variables para constantes matemáticas conocidas. Por ejemplo,

- el valor (aproximado) del número irracional π: `pi`,
- la unidad imaginaria i: `i`, también aceptada como j: `j`,
- el valor de *eps*: `eps`, que indica la precisión relativa en operaciones en coma flotante.

Si en la línea de comandos se escribe solamente *pi*, se asignará su valor a la variable *ans*:

```
>> pi
ans =
     3.1416
```

Se debe tener cuidado porque al escribir

```
>> pi=3.14
pi =
     3.1400
```

se está cambiando el valor preasignado de la constante π, lo cual no se recomienda en ningún caso utilizar los nombres de las variables predeterminadas. Se puede borrar una sola variable mediante el comando

```
>> clear pi
```

con lo que π vuelve a tener su valor predeterminado de MATLAB.

Ejercicio 1.6. Realizar los siguientes cálculos:

(a) i^2.

(b) j^2.

(c) $i - j$.

(d) $i + j$.

Hasta ahora, cuando ha aparecido un número decimal, por pantalla se han mostrado 4 cifras decimales. Si bien MATLAB trabaja internamente con más precisión, la apariencia de los resultados en pantalla se puede modificar de acuerdo a las necesidades. Se pueden apreciar más de 4 decimales cambiando el formato (a **format long**)

```
>> format long
>> pi
ans =
     3.141592653589793
```

lo mismo que en el siguiente caso

```
>> 1/17
ans =
     0.058823529411765
```

De forma similar, si se necesita una aproximación racional de un número decimal q, el comando rat proporciona un número racional que aproxima al número q:

```
>> format rat
>> 1.125
ans =
     9/8
```

MATLAB dispone de los símbolos especiales `Inf` (infinito) y `NaN` (not a number) para las dos situaciones concretas $\frac{1}{0}$ y $\frac{0}{0}$, respectivamente:

```
>> 1/0
ans =
     Inf
```

y

```
>> 0/0
ans =
     NaN
```

Para volver al formato corto (**format short**) se escribe

```
>> format short
>> 1/17
ans =
     0.0588
```

1.1.5. Algunas funciones predefinidas

MATLAB dispone de las funciones elementales seno, coseno, tangente, exponencial, logaritmo, raíz cuadrada, valor absoluto. Su sintaxis es, respectivamente, `sin`, `cos`, `tan`, `exp`, `log`, `sqrt`, `abs`, etc. Algunos ejemplos son:

```
>> sin(pi/2)
ans =
     1
>> sqrt(4)
ans =
     2
```

```
>> abs(-4)
ans =
     4
```

Si bien no hay un nombre especial para la constante e, es fácil determinarla mediante e^1 como sigue:

```
>> exp(1)
ans =
     2.718281828459046
```

Ejercicio 1.7. ¿El comando `log` se refiere al logaritmo natural (o neperiano, es decir en base e) o al logaritmo decimal (es decir, en base 10)? ¿Es posible responder a partir del cálculo `log(exp(10))`?

Para obtener más información sobre funciones elementales consultar
`>> helpwin elfun`.

1.2. Cálculo matricial

Si bien los vectores pueden considerarse como un tipo especial de matrices, debido a su importancia, se los presentará por separado.

1.2.1. Vectores

Una de las principales características importantes de MATLAB es su capacidad de operar con vectores o matrices aplicando directamente las operaciones, sin tener que descender al nivel de las componentes.

Tipos de vectores

Se pueden definir dos tipos de vectores: introduciendo sus componentes o mediante vectores progresivos.

Introduciendo sus componentes: Si se desea introducir un vector fila, se escriben las componentes del vector deseado separadas por comas o bien por espacios. Por ejemplo,

```
>> x=[1 2 3]
x =
      1     2     3
```

o bien

```
>> y=[4,5,6]
y =
      4     5     6
```

Si se desea introducir un vector columna, se escriben las componentes del vector deseado separadas por punto y coma o bien a partir de la tecla *enter*. Por ejemplo,

```
>> z=[1;2;3]
z =
       1
       2
       3
```

o bien

```
>> t=[4
5
6]

t=
       4
       5
       6
```

Vectores progresivos: Se utilizan para editar vectores con componentes equiespaciadas. La sintaxis $a : h : b$ permite crear un vector cuyas componentes comienzan en a, terminan en b y distan h cada una de la siguiente. De forma alternativa, el comando `linspace(a,b,n)` crea n términos en progresión aritmética comenzando en a y terminando en b. Por ejemplo,

```
>> 0:2:10
ans =
           0     2     4     6     8    10
>> u=linspace(1,9,5)
u =
           1     3     5     7     9
```

La función `length` indica el número de componentes de un vector. Por ejemplo,

```
>> length(u)
ans =
           5
```

Operaciones con vectores

Operaciones elementales: La *suma de dos vectores* x e y del mismo tamaño se calcula componente a componente mediante `x+y`. Por ejemplo,

```
>> x=[1 2 3]; y=[4,5,6];
>> x+y
ans =
          5     7     9
```

El *producto de un escalar* a *por un vector* x se calcula mediante `a*x`. Por ejemplo,

```
>> 2*x
ans =
         2     4     6
```

Ejercicio 1.8. ¿Qué cálculo realiza la orden `sum(x)`? ¿Y `prod(y)`? Comprobarlo realizando la suma y el producto indicados.

El comando `dot(x,y)` calcula el producto escalar de dos vectores del mismo tamaño. Comprobar que no es necesario asignar previamente los vectores a una variable.

Ejercicio 1.9. Hallar el producto escalar entre los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (1, -1, 1)$. ¿Qué se puede decir de dichos vectores de $\mathbb{R}^3$?

Operaciones componente a componente: El *producto componente a componente* de dos vectores del mismo tamaño

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{e} \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

se define como el vector

$$(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$$

y su sintaxis en MATLAB es `x.*y`. El *cociente componente a componente* se define por

$$\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right).$$

Por ejemplo,

```
>> x=[1;2;3];y=[-1;4;0];
>> x.*y
ans =
     -1
      8
      0
```

y

```
>> x./y
ans =
     -1
      0.5000
      Inf
```

El *vector traspuesto (conjugado)* de un vector x (complejo) dado se calcula a partir de `x'`. Por ejemplo,

```
>> x=[1;2;3], y=[-1,4,0]
x =
      1
      2
      3
y =
          -1      4      0
x' =
           1      2      3
y' =
     -1
      4
      0
```

Ejercicio 1.10. Comprobar, mediante un ejemplo, que el producto escalar entre los vectores columna x e y se puede calcular a partir de la expresión `x'*y` o también mediante `sum(x.*y)`.

Si $s \in \mathbb{Z}$, la *potencia s-ésima componente a componente* de un vector (fila o columna)

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se define como el vector

$$(x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s)$$

y su sintaxis en MATLAB es `x.^s`. Por ejemplo,

```
>> x=[1,2,3];
>> x.^2
          1      4      9
```

Ejercicio 1.11. Calcular la potencia componente a componente del vector $x = (-2, 0, 1)$ para $s = -3$ utilizando `format short` y `format rat` y comparar sus respuestas.

1.2.2. Matrices

Por defecto, MATLAB opera con matrices a coeficientes complejos. Una matriz se introduce por filas, separando los elementos de cada fila por una coma (o por un espacio) y cada fila de la siguiente por un punto y coma (o mediante *enter*). Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

se introducen mediante

```
   >> A=[1 2 3;4 5 6]
A=
             1      2      3
             4      5      6
   >> B=[-1,3,1
0 5 -2]
B=
            -1      3      1
             0      5     -2
```

Tipos de matrices

Algunas matrices especiales de uso frecuente se pueden editar en MATLAB a partir de una función predefinida.

La *matriz nula* de tamaño $m \times n$ se introduce mediante el comando `zeros(m,n)`. Por ejemplo,

```
   >> zeros(2,3)
   >> ans=
             0      0      0
             0      0      0
```

La *matriz identidad* de tamaño $n \times n$ se introduce mediante el comando `eye(n)`. Por ejemplo,

```
>> eye(3)
>> ans=
          1     0     0
          0     1     0
          0     0     1
```

La *matriz de unos* de tamaño $m \times n$ se introduce mediante el comando `ones(m,n)`. Por ejemplo,

```
>> ones(2,3)
>> ans=
          1     1     1
          1     1     1
```

Ejercicio 1.12. ¿Es posible calcular `eye(2,3)`? ¿Y `eye(3,2)`? En caso afirmativo, realizar el producto de ambas matrices en ambos sentidos. Observar que este ejemplo prueba que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Para generar *matrices* de tamaño $m \times n$ con *elementos aleatorios uniformemente distribuidos* en el intervalo $[0, 1]$ se utiliza el comando `rand(m,n)`.

Ejercicio 1.13. Ejecutar tres veces el comando `rand(2,3)` y comparar los resultados. Observar que la tecla ↑ (flecha hacia arriba) permite recuperar el último renglón que se haya escrito lo que ahorra tiempo.

Es posible generar *matrices* de tamaño $m \times n$ con *coeficientes enteros aleatorios* en el intervalo $[a, b]$ a partir de `randi([a,b],m,n)`.

Ejercicio 1.14. Ejecutar tres veces el comando anterior en el intervalo $[1, 10]$ para matrices de tamaño 2×3.

Una orden útil para trabajar con matrices es `diag(A)`. Crea un vector columna que contiene la diagonal de la matriz A.

Ejercicio 1.15. ¿Es necesario que la matriz A sea cuadrada para obtener su diagonal mediante la instrucción `diag(A)`?

El propio comando `diag()` aplicado a un vector permite construir una matriz que tenga por diagonal a dicho vector. Por ejemplo,

```
>> x=[1 2 3];
>> diag(x)
ans =
          1     0     0
          0     2     0
          0     0     3
```

Operaciones elementales con matrices

La *suma de dos matrices* A y B del mismo tamaño se calcula componente a componente mediante `A+B`. Por ejemplo,

```
>> A=[1 2 3;4 5 6];B=[-1,3,1;0 5 -2];
A+B
          0     5     4
          4    10     4
```

El *producto de un escalar* a *por una matriz* A se calcula mediante `a*A`. Por ejemplo,

```
>> 2*B
         -2     6     2
          0    10    -4
```

La *multiplicación de dos matrices* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B^{n\times p}$ se calcula mediante `A*B`. Por ejemplo,

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;0 0 0];B=[-1,3,1;0 5 -2;1 1 1];
A*B
          2    16     0
```

```
2       43       0
0        0       0
```

La *traza* de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se obtiene mediante la orden `trace(A)`.

Ejercicio 1.16. Proponer una matriz cuadrada de tamaño 3×3 y calcular su traza. ¿Es necesario que la matriz A sea cuadrada para obtener su traza mediante la instrucción `trace(A)`?

1.3. Una aplicación: Teoría de grafos

El prolífico matemático Leonhard Euler introdujo, entre muchas otras teorías, la conocida como Teoría de grafos. Tiene numerosas aplicaciones en áreas tan dispares como la psicología, la sociología, la química, etc. y por supuesto en muchas de las ingenierías. Kirchhoff los aplicó en el análisis de redes eléctricas, básicas en el estudio de las telecomunicaciones, del mismo modo que en el estudio de la arquitectura de redes de telefonía móvil, redes de ordenadores, etc. En arquitectura e ingeniería civil permiten resolver problemas en la optimización de recorridos, flujos del tráfico urbano, procesos de información de caminos entre ciudades, programación de proyectos; en informática se utilizan para algoritmos de búsquedas, para analizar estructuras de datos, para determinar el camino más corto entre dos puntos; en administración de empresas sirven para establecer jerarquías, organigramas, planificación de tareas, control de la produccción; en cartografía y topografía se suelen utilizar para nombrar el punto de una superficie que supera en altitud a todos sus puntos adyacentes, también como se verá inmediatamente para resumir todos los datos de la configuración topográfica de una ciudad, etc.

La ciudad de Königsberg (actual Kaliningrado, Rusia) donde vivió Euler, se encuentra situada en la desembocadura del río Pregolya, que atravesaba la ciudad, dividiéndola en varias zonas intercomunicadas mediante 7 puentes como se aprecia en la Figura 1.1.

Figura 1.1: Los siete puentes de Könisgsberg.

A modo de entretenimiento la población se preguntaba si sería posible atravesar todos los puentes pasando sólo una vez por cada uno de ellos y finalizando en el punto de partida.

El problema fue resuelto por Euler quien demostró que es imposible.

Comenzó su argumento simplificando la gráfica[2] a una como en la Figura 1.2, donde los puntos se llaman *nodos*, los pares de nodos se unen mediante *aristas* y el objeto matemático definido mediante el conjunto de nodos y el conjunto de aristas se llama *grafo*.

Cada nodo representa una de las zonas separadas por el río y las aristas representan los puentes que conectan dichas zonas.

Ejercicio 1.17. Comprobar que el grafo de la Figura 1.2 se corresponde con la gráfica de la Figura 1.1.

Luego, observó que los nodos intermedios de un recorrido posible deben

[2]Fuente de esta gráfica: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=851840.

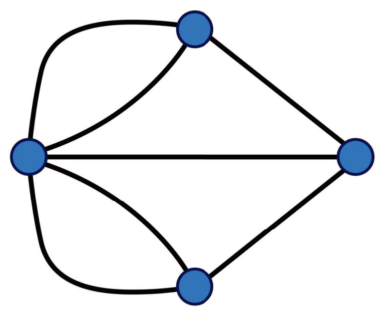

Figura 1.2: Grafo utilizado por Euler.

estar necesariamente conectados a un número par de aristas. En efecto, si se llega a un punto desde alguna arista, la única forma de salir de ese nodo es por una arista diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de aristas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial del recorrido debe ser igual al final, por lo que no puede existir ningún nodo conectado con un número impar de aristas. En particular, como se ve en este diagrama, los cuatro nodos tienen un número impar (tres o cinco) de aristas, lo que demuestra que la respuesta al problema es negativa.

Como en este ejemplo, es posible atravesar cada puente en ambas direcciones, se trata de un *grafo no dirigido*. Si se enumeran los nodos del grafo mediante la notación n_1, n_2, n_3 y n_4 (comenzando por el nodo superior, continuando por el central izquierdo y luego el derecho para finalizar por el nodo inferior) es posible asociarle una matriz A (llamada *matriz de adyacencia*) que recoge la información de las conexiones existentes. Dicha matriz se define mediante $A = [a_{ij}]$ donde a_{ij} denota la cantidad de conexiones entre el nodo n_i con el nodo n_j. Por supuesto, esta matriz es siempre simétrica. En este ejemplo queda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde, por ejemplo, el elemento $a_{32} = 1$ significa que entre el nodo n_3 y el nodo n_2 hay sólo una arista mientras que $a_{12} = 2$ indica que entre el nodo n_1 y el nodo n_2 hay 2 aristas.

Se observa que para ir del nodo n_2 al nodo n_3 hay más de una posibilidad. Por ejemplo, se puede ir directamente $n_2 \to n_3$ (se llama camino de *longitud* 1), a través del nodo n_1 mediante dos posibles caminos (de longitud 2, es decir que cada uno se debe recorrer en 2 etapas) $n_2 \to n_1 \to n_3$, etc.

En Teoría de grafos se prueba que las potencias de la matriz de adyacencia ofrecen información importante. Si se denota mediante a_{ij}^k al elemento que ocupa la posición (i, j) de la matriz A^k, $k \in \mathbb{N}$ entonces la **propiedad** establece que

a_{ij}^k coincide con el número de caminos de longitud k que van de n_i a n_j.

En el ejemplo es posible determinar que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

con lo que se pueden unir los nodos n_1 y n_3 mediante 2 caminos de longitud 2 que son

$$n_1 \to_{\text{por un camino}} n_2 \to n_3 \qquad \text{y} \qquad n_1 \to_{\text{por el otro camino}} n_2 \to n_3.$$

También se tiene que los nodos n_3 y n_2 se pueden conectar mediante 4 caminos de longitud 2, dos de ellos son pasando por n_1 y los otros dos pasando por n_2.

Ejercicio 1.18. Se considera el problema de Euler.

(a) ¿Cuántos caminos de longitud 4 hay que unan los nodos n_3 y n_4 del grafo?

(b) ¿Cuántos de longitud 5 hay que unan los nodos n_2 y n_4?

(c) Comprobar que todos los nodos están conectados dos a dos por caminos de longitud 2. ¿Qué condición se debería cumplir para que la afirmación anterior sea falsa?

1.4. Ejercicios

(1) Hallar aproximadamente las soluciones de la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0$$

utilizando variables para almacenar sus coeficientes y aplicando la fórmula que proporciona las soluciones de una ecuación de segundo grado. Comprobar que las soluciones aproximadas obtenidas son correctas.

(2) Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo de cateros de lados 5 y 12.

(3) Introduciendo los datos adecuadamente y realizando una sóla operación en MATLAB, comprobar que las siguientes son ternas pitagóricas, es decir, cada terna $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ = (\mathbb{Z}^+)^3$ satisface que $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\begin{array}{cccc} (3,4,5) & (5,12,13) & (7,24,25) & (8,15,17) \\ (9,40,41) & (11,60,61) & (12,35,37) & (13,84,85) \\ (16,63,65) & (20,21,29) & (28,45,53) & (33,56,65) \\ (36,77,85) & (39,80,89) & (48,55,73) & (65,72,97) \end{array}$$

Probar que si $(a, b, c) \in (\mathbb{Z}^+)^3$ es una terna pitagórica entonces (da, db, dc) son ternas pitagóricas para todo $d \in \mathbb{Z}^+$.

(4) Hallar los ángulos agudos del triángulo rectángulo determinado por la terna pitagórica $(5, 12, 13)$. Utilizar la ayuda `help elfun` en la ventana de comandos para averiguar la sintaxis para las funciones inversas necesarias.

(5) Dado un vector x, ¿cuál es el resultado de realizar `diag(diag(x))`?

(6) Elegir una matriz A de elementos enteros entre -3 y 3 de tamaño 2×2. Calcular `A*A`, `A^2` y `A.^2`. Comentar los resultados obtenidos. Repetir los cálculos con otra matriz de tamaño 2×3. ¿Qué ocurre en este caso?

(7) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Comprobar que, en general, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(BAC)$. Demostrar que si A, B y C son matrices diagonales entonces se verifica la igualdad.

(8) La siguiente tabla proporciona las notas de los dos controles de cuatro alumnos de Álgebra Lineal y Geometría I:

Alumno	Control 1	Control 2
Vicente	6	10
Ana	9	7
Rafael	5	8
Sofía	10	10

(a) Generar una matriz llamada N que represente los datos.

(b) Describir el significado de las siguientes operaciones

(I) $N\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y también $N\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

(II) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}N$ y también $\begin{bmatrix}0&1&0&0\end{bmatrix}N$.

(III) $N\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y también $\frac{1}{2}N\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

(IV) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}N$ y también $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}N$. ¿En qué control los alumnos obtuvieron en promedio la mejor calificación?

(V) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}N\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

(c) Mediante la multiplicación de matrices, expresar el promedio de las todas las notas teniendo en cuenta las calificaciones de los dos controles.

(d) Utilizar el producto de matrices adecuadamente para subir las notas del primer control a todos los alumnos en un 10 %, es decir, escalándolas por un factor de 1,1. ¿Será posible aplicar esta subida a todos los alumnos?

(9) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcular algunas potencias naturales A^n de A hasta encontrar un patrón que permita escribirlas a todas. Escribir el resultado detalladamente.

(b) Probar el resultado conjeturado en el apartado anterior.

(10) Repetir el ejercicio anterior para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sugerencia: En la página web

`https://es.mathworks.com/learn/tutorials/matlab-onramp.html`

se encuentra disponible un pequeño curso de introducción a MATLAB, titulado MATLAB Onramp, que es recomendable realizar para una primera toma de contacto con el programa y afianzar los conocimientos vistos en esta práctica.

Práctica 2

Matrices particionadas. Sistemas de ecuaciones lineales

Índice

2.1. Matrices particionadas

En la primera parte de esta práctica se analizará cómo extraer información (de un vector y) de una matriz y cómo manipular varias matrices (bloques) para que formen parte de una nueva matriz, construida a partir de esos bloques.

2.1.1. Selección de las componentes de un vector

¿Cómo extraer las componentes de un vector? Una vez introducido un vector y asignado a una variable, se escribe el nombre de dicha variable y, a continuación, entre paréntesis, se indica el lugar que ocupa la componente deseada. Por ejemplo,

```
>> x=[5 3 6 -1]
>> x(4)
ans=
         -1
>> x(2)
ans=
          3
```

Observar que no es necesario recordar la longitud del vector si lo que se desea es, por ejemplo, obtener su última componente:

```
>> x(end)
ans=
         -1
```

El comando `length` permite calcular el tamaño del vector. En este caso,

```
>> t=length(x)
t=
         4
>> x(t)
```

```
ans=
        -1
```

Observación: Si se quiere introducir un vector vacío, es decir, sin componentes, se escribirá:

```
>> x=[];
```

2.1.2. Selección y modificación de elementos de una matriz

Selección: Se procede de manera parecida a la realizada con vectores. Ahora, una vez introducida la matriz y asignada a una variable, se escribe el nombre de dicha variable y, a continuación, entre paréntesis, se indican las posiciones de la fila y la columna que ocupa la componente deseada. Por ejemplo,

```
>> A=[5 3; 6 -1]
A=
     5     3
     6    -1
>> A(1,2)
ans=
         3
>> A(2,2)
ans=
        -1
```

Modificación: Si se desea modificar el elemento de la matriz A anterior de la posición (i, j) poniendo en su lugar el elemento k, basta indicar `A(i,j)=k`. Por ejemplo,

```
>> A(1,2)=0
```

```
A=
      5     0
      6    -1
```

Uso del símbolo de dos puntos: Una notación importante corresponde a los dos puntos para indicar la selección de una fila o columna completa. Más específicamente, si se escribe `A(:,1)` se está solicitando que aparezca en pantalla el contenido de la primera columna de A (es decir, los dos puntos en la posición de las filas indica que se seleccionen todos las filas de la matriz A). Análogamente, la notación `A(2,:)` indica que se está solicitando el contenido de la segunda fila de A (y todas sus columnas). Por ejemplo,

```
>> A=[1 9 3; 0 -1 5;2 6 7]
A=
     1     9     3
     0    -1     5
     2     6     7
>> A(:,2)
ans=
     9
    -1
     6
>> A(3,:)
ans=
     2     6     7
```

Extracción de una submatriz: También es posible extraer una *submatriz* de una matriz dada, que no sea un bloque, es decir cuyas filas y/o columnas no sean consecutivas. Por ejemplo, si de la matriz A anterior se quiere extraer la submatriz formada por la primera y tercera filas y por la segunda columna se debería escribir

```
>> filas = [1 3]; columnas = [2]; % Filas y columna a seleccionar
>> A(filas,columnas)
ans=
     9
     6
```

2.1.3. Formación de una nueva matriz a partir de bloques

A veces es necesario crear una matriz a partir de bloques conocidos. Para ello, el único requisito es que los tamaños sean compatibles. La forma de proceder es tratándolos como si fueran elementos, se insiste en la necesidad de la adecuación de los tamaños. Por ejemplo, tres formas posibles de construir nuevas matrices M_1, M_2 y M_3 a partir de los bloques

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

son las siguientes

```
>> A=[1,2,3;4,5,6]
A=
     1      2      3
     4      5      6
>> B=[-1,-2;-4,-5]
B=
     -1      -2
     -4      -5
>> M1=[A,B]
M1=
     1      2      3     -1      -2
     4      5      6     -4      -5
```

```
>> M2=[A;A]
M2=
     1     2     3
     4     5     6
     1     2     3
     4     5     6
```

y

```
>> M3=[A,B;A,B']
M3=
     1     2     3    -1    -2
     4     5     6    -4    -5
     1     2     3    -1    -4
     4     5     6    -2    -5
```

Ahora se podría extraer un bloque como sigue

```
>> M3(2:4,4:5)
ans
     -4    -5
     -1    -4
     -2    -5
```

donde la notación $2:4$ (situada en la primera componente) indica que se seleccionarán las filas 2, 3 y 4 y la notación $4:5$ (situada en la segunda componente) indica que se seleccionarán las columnas 4 y 5. También se podría extraer una submatriz como sigue

```
>> M3([1 3 4],[2 5])
ans
     2    -2
```

```
     2      -4
     5      -5
```

donde las filas y las columnas seleccionadas no son consecutivas.

Del mismo modo que el comando

`length()`

permite hallar el tamaño de un vector, existe una orden en MATLAB para calcular el tamaño de una matriz, que es

`size()`

Dicha función tiene dos parámetros de salida:

- m para la cantidad de filas y
- n para la cantidad de columnas.

La sintaxis se aprecia en los siguientes ejemplos

```
>> [m,n]=size(M1)
m=
     2
n=
     5
```

y

```
>> [m,n]=size(M3)
m=
     4
n=
     5
```

Ejercicio 2.1. Se pide:

(a) Construir la siguiente matriz utilizando bloques

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para ello, consultar el funcionamiento del comando `flipud`.

(b) Encontrar el tamaño de la matriz A.

(c) De la matriz A extraer las siguientes submatrices:

(i) la submatriz que contiene las filas 1, 2 y 5 y las columnas 3 y 6.

(ii) el bloque que contiene las filas 1, 2 y 3 y las columnas 3, 4, 5 y 6.

(d) Escribir una matriz que conserve la información de A y donde los elementos de las filas 1, 2 y 3 y columnas 1,2 y 3 cambien de 2 a 3. Para ello, almacenar la matriz A en una nueva variable y modificar únicamente los elementos indicados con un comando que realice todas las modificaciones de manera simultánea.

Ejercicio 2.2. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Utilizando matrices por bloques, calcular algunas potencias naturales A^n de A $(n = 1, 2, 3, \dots)$ hasta encontrar un patrón que permita escribirlas a todas. Escribir el resultado detalladamente.

(b) Probar[a], por el método de inducción, el resultado conjeturado en el apartado anterior. Para la demostración aprovechar la estructura por bloques que presenta la matriz.

[a] A mano, es decir, sin utilizar MATLAB.

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Se utilizará la información vista hasta el momento para resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss.

2.2.1. Un primer ejemplo

Primero se seguirá el proceso mediante un ejemplo paso a paso.

Ejemplo 2.1. Se trata de resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Se deben aplicar operaciones elementales por filas a la matriz ampliada

$$A = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Se comienza por la *fase de eliminación* del algoritmo de Gauss. Para colocar en la segunda fila de A, la suma de dicha fila más la primera previamente multiplicada por el escalar $-\frac{A(2,1)}{A(1,1)}$, en MATLAB se puede escribir

```
>> A(2,:)=A(2,:)-A(2,1)/A(1,1) * A(1,:)
A=
      1     2    -1     1
      0    -5     1    -2
      1     1     1     6
```

Análogamente, para eliminar el elemento de la tercera fila y primera columna, se hace

```
>> A(3,:)=A(3,:)-A(3,1)/A(1,1)*A(1,:)
A=
      1     2    -1     1
      0    -5     1    -2
      0    -1     2     5
```

Por último, se obtiene una forma triangular eliminando el elemento de la tercera fila y segunda columna mediante

```
>> A(3,:)=A(3,:)-A(3,2)/A(2,2)*A(2,:)
A=
      1     2    -1     1
      0    -5     1    -2
      0     0     9/5   27/5
```

Ahora se procede con la *fase de sustitución regresiva* del algoritmo de Gauss. Para ello,

```
>> x3=A(3,4)/A(3,3)
x3=
        3
```

luego

```
>> x2=(A(2,4)-A(2,3)*x3)/A(2,2)
x2=
        1
```

y finalmente

```
>> x1=(A(1,4)-A(1,2)*x2-A(1,3)*x3)/A(1,1)
x1=
        2
```

Se observa que, para poder aplicar este método, es necesario que los valores diagonales $A(k,k)$ sean todos no nulos.

Ejercicio 2.3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el procedimiento anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.2.2. Método general

En general, se quiere resolver

$$Ax = b, \qquad \text{con} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Para sistematizar el procedimiento correspondiente a la fase de eliminación, se supone que en primer lugar se ha realizado la asignación

```
>> A=[A b]
```

y que las k primeras filas ya han sido transformadas en una forma triangular superior.

Para unificar notación, llamando $A_{i,n+1}$ a b_i, se habrá obtenido una matriz del tipo

$$
A=\left[\begin{array}{ccccccccccc|c}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k} & \dots & A_{1i} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} & A_{1,n+1}\\
0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2k} & \dots & A_{2i} & \dots & A_{2j} & \dots & A_{2n} & A_{2,n+1}\\
0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3k} & \dots & A_{3i} & \dots & A_{3j} & \dots & A_{3n} & A_{3,n+1}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & A_{kk} & \dots & A_{ki} & \dots & A_{kj} & \dots & A_{kn} & A_{k,n+1}\\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & A_{k+1,k} & \dots & A_{k+1,i} & \dots & A_{k+1,j} & \dots & A_{k+1,n} & A_{k+1,n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & A_{ik} & \dots & A_{ii} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{in} & A_{i,n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & A_{nk} & \dots & A_{ni} & \dots & A_{nj} & \dots & A_{nn} & A_{n,n+1}
\end{array}\right],
$$

donde se utiliza la misma notación para las matrices en los diferentes pasos para no introducir nuevos subíndices. Este hecho es consistente con la sintaxis a utilizar en MATLAB pues, al operar, se almacenará el nuevo resultado en la misma variable para ahorrar memoria.

Al eliminar el elemento A_{ik} (mediante el pivote A_{kk}), se modificarán los restantes elementos de la fila i-ésima a partir de la fila k-ésima. Para ello se escribirá

$$A_{ij} = A_{ij} - \frac{A_{ik}}{A_{kk}} A_{kj} \qquad \text{para} \qquad j = k, k+1, \dots, n, n+1,$$

que, con la sintaxis de MATLAB, queda

```
>> A(i,k:n+1)=A(i,k:n+1)-A(i,k)/A(k,k)*A(k,k:n+1)
```

Observar que la notación de los dos puntos permite trabajar vectorialmente, con lo cual es posible realizar, con una sola instrucción, todo el proceso correspondiente a $j = k, k+1, \dots, n, n+1$.

La variable k se utiliza para seleccionar la fila pivote, con lo cual su variación debe ser $k = 1, 2, \dots, n-1$, mientras que la variable i permite seleccionar la fila que será transformada, con lo cual su variación debe ser $i = k+1, k+2, \ldots, n$. Las variables k e i suelen llamarse **contadores**.

Hasta aquí el procedimiento ha realizado la eliminación obteniendo una matriz aumentada del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} & A_{1,n+1} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} & A_{2,n+1} \\ 0 & 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} & A_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{nn} & A_{n,n+1} \end{array}\right],$$

donde para poderla encontrar se ha necesitado chequear previamente que los pivotes

$$A_{11}, A_{22}, A_{33}, \ldots, A_{n-1,n-1}$$

son todos no nulos. Sin embargo, hasta ahora no ha sido necesario realizar la comprobación con el último: A_{nn}.

A continuación se debe abordar la sustitución regresiva asegurando previamente (ahora sí) que $A_{nn} \neq 0$. De la última fila se obtiene que

$$x_n = \frac{A_{n,n+1}}{A_{nn}}.$$

Una vez que se hayan determinado $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$, tras sustituir en la ecuación anterior y habiendo despejado dichas incógnitas, para encontrar x_k de la ecuación

$$A_{kk}x_k + A_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + A_{kn}x_n = A_{k,n+1},$$

se deben despejar, para $k = n-1, n-2, \ldots, 1$, los valores

$$\begin{aligned} x_k &= \left(A_{k,n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} A_{kj}x_j\right)\frac{1}{A_{kk}} \\ &= \left(A_{k,n+1} - \left[\begin{array}{cccc} A_{k,k+1} & A_{k,k+2} & \ldots & A_{k,n} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right]\right)\frac{1}{A_{kk}}. \end{aligned}$$

La sintaxis de MATLAB para el último producto de matrices es

$$\begin{bmatrix} A_{k,k+1} & A_{k,k+2} & \dots & A_{k,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \texttt{A(k,k+1:n) * x(k+1:n).}$$

Más aún, es posible economizar memoria de almacenamiento. Para ello, en cada paso, el valor de la incógnita hallada $x(k)$ será almacenado en el vector de los términos independientes `A(k,n+1)` el cual será actualizado en cada etapa del siguiente modo: primero se calculará la incógnita x_n que se almacenará en `A(n,n+1)`:

```
A(n,n+1) = A(n,n+1)/A(n,n)
```

y luego, para $k = n-1, n-2, \dots, 1$ se calcularán los restantes valores de $x(k)$ mediante

```
A(k,n+1) = (A(k,n+1)- A(k,k+1:n) * x(k+1:n))/A(k,k).
```

El programa en MATLAB reunirá toda la información analizada. Antes de proporcionarlo, es necesario indicar algunas claves para escribir una función en MATLAB y cómo hacer para ejecutarla.

2.2.3. Elaboración de una función en MATLAB

Para poder escribir una función en MATLAB que permita resolver un sistema lineal cualquiera de este tipo será necesario conocer algunos *operadores lógicos* y algunos *operadores relacionales* que permitan realizar comparaciones. Los básicos se aprecian en las tablas adjuntas.

$<$	menor
$<=$	menor o igual
$>$	mayor
$>=$	mayor o igual
$==$	igual
~=	distinto

&	conjunción
|	disyunción
~	negación

Otros dos elementos son el *condicional*

`if-then-else`

y el *bucle*

`for-end`.

El funcionamiento es como en cualquier otro lenguaje de programación.

La parte correspondiente al `if-then` del condicional permite imponer alguna condición (o condiciones separadas por operadores lógicos o relacionales) bajo la cual se ejecuten las sentencias que le siguen o, de lo contrario la parte correspondiente al `else` hará que se ejecuten otras sentencias indicadas.

Por su parte, el buble `for-end` ejecuta las sentencias que se encuentran en su interior para lo cual se requiere un contador que indique desde qué valor del contador comenzar y hasta qué valor ejecutar las instrucciones que se hallen entre el `for` y el `end`. Al llegar al final del `for-end` el contador se incrementa de manera automática. Por ejemplo, en

```
for k=1:n
Instrucciones
end
```

el contador k se incrementará en una unidad al llegar al end para volver al principio y ejecutar de nuevo “Instrucciones” con el siguiente valor de k, y se repite así este procedimiento hasta agotar las posibilidades para k.

Una *función* en MATLAB comienza con la palabra `function` seguida de una expresión del tipo

```
[sal1,sal2,...,salm]=nombre_de_funcion(ent1,ent2,...,ents)
```

y termina con la palabra `end`.

Se debe tener en cuenta que:

- Las expresiones $ent1, ent2, \ldots, ents$ se llaman **parámetros o argumentos de entrada**. Cada vez que se desee ejecutar el programa, dichos parámetros deberán contener valores espacíficos asignados (desde la línea de comando) previamente a la ejecución.

- Las expresiones $sal1, sal2, \ldots, salm$ se llaman **parámetros o argumentos de salida**. Son resultados que proporciona el programa. Por ello, en las variables $sal1, sal2, \ldots, salm$ se debe almacenar algún valor a lo largo del programa.[1]

En el ejemplo se escribirá, en un nuevo *script*,

```
[x]=Gauss(A,b)
```

para indicar que A y b son los parámetros de entrada (previamente introducidos con valores numéricos concretos) y x es el parámetro de salida (donde se colocará el vector solución del sistema lineal).

Este script se deberá guardar en una carpeta que, en este caso, se nombrará Gauss.m. Para poder ejecutar el programa, esta carpeta debe estar visible en Current Folder.

[1] Antes de abordar el programa del método de Gauss, se puede consultar un pequeño ejemplo resuelto paso a paso en el Anexo 2.3 proporcionado al final.

2.3. Ejemplo de un programa en MATLAB

Ejemplo 2.2. Diseñar un programa en MATLAB que cumpla los siguientes requisitos:

- Debe estar guardado en una función llamada `operando_matrices.m`.
- Debe realizar el cálculo $A+hB$, de dos matrices A y B de tamaño 2×2 a coeficientes reales o complejos y un número real o complejo h.
- Debe proporcionar el resultado en una variable llamada C.

Una vez almacenado, ejecutar dicho programa desde la línea de comandos para los parámetros concretos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6i \\ 7 & 8+i \end{bmatrix}, \qquad h = i.$$

$\lhd$ Los datos proporcionados son:

- Parámetros de entrada: A, B, h.
- Parámetro de salida: C.
- Nombre de la función: `operando_matrices.m`.
- Cálculo a realizar en el cuerpo del programa: $A+hB$.

En la Figura 2.1 se pueden apreciar 4 ventanas de MATLAB:

- El *editor* (en inglés, Editor), que es el espacio donde se ha escrito la función.
- La *ventana de comandos* (en inglés, Command Window), que es el espacio donde se han introducido los valores concretos de los parámetros de entrada y desde donde se ejecuta la función.

- La *carpeta actual* (en inglés, Current Folder), que es donde se ha guardado el fichero bajo el nombre `operando_matrices.m`. Es importante que esta ruta se encuentre visible para que MATLAB pueda ejecutar el fichero desde allí.

- El *espacio de trabajo* (en inglés, Workspace), que es donde aparecen las variables almacenadas y sus características.

Se recuerda que, una vez escrita la función en el editor, debe ser guardada en alguna carpeta elegida que debe estar seleccionada como carpeta actual. En este caso, dicha carpeta se llama `operando_matrices.m` y dicho fichero se encuentra en la ruta (carpeta actual)

▶ `C:` ▶ `Users` ▶ `njthome` ▶ `Desktop` ▶ `Practicas ALyGI`.

Una vez introducidos en la línea de comandos los valores concretos proporcionados para los parámetros A, B y h, está todo preparado para ejecutar el programa. Para dicha ejecución se debe escribir en la línea de comandos el encabezado de la función:

`>> [C] = operando_matrices(A,B,h)`.

Al ejecutarlo se obtiene el valor concreto de la variable `C`, la que se puede observar que se añade a las que formaban parte del espacio de trabajo.

▷

2.3.1. Programa

El programa básico del método de Gauss quedaría como sigue:

```
function [x] = Gauss(A,b)
% Este programa resuelve un sistema lineal nxn del tipo Ax =
b
% por el metodo de eliminacion de Gauss.
% Desde la linea de comandos se debe escribir: [x] = Gauss(A,b)
```

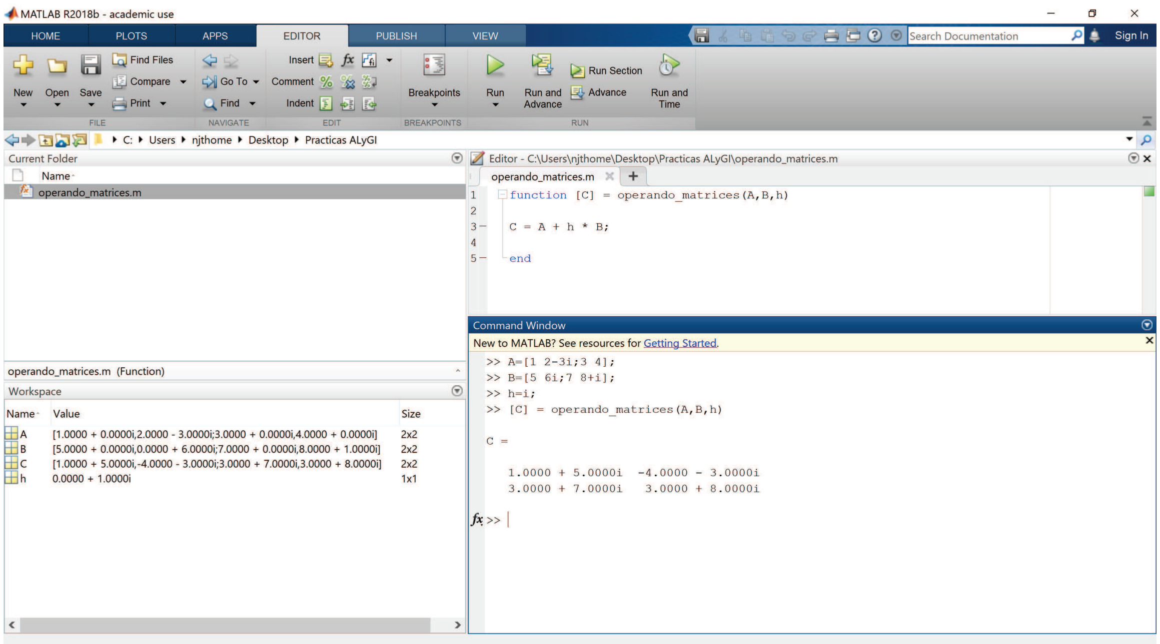

Figura 2.1: Ejemplo.

```
n = length(b); %Numero de filas de A
A = [A b]; %En A se asigna la matriz ampliada

%Fase de eliminacion
for k = 1:n-1 %k selecciona la fila pivote
  for i = k+1:n %i selecciona la fila donde eliminar
    if A(k,k) == 0
      disp('Se ha detectado un pivote nulo')
      return %Salir del bucle
    else
      factor = A(i,k)/A(k,k);
      A(i,k:n+1) = A(i,k:n+1) - factor * A(k,k:n+1);
    end
  end
```

```
end

%Fase de sustitucion regresiva

  if A(n,n) == 0
     disp('El sistema no es compatible determinado')
     x=[]; %No es posible resolver
     return
  else
    A(n,n+1) = A(n,n+1)/A(n,n); %La solucion se almacena en el
vector b
    for k = n-1:-1:1 %El contador decrementa en 1
       A(k,n+1) = (A(k,n+1) - A(k,k+1:n)*A(k+1:n,n+1))/A(k,k);
    end
  end
 x=A(:,n+1); %Se asigna el parametro de salida x

end
```

Para ejecutar el programa Gauss.m para resolver el Ejemplo 2.1 se debe escribir en la línea de comandos:

```
>> A=[1 2 -1;2 -1 -1;1 1 1];
>> b=[1;0;6];


>> [x] = Gauss(A,b)

x =
     2
     1
     3
```

Ejercicio 2.4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el programa Gauss.m:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En caso de no obtener solución, explicar claramente en qué punto del programa se ha producido el fallo.

2.3.2. Procedimiento para resolver un sistema $Ax = b$

El algoritmo presentado no es general, ni mucho menos, puesto que tiene restricciones e inconvenientes como son: la necesidad de pivotes no nulos en los lugares (k, k) a lo largo de todas las matrices equivalentes intermedias, la probabilidad de que se acumulen errores de redondeo (lo que exigirá un pivotamiento parcial para mejorar los resultados), el mal condicionamiento de la matriz, por ejemplo, si es cercana a ser singular, etc. Todos estos inconvenientes se abordarán en la asignatura Análisis Numérico. Además, con este algoritmo sólo se puede encontrar la solución de un sistema lineal con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y sólo si es compatible determinado.

Comenzando con el Teorema de Rouché-Frobenius

En general, antes del algoritmo de Gauss, se podría aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius para averiguar la compatibilidad del sistema y detectar la unicidad en la solución (compatible determinado) para luego proceder con el algoritmo.

El comando `rank` permite determinar el rango de una matriz rectangular. Por el Teorema de Rouché-Frobenius es posible deducir que:

- si `rank(A)==rank([A b])` arroja un 1 entonces el sistema será compatible y será incompatible si arroja un 0.

- Será compatible determinado si, además de ser compatible, se cumple que `rank(A)` coincide con `n` donde n es la cantidad de columnas de A y puede calcularse mediante `[m,n]=size(A)`.

- Si se cumple que $\text{rg}(A) = \left(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}\right) < n$ entonces el sistema será compatible indeterminado[2].

Se recuerda que para analizar con MATLAB si se sumple o no una igualdad se puede utilizar el operador relacional ==.

Para el Ejemplo 2.1 se tiene que

```
>> rank(A)
ans =
       3
>> rank([A b])
ans =
       3
>> [m,n]=size(A)
m =
       3
n =
       3
```

[2]Por ahora no habrá un método para resolverlo utilizando MALTAB. Habrá que esperar a estudiar la equivalencia por filas o bien la estructura del conjunto solución de los sistemas homogéneos y no homogéneos.

con lo cual el sistema es compatible determinado, como ya se ha visto. Esto se debe a que

```
  rank(A)==rank([A b])
ans =
    logical

          1
```

y

```
  rank(A)==n
ans =
    logical

          1
```

El uso del comando contrabarra $\backslash$

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones lineales del tipo $Ax = b$ es utilizando la contrabarra. La sintaxis es: $A\backslash b$.

Para el Ejemplo 2.1 se tiene que

```
  >> A\b
ans =
        2
        1
        3
```

con lo cual $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Cuando se trata de un sistema compatible indeterminado como, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la sentencia

```
>> A\b
```

proporciona una única solución

```
ans =
    -1/3
     1/3
     0
```

Ejercicio 2.5. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales del Ejercicio 2.4 utilizando:

(a) el Teorema de Rouché-Frobenius.

(b) el comando contrabarra.

2.4. Una aplicación: Distribución de temperaturas en equilibrio

Numerosos problemas físicos reales se modelizan proporcionando las ecuaciones diferenciales[3] que describen su comportamiento junto con algunas condiciones que permiten encontrar su (única) solución. Si el problema resulta

[3]De manera simplificada, son ecuaciones donde aparecen derivadas y donde sus incógnitas son funciones.

complicado de resolver desde un punto de vista analítico, se lo suele discretizar para hallar una aproximación numérica a su solución. Al discretizar, en muchas ocasiones se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales, en general de tamaño considerable, para obtener una aproximación razonable a la solución.

A continuación se estudiará el problema de transmisión del calor, que se presenta con frecuencia en Ingeniería. Primero se abordará el problema en su versión más simple (unidimensional) y luego una versión algo más general (bidimensional).

- **Caso unidimensional**: Se considera una barra conductora de calor, delgada, aislada (es decir, que en los puntos interiores de la barra, que se encuentran entre los extremos, la temperatura no se ve modificada por la de su exterior sino únicamente por las temperaturas en los extremos) y en cuyos extremos se conoce que las temperaturas inicial y final son T_i y T_f, respectivamente.

  Pasado un período de tiempo, la temperatura en los puntos interiores de la barra se estabilizará y se dice que proporcionará una *solución estacionaria* (es decir, que no depende del tiempo). El objetivo es hallar esta distribución de temperatura en equilibrio. Como se verá, la temperatura en puntos del interior, quedará completamente determinada por sus valores T_i y T_f en la frontera.

  Para ello, se considera un número finito de puntos en el interior de la barra, llamados nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, equiespaciados a lo largo de la barra, y se desea estimar los valores de la temperatura $T_1, T_2, \ldots, T_n$ en dichos puntos como en la Figura 2.2.

  Se utilizará la siguiente propiedad.

  > Propiedad del valor medio: Dada una varilla en equilibrio térmico y un nodo x_j en el interior de dicha varilla, con $1 \leq j \leq n$, la temperatura en el punto x_j es el promedio de la temperatura de los dos nodos adyacentes a él.

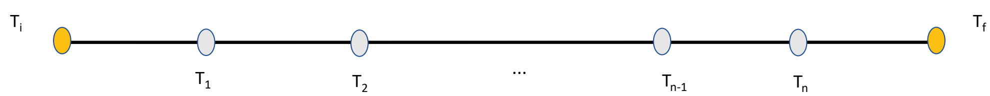

Figura 2.2: Conducción del calor en una barra unidimensional.

Al imponer esta condición en cada nodo interior se obtiene el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ccc} T_1 & = & \frac{1}{2}(T_i + T_2) \\ T_2 & = & \frac{1}{2}(T_1 + T_3) \\ T_3 & = & \frac{1}{2}(T_2 + T_4) \\ & \vdots & \\ T_{n-1} & = & \frac{1}{2}(T_{n-2} + T_n) \\ T_n & = & \frac{1}{2}(T_{n-1} + T_f) \end{array}\right.$$

Reordenado términos es posible escribir el sistema en la forma equivalente

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} T_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_f \end{bmatrix}.
$$

Observar que se ha obtenido una matriz tridiagonal (es decir, con elementos no nulos en la diagonal principal y sus dos diagonales paralelas adyacentes).

Al tratarse de un sistema de ecuaciones lineales con n ecuaciones y n incógnitas se puede resolver con la contrabarra.

Ahora se resolverá un ejemplo concreto. Al tratarse de una matriz estructurada, es fácil introducirla en MATLAB. Para el valor previamente especificado de $n = 3$, y temperaturas en los extremos iguales a $T_i = 0$ grados centígrados y $T_f = 100$ grados centígrados, la matriz se introduce mediante las sentencias

```
>> n=3;
 >> u=ones(n-1,1);
 >> A=2*eye(n,n)+diag(-u,1)+diag(-u,-1);
 A =
        2          -1           0
       -1           2          -1
        0          -1           2
```

donde los comandos `diag(-u,1)` y `diag(-u,-1)` indican que se colocará el vector `-u` en las diagonales paralelas adyacentes superior e inferior a la principal, respectivamente.

El vector de términos independientes es

```
>> Ti=0; Tf=100;
 >> b=[Ti; zeros(n-2,1); Tf];
```

Ahora, la solución del sistema es

```
>> A\b;
 ans =
          25
          50
          75
```

Se observa que tiene un sentido físico correcto, puesto que la temperatura se incrementa desde los 0 grados centígrados hasta los 100 grados centígrados con valores intermedios de 25, 50 y 75 grados centígrados.

Ejercicio 2.6. Resolver el problema de la distribución estacionaria del calor en una varilla cuyos extremos se encuentran a 15 y a 0 grados centígrados utilizando 10 nodos internos.

Ejercicio 2.7. Diseñar una función en MATLAB que resuelva el problema de la distribución estacionaria del calor en una varilla cuyos extremos se encuentran a T_i y a T_f grados centígrados utilizando n nodos internos. Ejecutar el programa con el ejemplo para $n = 3$ y el ejercicio para $n = 10$.

- **Caso bidimensional**: El problema es similar, sólo que ahora cambia la geometría del conjunto sobre el que se realiza el análisis. Se trata de una placa conductora de calor (cuadrada o circular), delgada, aislada (es decir, que en los puntos interiores de la placa, la temperatura no se ve modificada por la de su exterior, pensada como elemento tridimensional, sino únicamente por las temperaturas en el borde de la misma) y en cuya frontera se conoce una distribución de temperaturas.

  Pasado un período de tiempo, la temperatura en los nodos interiores de la placa se estabilizará. El objetivo es hallar esta distribución de temperatura en equilibrio. Como se verá, la temperatura en nodos del interior, quedará completamente determinada por sus valores en la frontera.

  Para ello, se considera un número finito de puntos en el interior de la placa, llamados nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, distribuidos de manera uniforme en la placa, y se desea estimar los valores de la temperatura $T_1, T_2, \ldots, T_n$ en dichos puntos. Se utilizará la siguiente propiedad.

  Propiedad del valor medio: Dada una placa en equilibrio térmico y un nodo x_j en el interior de dicha placa, con $1 \leq j \leq n$, la temperatura en el punto x_j es el promedio de la temperatura de los nodos adyacentes a él.

  Mientras que en el caso unidimensional por adyacente a un nodo se tenían los nodos anterior y posterior a él, ahora cada nodo interior tendrá 4 vecinos para realizar el promedio. En la intersección de cada par de segmentos se encuentran los nodos interiores x_1, x_2, x_3 y x_4 (punto de color gris) como se aprecia en la Figura 2.3 y los datos $b_1, b_2, \ldots, b_8$ (puntos de color naranja).

  Al imponer esta condición en cada nodo interior se obtiene el sistema

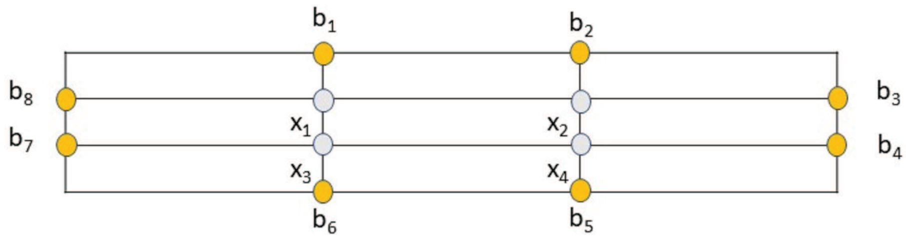

Figura 2.3: Conducción del calor en una placa bidimensional.

de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} T_1 &= \frac{1}{4}(b_8 + b_1 + T_2 + T_3) \\ T_2 &= \frac{1}{4}(T_1 + b_2 + b_3 + T_4) \\ T_3 &= \frac{1}{4}(b_7 + T_1 + T_4 + b_6) \\ T_4 &= \frac{1}{4}(T_3 + T_2 + b_4 + b_5) \end{cases}$$

Tomando $b_1 = b_2 = b_7 = b_8 = 0$, $b_3 = b_4 = 1$ y $b_5 = b_6 = 2$ se puede reescribir el sistema como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Al tratarse de un sistema de ecuaciones lineales con 4 ecuaciones y 4 incógnitas se puede resolver con la contrabarra; la matriz de coeficientes es pentadiagonal.

```
>> A=[4 -1 -1 0;-1 4 0 -1;-1 0 4 -1;0 -1 -1 4];
 >> b =[0;1;2;3]
```

Ahora, la solución del sistema es

```
>> A\b;
 ans =
          0.3750
          0.6250
          0.8750
          1.1250
```

De nuevo, al situar en la gráfica la distribución obtenida, se observa que tiene un sentido físico correcto.

Aplicaciones reales: Puede ocurrir que una misma ecuación permita proporcionar modelos matemáticos de diferentes problemas reales, correspondientes incluso a diferentes áreas científicas y/o tecnológicas. Una de estas es la ecuación diferencial del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2},$$

donde c es una constante y cuyas derivadas se realizan respecto al espacio x y al tiempo t. Su solución es una función de dos variables del tipo $u(x,t)$, que representa (en el caso unidimensional) la temperatura del punto de la sección de abscisa x de una barra conductora de calor en un instante $t > 0$. Para que el problema se pueda resolver, las variables x y t deberán pertenecer a ciertas regiones (acotadas) que se deberán considerar conjuntamente a la ecuación diferencial.

En *Ingeniería en Telecomunicación*, la ecuación del calor permite estudiar las microondas. Por ejemplo, se permitirá mantener controlado el proceso de la transmisión del calor por radiación mediante ondas electromagnéticas (fotones). También es importante el tratamiento por microondas de muestras de materiales mediante un sistema de control que mantenga, en todo momento, la temperatura y la energía absorbida, controladas.

En *Ingeniería Civil*, una modificación de este problema permite estudiar la temperatura en una presa teniendo en cuenta las tres temperaturas diferentes a las que está expuesta la presa: la temperatura del suelo (base), la temperatura del agua en un lateral y, por otro lado, la temperatura del aire. Así, se podrá determinar el estrés térmico al que la presa está sujeta.

En *Administración de Empresas*, una ecuación equivalente a la del calor permitirá diseñar modelos que analizan aspectos económicos empresariales. Se trata de una ecuación que permite estimar el valor actual de una opción europea[4] en matemática financiera para la compra o venta de acciones en un futuro. Más concretamente, se conoce como de la ecuación de Black-Scholes, tiene el siguiente aspecto[5]

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} + rS_t\frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = rc$$

y, tras un cambio de variables adecuado, se la puede convertir en la ecuación del calor.

En *Cartografía y Geodesia*, la ecuación del calor permite interpretar, por ejemplo, distintos sistemas geotérmicos. Un sistema geotérmico se define como la convección[6] de agua en la corteza superior de la Tierra, que en un espacio confinado, transfiere calor de una fuente de calor a un disipador de calor, este último es por lo general la superficie libre donde el calor es absorbido (dispersado o usado). Un sistema geotérmico habitualmente está formado por un reservorio, una fuente de calor y un fluido. Por mencionar un caso concreto de estudio, se puede analizar el sistema en el que se disponga de un depósito enterrado que intercambia calor con el suelo. Simplemente como curiosidad, añadir que el flujo

[4]Es una opción financiera para la cual su comprador podrá ejercerla sólo cuando llegue el vencimiento del contrato.

[5]En este caso, la función $c(S_t, t)$ denota el precio de compra de una opción europea; t el tiempo de inicio del contrato; S_t el precio del activo; σ la volatilidad y r la tasa de interés.

[6]La convección es una de las tres formas de transferencia del calor entre zonas con diferentes temperaturas, que se produce únicamente por medios materiales. Las otras formas son conducción y radiación.

de agua de densidad constante en una dimensión (por simplificar la ecuación) en un medio poroso (adecuado) se puede describir mediante la ecuación en derivadas parciales

$$K\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - w = S_S\frac{\partial h}{\partial t},$$

donde la variable x se mueve en la dirección de la conductividad hidráulica, h denota el potencial hidráulico por unidad de peso, w el término de fuente (volumen de agua por unidad de tiempo o inyectado/extraído por unidad de volumen del acuífero en el punto x), S_s el coeficiente de almacenamiento específico del medio, y t el tiempo.

Los modelos presentados, algunos de ellos simplificados, muchas veces no tienen solución analítica y se debe acudir a métodos numéricos para encontrar una solución aproximada del problema. En este punto es indiscutible la utilización de la *Informática* para resolver el problema. ¿Qué significa discretizar un problema? De forma muy resumida, de los infinitos valores de las variables x y t se elegirán un número finito de ellos y se reemplazarán las derivadas por expresiones algebraicas de modo que se deba resolver un sistema de ecuaciones lineales, en general, de tamaño muy grande. Para obtener soluciones fiables y precisas se requiere de los computadores actuales de altas prestaciones para realizar el estudio de los métodos numéricos que permiten resolver este problema de forma aproximada y, posteriormente, poder interpretar los resultados mediante gráficas de calidad de las soluciones, muchas veces en situaciones reales concretas y mediante simulaciones en tiempo real.

2.5. Ejercicios

(1) La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

corresponde a la matriz de adyacencia de un grafo.

(a) Particionando en bloques la siguiente matriz

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6,$$

indicar la información que contiene cada uno de sus elementos. Utilizar el comando `spy` para una visualización rápida.

(b) A partir del apartado anterior, deducir si todos los vértices están conectados o no.

(c) Ahora, considerar que los elementos de las posiciones $(3, 4)$ y $(4, 3)$ de A valen 2 y repetir los apartados anteriores.

(d) Dibujar el grafo asociado a cada una de las matrices de adyacencia planteadas y comprobar los resultados obtenidos.

(2) (a) Deducir una fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

suponiendo que la respuesta es una función polinomial de grado 3 en la variable n, es decir, del tipo $p(n) = an^3+bn^2+cn+d$.

(b) Una vez conjeturada la fórmula del apartado anterior (y expresada como producto de tres factores lineales en n), justificar que es correcta, demostrándola[7] por el método de induc-

[7] A mano, es decir, sin utilizar MATLAB.

ción.

(3) Si la placa cuadrada de la Figura 2.3 tiene una distribución dada de temperatura en sus bordes $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ y b_8, demostrar que las temperaturas en los nodos interiores x_1, x_2, x_3 y x_4 son únicas para valores arbitrarios atribuidos a las temperaturas del borde.

(4) Al lanzar una sonda de espacio profundo, es preciso realizar correcciones para reconducir la sonda hacia la trayectoria deseada. Para ello, por radiotelemetría la sonda envía información a partir de un flujo de vectores columnas $p_1, p_2, \ldots, p_k$ en diferentes momentos indicando la posición de la sonda para ser compararada con la trayectoria planificada. A medida que se analizan los datos del radar, se debe calcular la matriz $G_k = P_k P_k^t$ donde la información recibida ha sido almacenada en (las columnas de p_k) la matriz $P_k = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{bmatrix}$. Al recibir un nuevo vector de posición p_{k+1}, es necesario recalcular la matriz G_{k+1} en el nuevo instante de tiempo. Puesto que los vectores de datos llegan a alta velocidad, la carga computacional puede ser importante.

   (a) Demostrar cómo la multiplicación de matrices particionadas ayuda enormemente a realizar una cantidad considerablemente menor de cálculos. Más precisamente, describir cuáles son los únicos cálculos a realizar para obtener la matriz actualizada G_{k+1} a partir de la matriz G_k (calculada en el instante anterior).

   (b) Generar 6 vectores aleatorios con elementos enteros de longitud 8 en el intervalo $[0, 90]$ y comprobar los resultados obenidos en el apartado anterior.

Figura 2.4: Impresión artística de una sonda Voyager en el espacio. Imagen: NASA/JPL-Caltech.

Práctica 3

Inversas, equivalencia de matrices y determinantes

Índice

3.1. Matriz inversa

Se proporcionarán varias formas de analizar con MATLAB si una matriz es invertible o no.

3.1.1. Caracterización a partir de su rango

Se ha visto que el comando `rank` permite hallar el rango[1] de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dada, e incluso es válido para analizarlo en el caso en que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Es conocido que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces

$$A \text{ es invertible} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{rg}(A) = n.$$

En el siguiente ejemplo se utiliza el comando `rank` para averiguar si dos matrices cuadradas dadas son invertibles o no.

Ejemplo 3.1. *Analizar si las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -16 & 8 \end{bmatrix}.$$

son invertibles o no utilizando el rango de las mismas.

◁ Calculando el rango de cada una se obtiene:

[1] Más específicamente, la ayuda de MATLAB dice explícitamente: `rank(A)` proporciona una estimación del número de filas o columnas linealmente independientes de la matriz A. Si bien, más adelante se probará que es equivalente a la cantidad de filas no nulas de la forma escalonada reducida por filas de A, es importante observar que se indica que es una "estimación".

```
>> A=[1 3 9;2 2 2;0 -1 3];
   >> B=[0 4 -5 -1;-2 -1 -3 5; -2 3 -8 4;-4 6 -16 8];
   >> rank(A)
   ans =
        3
   >> rank(B)
   ans =
        2
```

Luego, A es invertible y B no lo es. ▷

3.1.2. Cálculo a partir del comando contrabarra

A diferencia del comando `rank` que permite decidir si una matriz cuadrada es invertible o no, hay otro comando que permite calcular la inversa de una matriz cuadrada, que es la contrabarra, como ya se ha visto.

La utilización de la orden contrabarra requiere ciertos cuidados. Se ha visto que, cuando se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales, también proporciona (una) solución en caso de que el sistema dado sea compatible indeterminado. Este hecho puede inducir a error, si no se analiza previamente que la matriz sea invertible (para garantizar que la solución proporcionada es, efectivamente, la única solución del sistema). Más aún, el comando contrabarra también proporciona (una) solución a un sistema incompatible[2].

Se recuerda que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces

$$A \text{ es invertible} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ admite una inversa a derecha,}$$

[2]Esta solución es la solución en el sentido de los mínimos cuadrados y de norma mínima, tal y como se estudiará en Análisis Numérico.

es decir, si existe una matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AX = I_n$. Particionando a X según sus columnas se tiene que la matriz incógnita $X = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array}\right]$ debe cumplir que

$$A\left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2\ldots & x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} e_1 & e_2\ldots & e_n \end{array}\right],$$

donde, para $i = 1, 2\ldots, n$, las matrices columna e_i tienen un 1 en la fila i-ésima y 0 en las restantes. Al realizar la multiplicación por bloques

$$\left[\begin{array}{ccc} Ax_1 & Ax_2\ldots & Ax_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} e_1 & e_2\ldots & e_n \end{array}\right]$$

y al igualar matrices, para hallar la matriz X se deberán resolver los n sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax_i = e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si se ha garantizado de antemano que la matriz A es invertible, estos sistemas se pueden calcular mediante la contrabarra como

```
>> x1=A\[1;zeros(n-1,1)];
   >> x2=A\[0;1;zeros(n-2,1)];
   >> x3=A\[zeros(2,1);1;zeros(n-3,1)];
```

y así sucesivamente hasta

```
>> xn_1=A\[zeros(n-2,1);1;0];
   >> xn=A\[zeros(n-1,1);1];
```

Ejemplo 3.2. *Aplicar el procedimiento anterior para calcular la inversa de la matriz A del Ejemplo 3.1, de la que se sabe que es invertible. Comprobar que el resultado encontrado es correcto.*

$\lhd$ En este caso queda

```
>> x1=A\[1;0;0]
 x1=
     -0.2857
      0.2143
      0.0714
```

```
>> x2=A\[0;1;0]
 x2=
      0.6429
     -0.1071
     -0.0357
```

```
>> x3=A\[0;0;1]
 x3=
      0.4286
     -0.5714
      0.1429
```

Ahora se hará la comprobación de que el resultado obtenido es correcto. Una forma fácil de hacerlo es colocando las columnas halladas en una matriz X

```
>> X=[x1 x2 x3];
 X=
      -0.2857    0.6429    0.4286
       0.2143   -0.1071   -0.5714
```

```
     0.0714   -0.0357    0.1429
```

y comprobando que $AX = I_3$ como sigue

```
>> A*X-eye(3)
 ans =
     1.0e-15 *
          0   -0.0694    0.0555
     0.0555   -0.2220         0
    -0.0278    0.0139         0
```

donde el factor

```
1.0e-15
```

es la notación científica para el número 0,000000000000001. Nótese que dicho factor afecta a todos los elementos de la matriz. ▷

Se puede economizar comandos utilizando sólo una vez la contrabarra como sigue

```
>> A\eye(3)
 >> ans=
    -0.2857    0.6429    0.4286
     0.2143   -0.1071   -0.5714
     0.0714   -0.0357    0.1429
```

3.1.3. Cálculo a partir de la orden `inv`

También puede utilizarse el comando `inv(A)` para calcular la inversa de una matriz cuadrada A.

Ejemplo 3.3. *Calcular la inversa de la matriz A considerada en el Ejemplo 3.1 mediante la orden* `inv()`.

◁ Antes, se recuerda cuál es la matriz A:

```
>>A
   A=
        1     3     9
        2     2     2
        0    -1     3
```

y ahora se calcula su inversa a partir

```
  >> inv(A)
   ans=
      -0.2857    0.6429    0.4286
       0.2143   -0.1071   -0.5714
       0.0714   -0.0357    0.1429
```

▷

Si se aplica el comando inv a la matriz B introducida previamente (sin analizar con antelación si es invertible o no), MATLAB da el siguiente resultado

```
>> inv(B)
   Warning: Matrix is singular to working precision.
   ans=
      Inf   Inf   Inf   Inf
      Inf   Inf   Inf   Inf
      Inf   Inf   Inf   Inf
      Inf   Inf   Inf   Inf
```

A la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

en lugar de utilizar `x = inv(A)*b`, el propio MathWorks[3] recomienda hacerlo mediante `x = A\b` pues se calcula de manera más eficiente.

3.1.4. Utilización de la forma escalonada reducida por filas

MATLAB dispone de la orden `rref` (reduced row echelon form) que permite hallar la matriz escalonada reducida por filas de una matriz A.

Ejemplo 3.4. *Calcular las formas escalonadas reducidas por filas de las matrices A y B del Ejemplo 3.1.*

$\triangleleft$

```
>> rref(A)
   ans=
         1      0      0
         0      1      0
         0      0      1
>> rref(B)
   ans=
        1.0000          0     2.1250    -2.3750
             0     1.0000    -1.2500    -0.2500
             0          0          0          0
             0          0          0          0
```

$\triangleright$

[3]MathWorks es la corporación estadounidense (privada) especializada en software de computación matemática, de la cual MATLAB es uno de sus productos más importantes.

Caracterización de la no singularidad

Es conocido que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces

$$A \text{ es invertible} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \sim_f I_n.$$

De los resultados obtenidos anteriormente, es claro que a partir de la orden `rref` se puede deducir que A es invertible (pues $A \sim_f I_3$) y que B no lo es (pues $B \nsim_f I_4$).

La orden `rref` en la resolución de sistemas lineales

Se pueden resolver sistemas de ecuaciones lineales sin analizar previamente si la matriz (cuadrada) es invertible e incluso utilizando matrices rectangulares utilizando el comando `rref` como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.5. *Se pretenden resolver los sistemas lineales*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -16 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b_i, \; i = 1, 2,$$

para

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad y \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$\lhd$ La matriz B es la introducida con anterioridad

```
>> B
   B=
```

```
      0      4     -5     -1
     -2     -1     -3      5
     -2      3     -8      4
     -4      6    -16      8
```

Ahora se introduce la matriz columna

```
>> b1=[1;4;5;10]
   b1=
        1
        4
        5
       10
```

y el vector

```
>>b2=[1;4;5;11]
   b2=
        1
        4
        5
       11
```

El primer sistema $Bx = b_1$ se puede resolver a partir de

```
>> rref([B b1])
   ans =
            1         0    2.1250   -2.3750   -2.1250
            0         1   -1.2500   -0.2500    0.2500
            0         0         0         0         0
            0         0         0         0         0
```

con lo cual es un sistema compatible indeterminado. En este caso, las dos primeras columnas son básicas, por lo que

$$x_1 = -2{,}125 - 2{,}125\lambda + 2{,}375\mu;\; x_2 = 0{,}25 + 1{,}25\lambda + 0{,}25\mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y el conjunto solución puede escribirse como

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}125 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2{,}125 \\ 1{,}25 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2{,}375 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se observa que, en este caso, el valor de $n - \operatorname{rg}(B)$ (donde $n = 4$ es la cantidad de columnas de B) proporciona la cantidad de parámetros necesarios para expresar la solución general.

La resolución del sistema $Bx = b_2$ se obtiene mediante

```
>> rref([B b2])
   ans =
            1         0     2.1250   -2.3750         0
            0         1    -1.2500   -0.2500         0
            0         0          0         0         1
            0         0          0         0         0
```

con lo cual el sistema $Bx = b_2$ es incompatible. ▷

Cálculo de la inversa a partir del método de Gauss-Jordan

De nuevo, el comando `rref` puede utilizarse para decidir si una matriz cuadrada es invertible o no y, en caso de serlo, proporciona su inversa.

Ejemplo 3.6. *Para la matriz A del Ejemplo 3.1, calcular su inversa mediante el método de Gauss-Jordan. Comprobar que el resultado es correcto.*

$\triangleleft$ Al escalonar la matriz $\begin{bmatrix} A & I_3 \end{bmatrix}$ se tiene

```
>> X=rref([A eye(3)])
   X =
            1    0    0   -0.2857    0.6429    0.4286
            0    1    0    0.2143   -0.1071   -0.5714
            0    0    1    0.0714   -0.0357    0.1429
```

lo que implica que A es invertible (este hecho sigue de haber obtenido la matriz identidad en sus tres primeras columnas) y su inversa es

```
>> invA=X(:,4:6)
   invA =
       -0.2857    0.6429    0.4286
        0.2143   -0.1071   -0.5714
        0.0714   -0.0357    0.1429
```

resultado que se puede comprobar fácilmente mediante

```
>> A*invA-eye(3)
   ans =
      1.0e-15 *
      -0.1110    0.0971    0.0555
            0    0.2220         0
            0         0         0
```

por lo que proporciona una aproximación aceptable de la inversa. $\triangleright$

Ejercicio 3.1. Analizar si las siguientes matrices son invertibles utilizando: el rango, el comando contrabarra y la orden `inv`:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Si fuesen invertibles, calcular sus inversas. En cada caso, resolver con la orden `rref` los sistemas lineales $Ax = d_i$ y $By = f_j$ para $i, j = 1, 2$ siendo

$$d_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

escribiendo claramente el conjunto solución.

3.2. Equivalencia de matrices

En lo que sigue se utilizará MATLAB para comprobar si dos matrices son equivalentes por filas, por columnas o equivalentes y, también, para determinar la correspondiente forma normal de Hermite.

3.2.1. Forma normal de Hermite y matrices que la determinan

En este apartado se hallará la forma normal de Hermite $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ no nula y, además, matrices invertibles $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfacen

$$QAP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De regalo, se obtendrá que r es el rango de A.

Ejemplo 3.7. *Multiplicar la matriz*

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

por matrices elementales adecuadas, primero por filas y luego por columnas, hasta obtener su forma normal de Hermite.

◁ En efecto,

```
>> L=[0 4 1;1 2 1;2 8 3]
   L=
        0     4     1
        1     2     1
        2     8     3
```

El primer paso será intercambiar las dos primeras filas:

```
>> F1=eye(3);
   >> F1([1 2],:)=F1([2 1],:)
   F1=
        0     1     0
        1     0     0
        0     0     1


>> L1=F1*L;
   L1=
        1     2     1
        0     4     1
        2     8     3
```

Para eliminar el elemento de la posición $(3,1)$ se introduce la matriz elemental por filas adecuada

```
>> F2=[1 0 0;0 1 0;-2 0 1]
   F2=
        1     0     0
        0     1     0
       -2     0     1
```

y se calcula

```
>> L2=F2*L1;
   L2=
        1     2     1
        0     4     1
        0     4     1
```

Ahora se elimina la tercera fila mediante

```
>> F3=[1 0 0;0 1 0;0 -1 1]
   F3=
        1     0     0
        0     1     0
        0    -1     1
```

```
>> L3=F3*L2;
   L3=
        1     2     1
        0     4     1
        0     0     0
```

Con una operación elemental de tipo II se consigue un uno principal en la posición $(2,2)$ como sigue

```
>> F4=[1 0 0;0 1/4 0;0 0 1]
   F4=
        1.0000          0          0
             0     0.2500          0
             0          0     1.0000


>> L4=F4*L3;
   L4=
       1.0000    2.0000    1.0000
            0    1.0000    0.2500
            0         0         0
```

y con este uno principal se puede eliminar el elemento de la posición $(1,2)$ quedando

```
>> F5=[1 -2 0;0 1 0;0 0 1]
   F5=
        1    -2     0
        0     1     0
        0     0     1


>> L5=F5*L4;
   L5=
            1         0    0.5000
            0    1.0000    0.2500
            0         0         0
```

Se ha conseguido la forma escalonada reducida por filas de L. Ahora se procede por columnas eliminando primero el elemento de la posición $(1,3)$ mediante:

```
>> C1=[1 0 -1/2;0 1 0;0 0 1]
```

```
C1=
    1.0000         0   -0.5000
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
```

```
>> L6=L5*C1;
   L6=
    1.0000         0         0
         0    1.0000    0.2500
         0         0         0
```

y, por último, el de la posición $(2, 3)$ a partir de:

```
>> C2=[1 0 0;0 1 -1/4;0 0 1]
   C2=
    1.0000         0         0
         0    1.0000   -0.2500
         0         0    1.0000
```

obteniendo la forma normal de Hermite

```
>> H=L6*C2;
   H=
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0
```

Es posible obtener las matrices Q y P como sigue:

```
>> Q=F5*F4*F3*F2*F1
   Q=
   -0.5000    1.0000         0
    0.2500         0         0
```

```
     -1.0000   -2.0000    1.0000
```

```
>> P=C1*C2
   P=
       1.0000         0   -0.5000
            0    1.0000   -0.2500
            0         0    1.0000
```

Se comprueba que, efectivamente,

```
  >> Q*L*P
   ans=
        1     0     0
        0     1     0
        0     0     0
```

que es la forma normal de Hermite de L.

$\triangleright$

3.2.2. Forma normal de Hermite

En este apartado se hallará solamente la forma normal de Hermite (pero no las matrices que la determinan).

Al calcular la forma escalonada reducida por filas de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se hallan matrices invertibles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ tales que

$$Q_s \ldots Q_2 Q_1 A = R_A.$$

Luego, $A^t Q_1^t Q_2^t \ldots Q_s^t = (R_A)^t$. Si ahora se calculan matrices invertibles $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$ tales que

$$P_\ell \ldots P_2 P_1 (R_A)^t = R,$$

siendo R la forma escalonada reducida por filas de $(R_A)^t$, se tiene que $R_A P_1^t P_2^t \dots P_\ell^t = R^t$ con lo cual

$$P_\ell \dots P_2 P_1 A^t Q_1^t Q_2^t \dots Q_s^t = P_\ell \dots P_2 P_1 (R_A)^t = R,$$

y, de este modo, únicamente con operaciones elementales por filas, se halla la forma normal de Hermite de A sin más que trasponer la última expresión para obtener

$$Q_s \dots Q_2 Q_1 A P_1^t P_2^t \dots P_\ell^t = R^t.$$

Llamando $Q := Q_s \dots Q_2 Q_1$ y $P := P_1^t P_2^t \dots P_\ell^t$ se tiene que

$$QAP = R^t = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.8. *Calcular la forma de Hermite de la matriz*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 14 & 0 & 17 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\lhd$ Para la matriz M:

```
>> M=[1 2 3 0 4 0 5 0;2 4 6 1 14 0 17 0;1 2 3 0 4 0 5 1;
      0 0 0 0 0 0 0 1];
```

la forma escalonada reducida por filas de la matriz se obtiene mediante

```
>> N=rref(M)
   N=
        1     2     3     0     4     0     5     0
        0     0     0     1     6     0     7     0
        0     0     0     0     0     0     0     1
        0     0     0     0     0     0     0     0
```

Ahora,

```
>> R_t = rref(N')
   ans
         1      0      0      0
         0      1      0      0
         0      0      1      0
         0      0      0      0
         0      0      0      0
         0      0      0      0
         0      0      0      0
         0      0      0      0
```

Finalmente, trasponiendo, la forma normal de Hermite de M es

```
>> R_t_t = R_t'
   R_t_t=
         1      0      0      0      0      0      0      0
         0      1      0      0      0      0      0      0
         0      0      1      0      0      0      0      0
         0      0      0      0      0      0      0      0
```

$\triangleright$

Recordando que si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ son matrices no nulas entonces

(a) $A \sim_f B \;\Leftrightarrow\; R_A = R_B$,

(b) $A \sim_c B \;\Leftrightarrow\; R_{A^t} = R_{B^t}$,

(c) $A \sim B \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$,

se plantea resolver el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.2. Analizar si las siguientes matrices son equivalentes por filas, por columnas y/o equivalentes:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 15 & 10 & 5 \\ 27 & 18 & 9 \end{bmatrix}.$$

Si fuesen equivalentes, hallar matrices invertibles Q y P que establecen dicha equivalencia, es decir, tales que $QSP = T$.

3.3. Utilización del cálculo simbólico

Además de resolver numéricamente numerosos problemas, MATLAB permite realizar ciertos cálculos desde el punto de vista simbólico. Para ello será necesario definir previamente las matrices simbólicamente a partir del comando `syms`.

Ejemplo 3.9. *Calcular la inversa de la matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *de forma simbólica.*

$\triangleleft$ Si se definen como simbólicas las variables a, b, c y d mediante la instrucción

```
>> syms a b c d
```

es posible analizar la forma escalonada reducida por filas de la matriz 2×2

```
>> rref([a b;c d])
   ans =
   [ 1, 0]
   [ 0, 1]
```

lo que indica que su forma escalonada reducida por filas coincide con I_2. Evidentemente, al realizar el cálculo MATLAB no tiene en cuenta si los valores de las variables son nulos o no o si presentan ciertas relaciones que, por ejemplo, prohiban dividir por cero. Por esto, debe utilizarse con sentido común y analizando concienzudamente los resultados que MATLAB arroja.

Para la misma matriz, la inversa se calcula mediante

```
>> inv([a b; c d])
```

y proporciona la conocida fórmula

```
ans =
 [  d/(a*d - b*c), -b/(a*d - b*c)]
 [ -c/(a*d - b*c),  a/(a*d - b*c)]
```

▷

Ejercicio 3.3. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad y \qquad X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.$$

Es conocido que X es la matriz inversa de A si y sólo si $AX = I_2$. Se pide:

(a) Utilizar cálculo simbólico para obtener un sistema de ecuaciones lineales a resolver.

(b) Escribir nuevamente el sistema encontrado, ahora de forma explícita como un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (agregando los ceros necesarios).

(c) Encontrar la inversa de A resolviendo el sistema del apartado anterior mediante el comando `rref`.

(d) A la luz del resultado del apartado anterior, ¿es posible observar la condición que se debe cumplir sobre los coeficientes de A para que exista su inversa?

(e) Comprobar que el resultado anterior coincide con el hallado en el ejemplo anterior a este ejercicio.

3.4. Determinantes

MATLAB dispone del comando `det` que permite calcular determinantes de matrices cuadradas.

Ejemplo 3.10. *Calcular el determinante de las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -16 & 8 \end{bmatrix}.$$

◁ El determinante de A es

```
>> A=[1 3 9;2 2 2;0 -1 3];
   >> B=[0 4 -5 -1;-2 -1 -3 5; -2 3 -8 4;-4 6 -16 8];
   >> det(A)
   ans=
      -28
```

y el de B es

```
>> det(B)
ans=
      0
```

▷

Sobre el comando `det` se debe resaltar que no es recomedable su uso para la detección de la singularidad de una matriz. Observar con detenimiento los siguientes ejemplos:

```
>> A=[2 0;0 1/2];
>> det(A)
ans=
     1
>> A=[3 0;0 1/3];
>> det(A)
ans=
     1
>> A=[4 0;0 1/4];
>> det(A)
ans=
     1
```

En todos estos casos, se observa que el determinante es 1, es decir, todas son matrices no singulares.

Ahora bien, la orden `det` puede utilizarse tanto desde un punto de vista numérico como simbólico. Teniendo en cuenta este hecho, los ejemplos anteriores pueden generalizarse del siguiente modo:

```
>> syms x
>> A=[x 0;0 1/x];
>> det(A)
ans=
     1
```

Por lo tanto, a medida que $x \to +\infty$, la matriz se acerca cada vez más a una matriz singular (pues la segunda fila se acerca a una fila nula), mientras que el determinante de todas ellas permanece igual a 1, lo que claramente llevaría a incongruencias.

Ejemplo 3.11. *En este ejemplo, utilizando determinantes, se encontrará la ecuación de una recta a partir de dos puntos por los que pasa.*

(a) *Si los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, distintos entre sí, pasan por una recta de ecuación*

$$ax + by + c = 0,$$

se trata de hallar los números reales a, b y c que la determinan.

(b) *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (2, 3)$.*

$\lhd$ Se utilizará determinantes, tal y como se pide.

(a) En primer lugar, al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación y, teniendo en consideración que la propia ecuación se debe cumplir, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{cases}$$

que se puede escribir matricialmente de forma equivalente como

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde las incógnitas son a, b y c.

El sistema lineal obtenido es homogéneo. Para que dicho sistema tenga una solución no trivial (es decir, a, b, c no simultáneamente nulos) el determinante de la matriz de coeficientes debe ser igual a cero (en caso contrario, la matriz sería invertible y el sistema sólo tendría la solución trivial).

Se ha probado que existen números reales a, b y c, no todos nulos, tales que $ax + by + c = 0$ si y sólo si

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

(b) Aplicando el resultado encontrado, para determinar la recta que pasa por los puntos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (2, 3)$, se calcula

```
>> syms x y
   >> L=[x y 1;1 1 1;2 3 1]
   L =
   [ x, y, 1]
   [ 1, 1, 1]
   [ 2, 3, 1]
   >> det(L)
   ans =
   y - 2*x + 1
```

de donde la ecuación implícita de la recta buscada es

$$L : -2x + y + 1 = 0.$$

▷

Ejercicio 3.4. Para determinar la órbita de un asteroide alrededor del Sol, un astrónomo situó un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano de la órbita (con el Sol en el origen) y utilizó unidades de medidas astronómicas[a] sobre cada eje. De la primera **ley de Kepler** se conoce que la órbita describe una elipse, cuya ecuación general viene dada por una expresión del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

y ésta quedará completamente determinada una vez que se conozcan los 6 números reales a, b, c, d, e y f. Para ello, el astrónomo realizó 5 observaciones que se corresponden con los siguientes 5 puntos de la órbita

$$(\texttt{3.01}, \texttt{5.76}), \quad (\texttt{3.99}, \texttt{6.09}), \quad (\texttt{5.03}, \texttt{2.23}),$$

$$(\texttt{5.5}, \texttt{6.21}), \quad (\texttt{6.01}, \texttt{5.88}).$$

Se pide:

(a) Encontrar el sistema de ecuaciones que deben satisfacer los datos, al sustituir los 5 puntos en la ecuación anterior y utilizando además la propia ecuación (es decir, dependerá de a, b, c, d, e, f, x e y). Introducir adecuadamente los datos (usando vectores y operaciones componente a componente).

(b) Al tratarse de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en las incógnitas a, b, c, d, e y f, ¿cuál es la condición que debe cumplir el determinante de la matriz de coeficientes para que el sistema tenga solución no trivial?

(c) Hallar, utilizando MATLAB, la ecuación de la elipse. Si fuese necesario, utilizar el comando `vpa` que evalúa elementos con artimética de precisión variable (Recordar que el comando `helpwin` permite encontrar ayuda sobre los comandos desconocidos).

(d) Investigar el comando `ezplot` de MATLAB para realizar una representación gráfica de la órbita determinada (reajustando si es necesario los valores de las abscisas para que se vea la gráfica completa). Si en dos vectores `xn` e `yn` están almacenadas las abscisas y las ordenadas de los 5 puntos, respectivamente, los comandos `hold on` y `plot(xn,yn,'*r')` permiten mantener la gráfica de la elipse en una figura y solapar, en la misma figura, los puntos que la determinaron pintados con asteriscos (`'*'`) rojos (`'r'`). Añadiendo el Sol, se conseguirá un aspecto como el de la Figura 3.1.

[a] Se recuerda que 1 unidad astronómica (1 UA) mide la distancia media de la Tierra al Sol y equivale a 149.597.870,691 kilómetros.

3.5. Aplicaciones

En este apartado se estudiarán dos aplicaciones reales del Álgebra Lineal.

3.5.1. Códigos secretos

Es importante para las grandes empresas, los gobiernos, la agencias de seguridad, etc, disponer de sistemas seguros y robustos a la hora de codificar y enviar su información a un receptor específico, como sus clientes, empleados, población civil, etc. Este intercambio de información debe realizarse sin que sea descifrado por algún pirata informático (hacker) en caso de ser interceptado cuando se envía al receptor. Las técnicas básicas que se utilizan para codificar y descodificar mensajes

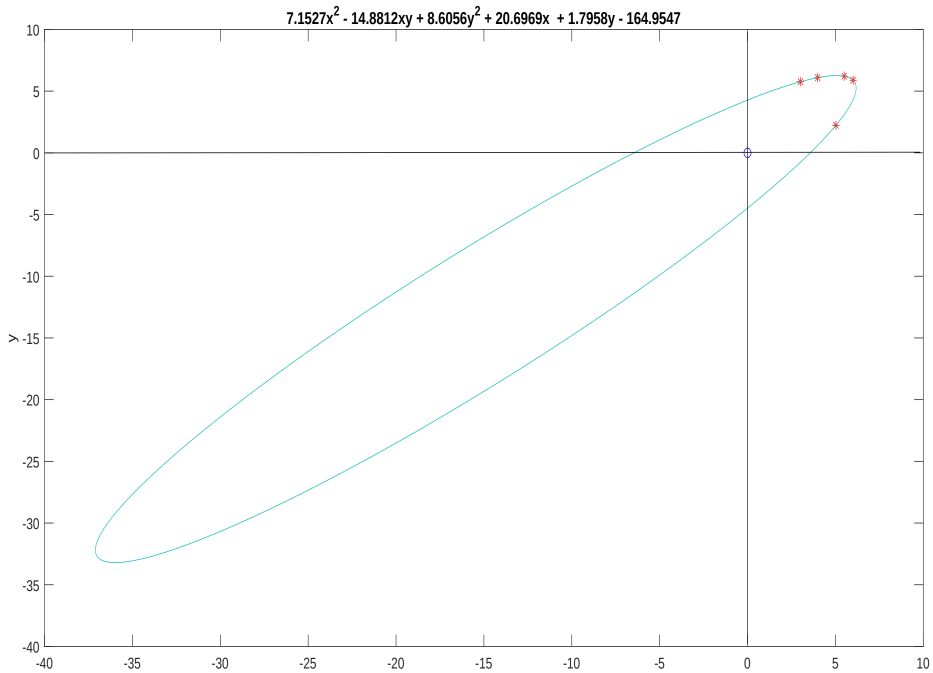

Figura 3.1: Órbita del asteroide.

suelen ser de las áreas de la Teoría de Números o del Álgebra Lineal. Claramente, esta aplicación se enmarca en el área de la informática y de las telecomunicaciones.

El procedimiento a seguir se describe a continuación. Para codificar el mensaje se asocia un número a cada letra del alfabeto:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	$Ñ$	O	P	Q	R	S	T	U
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

V	W	X	Y	Z
23	24	25	26	27

y se convendrá que un espacio en blanco se asocia con un 0. Para practicar el método, el profesor le envía el siguiente mensaje a sus alumnos

APROBARÁS ÁLGEBRA

para lo cual el mensaje codificado es

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
A & P & R & O & B & A & R & A & S & A & L & G & E & B & R & A \\
1 & 17 & 19 & 16 & 2 & 1 & 19 & 1 & 20 & 1 & 12 & 7 & 5 & 2 & 19 & 1
\end{array}
$$

Ahora se escribe el mensaje codificado en las columnas de una matriz de tamaño 4×4 como sigue

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 20 & 5 \\ 17 & 1 & 1 & 2 \\ 19 & 19 & 12 & 19 \\ 16 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Ahora se elige una matriz invertible D de tamaño 4×4 que será información que tendrán en común tanto el emisor como el receptor del mensaje. Por ejemplo, acuerdan elegir la matriz

$$
D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 & 17 \\ -1 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}.
$$

Acuerdan también que será enviado el mensaje via el producto DM con lo cual, para descodificar, los alumnos sólo tienen que obtener la inversa de D y calcular

$$
D^{-1}(DM) = (D^{-1}D)M = I_4 M = M,
$$

con lo que recupera la matriz M que almacena el mensaje.

Ejercicio 3.5. Al cabo de un rato el profesor les envía la segunda parte del mensaje:

$$\begin{bmatrix} 38 & 49 & 51 & 31 & 20 \\ 105 & 227 & 150 & 125 & 40 \\ 211 & 596 & 311 & 311 & 60 \\ -95 & -286 & -142 & -152 & -20 \end{bmatrix}.$$

¿Qué dice en esta segunda parte?

3.5.2. Redes de flujo

La Figura 3.2 representa una red de tuberías de agua potable interconectadas, donde el flujo circula en una sola dirección y las flechas indican su dirección. Este es un claro ejemplo de aplicación dentro del área de ingeniería civil. Este tipo de redes sirve también para modelizar problemas relativos a redes de tráfico en una ciudad, redes de carreteras (en el área de cartografía), redes de transporte de mercancías para la distribución de artículos (en el área de administración de empresas), redes eléctricas, paquetes de información entre nodos de redes de comunicaciones (en el área de telecomunicaciones), etc. y poder analizar el flujo de dichas redes.

Para analizar este tipo de redes se deben tener en cuenta dos principios básicos que deben cumplir:

- Principio 1: La cantidad de flujo que llega a cada punto de la red debe coincidir con la cantidad que sale del mismo punto (es decir, en los puntos de la red no se acumula ni se pierde flujo de la red).
- Principio 2: El flujo total de la red es constante.

En el ejemplo correspondiente a la Figura 3.2, se observa que entran 50, 60, 40 y 10 litros de agua por segundo y salen 100, 20, 10, 30 en los puntos A, B, C y D, repectivamente, con lo que el flujo total de

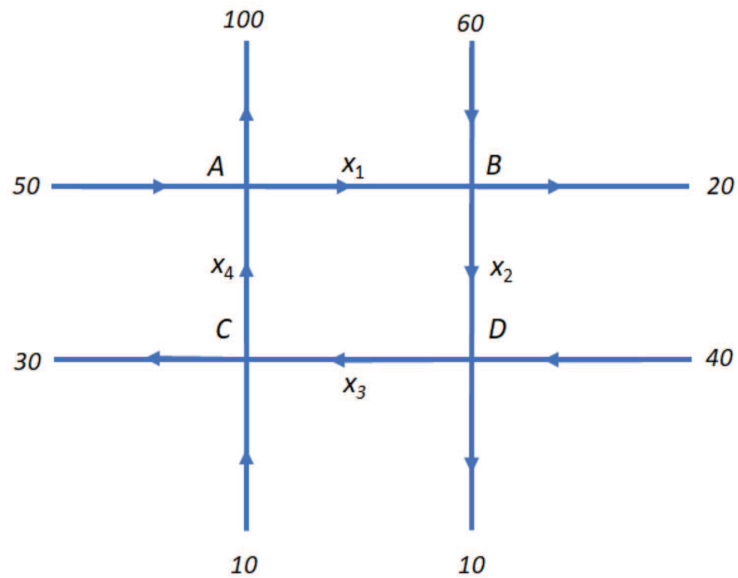

Figura 3.2: Red de flujos en una tubería.

la red es constante. Se pide averiguar los posibles flujos de agua en las diferentes tuberías x_1, x_2, x_3 y x_4.

Puesto que el flujo se encuentra regulado por válvulas, los operarios tienen cierto margen para regular algunos aspectos de acuerdo a las necesidades.

Ejemplo 3.12. *En relación al problema anterior, se pide:*

(a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que modelice la red proporcionada.

(b) Resolver el sistema utilizando el comando `rref` *indicando claramente la solución del sistema.*

(c) *Para analizar las soluciones factibles (es decir, aquellas que tienen sentido para el problema en cuestión), se debe tener en cuenta que los valores de x_i deben ser todos no negativos. ¿Cuáles son las restricciones a imponer para que el sistema proporcione una solución factible?*

(d) *Para realizar ciertas obras, lo operarios necesitan reducir todo lo que sea posible el flujo por la tubería x_4. ¿Cuál será el flujo de la red en ese caso? ¿Es única la solución?*

(e) *Tras el primer intento por solucionar el problema, los operarios deciden que deben cortar el tráfico de flujo por la tubería x_4. ¿Cómo afectará esta decisión al flujo del resto de la red? ¿Será posible realizarlo?*

◁ A partir de la gráfica se puede resolver el problema como sigue.

(a) Se observa que la red permanece en equilibrio puesto que se cumple el segundo principio básico. Aplicando el primer principio en cada punto se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lccccccc} A: & 50 & + & x_4 & = & 100 & + & x_1 \\ B: & x_1 & + & 60 & = & x_2 & + & 20 \\ D: & x_2 & + & 40 & = & x_3 & + & 10 \\ C: & 10 & + & x_3 & = & 30 & + & x_4 \end{array}\right. .$$

(b) Para resolver el sistema se utiliza el comando `rref` como sigue:

```
>> B=[1 0 0 -1 -50;1 -1 0 0 -40;0 1 -1 0 -30;0 0 1 -1 20]
 B=
        1       0       0      -1    -50
        1      -1       0       0    -40
        0       1      -1       0    -30
```

```
          0         0         1        -1        20


>> rref(B)
 ans =
          1         0         0        -1       -50
          0         1         0        -1       -10
          0         0         1        -1        20
          0         0         0         0         0
```

Luego, se trata de un sistema compatible indeterminado donde

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_4 - 50 \\ x_2 & = & x_4 - 10 \\ x_3 & = & x_4 - 20 \end{array}\right. ,$$

pudiendo tomar x_4 un valor arbitrario.

(c) Imponiendo las restricciones

$$0 \leq x_1 = x_4 - 50, \quad 0 \leq x_2 = x_4 - 10 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq x_3 = x_4 - 20,$$

debe ser

$$x_4 \geq 50.$$

Luego, el conjunto de las soluciones factibles del problema es

$$\{(x_4 - 50, x_4 - 10, x_4 - 20, x_4) : x_4 \geq 50\}.$$

(d) El mínimo valor posible que puede tomar el flujo por la tubería x_4 es 50. Tomando $x_4 = 50$ se tiene que la única solución factible es

$$\{(0, 40, 30, 50)\}.$$

(e) Para cortar el tráfico de flujo por la tubería x_4, es decir, imponiendo $x_4 = 0$, las soluciones que se obtienen son

$$\{(-50, -10, -20, 0)\}.$$

Por lo tanto, será posible realizarlo si se invierten los sentidos de recorrido de los flujos x_1, x_2 y x_3 y toman los valores indicados.

▷

Ejercicio 3.6. Ahora se debe analizar una zona más amplia de la red de tuberías como la de la Figura 3.3. Se pide:

(a) Hallar el valor de a para que la red se encuentre en equilibrio (es decir, que se cumpla el segundo principio).

(b) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que modelice la nueva red proporcionada.

(c) Resolver el sistema utilizando el comando `rref` indicando claramente la solución del sistema.

(d) ¿Cuáles son las restricciones necesarias a imponer para que el sistema proporcione únicamente soluciones factibles?

(e) ¿Es posible cortar el tráfico de flujo por la tubería x_7? En caso afirmativo, ¿cuáles serían las nuevas soluciones factibles? De las soluciones factibles, ¿cómo se debería distribuir el flujo de modo que por la tubería x_4 pase el menor caudal posible?

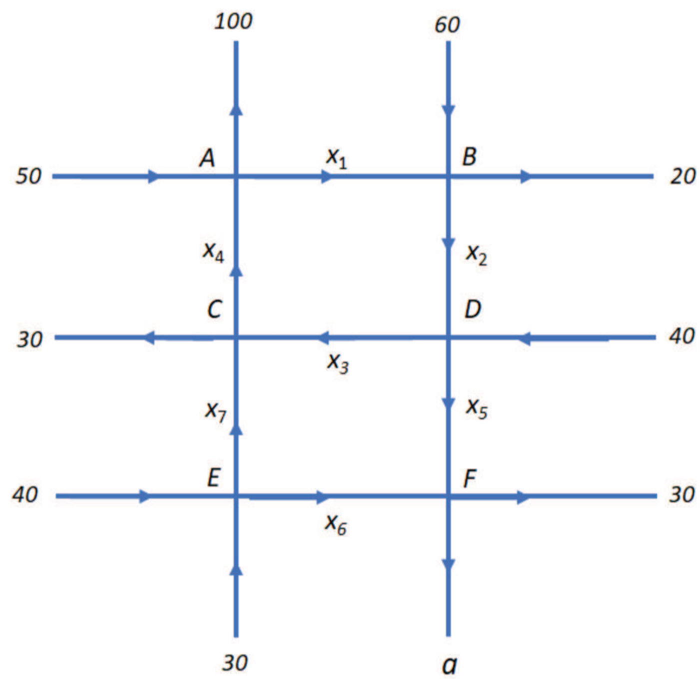

Figura 3.3: Red de flujos en una tubería.

3.6. Ejercicios

(1) Se consideran

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 25 & 40 \\ 6 & 17 & 35 \\ 4 & 33 & 45 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -145 \\ -96 \\ -194 \end{bmatrix},$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} -2999 \\ -1006 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 195 \\ 65 \\ -65 \end{bmatrix}.$$

(a) Utilizar MATLAB para comprobar que $Ax_0 = b$ y que $Az = 0$.

(b) Elegir 5 valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y calcular $A(x_0 + \alpha z)$.

(c) Conjeturar el resultado que da la expresión $A(x_0 + \alpha z)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Probar que el resultado conjeturado es válido.

(e) Resolver el sistema $Ax = b$ con el comando `rref`.

(2) Analizar si las siguientes matrices son equivalentes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 25 & 40 \\ 6 & 17 & 35 \\ 4 & 33 & 45 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

En caso afirmativo, hallar matrices invertibles Q y P tales que $QAP = B$.

(3) Para $a \in \mathbb{R}$ fijo, se considera (para $n \in \mathbb{N}$) la sucesión de matrices

$$M_n := \begin{bmatrix} a+1 & a & a & \dots & a & a \\ a & a+1 & a & \dots & a & a \\ a & a & a+1 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+1 & a \\ a & a & a & \dots & a & a+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Escribir explícitamente las matrices M_1, M_2, M_3 y M_4.

(b) Utilizar MATLAB para calcular $\det(M_n)$ para los valores $n = 1, 2, 3, 4$.

(c) Conjeturar qué valor tendrá $\det(M_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Demostrar que la conjetura del apartado anterior es cierta.

(4) Considerar la sucesión de matrices

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

(a) Calcular $\det(A_3)$, $\det(A_4)$ y $\det(A_5)$.

(b) Conjeturar el valor de $\det(A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$.

(c) Para un valor arbitrario de $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, hallar todas los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A_n) = 1$.

(5) Se recuerda que la ecuación de un plano π en el espacio $\mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

(a) Utilizando determinantes (y la propia ecuación), encontrar una condición necesaria y suficiente para que tres puntos no alineados del espacio $\mathbb{R}^3$ pertenezcan al plano π.

(b) A partir del apartado anterior, hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Práctica 4

Espacios vectoriales

Índice

4.1. Combinaciones lineales

Una de las cuestiones básicas del Álgebra Lineal es saber si un vector u de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es combinación lineal de un conjunto de vectores dados $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$. En caso de serlo, se quieren determinar los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ de dicha combinación lineal:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

y poder asegurar si son únicos o no.

Ejemplo 4.1. *Averiguar si es posible escribir un vector arbitrario $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores*

$$u_1 = (1,0,1), \qquad u_2 = (2,1,1), \qquad u_3 = (3,2,2).$$

$\lhd$ Al plantear la combinación lineal

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, b_3) &= x_1(1,0,1) + x_2(2,1,1) + x_3(3,2,2) \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \end{array} \right. ,$$

que se puede reescribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Observar que simplemente se han tenido que disponer por columnas los datos, tanto en la matriz de coeficientes como en el vector de términos independientes.

Para encontrar, si existen, los escalares x_1, x_2 y x_3, se introducen en MATLAB la matriz de coeficientes (en formato numérico) y el vector de términos independientes (en formato simbólico)

```
>> A=[1 2 3;0 1 2;1 1 2];
   >> syms b1 b2 b3
   >> b=[b1;b2;b3]
   b =
   b1
   b2
   b3
```

y, a partir del comando `rref`, se obtiene

```
>> rref([A b])
   ans =
   [ 1, 0, 0,          b3 - b2]
   [ 0, 1, 0, 2*b1 - b2 - 2*b3]
   [ 0, 0, 1,     b2 - b1 + b3]
```

Es decir, la solución es

$$x_1 = -b_2 + b_3, \qquad x_2 = 2b_1 - b_2 - 2b_3, \qquad x_3 = -b_1 + b_2 + b_3,$$

y así se puede afirmar que cualquier vector $b = (b_1, b_2, b_3)$ es combinación lineal de u_1, u_2, u_3 y, además, se observa que se puede escribir de forma única. $\triangleright$

A continuación se realiza una **observación importante**.

Observación 4.1. MATLAB calcula la forma escalonada reducida por filas de matrices que involucren parámetros pero trata a dichos parámetros como elementos no nulos. Si fuese necesario, estos parámetros se utilizarán en el proceso de eliminación, lo que puede llevar a confusión. En lo que sigue se aclara este punto. Por ejemplo, si se quiere escribir un vector arbitrario $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los vectores

$$u_1 = (1, 2), \qquad u_2 = (2, 4),$$

procediendo como en el ejemplo anterior, se debe resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Introduciendo la información en MATLAB y utilizando el comando `rref` se obtiene

```
>> A=[1 2;2 4];
   >> syms b1 b2
   >> b=[b1;b2];
   >>[A b]
   ans =
     [ 1, 2, b1]
     [ 2, 4, b2]
   >> rref([A b])
   ans =
     [ 1, 2, 0]
     [ 0, 0, 1]
```

Es decir, se observa que "se han perdido los parámetros b_1 y b_2". Al sumar a la segunda fila la primera previamente multiplicada por -2, aparece la expresión $b_2 - 2b_1$ en la posición $(2, 3)$, número que se divide por sí mismo (tras aplicar una operación elemental de tipo II) y el 1 que produce se utiliza para anular el b_1 de la posición $(1, 3)$. Claramente, este procedimiento no ayuda a conseguir el propósito deseado y se debe evitar. Se observa que en el Ejemplo 6.1 este problema no ha ocurrido debido a que la matriz A obtenida es invertible mientras que en este caso no lo es.

En el próximo ejemplo se estudia otro procedimiento para lograr el propósito (en algunos casos).

Ejemplo 4.2. *Averiguar si es posible escribir cada uno de los vectores de* $\mathbb{R}^3$

(a) $(1, 1, 1)$,

(b) $(1, 1, -1)$,

(c) (b_1, b_2, b_3),

como combinación lineal de los vectores

$$u_1 = (1, 3, 5), \qquad u_2 = (2, 4, 6).$$

De ser posible hacerlo, indicar si la forma de escribirlo es única o no. En el apartado (c), *mostrar la forma de los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de* u_1 *y* u_2.

$\triangleleft$ Se procederá como en el Ejemplo 6.1 que, tras plantear la combinación lineal y escribir el sistema lineal correspondiente, se pasa a la ecuación matricial asociada disponiendo la información dada adecuadamente por columnas. En este ejemplo se parte directamente de la ecuación matricial.

(a) Se comienza definiendo la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes y el vector de incógnitas

```
>> A=[1 2;3 4;5 6]
```

```
A =
     1     2
     3     4
     5     6
>> b=[1;1;1]
b=
     1
     1
     1
>> syms x1 x2
>> x=[x1;x2]
x=
 x1
 x2
```

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ obtenido se utilizará el comando `solve`. Para ello, se necesitará el símbolo de doble igual `==`, que permitirá definir las igualdades. Para ver su efecto, a la variable `eq` se le asigna el sistema lineal mediante

```
>> eq= A*x==b
 eq =
    x1 + 2*x2 == 1
  3*x1 + 4*x2 == 1
  5*x1 + 6*x2 == 1
```

Ahora se resuelve el sistema, almacenando la solución en la variable `sol`

```
>> sol=solve(eq)
 sol =
```

```
  struct with fields:
    x1: [1x1 sym]
    x2: [1x1 sym]
```

lo que indica que el sistema ha sido resuelto y en la variable `sol` se ha almacenado un valor de `x1` y uno de `x2`. Dichos valores se recuperan como sigue:

```
>> sol.x1
ans =
-1
>> sol.x2
ans =
1
```

Es decir, $(1, 1, 1) = (-1)(1, 3, 5) + 1(2, 4, 6)$.

(b) Ahora se repite el proceso para el vector $(1, 1, -1)$. En efecto, se mantiene la misma matriz A y cambia el vector b:

```
>> b=[1;1;-1]
b =
     1
     1
    -1
>> sol=solve(A*x==b)
sol =
  struct with fields:
    x1: [0x1 sym]
    x2: [0x1 sym]
```

El valor 0 que aparece en la estructura de la solución para `x1` (en `x1: [0x1 sym]`), lo mismo que en la estructura de la solución para `x2` indican que, en este caso, no hay solución. Es decir, no es posible escribir a $(1,1,-1)$ como combinación lineal de los vectores dados.

(c) Se aplica el mismo procedimiento que antes, en este caso para el vector $b=(b_1,b_2,b_3)$. En efecto,

```
>> syms b1 b2 b3
>> b=[b1;b2;b3]
b =
      b1
      b2
      b3
>> sol=solve(A*x==b)
sol =
   struct with fields:
     b1: [1x1 sym]
     x1: [1x1 sym]
     x2: [1x1 sym]
```

Se observa que ahora se obtienen valores para b_1 y también para x_1 y x_2 (como se aprecia en las expresiones `[1x1 sym]` de las estructuras de las soluciones). Al hacer

```
>> sol.b1
ans =
2*b2 - b3
```

Este hecho indica que la relación que deben cumplir las componentes del vector $b=(b_1,b_2,b_3)$ para que dicho vector se pueda escribir como combinación lineal de u_1 y u_2 es $b_1 = 2b_2 - b_3$.

Además, de

```
>> sol.x1
ans =
2*b3 - 3*b2
>> sol.x2
ans =
(5*b2)/2 - (3*b3)/2
```

se tiene que $(b_1, b_2, b_3) = (2b_3 - 3b_2)(1, 3, 5) + \left(\frac{5}{2}b_2 - \frac{3}{2}b_3\right)(2, 4, 6)$.

$\triangleright$

Ejercicio 4.1. *Averiguar si es posible escribir cada uno de los siguientes vectores de* $\mathbb{R}^2$

(a) $(1, 3)$,

(b) $(1, 4)$,

(c) (b_1, b_2),

como combinación lineal de los vectores

$$u_1 = (1, 1), \qquad u_2 = (2, 3).$$

De ser posible hacerlo, indicar si la forma de escribirlo es única o no. En el apartado (c), *mostrar la forma de los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de* u_1 *y* u_2. *Indicar el significado geométrico de los resultados obtenidos.*
Todos los apartados se deben resolver utilizando:

(I) *el comando* `rref`.

(II) *el comando* `solve`.

Se sigue con el mismo problema pero en el próximo ejemplo será necesario utilizar un tercer procedimiento para encontrar las soluciones.

Ejemplo 4.3. *Averiguar si es posible escribir el vector* $(3,4,7)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *como combinación lineal de los vectores*

$$u_1 = (1,0,1), \qquad u_2 = (1,1,2), \qquad u_3 = (1,2,3).$$

De ser posible hacerlo, indicar si la forma de escribirlo es única o no.

$\lhd$ Al escribir al vector $(3,4,7)$ como combinación lineal de los 3 vectores u_1, u_2 y u_3 se debe resolver el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar, si existen, los escalares x_1, x_2 y x_3, se introducen en MATLAB la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes (ambos en formato numérico)

```
>> A=[1 1 1;0 1 2;1 2 3];
   >> syms x1 x2 x3
   >> x=[x1;x2;x3]
   x =
   x1
   x2
   x3
   >> b=[3;4;7];
   >> sol=solve(A*x==b)
   sol =
     struct with fields:
       x1: [1x1 sym]
```

```
      x2: [1x1 sym]
      x3: [1x1 sym]
```

Los valores de x_1, x_2 y x_3 se recuperan mediante

```
>> sol.x1
   ans =
   -1
   >> sol.x2
   ans =
   4
   >> sol.x3
   ans =
   0
```

Es decir, MALTAB proporciona una solución del sistema planteado, con lo cual

$$(3,4,7) = (-1)(1,0,1) + 4(1,1,2) + 0(1,2,3).$$

Sin embargo, el sistema lineal a resolver satisface

```
>> rank(A)
   ans =
        2
   >> rank([A b])
   ans =
        2
```

con lo cual $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}\right) = 2 < 3$, y el Teorema de Rouché-Frobenius garantiza que es compatible indeterminado. Las infinitas soluciones se pueden obtener mediante

```
>> rref([A b])
   ans =
        1     0    -1    -1
        0     1     2     4
        0     0     0     0
```

de donde x_3 es arbitraria, $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = -1 + x_3$.

Se observa que la solución particular obtenida anteriormente con el comando `solve` corresponde a $x_3 = 0$.

Luego, la forma general de escribir al vector $(3, 4, 7)$ como combinación lineal de los vectores u_1, u_2 y u_3 es:

$$(3, 4, 7) = (-1+k)(1, 0, 1)+(4-2k)(1, 1, 2)+k(1, 2, 3), \quad \text{con } k \text{ arbitrario.}$$

En este caso, se trata de un vector que es combinación lineal de 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ que son linealmente dependientes, es por ello que se puede escribir de infinitas maneras. $\triangleright$

Ejemplo 4.4. *Hallar todos los vectores $b = (b_1, b_2, b_3)$ que se puedan escribir como combinación lineal de los 3 vectores u_1, u_2, u_3 dados en el Ejemplo 4.3.*

$\triangleleft$ En un primer intento de resolución se resolverá el sistema mediante el comando `solve`

```
>> syms b1 b2 b3
   >> b=[b1;b2;b3]
   b=
    b1
    b2
    b3
   >> A
```

```
        1     1     1
        0     1     2
        1     2     3
>> x
x=
 x1
 x2
 x3
>> x
>> sol=solve(A*x==b)
sol=
  struct with fields:
    x1: [0x1 sym]
    x2: [0x1 sym]
    x3: [0x1 sym]
>> sol.x1
ans =
Empty sym: 0-by-1
```

Es decir, MATLAB no proporciona solución, a pesar de que el sistema es compatible (como se ha comprobado en el ejemplo anterior) al menos para el vector $(3, 4, 7)$. En este caso, se observa que las columnas de la matriz A no son linealmente independientes. ¿Cuáles de las columnas de A son linealmente independientes?

```
>> rref([A])
   ans =
        1     0    -1
        0     1     2
        0     0     0
```

Luego, las dos primeras columnas son de A son linealmente independientes y, como se aprecia en la tercera columna de la matriz escalonada reducida por filas, la tercera columna c_3 de A depende linealmente de las dos anteriores c_1y c_2:

$$c_3 = (-1)c_1 + 2c_2.$$

Al quitar la tercera columna de A (ya que sólo aporta información redundante) y repetir el procedimiento se tiene:

```
>> A_LI=A(:,1:2)
   A_LI =
        1     1
        0     1
        1     2
   >> x=[x1;x2]
   x =
    x1
    x2
   >> sol=solve(A_LI*x==b)
   sol =
     struct with fields:
       b1: [1x1 sym]
       x1: [1x1 sym]
       x2: [1x1 sym]
   >> sol.b1
   ans =
   b3 - b2
   >> sol.x1
   ans =
   b3 - 2*b2
   >> sol.x2
   ans =
   b2
```

Es decir, los vectores b de la forma $b = (b_3 - b_2, b_2, b_3)$ son combinación lineal de las 2 columnas almacenadas en la matriz `A_LI` y se escriben como

$$(b_3 - b_2, b_2, b_3) = (b_3 - 2b_2)(1, 0, 1) + b_2(1, 1, 2).$$

Es claro que el vector $(3, 4, 7)$ analizado en el ejemplo previo satisfice esta relación pues $3 = 7 - 4$.

Ahora que se conocen las componentes admisibles del vector b, se consideran las combinaciones lineales de los vectores de la forma $(b_3 - b_2, b_2, b_3)$ y se escriben como combinación lineal de los 3 vectores originales mediante el comando `solve`. Se procede como sigue

```
>> b=[b3-b2;b2;b3]
   b =
    b3 - b2
         b2
         b3
   >> A=[1 1 1;0 1 2;1 2 3]
   A =
        1     1     1
        0     1     2
        1     2     3
   >> x=[x1;x2;x3]
   x =
   x1
   x2
   x3
   >> sol=solve(A*x==b)
   sol =
     struct with fields:
       x1: [1x1 sym]
```

```
    x2: [1x1 sym]
    x3: [1x1 sym]
>> sol.x1
ans =
b3 - 2*b2
>> sol.x2
ans =
b2
>> sol.x3
ans =
0
```

Se obtiene una forma de escribir a $(b_3 - b_2, b_2, b_3)$ como combinación lineal de u_1, u_2 y u_3. Si se hubiese resuelto a mano se habrían obtenido infinitas soluciones.

Sin embargo, con `rref` sí se consiguen las infinitas soluciones buscadas. Para ello, es crucial haber hallado previamente la forma de los vectores b para los cuales hay solución (ahora `rref` no usará a b_1, b_2, b_3 como pivotes):

```
>> b
     b3 - b2
          b2
          b3
   A
        1     1     1
        0     1     2
        1     2     3
   >> rref([A b])
   ans =
   [ 1, 0, -1, b3 - 2*b2]
   [ 0, 1,  2,        b2]
```

```
[ 0, 0,  0,          0]
```

De este modo, la solución es: $x_2 = b_2 - 2x_3$; $x_1 = b_3 - 2b_2 + x_3$, donde x_3 es arbitraria. En definitiva,

$$(b_3 - b_2, b_2, b_3) = (b_3 - 2b_2 + k)(1,0,1) + (b_2 - 2k)(1,1,2) + k(1,2,3), \text{ con } k \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Se comprueba fácilmente que

```
>> (b3-2*b2+x3)*[1,0,1] + (b2-2*x3)*[1,1,2] + x3 *[1,2,3]
   ans =
   [ b3 - b2, b2, b3]
```

y de este modo se obtienen las infinitas formas de escribir un vector arbitrario $(b_3 - b_2, b_2, b_3)$ como combinación lineal de los vectores linealmente dependientes $(1,0,1)$, $(1,1,2)$ y $(1,2,3)$.
▷

Ejercicio 4.2. *Encontrar la forma de todos los vectores* $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *que se puedan escribir como combinación lineal de* u_1, u_2, u_3 *y* u_4 *siendo*

$$u_1 = (1,1,1,1), \qquad u_2 = (1,2,3,0),$$

$$u_3 = (3,4,5,2), \qquad u_4 = (2,3,4,1).$$

Indicar si la forma de escribirlo es única o no. Cuando se trate de resolver un sistema lineal, proceder primero con `solve` *para hallar una solución y luego con* `rref` *para encontrarlas todas.*

4.2. Subespacios generados

Ejemplo 4.5. *Hallar el subespacio generado por los vectores*

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad de\ \mathbb{R}^3.$$

$\lhd$ Por definición, el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2 es el conjunto de todas las combinaciones lineales que ellos determinan, es decir, está formado por los vectores de la forma

$$(x, y, z) = au_1 + bu_2 = a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) = (a+b, 2a+b, 3a+b), a, b \in \mathbb{R}.$$

Matricialmente, se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

y la solución se obtiene en MATLAB mediante

```
>> A=[1 1;2 1;3 1]
   A =
        1      1
        2      1
        3      1
   >> syms x y z a b
   >> [x;y;z]==A*[a;b]
   ans =
      x ==   a + b
      y == 2*a + b
      z == 3*a + b
```

$\rhd$

Ejercicio 4.3. *Explicar por qué un vector columna $w \in \mathbb{R}^3$ satisface que $w \in \overline{\{u_1, u_2, u_3\}}$ si y sólo si la matriz escalonada reducida por filas de la matriz ampliada $\left[\begin{array}{c|c} A & w \end{array}\right]$ (donde $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ son las columnas de A) no tiene filas del tipo $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$ con $c \neq 0$.*

Ejemplo 4.6. *Averiguar si cada uno de los vectores*

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

pertenecen al subespacio generado por

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad y \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\triangleleft$ A partir del Ejemplo 6.5, puesto que los vectores u_1 y u_2 son las columnas de la matriz A asignada a la variable `A`, para el vector v se puede responder la pregunta haciendo

```
>> v=[4;2;-1]
   v =
        4
        2
       -1
   >> rref([A v])
   ans =
        1      0      0
        0      1      0
        0      0      1
```

Al aparecer una fila del tipo $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ se concluye que $v \notin \overline{\{u_1, u_2\}}$.

De forma semejante se procede con el vector w:

```
>> w=[2;-1;-4]
   w =
        2
       -1
       -4
   >> rref([A w])
   ans =
        1      0     -3
        0      1      5
        0      0      0
```

Al no aparecer una fila del tipo $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & c \end{array}\right]$ para $c \neq 0$ se concluye que $w \in \overline{\{u_1, u_2\}}$ y además

$$w = -3u_1 + 5u_2.$$

$\triangleright$

Ejercicio 4.4. *¿Es posible afirmar que* $\overline{\{u_1, u_2, u_3\}} = \overline{\{u_1, u_2\}}$ *siendo*

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}?$$

Justificar.

4.3. Dependencia/independencia lineal

Para analizar la dependencia/independencia lineal de vectores de $\mathbb{K}^m$ con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ se puede proceder mediante el siguiente método.

Método para analizar si un subconjunto de $\mathbb{K}^m$ es linealmente independiente:

- Se colocan los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ en las columnas de una matriz $L \in \mathbb{K}^{m\times s}$.
- Se calcula la forma escalonada reducida por filas R_L.
- Los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ son LI si y sólo si los vectores columna de la matriz escalonada por filas R_L son LI.

En el siguiente ejemplo se procederá a estudiar la dependencia/independencia lineal utilizando cálculo simbólico.

Ejemplo 4.7. *Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los vectores*

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sean linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

$\lhd$ Se deben buscar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

que matricialmente se expresa como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Llamando A a la matriz de los coeficientes del sistema y x al vector de incógnitas se tiene que determinar cuándo

$$Ax = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0, \qquad \text{siendo} \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

lo que equivale a buscar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A es invertible, es decir, cuándo $\det(A) \neq 0$.

```
>> syms a
   >> A=[1 a -1;1 1 1;1 a^2 1]
   A =
   [ 1,   a, -1]
   [ 1,   1,  1]
   [ 1, a^2,  1]
   >> det(A)==0
   ans =
   2 - 2*a^2 == 0
   >> sol=solve(2 - 2*a^2 == 0)
   sol =
    -1
     1
```

Luego, los valores para los cuales los vectores dados son linealmente independientes son $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. $\triangleright$

Ejercicio 4.5. *Para los valores de $a \in \mathbb{R}$ obtenidos en el Ejemplo 4.7, utilizar el método indicado al principio de esta sección para comprobar que, efectivamente, esas dos posibles ternas de vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Elegir dos valores para los cuales las ternas correspondientes sean linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ y comprobarlo.*

Ejercicio 4.6. *Encontrar los valores de $a \in \mathbb{C}$ tales que los vectores*

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix}$$

y

$$u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sean linealmente independientes en $\in \mathbb{C}^4$.

4.4. Bases y dimensión

Una base es un sistema de generadores linealmente independientes del espacio vectorial en cuestión. La dimensión (finita) de dicho espacio es el número de vectores de una base cualquiera.

Ejemplo 4.8. *Comprobar que el conjunto*

$$\{p_1(x) = 1 + x,\ p_2(x) = -1 - x + x^2,\ p_3(x) = -1 + x + x^2\}$$

forma una base de $\mathbb{R}_2[x]$ *y expresar un vector genérico de* $\mathbb{R}_2[x]$ *como combinación lineal de* $p_1(x)$, $p_2(x)$ *y* $p_3(x)$.

$\triangleleft$ Al plantear la combinación lineal

$$0 + 0x + 0x^2 = a(1 + x) + b(-1 - x + x^2) + c(-1 + x + x^2)$$

se debe probar que $a = b = c = 0$ con lo que el conjunto será linealmente independiente. Reordenando términos e igualando expresiones se tiene

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & - & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ & & b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$$

que matricialmente se expresa como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad a = b = c = 0.$$

Llamando A a la matriz de los coeficientes del sistema y x al vector de incógnitas se tiene que determinar cuándo

$$Ax = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0, \qquad \text{siendo} \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Para ello,

```
>> A=[1 -1 -1;1 -1 1;0 1 1]
   A=
        1     -1     -1
        1     -1      1
        0      1      1
```

```
>> rref(A)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Luego, los vectores dados son linealmente independientes en $\mathbb{R}_2[x]$. Puesto que $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ se tiene que el conjunto dado es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Para ver que un vector arbitrario $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ se puede escribir como combinación lineal de los 3 polinomios dados se debe resolver (como ejercicio se propone explicar los detalles) el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Para ello,

```
>> syms alpha beta gamma
   >> B=[alpha;beta;gamma]
   B =
     alpha
      beta
     gamma
   >> rref([A B])
   ans =
   [ 1, 0, 0,            alpha + gamma]
   [ 0, 1, 0, alpha/2 - beta/2 + gamma]
   [ 0, 0, 1,         beta/2 - alpha/2]
```

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 \\
&= (\alpha+\gamma)(1+x) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \gamma\right)(-1-x+x^2) + \\
&\quad + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)(-1+x+x^2).
\end{aligned}
$$

▷

Observación 4.2. En MATLAB un polinomio $p(x)$ se manipula como un vector (es decir, utilizando solamente sus coeficientes) teniendo en cuenta que sus potencias se escriben en orden creciente. Por ejemplo, $p(x) = 3x^2 - 1 + 4x$ se expresa como $p(x) = -1 + 4x + 3x^2$ y en MATLAB se introduce como

```
>> p=[-1 4 3]
```

A partir de esta observación se puede comprobar fácilmente que la última operación realizada en el ejemplo anterior es correcta mediante:

```
>> (alpha + gamma)*[1 1 0]+(alpha/2 - beta/2 + gamma)*...
   ...*[-1 -1 1]+(beta/2 - alpha/2)*[-1 1 1]
   ans =
   [ alpha, beta, gamma]
```

4.4.1. Extracción de una base desde un sistema generador

Si se requiere extraer una base de un sistema de generadores de $\mathbb{K}^m$ con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ es posible proceder utilizando el método descrito a continuación.

Método para extraer una base de un subespacio vectorial S de $\mathbb{K}^n$ a partir de un sistema generador $X = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ de S:

- Se disponen los vectores de X por columnas en una matriz G.
- Se calcula la forma escalonada reducida por filas R_G de G.
- Las columnas de G correspondientes a las columnas básicas de R_G forman una base de S.

El próximo ejercicio se resuelve mediante una aplicación directa de este método.

Ejercicio 4.7. *Aplicar el método anterior para extraer una base del sistema generador de $\mathbb{R}^3$ siguiente*

$$\{u_1 = (1, 1, 1),\ u_2 = (1, 2, 3),\ u_3 = (4, 6, 8),\ u_4 = (-1, -4, -2)\}.$$

4.4.2. Ampliación a una base a partir de un conjunto linealmente independiente

Si se necesita extender un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{K}^m$, con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, a una base de $\mathbb{K}^m$ se procede mediante el siguiente método.

Se recuerda que este hecho se requiere en la demostración de numerosos resultados teóricos. En este caso, el procedimiento será aplicable en casos prácticos.

Método de ampliación de un subconjunto LI de $\mathbb{K}^m$ a una base de $\mathbb{K}^m$:

- Se concatenan los vectores $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ de la base canónica de $\mathbb{K}^m$ a continuación de los vectores LI del conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ de $\mathbb{K}^m$ en las columnas de una matriz $B \in \mathbb{K}^{m\times(s+m)}$:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} u_1 & u_2 & \ldots & u_s & e_1 & e_2 & \ldots & e_m \end{array}\right].$$

- Se calcula la forma escalonada reducida por filas R_B.
- Las columnas de B correspondientes a las columnas básicas de R_B determinan una base de $\mathbb{K}^m$ que contiene a $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$.

Ejercicio 4.8. *Aplicar el método anterior para extender a una base de $\mathbb{R}^3$ el conjunto linealmente independiente siguiente*

$$\{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,2,3)\}.$$

4.5. Aplicaciones

4.5.1. Materiales para una "megaconstrucción"

Para ejecutar una megaconstrucción como la de la Figura 4.1, el Ingeniero Civil, Director del proyecto, necesita tres tipos de mezclas típicas de hormigón, las cuales se observan en el Cuadro 4.2.

Las cantidades de cada mezcla[1] se miden en toneladas y cada unidad de mezcla pesa 8 toneladas. A partir de estas tres mezclas M_1, M_2 y M_3,

[1]Los valores utilizados no son reales sino considerados a efectos didácticos.

Figura 4.1: Aeropuerto de Pekín

Material	Mezcla 1 (M_1)	Mezcla 2 (M_2)	Mezcla 3 (M_3)
Agua	1	1'3	1'5
Cemento	2'5	2'5	2
Grava	1'5	0'8	1'3
Arena	2'5	2'7	2
Yeso	0'5	0'7	1'2

Tabla 4.1: Mezclas para una megaconstrucción.

es posible elaborar nuevos tipos de mezclas mediante combinaciones de ellas variando los porcentajes de dichos materiales; es decir, estas nuevas mezclas deben pertenecer al espacio generado por las mezclas originales M_1, M_2 y M_3. Es conocido que variando la proporción agua/cemento afecta a la fuerza de la mezcla final, la proporción arena/grava afecta a la viabilidad de la mezcla, etc. Puesto que diferentes trabajos requieren hormigón de diferentes características es importante ser capaces de producir mezclas a medida. Se pide:

(a) Describir el problema, indicando los vectores y el espacio vectorial en que se debe operar.

(b) Describir el conjunto de todas las mezclas posibles a realizar a partir de las básicas M_1, M_2 y M_3.

(c) De acuerdo con su experiencia, los operarios consideran que será necesario disponer de una mezcla especial, realizada a partir de las dadas, que contenga 11'8 toneladas de agua, 23'5 toneladas de cemento, 13'7 toneladas de grava, 23'7 toneladas de arena y 7'3 toneladas de yeso. El Director debe analizar si es posible o no una mezcla con esa distribución. ¿Cuál es su conclusión? En caso afirmativo, indicar cuántas unidades de las mezclas M_1, M_2 y M_3 se requieren para fabricar la mezcla solicitada.

(d) Un mes más tarde, los operarios solicitan una nueva mezcla para reparar un desperfecto ocasionado por el clima. En este caso, le piden al Ingeniero una mezcla que consideran adecuada fabricada con un total de 6'1 toneladas de agua, 12 toneladas de cemento, 5'9 toneladas de grava, 12'4 toneladas de arena y 1 toneladas de yeso. ¿Qué responde el Ingeniero en este caso?

(e) ¿Se podrían obtener todas las mezclas posibles a partir de las mezclas básicas M_1, M_2 y M_3? Justificar.

(f) ¿Sería adecuado diseñar una nueva mezcla $M_{\text{nueva}} = \begin{bmatrix} 1'15 \\ 2'5 \\ 1'15 \\ 2'6 \\ 0'6 \end{bmatrix}$ para añadir a las anteriores y tener así nuevas mezclas de donde elegir las combinaciones? Justificar.

A continuación se resuelve el problema.

(a) Las tres mezclas M_1, M_2 y M_3 determinan tres vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$. Estos vectores se pueden disponer en el subespacio

$$S = \overline{\{M_1, M_2, M_3\}}.$$

Además, de

```
>> M1=[1;2.5;1.5;2.5;0.5];
>> M2=[1.3;2.5;0.8;2.7;0.7];
>> M3=[1.5;2;1.3;2;1.2];
>> M=[M1 M2 M3]
M =
    1.0000    1.3000    1.5000
    2.5000    2.5000    2.0000
    1.5000    0.8000    1.3000
    2.5000    2.7000    2.0000
    0.5000    0.7000    1.2000
 >> rref(M)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0
     0     0     0
```

se puede concluir que dichos vectores son linealmente independientes. Luego, el subespacio vectorial S tiene dimensión 3 siendo $\{M_1, M_2, M_3\}$ una base suya.

(b) Todas las mezclas se obtienen haciendo

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3,$$

para α, β, γ variando en el conjunto $[0, +\infty[$.

(c) Se trata de ver si el vector $\begin{bmatrix} 11{,}8 \\ 23{,}5 \\ 13{,}7 \\ 23{,}7 \\ 7{,}3 \end{bmatrix}$ pertenece o no al subespacio $\overline{\{M_1, M_2, M_3\}}$. Para ello,

```
>> M4=[11.8;23.5;13.7;23.7;7.3];
>> rref([M M4])
ans =
      1     0     0     6
      0     1     0     1
      0     0     1     3
      0     0     0     0
      0     0     0     0
```

de donde el Ingeniero deduce que sí es posible dicha mezcla y la forma de hacerlo es

$$M_4 = 6M_1 + M_2 + 3M_3,$$

es decir, se requieren 6 unidades de la mezcla 1, 1 unidad de la mezcla 2 y 3 unidades de la mezcla 3.

(d) En este caso se debe analizar si $M_5 = \begin{bmatrix} 6'1 \\ 12 \\ 5'9 \\ 12'4 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece o no al subespacio $\overline{\{M_1, M_2, M_3\}}$. Para ello,

```
>> M5=[6.1;1.2;5.9;12.4;1];
>> rref([M M5])
```

```
ans =
      1      0      0      0
      0      1      0      0
      0      0      1      0
      0      0      0      1
      0      0      0      0
```

de donde el Ingeniero deduce que no es posible una combinación para obtener el vector M_5.

(e) El apartado anterior permite responder que no todo vector es combinación lineal de los datos M_1, M_2 y M_3 con lo cual estos 3 vectores no generan todo $\mathbb{R}^5$ y es por esto que no es posible obtener cualquier combinación a partir de los 3 datos.

(f) Para responder a esta pregunta se debe analizar si el nuevo vector M_{nueva} produce un subespacio de mayor dimensión a $\overline{\{M_1, M_2, M_3\}}$ o no. Para ello,

```
>> M_nueva=[1.15;2.5;1.15;2.6;0.6];
>> rref([M M_nueva])
ans =
    1.0000         0         0    0.5000
         0    1.0000         0    0.5000
         0         0    1.0000         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

de donde se deduce que la última columna se puede expresar como $0'5M_1 + 0'5M_2$ con lo cual sólo aportará mezclas redundantes, que se pueden encontrar a partir de M_1 y M_2.

4.5.2. Redes informáticas

Las redes informáticas (o redes de comunicación de datos) son un grupo de ordenadores u otros dispositivos de hardware (sistemas informáticos) conectados entre sí por nexos que pueden ser acoplados físicamente con cables o bien por medio de sistemas inalámbricos. Las redes informáticas sirven para compartir información: datos (archivos), recursos (impresoras, unidades de disco), etc.

Al diseñar una red informática se tienen en cuenta básicamente elementos del hardware (piezas físicas), del software (sistema operativo), del servidor (procesadores del flujo de datos de la red), las estaciones de trabajo (ordenadores que conforman la red pero no son servidores) y medios de transmisión (cableado, routers), etc. En la Figura 4.2, se aprecia un servidor informático de una gran corporación.

Figura 4.2: Servidor informático.

Para diseñar una red de área local (LAN: Local Area Network), el

Ingeniero en Telecomunicación de una empresa multinacional de telecomunicaciones, cuyas oficinas estarán situadas en un mismo edificio, necesita disponer de cierto material para la puesta en marcha de esta nueva sede. Con la intención de abaratar costes, subcontrata a un proveedor que le servirá tres tipos de sistemas básicos (S_1, S_2 y S_3), de los cuales los elementos que los conforman se observan en el Cuadro 4.2.

Material	S_1	S_2	S_3
Hardware	18	20	16
Software	39	35	29
Servidores	10	10	7
Estaciones de trabajo	50	60	30
Medios de transmisión	2	1	2

Tabla 4.2: Sistemas básicos S_1, S_2 y S_3.

Se pide:

(a) Indicar los vectores y el espacio vectorial con que se debe operar, su dimensión y una base del mismo.

(b) Describir el conjunto de todas las combinaciones posibles a realizar a partir de los sistemas básicos S_1, S_2 y S_3.

(c) El Jefe de Servicio le comenta al Ingeniero que en primera instancia los materiales necesarios, a comprar a partir de los sistemas ofertados, deben contener 166 unidades de hardware, 329 unidades de software, 87 servidores, 460 estaciones de trabajo y 15 medios de transmisión. El Ingeniero debe analizar si es posible o no una combinación con esa distribución. ¿Cuál es su conclusión? En caso afirmativo, indicar cuántos sistemas S_1, S_2 y S_3 se requieren, para encargar a la subcontrata la distribución solicitada.

(d) Esa misma tarde, el Jefe de Servicio recuerda que no incluyó los insumos necesarios para los becarios, con lo cual le comunica al Ingeniero que debe modificar el pedido a 182 unidades de hardware, 358 unidades de software, 94 servidores, 490 estaciones de trabajo y 19 medios de transmisión. ¿Qué responde el Ingeniero en este caso?

(e) ¿Se podrían obtener todos los sistemas posibles a partir de las sistemas básicos S_1, S_2 y S_3? Justificar.

(f) Al realizar sus cálculos el Ingeniero observa que si no se incluyesen los medios de transmisión en ninguno de los sistemas, el apartado (d) sí tiene solución. Encontrar dicha solución y utilizarla para calcular cuántos sistemas de cada tipo se necesitan comprar de modo que en el apartado (d) se cumplan los insumos requeridos excepto los 19 medios de transmisión. ¿Cuántos medios de transmisión se deberían comprar por separado?

A continuación se resuelve el problema.

(a) Los tres sistemas S_1, S_2 y S_3 determinan tres vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$. Estos vectores se pueden disponer en el subespacio

$$S = \overline{\{S_1, S_2, S_3\}}.$$

Además, de

```
>> S1=[18;39;10;50;2];
>> S2=[20;35;10;60;1];
>> S3=[16;29;7;30;2];
>> S=[S1 S2 S3]
S =
      18     20     16
      39     35     29
      10     10      7
```

```
    50     60     30
     2      1      2
 >> rref(S)
ans =
     1      0      0
     0      1      0
     0      0      1
     0      0      0
     0      0      0
```

se puede concluir que dichos vectores son linealmente independientes. Luego, el subespacio vectorial S tiene dimensión 3 siendo $\{S_1, S_2, S_3\}$ una base suya.

(b) Todas las combinaciones posibles a partir de sistemas básicos se obtienen haciendo

$$\alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3,$$

para α, β, γ variando en el conjunto $[0, +\infty[$.

(c) Se trata de ver si el vector $\begin{bmatrix} 166 \\ 329 \\ 87 \\ 460 \\ 15 \end{bmatrix}$ pertenece o no al subespacio $\overline{\{S_1, S_2, S_3\}}$. Para ello,

```
>> P=[166;329;87;460;15];
 >> rref([S P])
 ans =
     1      0      0      5
     0      1      0      3
     0      0      1      1
     0      0      0      0
```

```
      0       0       0       0
```

de donde el Ingeniero deduce que sí es posible realizar dicha compra, la forma de hacerlo es $5S_1 + 3S_2 + S_3$, es decir, se requieren 5 unidades del sistema 1, 3 unidades del sistema 2 y 1 unidad del sistema 3.

(d) En este caso se debe analizar si $S_4 = \begin{bmatrix} 182 \\ 358 \\ 94 \\ 490 \\ 19 \end{bmatrix}$ pertenece o no al subespacio $\overline{\{S_1, S_2, S_3\}}$. Para ello,

```
>> S4=[182;358;94;490;19];
>> rref([S S4])
ans =
      1       0       0       0
      0       1       0       0
      0       0       1       0
      0       0       0       1
      0       0       0       0
```

de donde el Ingeniero deduce que no es posible una combinación para obtener la compra (es decir, el vector) solicitada.

(e) El apartado anterior permite responder que no todo vector es combinación lineal de los datos S_1, S_2 y S_3 con lo cual estos 3 vectores no generan todo $\mathbb{R}^5$ y es por esto que no es posible obtener cualquier combinación a partir de los 3 datos.

(f) Para responder a esta pregunta se deben analizar las 4 primeras filas del sistema, quitando la última. Para ello,

```
>> SN=S(1:4,:)
 SN =
     18    20    16
     39    35    29
     10    10     7
     50    60    30
```

```
>> MN=[182;358;94;490]
 MN =
    182
    358
     94
    490
 >> rref([SN MN])
 ans =
      1     0     0     5
      0     1     0     3
      0     0     1     2
      0     0     0     0
```

Como

```
>> 5*S(:,1)+3*S(:,2)+2*S(:,3)
 >>ans =
    182
    358
     94
    490
     17
```

se concluye que, con 5 unidades del sistema S_1, 3 del sistema S_2 y 2 del sistema S_3, se comprarán 17 unidades de medios de transmisión, con lo cual se necesitarán comprar los 2 restantes (hasta hacer los 19 requeridos) al por menor.

4.5.3. Gestión bancaria de carteras financieras

Las carteras financieras representan productos que están compuestos por diferentes valores y títulos, en los cuales se invierte, y ellos mismos determinan su rentabilidad y riesgo. Más concretamente, una cartera es una combinación, en diversas proporciones, de activos financieros[2] que tiene un inversor (o una sociedad de inversión) cuya intención es obtener una plusvalía. Los activos de una cartera de inversión pueden ser de varios tipos: bonos, acciones, materias primas o derivados, etc. Dicho de otra forma, una cartera de inversión o cartera de valores es el conjunto de activos en los que se invierte dinero de manera diversificada de modo que genere rentabilidad o plusvalía y que están sujetos a ciertos riesgos.

Un banco gestiona las carteras C_1, C_2 y C_3 para las cuales su capital está invertido en acciones de las empresas E_1, E_2 y E_3. Dicho capital se distribuye en los porcentajes indicados en el Cuadro 4.3.

La intención del banco es ampliar el capital de sus carteras. Se pide:

(a) Probar que el conjunto S de los incrementos $(\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3)$ de la inversión del banco en cada empresa que, sin producir excedentes, pueden distribuirse entre las 3 carteras, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

[2] Un activo financiero es un instrumento financiero que proporciona a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor. El comprador de un activo financiero adquiere un derecho (activo) y el vendedor una obligación (pasivo).

Figura 4.3: Bolsa de Nueva York (The New York Stock Exchange).

(b) Hallar un sistema generador para el subespacio S encontrado en el apartado anterior. ¿Hay algún vector redundante en dicho sistema generador? En caso afirmativo, escribir el vector redundante como combinación lineal de los restantes.

(c) Hallar una base del subespacio S descrito anteriormente y la dimensión de dicho subespacio.

(d) Indicar si los vectores $u = (1'6, 0'8, 1'6)$ y $v = (0'6, 2'2, 1'45)$ de incrementos de inversión corresponden a alguna compra de acciones factible.

A continuación se resuelve el problema.

(a) En primer lugar se observa que un incremento ΔC_1 en el capital de la Cartera 1, ΔC_2 en el capital de la Cartera C_2 y ΔC_3 en el

Empresas/Carteras	C_1	C_2	C_3
Empresa 1 (E_1)	15 %	65 %	40 %
Empresa 2 (E_2)	10 %	30 %	20 %
Empresa 3 (E_3)	75 %	5 %	40 %

Tabla 4.3: Tres carteras con capital distribuido en tres empresas.

capital de la Cartera C_3, requiere que el banco compre o venda acciones en la Empresa E_1 por una cuantía de

$$\Delta E_1 = 0'15\Delta C_1 + 0'65\Delta C_2 + 0'40\Delta C_3.$$

Se observa que este resultado se puede escribir matricialmente mediante

$$\Delta E_1 = \left[\begin{array}{ccc} 0'15 & 0'65 & 0'40 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \\ \Delta C_3 \end{array}\right].$$

De modo similar, el banco deberá comprar o vender acciones en la Empresa E_2 por una cuantía de

$$\Delta E_2 = 0'10\Delta C_1 + 0'30\Delta C_2 + 0'20\Delta C_3$$

y en la Empresa E_3 por

$$\Delta E_3 = 0'75\Delta C_1 + 0'05\Delta C_2 + 0'40\Delta C_3.$$

Por lo tanto, de la definición de suma de vectores y de multiplicación de un escalar por un vector,

$$\begin{aligned} &(\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3) = \\ &\quad = (0'15\Delta C_1 + 0'65\Delta C_2 + 0'40\Delta C_3, 0'10\Delta C_1 + 0'30\Delta C_2 + \\ &\qquad +0'20\Delta C_3, 0'75\Delta C_1 + 0'05\Delta C_2 + 0'40\Delta C_3) \\ &\quad = \Delta C_1(0'15, 0'10, 0'75) + \Delta C_2(0'65, 0'30, 0'05) + \\ &\qquad +\Delta C_3(0'40, 0'20, 0'40). \end{aligned}$$

Es decir, cada vector del tipo $(\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3)$ se puede escribir como combinación lineal de tres vectores concretos de $\mathbb{R}^3$: $P_1 = (0'15, 0'10, 0'75)$, $P_2 = (0'65, 0'30, 0'05)$ y $P_3 = (0'40, 0'20, 0'40)$. En definitiva,

$$S = \{\Delta C_1 P_1 + \Delta C_2 P_2 + \Delta C_3 P_3 : \Delta C_1, \Delta C_2, \Delta C_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Es conocido que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto finito de vectores dados es un subespacio vectorial.

(b) Dado que $S = \overline{\{P_1, P_2, P_3\}}$, se trata del subespacio generado por los vectores P_1, P_2 y P_3. Para ver si hay redundancias, se debe analizar la independencia lineal de los vectores P_1, P_2 y P_3. En efecto, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(0,0,0) = aP_1 + bP_2 + cP_3$. Operando se llega al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 0'15 & 0'65 & 0'40 \\ 0'10 & 0'30 & 0'20 \\ 0'75 & 0'05 & 0'40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego,

```
>> rref([0.15 0.65 0.4;0.1 0.3 0.2;0.75 0.05 0.4])
 ans =
          1                   0                   1/2
          0                   1                   1/2
          0                   0                   0
```

de donde se observa que $P_3 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$, con lo cual si hubiese que realizar cálculos posteriores, no sería necesario mantener la información de las 3 carteras puesto que la información de la tercera se puede obtener a partir de las dos anteriores.

(c) Al ser $S = \overline{\{P_1, P_2, P_3\}} = \overline{\{P_1, P_2\}}$ y puesto que en el apartado anterior se ha probado, además, que $\{P_1, P_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que $\{P_1, P_2\}$ es una base de S y, por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

(d) Se debe determinar si cada vector dado es combinación lineal de los vectores de la base de S, es decir, si existen escalares $\Delta C_1, \Delta C_2 \in \mathbb{R}$ tales que $u = (1'6, 0'8, 1'6) = \Delta C_1 P_1 + \Delta C_2 P_2$. Como el análisis para v es smilar, se pueden resolver los dos sistemas lineales de forma simultánea calculando

```
>> rref([0.15 0.65 1.6 0.6;0.1 0.3 0.8 2.2;
        0.75 0.05 1.6 1.45])
 ans =
       1       0       2       0
       0       1       2       0
       0       0       0       1
```

Se obtiene que $u = 2P_1 + 2P_2$ pero v no es combinación lineal de P_1 y P_2.

4.6. Ejercicios

(1) Se consideran los vectores

$$u_1 = (3, 4, 1, 0) \qquad \text{y} \qquad u_2 = (-1, 1, 2, 1).$$

(a) Analizar si $b = (5, 2, -3, -2)$ es combinación lineal de u_1 y u_2.

(b) Averiguar si $\{u_1, u_2\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^4$.

(c) Hallar la forma de los vectores $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ que pertenecen a $\overline{\{u_1, u_2\}}$ y escribir a b como combinación lineal de u_1 y u_2. Para cada uno de estos vectores b hallados, ¿es única dicha representación como combinación lineal de u_1 y u_2? Justificar.

(2) En la aplicación relativa a la megaconstrucción hallar un vector que se pueda escribir como combinación lineal de M_1, M_2 y M_3.

(3) En la aplicación relativa a la red informática comprobar si el vector $(206, 413, 110, 590, 18)$ pertenece al subespacio generado por S_1 y S_2. Indicar la dimensión de dicho subespacio.

Práctica 5

Cambio de bases en espacios vectoriales

Índice

5.1. Coordenadas de un vector respecto de una base

5.1.1. Cálculo de las coordenadas de un vector respecto de una base

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Es conocido que un vector u de V se puede escribir de forma única como combinación lineal de los vectores de una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$:

$$u \stackrel{!}{=} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Estos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (unívocamente determinados) se llaman **coordenadas de u en la base $\mathcal{B}$** y se denota mediante

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Ejemplo 5.1. *Escribir el vector $u = (3, 6)$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ en la base:*

(a) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 2), u_2 = (5, 2)\}$,

(b) $\mathcal{B}' = \{v_1 = (2, 0), v_2 = (-1, -3)\}$.

$\triangleleft$ Se deben encontrar los escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

que se puede reescribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (no homogéneo)

```
>> A=[-1  5;2  2];
   >> b=[3;6];
   >> rref([A b])
   ans =
        1     0     2
        0     1     1
```

se llega a $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$. Luego,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{es decir} \quad [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De forma similar haciendo

```
>> B=[2 -1;0 -3];
   >> rref([B b])
   ans =
       1.0000          0    0.5000
            0     1.0000   -2.0000
```

se encuentra que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{es decir} \quad [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$\triangleright$

5.1.2. Representación gráfica

En esta subsección se representarán gráficamente las bases del ejemplo anterior y se interpretará geométricamente el significado de las componentes de u en dichas bases.

A continuación se comenta brevemente el funcionamiento de algunas instrucciones del programa MATLAB que se utilizarán inmediatamente; se recomienda probar cada una de ellas para comprender su efecto. Los comandos nuevos que aparecen en esta práctica son:

- `clf`: elimina todos los elementos secundarios de la figura actual con identificadores visibles (por ejemplo, escribir

  `>> ezplot('x^3')`

  y, tras observar la gráfica que aparece en una (nueva) ventana exterior a la de comandos, escribir `>> clf`).

- `plot(x,y)`: genera una gráfica estableciendo la correspondencia entre los elementos de los vectores $x = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array}\right]$ e $y = \left[\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{array}\right]$ uniendo cada par de puntos consecutivos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}), con $i = 1, 2, \ldots, n-1$ mediante un segmento de recta (por ejemplo, escribir

  `>> x=[1 0 4]; y=[9 10 -1]; plot(x,y)`.

  Ahora identificar sobre la gráfica cuál ha sido el primer punto pintado, cuál el segundo y cuál el tercero).

- `subplot(m,n,p)`: genera una ventana (mediante una matriz) de $m \times n$ gráficas con ejes pequeños y permite seleccionar el p-ésimo eje como la figura actual (por ejemplo, escribir

  `>> subplot(2,3,2)`

  y observar su efecto, luego

  `>> subplot(2,3,6)`,

  a continuación

  `>> subplot(2,3,1)`, etc).

- `set`: permite especificar propiedades en las gráficas (por ejemplo, escribir el comando

  `>> h=ezplot('x^3')`

  y luego escribir

`>> set(h,'LineWidth',2)`).

- `text`: sitúa un texto especificado sobre una gráfica en las coordenadas indicadas (por ejemplo, escribir el comando

  `>> ezplot('x^3')`

  y, tras observar la gráfica que aparece en la nueva ventana, escribir

  `>> text(0,-150,'\bf figura')`,

  donde `\bf` (boldface) hace que salga en negrita).

- `grid`: genera un mallado en la figura (sin borrar la gráfica del ejemplo anterior, escribir `>> grid`).

- `axis square`: hace que el cuadro del eje actual sea de tamaño cuadrado y así los ejes aparecerán del mismo tamaño (sin borrar la gráfica del ejemplo anterior, escribir a continuación

  `>> axis square`).

- `hold on`: al realizar una gráfica nueva, mantiene la gráfica actual y todas las propiedades del eje (por ejemplo, escribir el comando

  `>> ezplot('x^3')`

  y, tras observar la gráfica que aparece en la nueva ventana, escribir

  `>> hold on`

  y finalmente,

  `>> ezplot('sin(x)')`).

Ahora se puede diseñar el programa que representa gráficamente una base de $\mathbb{R}^2$ e interpreta el significado geométrico de las componentes de $[u]_{\mathcal{B}}$ como sigue.

```
function comb_lineal(u,u1,u2,a,b)
% Esta funcion representa graficamente u como combinacion
% lineal
% de u1 y u2
% u1: vector de tamanyo 2x1 de la base
```

```
% u2: vector de tamanyo 2x1 de la base
% a: coeficiente de la combinacion lineal
% b: coeficiente de la combinacion lineal
% u: vector de tamanyo 2x1 CL de u1 y u2: u=a*u1+b*u2

origen = [0;0];
   Ou = [origen,u]; % vector u
   Ou1 = [origen,u1]; % vector u1
   Ou2 = [origen,u2]; % vector u2

clf
   subplot(1,2,1) % en una fila genera 2 graficas y elige la
1ra para pintar
   h=plot(Ou(1,:),Ou(2,:),'b--*',Ou1(1,:),Ou1(2,:),'b--*',...
   ...Ou2(1,:),Ou2(2,:),'b--*');
   title('Escribir u como CL de u1 y u2')
   set(h,'LineWidth',2)
   text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u');
   text(u1(1)/2,u1(2)/2,'\bf u1');
   text(u2(1)/2,u2(2)/2,'\bf u2');
   grid
   axis square
   hold on

au1=a*u1; % componente en u1
   bu2=b*u2; % componente en u2
   Ou1 = [origen,au1]; % vector componente en u1
   Ou2 = [origen,bu2]; % vector componente en u2
   au1u = [au1,u]; % vector paralelo en u1
   bu2u = [bu2,u]; % vector paralelo en u2
```

```
subplot(1,2,2) % en la grafica anterior elige la 2da figura
para pintar
   h=plot(Ou1(1,:),Ou1(2,:),'r--*',Ou2(1,:),Ou2(2,:),'r--*',...
   ...Ou(1,:),Ou(2,:),'b--*'); % informacion original
   hold on
   set(h,'LineWidth',2)
   h=plot(au1u(1,:),au1u(2,:),'r--*',bu2u(1,:),bu2u(2,:),'r--*');
   % vectores componentes
   hold on
   text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u');
   text(au1(1)/2,au1(2)/2,'a * u1');
   text(bu2(1)/2,bu2(2)/2,'b * u2');
   title('u = a * u1 + b * u2')
   grid
   axis square
   hold on


end
```

Ejercicio 5.1. *¿Por qué en el encabezado de la función se han considerado únicamente parámetros de entrada y no de salida?*

Para ejecutar el programa anterior con los datos del Ejemplo 5.1 se debe escribir en la línea de comandos:

```
>> u1=[-1;2]; u2=[5;2];
   >> u=[3;6];
   >> a=2; b=1;
```

y se obtiene la gráfica de la Figura 5.1.

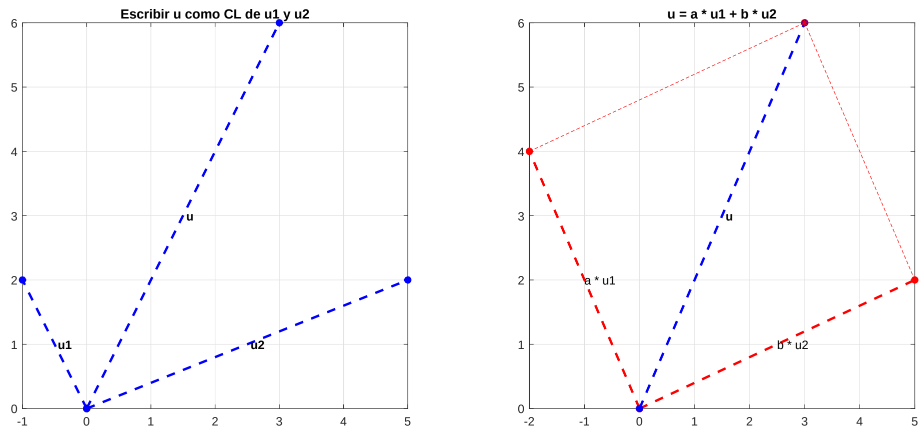

Figura 5.1: Se necesita 2 veces u_1 y 1 vez u_2 para escribir a u como combinación lineal de ellos.

Ejercicio 5.2. *Ejecutar el programa para comprobar gráficamente que el resultado obtenido en el apartado (b) de Ejemplo 5.1 es correcto.*

Ejercicio 5.3. *Escribir el vector* $u = (7, 6)$ *del* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *en las bases*

(a) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-\frac{1}{2}, -3), u_2 = (2, 0)\}$,

(b) $\mathcal{B}' = \{v_1 = (3, -2), v_2 = (\frac{1}{2}, 5)\}$,

y representarlos gráficamente.

Ejercicio 5.4. *Modificar el programa de modo que las entradas sean la base* $\{u_1, u_2\}$ *y el vector* u *y que las salidas sean las componentes* a *y* b *tales que* $u = au_1 + bu_2$ *y las representaciones gráficas.*
Ayuda: El comando `>> x=x(:)` *expresa como columna el vector* `x`*, ya sea que se haya introducido como fila o como columna.*

5.2. Dependencia/independencia lineal

Utilizando coordenadas, se ha visto que un conjunto de vectores columnas $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si y sólo si $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_s \end{bmatrix} = s$.

Ejemplo 5.2. *Analizar si los vectores de* $\mathbb{R}^4$ *dados por*

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes. En caso afirmativo, completarlo hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

$\triangleleft$ Se observa que se dan 3 vectores en $\mathbb{R}^4$. Se puede realizar el análisis por definición de independencia lineal o bien utilizando el rango, como se ha recordado anteriormente. En efecto,

```
>> u1=[1 1 1 1]';
   >> u2=[-1 1 1 2]';
   >> u3=[-1 1 -1 2]';
   >> rank([u1 u2 u3])
   ans =
```

```
        3
```

Luego, $\{u_1, u_2, u_3\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^4$.

Añadiendo, por ejemplo, $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ se tiene que

```
>> u4=[0 0 0 1]';
   >> rank([u1 u2 u3 u4])
   ans =
        4
```

con lo que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ puesto que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$. $\triangleright$

Ejercicio 5.5. *¿Se debería añadir el vector e_4 si se sigue el método visto en la Práctica anterior?*

Ejemplo 5.3. *Analizar si los vectores de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dados por*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes. En caso afirmativo, completarlos hasta obtener una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$; en caso negativo, obtener un subconjunto linealmente independiente.

$\triangleleft$ Escribiendo los vectores A_1, A_2 y A_3 como combinación lineal de los de la base canónica $\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} A_1 &= 1E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 1E_{22} \\ A_2 &= 0E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 2E_{22} \\ A_3 &= 2E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}. \end{aligned}$$

Considerando la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que

```
>> A=[1 0 2;1 1 1;1 1 1;1 2 0];
>> rref(A)
ans =
     1     0     2
     0     1    -1
     0     0     0
     0     0     0
```

con lo cual el conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ahora se considera la submatriz de A formada por sus dos primeras columnas

```
>> B=A(:,1:2);
   >> rank(B)
   ans =
        2
```

con lo que un subconjunto linealmente independiente del conjunto dado es $\{A_1, A_2\}$. ▷

Ejemplo 5.4. *Se considera el espacio vectorial $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Probar que el subconjunto*

$$1, \cos(x), \cos^2(x), \cos^3(x), \cos^4(x), \cos^5(x), \cos^6(x)$$

es linealmente independiente en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$.

$\lhd$ Para proceder como en el ejemplo anterior debería poderse escribir fácilmente cada vector dado como combinación lineal de los elementos de alguna base, lo cual no es sencillo por lo que se procederá por definición. Se debe probar que los únicos escalares $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$0 = 0(x) = a_1 1 + a_2 \cos(x) + a_3 \cos^2(x) + a_4 \cos^3(x) + a_5 \cos^4(x) + a_6 \cos^5(x)$$

$$+ a_7 \cos^6(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

son los nulos.

En efecto, como la igualdad se verifica para toda $x \in \mathbb{R}$, en particular lo hará para cualquier valor concreto que se asigne a x. Se eligen 7 valores arbitrarios distintos (puesto que se deben encontrar 7 incógnitas) y al sustituirlos en la igualdad se obtendrá un sistema de ecuaciones lineales. Tomando, por ejemplo, $x \in \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6\}$ el sistema obtenido es

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & a_7 & = & 0 \\
a_1 & + & \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & + & \frac{3}{4}a_3 & + & (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 a_4 & + & (\frac{\sqrt{3}}{2})^4 a_5 & + & (\frac{\sqrt{3}}{2})^5 a_6 & + & (\frac{\sqrt{3}}{2})^6 a_7 & = & 0 \\
a_1 & + & \frac{\sqrt{2}}{2}a_2 & + & \frac{1}{2}a_3 & + & (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 a_4 & + & \frac{1}{4}a_5 & + & (\frac{\sqrt{2}}{2})^5 a_6 & + & (\frac{\sqrt{2}}{2})^6 a_7 & = & 0 \\
a_1 & + & \frac{1}{2}a_2 & + & \frac{1}{4}a_3 & + & \frac{1}{8}a_4 & + & \frac{1}{16}a_5 & + & \frac{1}{32}a_6 & + & \frac{1}{64}a_7 & = & 0 \\
a_1 & & & & & & & & & & & & & = & 0 \\
a_1 & - & \frac{1}{2}a_2 & + & \frac{1}{4}a_3 & - & \frac{1}{8}a_4 & + & \frac{1}{16}a_5 & - & \frac{1}{32}a_6 & + & \frac{1}{64}a_7 & = & 0 \\
a_1 & - & \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & + & \frac{3}{4}a_3 & - & (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 a_4 & + & (\frac{\sqrt{3}}{2})^4 a_5 & - & (\frac{\sqrt{3}}{2})^5 a_6 & + & (\frac{\sqrt{3}}{2})^6 a_7 & = & 0
\end{array}\right.$$

En MATLAB, la matriz de coeficientes se puede introducir de manera rápida como sigue:

```
>> x=[0 pi/6 pi/4 pi/3 pi/2 2*pi/3 5*pi/6]';
>> A=[cos(x).^0 cos(x).^1 cos(x).^2 cos(x).^3 cos(x).^4 cos(x).^5 cos(x).^6]
A =
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
    1.0000    0.8660    0.7500    0.6495    0.5625    0.4871    0.4219
    1.0000    0.7071    0.5000    0.3536    0.2500    0.1768    0.1250
    1.0000    0.5000    0.2500    0.1250    0.0625    0.0313    0.0156
    1.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    1.0000   -0.5000    0.2500   -0.1250    0.0625   -0.0312    0.0156
    1.0000   -0.8660    0.7500   -0.6495    0.5625   -0.4871    0.4219
>> rref(A)
ans =
     1     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     0     1
```

Luego, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, como se debía probar. La Figura 5.2 muestra la gráfica de todas las funciones consideradas.

$\triangleright$

Ejercicio 5.6. *Probar que el subconjunto*

$$1, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}^2(x), \operatorname{sen}^3(x), \operatorname{sen}^4(x), \operatorname{sen}^5(x), \operatorname{sen}^6(x)$$

es linealmente independiente en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$. ¿Es posible evaluar las funciones en los mismos puntos que en el ejemplo anterior para probar la independencia lineal? ¿Por qué?

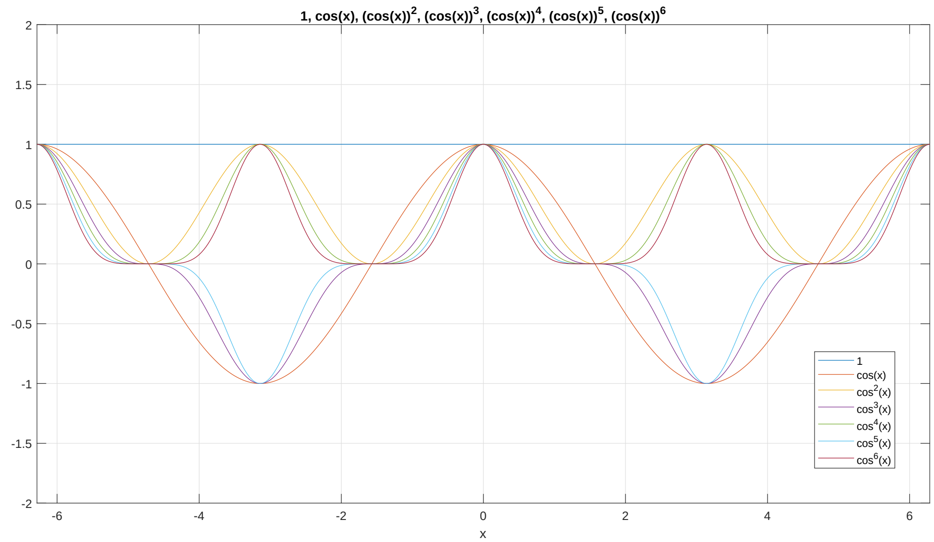

Figura 5.2: $1, \cos(x), \cos^2(x), \cos^3(x), \cos^4(x), \cos^5(x), \cos^6(x)$.

5.3. Cambios de base

5.3.1. Un mismo vector representado en dos bases diferentes

Ahora, dadas dos bases de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n,

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

se llama **matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$** a la matriz

$$[\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

cuyas columnas se obienen a partir de las representaciones

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ u_2 & = & a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ & \vdots & \\ u_n & = & a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{array}.$$

Para cambiar el vector u de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ se tiene que calcular

$$[u]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Como la matriz $[\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'}$ es invertible y su inversa es $([\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'})^{-1} = [\mathcal{B}']_{\mathcal{B}}$, se tiene

$$[u]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{B}']_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}'} = ([\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'})^{-1}[u]_{\mathcal{B}'},$$

con lo cual se puede expresar el vector u en la base $\mathcal{B}$ a partir de u en la base $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 5.7. *Suponer que en $\mathbb{R}^4$ los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4 forman una base y considerar los vectores canónicos e_1, e_2, e_3 y e_4 de $\mathbb{R}^4$. Explicar qué se obtienen en las últimas cuatro columnas al calcular*

```
rref[u1 u2 u3 u4 e1 e2 e3 e4].
```

Comprobar la afirmación realizada mediante una matriz con todos unos en su parte triangular inferior y ceros por encima de la diagonal principal.

La fórmula que relaciona tres bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^n$ es

$$[\mathcal{B}]_{\mathcal{B}''} = [\mathcal{B}']_{\mathcal{B}''}[\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'}.$$

Ejemplo 5.5. *Dado el vector* $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, *encontrar* $[u]_{\mathcal{C}}$ *y* $[u]_{\mathcal{B}'}$ *siendo*

$$\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

y $\mathcal{C}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

$\triangleleft$ Para el primer caso, $[u]_{\mathcal{C}}$ se obtiene haciendo

```
>> u1=[1;1;1]; u2=[0;0;3]; u3=[-1;2;-1];
   >> u = (-1)*u1 + 3*u3
   u =
       -4
        5
       -4
```

Luego,

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Otra forma de resolver este apartado es utilizando la fórmula $[u]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$:

```
>> u_B=[-1 0 3]';
   >> B_C=[u1 u2 u3]
```

```
B_C =
     1     0    -1
     1     0     2
     1     3    -1
>> B_C*u_B
ans =
    -4
     5
    -4
```

que, evidentemente, proporciona el mismo resultado.

Ahora, para el segundo apartado,

$$[u]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{C}]_{\mathcal{B}'}[\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}} = ([\mathcal{B}']_{\mathcal{C}})^{-1}[\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Luego,

```
>> v1=[2;2;-2]; v2=[1;1;4]; v3=[0;3;0];
   >> format rat
   >> uBp=inv([v1 v2 v3])*B_C*u_B
   uBp =
         -6/5
         -8/5
            3
```

Otra forma de resolverlo es, utilizando el vector $[u]_{\mathcal{C}}$ calculado previamente:

$$[u]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{C}]_{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{C}} = ([\mathcal{B}']_{\mathcal{C}})^{-1}[u]_{\mathcal{C}}$$

```
>> uBp2=inv([v1 v2 v3])*u;
   uBp2 =
         -6/5
```

```
-8/5
   3
```

Por lo tanto,

$$[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -6/5 \\ -8/5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\triangleright$

5.3.2. Algunos cambios de bases elementales

Se recuerda que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces

$$\left\{ \begin{array}{c} A \text{ es una matriz} \\ \text{de cambio de base} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ A \text{ es invertible} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A \text{ es producto de} \\ \text{matrices elementales} \end{array} \right\}.$$

Las geometría de las matrices elementales de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ fue analizada a partir del Teorema de caracterizaciones de matrices invertibles mediante transformaciones geométricas básicas: simetrías, compresiones, elongaciones, reflexiones, transvecciones, etc. En definitiva, (el resultado final al) realizar un cambio de bases en $\mathbb{R}^2$ no es más que (el efecto de) aplicar este tipo de transformaciones geométricas una a una.

Ejemplo 5.6. *Expresar los vectores e_1 y e_2 de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ en las siguientes bases*

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y

$$\mathcal{B}'' = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\triangleleft$ Para expresar e_i $(i = 1, 2)$ en la base $\mathcal{B}$ se debe calcular

$$[e_i]_{\mathcal{B}} = ([\mathcal{B}]_{\mathcal{C}})^{-1}[e_i]_{\mathcal{C}}.$$

Realizando el cambio de los dos vectores canónicos de forma simultánea se obtienen las columnas de $([\mathcal{B}]_{\mathcal{C}})^{-1}$.

Para la primera base, basta calcular

```
>> format rat
   >> inv([2 0;0 3])
   ans =
          1/2             0
          0               1/3
```

y se tiene

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

donde la matriz invertible que proporciona el cambio realizará una compresión en ambos ejes.

Para cambiar a la segunda base,

```
>> inv([1 3;0 1])
   ans =
          1             -3
          0              1
```

y se tiene

$$[e_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [e_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde la matriz invertible que proporciona el cambio corresponde a una transvección.

Para cambiar a la tercera base,

```
>> inv([0 1;1 0])
   ans =
           0            1
           1            0
```

y se tiene

$$[e_1]_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [e_2]_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde la matriz invertible que proporciona el cambio corresponde a una simetría respecto a la recta de ecuación $y = x$. $\triangleright$

En la Figura 5.3 se observa el vector e_2 escrito en la base $\mathcal{B}'$.

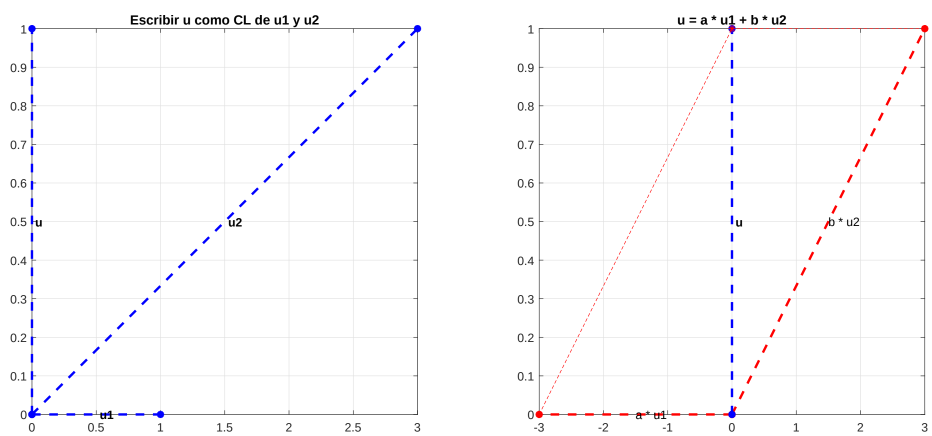

Figura 5.3: El vector e_2 escrito en la base $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 5.8. *Realizar las gráficas de los restantes vectores e_1 y e_2 en las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ del Ejemplo anterior.*

5.3.3. Subespacios vectoriales y cambios de base

A partir de la ecuación de una recta (en el plano) expresada en la base canónica, en el próximo ejemplo se obtendrá la ecuación de dicha recta expresada en otra base.

Ejemplo 5.7. *Se considera la recta de ecuación $y = x$ referida al sistema de referencia que proporciona la base canónica del plano. Encontrar una ecuación de dicha recta referida al sistema de referencia que proporciona la base*

$$\mathcal{B} = \left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

$\triangleleft$ A partir de la ecuación de la recta

$$[L]_{\mathcal{C}} : y = x$$

expresada en el sistema de referencia canónico, se trata de encontrar una ecuación $[L]_{\mathcal{B}}$ de dicha recta en la base $\mathcal{B}$. Para ello, se debe realizar un cambio de base expresando un punto genérico

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de la recta en términos de

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

es decir, de dicho punto en la nueva base. En efecto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [u]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Ahora se realizan los cálculos utilizando MATLAB

```
>> A = (1/sqrt(2))*[1 -1;1 1]
   A =
       0.7071   -0.7071
       0.7071    0.7071
   >> syms xp yp
   >> z=A*[xp;yp]
   z =
    (2^(1/2)*xp)/2 - (2^(1/2)*yp)/2
    (2^(1/2)*xp)/2 + (2^(1/2)*yp)/2
   >> x=z(1)
   x =
   (2^(1/2)*xp)/2 - (2^(1/2)*yp)/2
   >> y=z(2)
   y =
   (2^(1/2)*xp)/2 + (2^(1/2)*yp)/2
```

Ahora, haciendo $x - y = 0$ se tiene

```
>> x-y
   x-y =
   ans =
   -2^(1/2)*yp
```

de donde la ecuación de la recta en la base referida a la base $\mathcal{B}$ viene dada por $-\sqrt{2}y' = 0$, de donde

$$[L]_{\mathcal{B}} : y' = 0.$$

$\triangleright$

Ejercicio 5.9. *Se considera la recta de ecuación $y = -x$ referida a la base canónica del plano. Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ respecto de la cual la ecuación de dicha recta sea $x' = 0$. No es necesario realizar ningún cálculo, se puede obtener a partir de una gráfica de la situación planteada en el Ejemplo anterior.*

5.4. Aplicaciones

En esta sección se presentan dos aplicaciones de cambio de bases.

5.4.1. Cálculo de una integral trigonométrica

En la primera aplicación se calculará una integral mediante un método (algebraico) que simplificará considerablemente su resolución, en comparación con la clásica resolución que utiliza métodos del Análisis Matemático.

Cabe remarcar que esta aplicación proporciona un método de Álgebra para resolver un problema de Cálculo, lo que permite poner de manifiesto y apreciar las interrelaciones en las diferentes áreas de las Matemáticas.

En Ingeniería en Telecomunicaciones, la teoría de la señal (Figura 5.4) juega un papel preponderante y la trigonometría es necesaria en la mayoría de sus cálculos; especialmente en toda la teoría del Análisis de Fourier. Permiten responder, por ejemplo, a la pregunta: ¿qué forma tiene una cuerda elástica que vibra, como la de un violín o una guitarra, que está sujeta en ambos extremos? También es fundamental a la hora de realizar el análisis de imágenes satelitales basado en algoritmos que procesan las frecuencias mediante las componentes de Fourier (que, simplificando, no son más que ciertas combinaciones lineales).

Figura 5.4: Teoría de la señal.

En Ingeniería Civil, dentro de la teoría de elasticidad (Figura 5.5), también aparecen cálculos como los que se muestran a continuación, por ejemplo, al estudiar la ecuación del movimiento de un resorte. La matemática francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831) ganó un premio en la Academia de París con un ensayo sobre elasticidad donde estudió el fenómeno de vibración de placas elásticas: tras esparcir arena sobre una superficie como la de un tambor, hacía vibrar dicha superficie pasando el arco de un violín por el borde y analizando dicho movimiento.

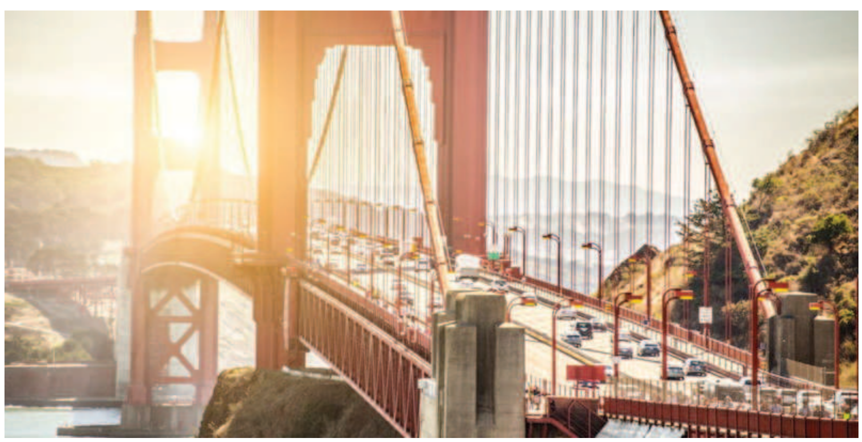

Figura 5.5: Teoría de la elasticidad.

En Administración de Empresas, por ejemplo, el comportamiento del precio de una acción (Figura[1] 5.6) se estudia mediante el promedio móvil simple de los datos históricos. La mayoría de los portales en línea de información bursátil pone a disposición de los inversores datos recogidos mensualmente, semanalmente o incluso diariamente de los precios de apertura y cierre de las acciones. Una rápida inspección permite comprobar la tendencia y tomar decisiones a medio plazo, sobre todo, si se trata de períodos de tiempo de estabilidad en el mercado. Si se trata de períodos de crisis económica, por ejemplo, realizar el análisis de Fourier (procesamiento digital de señales, filtros digitales, procesos estocásticos) permitirá detectar estos cambios bruscos a corto plazo y ayudará a que las decisiones tomadas resulten más acertadas.

Figura 5.6: Criterio de decisión: ¿cuándo vender o comprar acciones?

Debido a la periodicidad de las funciones que aparecen, numerosas señales[2], se pueden representar por medio de funciones en la variable tiempo, que son combinaciones lineales de senos y cosenos y, en ciertas aplicaciones, se requiere el cálculo de algunas integrales trigonométricas. Resolver estas integrales utilizando los métodos del Cálculo Integral[3]

[1]Esta gráfica ha sido tomada del artículo de F. Lavagni Bolaños, L.A. García González titulado “Comportamiento accionario según el análisis de Fourier”, TEC Empresarial, Vol. 3, Ed. 1-2, 2009.

[2]Como, por ejemplo, pueden ser las vibraciones que se producen en un puente cuando un grupo de soldados desfilan sobre el mismo, señales emitidas por un satélite, etc.

[3]Muchas de estas integrales se resuelven mediante el método de integración por partes

resulta tedioso.

En este caso, el objetivo es:

Ejemplo 5.8. *Resolver la integral indefinida*

$$\int [\cos(t) - 6\cos^3(t) + 13\cos^4(t) - 42\cos^5(t) - 60\cos^6(t)]\,\mathrm{d}t.$$

$\lhd$ Puesto que las integrales de potencias de senos y cosenos requieren mucho tiempo de cálculo, se las expresará en términos de funciones del tipo

$$\cos(kt) \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

las cuales tienen integrales inmediatas. Esto es, se realizará un cambio de base (donde la idea ha sido cambiar potencias de estas funciones cosenos por múltiplos en sus argumentos).

Se consideran los siguientes conjuntos de funciones continuas:

$$\mathcal{B} = \{1, \cos(t), \cos^2(t), \cos^3(t), \cos^4(t), \cos^5(t), \cos^6(t)\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \{1, \cos(t), \cos(2t), \cos(3t), \cos(4t), \cos(5t), \cos(6t)\}$$

y sea considera el subespacio

$$S := \overline{\{\mathcal{B}\}}.$$

En el Ejemplo 6.1 se ha demostrado que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ y, por tanto, es una base de S. Se deduce que $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 7$.

Se suponen conocidas las siguientes identidades trigonométricas[4]:

- $\cos(2\alpha) = -1 + 2\cos^2(\alpha)$.

requiriendo un desarrollo bastante largo.

[4]En los ejercicios se proporciona un procedimiento para demostrarlas.

- $\cos(3\alpha) = -3\cos(\alpha) + 4\cos^3(\alpha)$.
- $\cos(4\alpha) = 1 - 8\cos^2(\alpha) + 8\cos^4(\alpha)$.
- $\cos(5\alpha) = 5\cos(\alpha) - 20\cos^3(\alpha) + 16\cos^5(\alpha)$.
- $\cos(6\alpha) = -1 + 18\cos^2(\alpha) - 48\cos^4(\alpha) + 32\cos^6(\alpha)$.

Se tiene entonces la siguiente información:

- Observando las identidades trigonométricas, se tiene que todos los vectores de $\mathcal{B}'$ se pueden escribir fácilmente como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente (incluso una base) de S.
- Es conocido que al realizar combinaciones lineales sobre los vectores de un conjunto linealmente independiente, se preserva su independencia lineal.
- Los elementos de $\mathcal{B}'$ pertenecen a S.

Luego, $\mathcal{B}'$ es un subconjunto linealmente independiente de S. Al ser $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 7$, $\mathcal{B}'$ es una base de S (pues S no puede tener más vectores linealmente independientes que su dimensión).

Ahora se van a escribir los vectores de la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$. En efecto, llamando

$$f_j(t) := \cos^j(t) \qquad \text{y} \qquad g_j(t) := \cos(jt), \quad \forall j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

de las relaciones trigonométricas previas, es inmediato que:

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{B}']_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [g_0]_{\mathcal{B}} & [g_1]_{\mathcal{B}} & [g_2]_{\mathcal{B}} & [g_3]_{\mathcal{B}} & [g_4]_{\mathcal{B}} & [g_5]_{\mathcal{B}} & [g_6]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como el integrando de la integral pedida es un vector $[f]_{\mathcal{B}}$ y se desea calcular $[f]_{\mathcal{B}'}$, se debe determinar la matriz de cambio de base $[\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'} = ([\mathcal{B}']_{\mathcal{B}})^{-1}$.

En MATLAB se tiene

```
>> P=[1 0 -1 0 1 0 -1;0 1 0 -3 0 5  0;0 0 2 0 -8 0 18;0 0 0
...4 0 -20 0;0 0 0 0 8 0 -48;0 0 0 0 0 16 0;0 0 0 0 0 0 32];
    >> invP=inv(P)
    invP =
        1          0          1/2        0          3/8        0          5/16
        0          1          0          3/4        0          5/8        0
        0          0          1/2        0          1/2        0          15/32
        0          0          0          1/4        0          5/16       0
        0          0          0          0          1/8        0          3/16
        0          0          0          0          0          1/16       0
        0          0          0          0          0          0          1/32
```

Si ahora se expresa el integrando

$$f(t) = \cos(t) - 6\cos^3(t) + 13\cos^4(t) - 42\cos^5(t) - 60\cos^6(t)$$

en la base $\mathcal{B}$ se tiene

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -6 \\ 13 \\ -42 \\ -60 \end{bmatrix}.$$

Luego, realizando el cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ se tiene que

$$[f]_{\mathcal{B}'} \quad = \quad [\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}}$$

```
>> fB=[0;1;0;-6;13;-42;-60]
        >> invP*fB
        ans =
        >> invP*fB
            -111/8
            -119/4
            -173/8
            -117/8
             -77/8
             -21/8
             -15/8
```

Es decir,

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -\frac{111}{8} \\ -\frac{119}{4} \\ -\frac{173}{8} \\ -\frac{117}{8} \\ -\frac{77}{8} \\ -\frac{21}{8} \\ -\frac{15}{8} \end{bmatrix},$$

de donde f tiene una nueva representación (ahora en la base $\mathcal{B}'$):

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(t) - 6\cos^3(t) + 13\cos^4(t) - 42\cos^5(t) - 60\cos^6(t) \\ &= -\frac{111}{8} - \frac{119}{4}\cos(t) - \frac{173}{8}\cos(2t) - \frac{117}{8}\cos(3t) - \frac{77}{8}\cos(4t) - \frac{21}{8}\cos(5t) - \frac{15}{8}\cos(6t). \end{aligned}$$

Por último, se integra la segunda expresión, que es inmediata, y se obtiene

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{111}{8}t - \frac{119}{4}\operatorname{sen}(t) - \frac{173}{16}\operatorname{sen}(2t) - \frac{39}{8}\operatorname{sen}(3t) - \frac{77}{32}\operatorname{sen}(4t) - \frac{21}{40}\operatorname{sen}(5t) - \frac{5}{16}\operatorname{sen}(6t) + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. $\triangleright$

5.4.2. Cambio de bases en espacios de color

A continuación se presenta otra aplicación de la utilización del cambio de bases en áreas como Informática, Fotogrametría, etc.

Cada vez se dispone de más tipos de dispositivos móviles, versiones más actualizadas, de mayor calidad, con pantallas de más alta resolución, etc. La teoría del color es una herramienta imprescindible a tener en cuenta en el diseño de pantallas del ordenador, cámaras de vídeo, tabletas digitales, televisiones, escáneres, teléfonos móviles, vídeo digital, etc. En dicha teoría se utilizan diferentes tipos de sistemas de coordenadas (algunas de 3 variables) para componer un color, dentro de los llamados *espacios de color*, que permiten regular, entre otras cosas, el tono o matiz, la saturación y la luminosidad en la imagen a analizar. En la actualizad hay espacios de color de diferentes dimensión:

- Dimensión 1: escala de grises, escala Jet, etc.
- Dimensión 2: subespacio rg, subespacio xy, etc.
- Dimensión 3: espacio RGB (Red, Green, Blue), HSL (Hue, Saturation, Lightness), CMY (Cyan, Magenta, Yellow), HSV, YCbCr, YUV, YI'Q', etc. ,
- Dimensión 4: espacio CMYK (Cyan, Magenta, Yellow, Black).

El sistema RGB permite formar un color a partir de sus componentes de Rojo (R), Verde (G) y Azul (B). De este modo, es necesario trabajar con un vector del espacio de color de coordenadas (R, G, B), donde cada componente puede tomar valores enteros entre 0 y 255 donde el blanco tiene coordenadas $(255, 255, 255)$ mientras que las coordenadas del color negro son $(0, 0, 0)$. En la Figura 5.7 se aprecia la distribución de colores en el espacio de color RGB poniendo el énfasis en los 8 vértices.

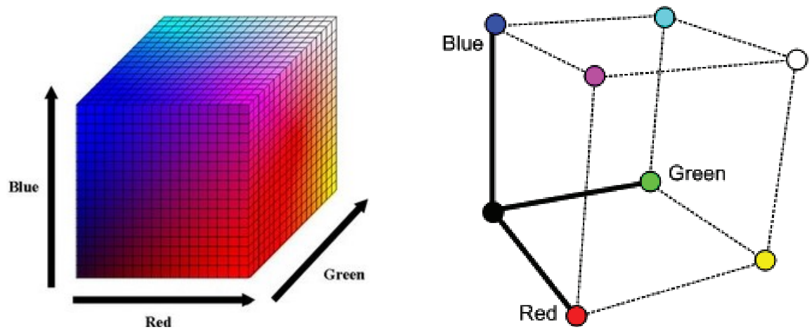

Figura 5.7: Espacio de color RGB y 8 colores destacados.

En sistemas de fotografía y vídeo digital suele utilizarse el sistema YCrCb estandarizado por la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU), que es una versión trasladada y escalada del espacio de color YUV. Este último es más básico y se define a partir de una variable Y de luminancia y dos variables U y V de crominancia, es decir, codifica una imagen en color o un vídeo teniendo en cuenta la percepción humana (esto permite reducir las componentes del ancho de banda para las componentes de crominancia). Por lo tanto, el modelo YUV define un espacio de color en términos de una luminancia o brillo (Y) y dos componentes de crominancia (U,V) por separado. Si los valores de R, G y B pertenecen al intervalo $[0, 255]$, entonces los valores de Y, U y V se mueven en los intervalos $[0, 255]$, $[-111'18, 111'18]$ y $[-156'825, 156'825]$, respectivamente. Ahora bien, si los valores de R, G y B pertenecen al intervalo $[0, 1]$, entonces los valores de Y se mueven en el intervalos $[0,1]$, U se encuentra en el rango $[-0'436, 0'436]$ y V en $[-0'615, 0'615]$.

Las ecuaciones que relacionan ambos sistemas y permiten realizar el cambio de RGB a YUV son las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} Y & = & 0,299R & + & 0,587G & + & 0,114B \\ U & = & -0,147R & - & 0,289G & + & 0,436B \\ V & = & 0,615R & - & 0,515G & - & 0,100B \end{array}\right. ,$$

de donde resulta que la matriz de cambio de la base del sistema (R, G, B) al sistema (Y, U, V) viene dada por

$$[RGB]_{YUV} = \begin{bmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,147 & -0,289 & 0,436 \\ 0,615 & -0,515 & -0,100 \end{bmatrix}$$

y su inversa permite realizar el cambio de un vector con coordenadas en la base (Y, U, V) a la base (R, G, B). Es decir,

$$[(R, G, B)]_{YUV} = [RGB]_{YUV}[(R, G, B)]_{RGB}$$

y

$$[(R, G, B)]_{RGB} = [YUV]_{RGB}[(R, G, B)]_{YUV}.$$

Ejercicio 5.10. *(a) Las coordenadas del vector* $[u]_{RGB} = (255, 0, 0)$ *(en el sistema RGB) corresponden al color rojo. Comprobar que dicho color en el sistema YUV tiene coordenadas*

$$[u]_{TUV} = (76'245, -37{,}485, 156'8250).$$

(b) Comprobar que un vector que en el sistema YUV tiene coordenadas

$$[v]_{TUV} = (178'755, 37'485, -156'825),$$

en el sistema RGB tiene coordenadas $[v]_{RGB} = (0, 255, 255)$. *¿A qué color corresponde?*

5.5. Ejercicios

(1) En $\mathbb{R}_2[x]$ se consideran los subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{p_1(x) = -1, p_2(x) = x - 1, p_3(x) = x^2 - 1\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \{q_1(x) = x - 1, q_2(x) = x + 1, q_3(x) = x^2\}.$$

Se pide:

(a) Probar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $\mathbb{R}_2[x]$ utilizando el comando `rank`.

(b) Escribir el vector $r(x) = 2x^2 - 3x - 5$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

(c) La matriz de cambio de base $[\mathcal{B}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) Probar que si la ecuación de una recta en la base canónica es $[L]_{\mathcal{C}} : ax + by = 0$ (donde $ab \neq 0$) entonces es posible encontrar una nueva base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ en la cual dicha recta tenga ecuación $[L]_{\mathcal{B}} : y' = 0$.

(3) En este ejercicio se demostrarán las cinco identidades trigonométricas utilizadas en la aplicación de la página 180. Para ello, se considera el número complejo

$$z = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha),$$

siendo α un valor arbitrario en el intervalo $[0, 2\pi[$. Se pide:

(a) Calcular el módulo y el argumento de z ¿Qué ocurre para los valores $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$?

(b) Utilizando la fórmula de de Moivre probar que

$$z^k = \cos(\alpha k) + i \operatorname{sen}(\alpha k) \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

(c) Desarrollar las potencias $z^k = (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))^k$ (para los 5 valores de k) utilizando el binomio de Newton.

(d) Comparando los resultados obtenidos anteriormente y utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, deducir las identidades trigonométricas buscadas (Ayuda: $\operatorname{sen}^{2s}(\alpha) = (\operatorname{sen}^2(\alpha))^s$ para todo $s \in \mathbb{N}$).

(4) Calcular la integral

$$\int [17 - 3\cos(t) + 9\cos^3(t) - 33\cos^5(t) + 67\cos^6(t)]\, \mathrm{d}t$$

mediante un cambio de base adecuado.

Para comprobar el resultado obtenido, utilizar el comando `int` para resolver la integral en MATLAB realizando un cálculo simbólico. Se debe introducir previamente con `syms` la variable a utilizar y, posteriormente al cálculo, con `simplify()`, se obtendrá la forma simplificada de dicha solución.

(5) Este ejercicio está relacionado con la segunda Aplicación.

(a) De la Gráfica 5.7 se aprecia que las coordenadas del color azul en el sistema RGB son $(0, 0, 255)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en el sistema YUV?

(b) ¿Y las del magenta, que en el sistema RGB son $(255, 0, 255)$?

(c) ¿Cuál es el color que en el sistema YUV tiene coordenadas $(149{,}685, -73{,}695, -131{,}325)$?

Práctica 6

Espacios euclídeos

Índice

6.1. Producto escalar

Al calcular el producto escalar entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se debe tener en cuenta si se trata del producto escalar canónico o de un producto escalar dado por $\langle x, y\rangle = x^t G y$, asociado a una matriz G, donde G no es necesariamente la matriz identidad. En el primer caso, MATLAB dispone del comando `dot` para calcularlo; en el segundo, se debe introducir la matriz y realizar las multiplicaciones matriciales involucradas.

Ejemplo 6.1. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, calcular el producto escalar de los vectores*

$$x = (1, 0, 0)^t \qquad e \qquad y = (0, 1, 0)^t$$

utilizando

(a) el producto escalar canónico $\langle x, y\rangle = x^t y$.

(b) el producto escalar $\langle x, y\rangle_G = x^t G y$ siendo

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\lhd$ Dados dos vectores x, y del mismo tamaño, el comando dot calcula el producto escalar canónico entre ellos, y si dichos vectores están dispuestos por columnas, se tiene que `dot(x,y)` coincide con `x'*y`.

Utilizando el producto escalar canónico, para los vectores x e y dados se tiene que

```
>> x=[1;0;0]; y =[0;1;0];
>> dot(x,y)
ans =
     0
```

y se comprueba fácilmente mediante

```
>> x'*y
   ans =
        0
```

Luego, $\langle x, y \rangle = x^t y = 0$.

Observar que, si se introducen vectores fila (en lugar de columna), el comando `dot` también proporciona el producto escalar canónico entre ambos vectores:

```
>> dot(x',y')
 ans =
        0
```

Para resolver el segundo apartado, primero se introduce la matriz G y luego se calcula mediante

```
>> G=[1 1/2  0;1/2 1  0;0  0  1]
 G =
     1.0000    0.5000         0
     0.5000    1.0000         0
          0         0    1.0000
 >> x'*G*y
 ans =
     0.5000
```

Luego,

$$\langle x, y \rangle_G = x^t G y = 0{,}5000.$$

Observar que los vectores son ortogonales respecto del producto escalar canónico pero no lo son respecto del otro producto escalar por ser $\langle x, y\rangle_G \neq 0$. $\triangleright$

Ejemplo 6.2. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$, calcular el producto escalar de los vectores*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a partir del producto escalar de Frobenius $\langle A, B\rangle_F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} = \mathrm{tr}(A^t B)$.

$\triangleleft$ Se presentarán tres formas de resolver este ejemplo.

El comando `trace` de MATLAB permite calcular la traza de una matriz cuadrada.

Luego,

```
>> A=[1 -1;1 1];
   >> B=[1 1;1 1];
   >> trace(A'*B)
   ans =
        2
```

La siguiente función de MATLAB permite calcular, de otra forma, el producto escalar de Frobenius.

```
function prodesc=PEFrobenius(A,B)
% Calcula el producto escalar de Frobenius
   % de dos matrices rectangulares del mismo tamanyo
   % definido por la suma de los productos de los
   % elementos de las correspondientes posiciones
```

```
[m,n]=size(A);
   PE=0;
   for i=1:m
       for j=1:n
           PE = PE + A(i,j)*B(i,j);
       end
   end
   prodesc=PE;

end
```

Al ejecutarla utilizando las matrices introducidas anteriormente se obtiene

```
>> prodesc=PEFrobenius(A,B)
prodesc =
     2
```

Para la tercera forma de resolver este ejemplo se utiliza el isomorfismo de Descartes. A partir del isomorfismo entre $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}^4$, fijada la base canónica $\mathcal{C}$ dada por

$$\left\{E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, al escribir las matrices A y B en dicha base, (en este caso quedan los elementos de cada matriz, leídos por filas, escritos en un vector columna), es posible calcular el producto escalar de Frobenius de A y B utilizando `dot`. En efecto,

$$[A]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [B]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, denotando mediante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^4$, se tiene que

$$\langle A, B\rangle_F = \langle [A]_{\mathcal{C}}, [B]_{\mathcal{C}}\rangle,$$

con lo cual

```
>> AC=[1;-1;1;1]; BC=[1;1;1;1];
>> dot(AC,BC)
ans =
      2
```

Por lo tanto, $\langle A, B\rangle_F = \langle [A]_{\mathcal{C}}, [B]_{\mathcal{C}}\rangle = 2$. ▷

6.2. Norma

El comando `norm` calcula la norma euclídea o norma 2 de un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida por $\|x\|_2 = +\sqrt{\langle x, x\rangle} = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. La sintaxis a utilizar para ello puede ser `norm(x)` o también `norm(x,2)`.

Ejemplo 6.3. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, calcular la norma del vector $x = (0, 1, 0)^t$ inducida por el*

(a) producto escalar canónico $\langle x, y\rangle = x^t y$.

(b) producto escalar $\langle x, y\rangle_G = x^t G y$ siendo

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◁ La norma euclídea de x viene dada por

```
>> x=[0;1;0];
>> norm(x)
ans =
     1
```

y la norma de x respecto al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ se calcula mediante

$$\|x\|_G = +\sqrt{\langle x, x \rangle_G} = +\sqrt{x^t G x}$$

```
>> G=[3 -3/4  0;-3/4 4 0;0 0 1]
G =
    3.0000   -0.7500         0
   -0.7500    4.0000         0
         0         0    1.0000
>> sqrt(x'*G*x)
ans =
     2
```

De nuevo, para un mismo vector, el valor de su norma difiere, según se utilice un producto escalar u otro. ▷

Para calcular la norma de Frobenius de vectores de $\mathbb{R}^{m\times n}$, MATLAB dispone de la orden `norm(x,'fro')`.

Ejemplo 6.4. *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2\times 3}$, calcular la norma de Frobenius del vector*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

◁ La norma de Frobenius de A viene dada por

```
>> A=[3  0  1
   2  4  -1];
>> norm(A,'fro')
```

```
ans =
    5.5678
```

que se puede comprobar utilizando la definición mediante $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle_F} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)}$

```
>> sqrt(trace(A'*A))
   ans =
       5.5678
```

o también utilizando la función `PEFrobenius` realizada en el Ejemplo 6.1, a partir de la cual

```
>> prodesc=PEFrobenius(A,A)
   prodesc =
   >>    31
   >> sqrt(prodesc)
   ans =
       5.5678
```

$\triangleright$

Ejemplo 6.5. *Calcular la forma de los vectores de norma 1 para la norma inducida por el producto escalar*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{16}x_1y_1 + \frac{1}{4}x_2y_2$$

en $\mathbb{R}^2$. Utilizar MATLAB para dibujar algunos de dichos vectores.

$\triangleleft$ Por definición de norma se tiene que

$$\|x\| = +\sqrt{\langle x, x\rangle} = +\sqrt{\frac{1}{16}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2}.$$

Luego,

$$\|x\| = 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \frac{1}{16}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 = 1,$$

con lo que los vectores que satisfacen dicha relación se hallan sobre la elipse de ecuación

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1.$$

El comando de MATLAB que pinta vectores en el plano es `quiver`. Para dibujar varios vectores, los mismos serán generados a partir de un bucle `for-end`. Una forma de pintar elipses es utilizando sus ecuaciones paramétricas que se obtienen al observar que $\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = 1$. El hecho que una suma de cuadrados deba ser igual a 1, sugiere expresar las bases de ambos cuadrados en términos de una única variable real t (es decir, de un parámetro) del siguiente modo:

$$\frac{x_1}{4} = \cos(t), \quad \frac{x_2}{2} = \operatorname{sen}(t), \quad \text{para } t \in [0, 2\pi[.$$

Despejando se tiene que, al variar $t \in [0, 2\pi[$, las expresiones

$$x_1 = 4\cos(t), \qquad x_2 = 2\operatorname{sen}(t)$$

son las coordenadas de los extremos de los vectores de norma 1 buscados. Para pintar tanto los vectores como la elipse que los "envuelve" el procedimiento es el siguiente. Los vectores se generan mediante

```
>> t=linspace(0,2*pi,13);
   >> figure
   hold on
   >> for k=1:13
   >>   quiver(0,0,4*cos(t(k)),2*sin(t(k)),0)
   >> end
   >> axis equal
   >> grid
```

Se observa que los parámetros que se deben proporcionar al comando `quiver` son, en primer lugar, las componentes del punto en el que se pintará (en este caso, el punto `(0,0)`) y, a continuación, las componentes del vector que se quiere representar como una flecha (en este caso, `(4*cos(t(k)),2*sin(t(k))`). Observar también que las funciones seno y coseno operan de forma vectorial, es decir, si se aplican a un vector, devuelve otro vector que contiene el seno o el coseno de cada una de sus componentes, respectivamente. El 0 del último argumento evita que el comando realice un escalado automático.

Por otra parte, la elipse se representa mediante

```
t1=linspace(0,2*pi,100);
   x=4*cos(t1);
   y=2*sin(t1);
   plot(x,y)
```

Ejercicio 6.1. *¿Qué información proporciona el último argumento en el comando* `linspace`*? ¿Qué se pretente obtener al poner 13 en un caso y 100 en el otro? ¿Se podría evitar el 100? Investiga en la ayuda sobre dicho comando.*

En la Figura 6.1 se observa la gráfica obtenida a partir de estos comandos. ¡Sí, se trata de vectores de norma 1! Se recuerda que no se están realizando los cálculos respecto del producto escalar canónico.

¿Por qué se ven sólo 12 vectores si se han pintado 13?

▷

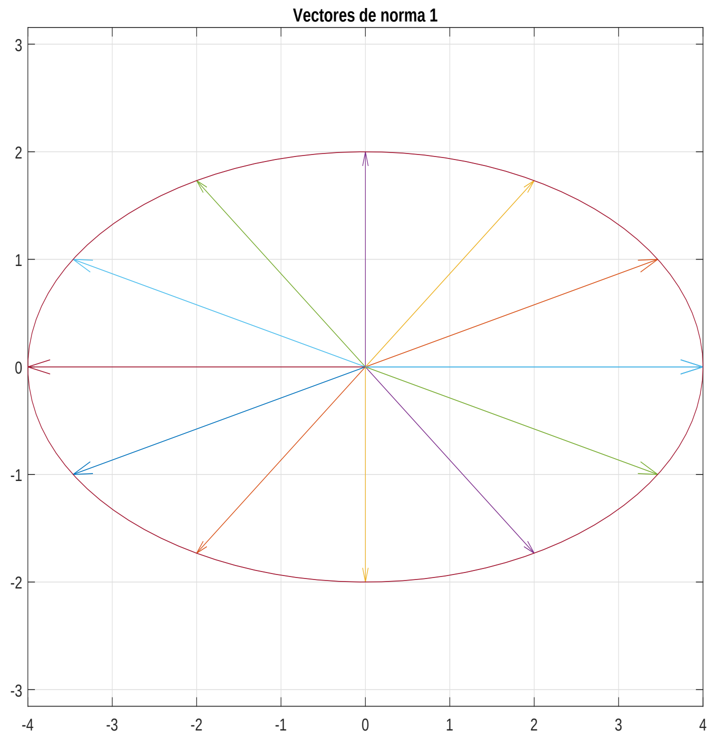

Figura 6.1: Algunos vectores de norma 1 con $\|x\| = \sqrt{\frac{1}{16}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2}$.

Ejercicio 6.2. *Comprobar que se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz para*

(a) $x = (2,2,3)^t$ *e* $y = (1,1,1)^t$ *en* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ *del apartado (b) del Ejemplo 6.1.*

(b) las matrices A *y* B *del Ejemplo 6.2 con el producto escalar de Frobenius.*

Ejercicio 6.3. *Encontrar un par de vectores distintos y no nulos para los que se verifique la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz para*

(a) el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ del apartado (b) del Ejemplo 6.1.

(b) el producto escalar de Frobenius en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

6.3. Ángulo

Se recuerda que el ángulo entre los vectores no nulos u y v de un espacio euclídeo E se calcula a partir de la expresión

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

y es el único valor que cumple $\theta \in [0, \pi]$.

Ejemplo 6.6. *Calcular el ángulo entre los vectores $x = (1, 1)^t$ e $y = (0, 3)^t$ en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ dotado del producto escalar*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{16} x_1 y_1 + \frac{1}{4} x_2 y_2.$$

$\lhd$ Una forma de expresar este producto escalar mediante notación matricial es

$$\langle x, y \rangle_G = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Luego,

```
>> G=diag([1/16 1/4])
   G =
        0.0625         0
```

```
        0    0.2500
```

El producto escalar entre ambos vectores viene dado por

```
>> x=[1 1]'; y=[0 3]';
   >> xey=x'*G*y
   xey =
          0.7500
```

y la norma de los vectores

```
>> nx=sqrt(x'*G*x)
   nx =
          0.5590
   >> ny=sqrt(y'*G*y)
   ny =
          1.500
```

Finalmente, el ángulo se calcula mediante

```
>> ang=acos(xey/(nx*ny))
   ang =
        0.4636
```

que, convertido a grados sexagesimales, es

```
  >> ang*180/pi
   ans =
      26.5651
```

Utilizando un argumento geométrico, y sin realizar cálculo alguno, se puede observar cuál es el ángulo que forman los mismos vectores con respecto al producto escalar canónico de $\mathbb{R}^2$. Comparar ambos resultados.

$\triangleright$

Ejercicio 6.4. *Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que los vectores $x = (1, a)^t$ e $y = (0, 3)^t$ formen un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ dotado del producto escalar del ejemplo anterior. Realizar este cálculo, primero utilizando MATLAB y, luego, a mano y comparar los resultados. ¿Son válidas todas las soluciones obtenidas a mano?*

6.4. Ortogonalidad

Se recuerda que, en un espacio euclídeo E, dos *vectores* son *ortogonales* si su producto escalar es cero y el *complemento ortogonal* de un subespacio S de E viene dado por

$$S^{\perp} = \{x \in E : \langle x, s \rangle = 0, \forall s \in S\}.$$

Ejemplo 6.7. *En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se considera el producto escalar dado por*

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \qquad p, q \in \mathbb{R}_2[x].$$

Encontrar la forma de los vectores de $\mathbb{R}_2[x]$ ortogonales a $h(x) = 1 - 2x$ y una base del complemento ortogonal de $S = \overline{\{h(x)\}}$.

$\triangleleft$ Se buscan todos los polinomios de la forma $q(x) = a + bx + cx^2$ tales que $\langle h, q \rangle = 0$, es decir,

$$h(0)q(0) + h(1)q(1) + h(2)q(2) = 0,$$

lo que equivale a

$$a + (-1)(a + b + c) + (-3)(a + 2b + 4c) = 0,$$

y despejando la incógnita c se obtiene

```
>> syms a b c
   >> solve(a + (-1)*(a + b + c) + (-3)*(a + 2*b + 4*c)==0,c)
   ans =
   - (3*a)/13 - (7*b)/13
```

Luego,

$$q(x) = a + bx + \left(-\frac{3}{13}a - \frac{7}{13}b\right)x^2 = a\left(1 - \frac{3}{13}x^2\right) + b\left(x - \frac{7}{13}x^2\right).$$

Comprobando previamente que ambos vectores son linealmente independientes, se obtiene que una base del complemento ortogonal de S viene dada por

$$\mathcal{B}_{S^\perp} = \left\{1 - \frac{3}{13}x^2, x - \frac{7}{13}x^2\right\}.$$

$\triangleright$

Ejercicio 6.5. *Comprobar que cada vector de la base obtenida en el ejemplo anterior es, efectivamente, ortogonal al vector h y ninguno de ellos tiene norma 1. ¿Son ortogonales entre sí los vectores obtenidos en dicha base?*

6.4.1. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Se recuerda el método de ortogonalización:

Método de Gram-Schmidt: si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo y $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de E entonces se trata de construir el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ de vectores ortogonales dos a dos que genera el mismo subespacio que el de los vectores de partida, a partir de las expresiones

$$
\begin{aligned}
v_1 &:= u_1, \\
v_2 &:= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1, \\
v_3 &:= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2,
\end{aligned}
$$

y así siguiendo hasta

$$
v_r := u_r - \frac{\langle u_r, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_r, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \cdots - \frac{\langle u_r, v_{r-1} \rangle}{\|v_{r-1}\|^2} v_{r-1}.
$$

Los polinomios se introducen en MATLAB como si fuesen vectores; los coeficientes de un polinomio, escrito en orden decreciente en sus potencias de x, se escriben como las componentes de un vector. Por ejemplo, $p(x) = 3x^2 + 4$ se escribe como

```
>> p=[3 0 4].
```

El comando `polyval` evalúa un polinomio p en un valor de x específico (o también en un vector dado) ya sea real o complejo.

Ejemplo 6.8. *Utilizar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal del complemento ortogonal de* $S = \overline{\{h(x)\}}$ *del Ejemplo 6.7.*

$\triangleleft$ En el ejemplo anterior se ha encontrado una base

$$\mathcal{B}_{S^\perp} = \left\{ q_1(x) = 1 - \frac{3}{13}x^2, q_2(x) = x - \frac{7}{13}x^2 \right\}$$

para $S^\perp$. Ahora se aplicará el método de ortogonalización de Gram-Schmidt para convertirla en una base ortonormal de $S^\perp$.

El primer vector permanece invariante, es decir,

$$r_1(x) = q_1(x) = 1 - \frac{3}{13}x^2.$$

El vector $r_2(x)$ ortogonal a $r_1(x)$ se calcula mediante la expresión

$$\begin{aligned}
r_2(x) &= q_2(x) - \frac{\langle q_2, r_1 \rangle}{\langle r_1, r_1 \rangle} r_1(x) \\
&= x - \frac{7}{13}x^2 - \frac{\langle x - \frac{7}{13}x^2, 1 - \frac{3}{13}x^2 \rangle}{\langle 1 - \frac{3}{13}x^2, 1 - \frac{3}{13}x^2 \rangle} \left(1 - \frac{3}{13}x^2 \right) \\
&= x - \frac{7}{13}x^2 - \frac{\frac{58}{169}}{\frac{270}{169}} \left(1 - \frac{3}{13}x^2 \right) \\
&= x - \frac{7}{13}x^2 - \frac{29}{135} \left(1 - \frac{3}{13}x^2 \right) \\
&= -\frac{29}{135} + x - \frac{22}{45}x^2,
\end{aligned}$$

donde los productos escalares se han calculado como sigue

```
>> q1=[-3/13 0 1];
   >> q2=[-7/13 1 0];
   >> r1=q1;
   >> format rat
   >> q2er1=dot(polyval(q2,[0 1 2]),polyval(r1,[0 1 2]))
   q2er1 =
         58/169
   >> r1er1=dot(polyval(r1,[0 1 2]),polyval(r1,[0 1 2]))
   r1er1 =
        270/169
```

```
>> r2=q2-(q2er1/r1er1)*r1
r2 =
     -22/45           1            -29/135
```

Falta normalizar los vectores $r_1(x)$ y $r_2(x)$. Para ello,

```
>> r1n=(1/sqrt(r1er1))*r1
   r1n=
       -461/2525        0             322/407
   >> r2er2=dot(polyval(r2,[0 1 2]),polyval(r2,[0 1 2]))
   r2er2 =
          22/135
   >> r2n=(1/sqrt(r2er2))*r2
   r2n =
      -1314/1085      1085/438      -1093/2054
```

Por lo tanto, la base ortonormal buscada para $S^{\perp}$ viene dada por

$$\left\{\frac{322}{407}-\frac{461}{2525}x^2, -\frac{1093}{2054}+\frac{1085}{438}x-\frac{1314}{1085}x^2\right\}.$$

$\triangleright$

Ejercicio 6.6. *Comprobar que los vectores obtenidos en el último ejemplo son, efectivamente, ortonormales.*

Un caso particular importante: Si lo que se requiere es una base ortonormal de un conjunto linealmente independiente de vectores del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico, se puede utilizar la instrucción `orth` de MATLAB.

Ejemplo 6.9. *Calcular una base ortonormal para el subespacio*

$$S = \overline{\{u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (1, 1, 0, -1); u_3 = (1, 0, 0, -1)\}}$$

de $\mathbb{R}^4$ *con el producto escalar canónico.*

$\triangleleft$ Primero se colocan los vectores en las columnas de una matriz A como sigue

```
>> u1=[1 2 3 4]; u2=[1 1 0 -1]; u3=[1 0 0 -1];
   >> A=[u1' u2' u3']
   A =
        1     1     1
        2     1     0
        3     0     0
        4    -1    -1
   >> rank(A)
   ans =
        3
```

Puesto que los vectores son linealmente independientes, una base ortonormal de S se calcula mediante

```
>> BO=orth(A)
   BO =
      -0.1526    0.7169    0.5035
      -0.3524    0.4865   -0.7994
      -0.5406    0.1430    0.3254
      -0.7485   -0.4785    0.0388
```

Las columnas obtenidas en la matriz BO forman la base ortonormal buscada. $\triangleright$

Ejercicio 6.7. *Comprobar que los vectores obtenidos a través de* `orth` *en el ejemplo anterior forman una base ortonormal de* S *y que generan el mismo subespacio* S *que* u_1, u_2 *y* u_3 *(Ayuda: para la segunda parte utilizar el comando* `rref` *para escribir las combinaciones lineales adecuadas).*

6.5. Mejor aproximación

Dado un subespacio S de dimensión finita k en un espacio euclídeo E, se sabe que la mejor aproximación de un vector $u \in E$ ($u \notin S$) por vectores de S viene dada por

$$\mathrm{proy}_S(u) = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \cdots + \langle u, u_k \rangle u_k,$$

siendo $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal de S.

Ejemplo 6.10. *Encontrar la mejor aproximación del vector* $p(x) = x^2 - 3$ *por un polinomio del subespacio* $S = \overline{\{1, x\}} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ *con el producto escalar considerado en el Ejemplo 6.7. Realizar una representación geométrica.*

$\lhd$ Primero se debe buscar una base ortonormal del subespacio S utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt

```
>> p1=[0 0 1];
   >> p2=[0 1 0];
   >> u1=p1
   u1 =
        0     0     1
   >> p2eu1=dot(polyval(p2,[0 1 2]),polyval(u1,[0 1 2]))
   p2eu1 =
        3
```

```
>> u1eu1=dot(polyval(u1,[0 1 2]),polyval(u1,[0 1 2]))
u1eu1 =
     3
>> u2=p2-p2eu1/u1eu1*u1
u2 =
     0     1    -1
>> u2eu2=dot(polyval(u2,[0 1 2]),polyval(u2,[0 1 2]))
u2eu2 =
     2
```

Ahora se normalizan los vectores ortogonales encontrados

```
>> v1=u1/sqrt(u1eu1)
   v1 =
            0         0    0.5774
   >> v2=u2/sqrt(u2eu2)
   v2 =
            0    0.7071   -0.7071
```

obteniendo la siguiente base ortonormal de S

$$\mathcal{B}_S = \{v_1(x) = 0{,}5774, v_2(x) = -0{,}7071 + 0{,}7071x\}.$$

A continuación se encuentra la aproximación requerida mediante

$$\text{proy}_S(p) = \langle p, v_1 \rangle v_1 + \langle p, v_2 \rangle v_2$$

a partir de

```
>> p=[1 0 -3];
   >> a1=dot(polyval(p,[0 1 2]),polyval(v1,[0 1 2]))
   a1 =
      -2.3094
   >> a2=dot(polyval(p,[0 1 2]),polyval(v2,[0 1 2]))
```

```
a2 =
    2.8284
>> aprox=a1*v1+a2*v2
aprox =
         0    2.0000   -3.3333
```

Por último, se realiza una representación gráfica a partir de

```
>> ezplot('2*x-10/3',[-1,3])
   >> hold on
   >> ezplot('x^2-3',[-1,3])
   >> grid
```

En la Figura 6.2 se aprecia la función $p(x) = x^2 - 3$ cuya mejor aproximación en el subespacio S es el polinomio $r(x) = 2x - \frac{10}{3}$. Es interesante observar que la aproximación proporciona mejores resultados cerca de los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$, en los que se hace la evaluación para el cálculo del producto escalar. $\triangleright$

Ejercicio 6.8. *Encontrar la mejor aproximación del vector $p(x) = x^2 - 3$ por un polinomio del subespacio $S = \overline{\{1, x\}} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar dado por*

$$\langle p, q\rangle = p(-2)q(-2) + p\,(-1)\,q\,(-1) + p(0)q(0), \qquad p, q \in \mathbb{R}_2[x].$$

Comparar el resultado con la aproximación encontrada en el Ejemplo 6.10.

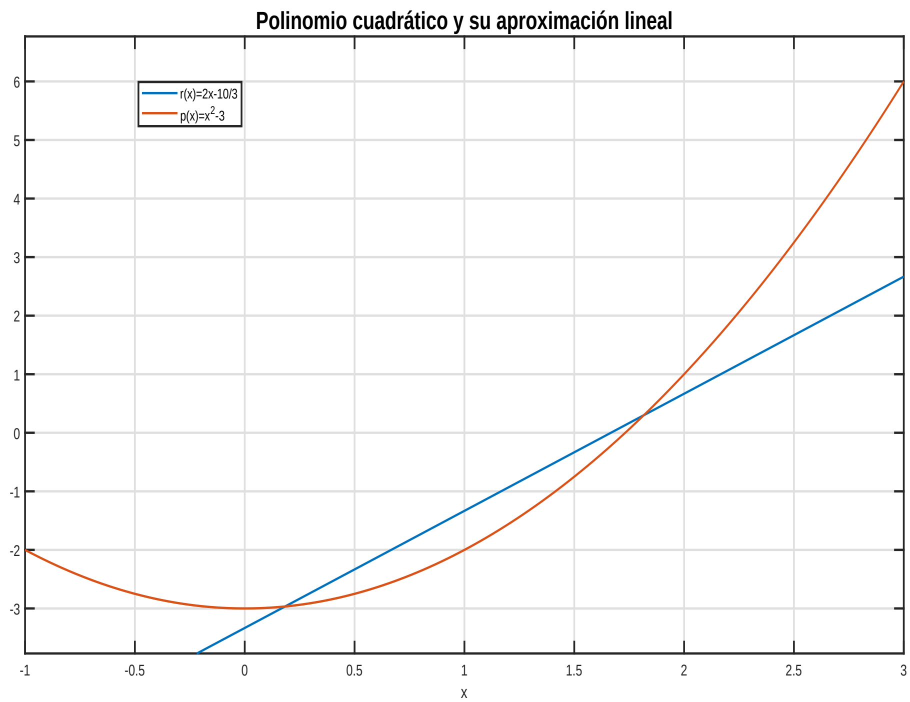

Figura 6.2: Mejor aproximación a $x^2 - 3$ por polinomios de $\overline{\{1, x\}}$.

6.6. Aplicación

Si se desea transmitir, por ejemplo, por la red, cierta información como puede ser un audio (voz), una foto (imagen), datos numéricos, caracteres, etc., es necesario poder manipular dicha información hasta disponerla en un formato que sea el adecuado para poder realizar la transmisión deseada. El concepto básico que se requiere para ello es el de señal.

Una *señal* se define como una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes. Una señal puede estar compuesta por ondas electromagnéticas propagadas a través de un medio de transmisión y, en este caso, se representa por una función de una variable en el tiempo, que conduce la información.

A un **Ingeniero en Telecomunicaciones** le proporcionan como información la señal periódica que se aprecia en la Figura 6.3 y le indican que ha sido construida a partir de una función del tipo

$$f(t) = a_1 \cos(2\pi t) + a_2 \cos(6\pi t) + a_3 \cos(60\pi t) + a_4 \cos(80\pi t), \quad (6.1)$$

que contiene la señal original más ruido, donde este último se deberá eliminar. En la Figura 6.4 se aprecian las cuatro funciones componentes de la señal $f(t)$, que son

$$f_1(t) = \cos(2\pi t),\ f_2(t) = \cos(6\pi t),\ f_3(t) = \cos(60\pi t),\ f_4(t) = \cos(80\pi t).$$

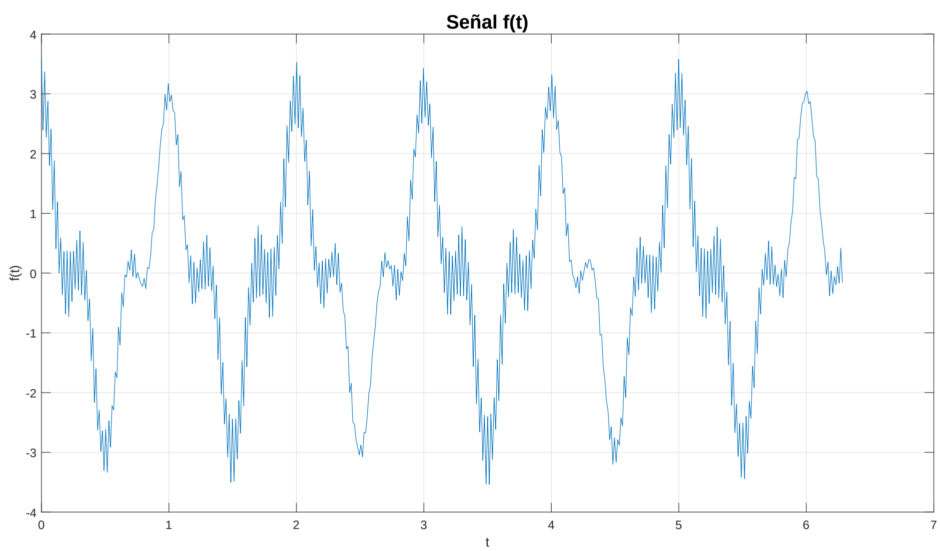

Figura 6.3: Señal $f(t)$ constituida por la señal original más ruido.

Se recuerda que una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *periódica* si existe un número real positivo p, denominado *período*, que satisface $g(t+p) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se pide:

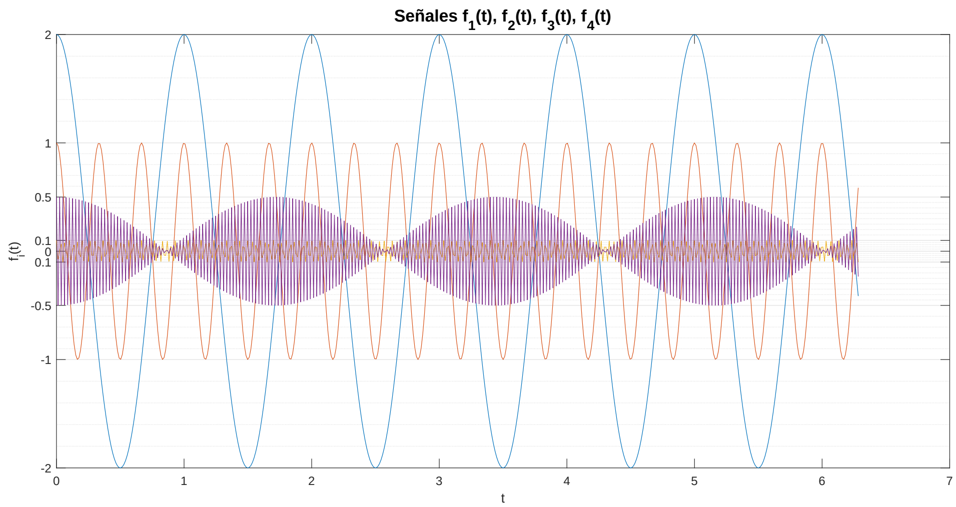

Figura 6.4: Señales que constituyen la señal $f(t)$.

(a) Probar que una función del tipo $g(t) = \cos(\alpha t)$ es periódica de período $\frac{2\pi}{\alpha}$ para cualquier número fijo $\alpha \in]0, +\infty[$.

(b) Encontrar el período de cada una de las cuatro funciones componentes de $f(t)$ e identificar estas cuatro funciones en la Figura 6.4.

(c) Si una señal es del tipo $h(t) = a\cos(t)$ se dice que a es su *amplitud*. A partir de la Figura 6.4, hallar las amplitudes de cada una de las cuatro señales que componen $f(t)$, es decir, los coeficientes a_1, a_2, a_3 y a_4 de la combinación lineal (6.1), ampliando la gráfica si fuese necesario.

(d) Calcular $\langle f, f_i \rangle$ y $\langle f_i, f_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$ siendo el producto escalar dado por

$$\langle g, h \rangle = \int_0^1 g(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Escribir el vector f como combinación lineal de los vectores f_i, para $i = 1, 2, 3, 4$. Comparar con los resultados obtenidos en el apartado anterior.

(e) Se considera el espacio euclídeo real $E := \overline{\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}}$ con el producto escalar del apartado (d). Encontrar dos subespacios S_{bf} y S_{af} de E (cada uno de dimensión 2) tales que $E = S_{bf} \oplus S_{af}$ (Ayuda: Considerar S_{bf} el subespacio de las señales de más baja frecuencia y S_{af} el de las señales de más alta frecuencia).

(f) Probar que S_{bf} y S_{af} son subespacios ortogonales en E e indicar una base ortonormal de cada uno de ellos.

(g) Hallar la mejor aproximación de la señal $f(t)$ en el subespacio S_{bf}. Dibujar en una misma gráfica la señal $f(t)$ y la mejor aproximación hallada.

El estudio previo proporciona una breve introducción al Análisis de Fourier. Este análisis también es de gran importancia por su aplicación en **Ingeniería Civil** como así también en **Administración de Empresas** y en **Geodesia**.

Se utiliza en el cálculo del comportamiento de grandes estructuras, como pueden ser los puentes, ante fuerzas de alta energía, como el viento (este corresponde al ruido del enunciado anterior).

También es necesario realizar el análisis de Fourier para estudiar el impacto de posibles terremotos y otros movimientos de la Tierra (Sismología) sobre grandes construcciones. Es decir, el Análisis de Fourier de la vibración de los materiales permite realizar construcciones que resuenan en frecuencias distintas a las de los terremotos registrados en la zona cercana, y evitar así el colapso de dicha construcción.

Por otra parte, es conocido que esta técnica es útil para el análisis de mercados a la hora de la toma de decisiones en relación a sus carteras de valores estudiando sus fluctuaciones.

Queda por descontado que la **Informática** interviene en todo el proceso, desde los cálculos en los que a veces se requiere de supercomputadores hasta las salidas gráficas de óptima calidad que requieren de estrategias de almacenamiento adecuadas para el manejo del gran volumen de datos del que se puede disponer.

A continuación se responden las preguntas anteriormente planteadas.

(a) Sea $\alpha > 0$ un número real fijo. Por definición, se debe probar que $g\left(t + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = g(t)$, para toda $t \in \mathbb{R}$. En efecto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$g\left(t + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = \cos\left(\alpha\left(t + \frac{2\pi}{\alpha}\right)\right) = \cos\left(\alpha t + 2\pi\right) = \cos\left(\alpha t\right) = g(t),$$

pues $k(t) = \cos(t)$ es una función periódica (básica) de período 2π.

(b) El período de las funciones $\cos(2\pi t), \cos(6\pi t), \cos(60\pi t)$ y $\cos(80\pi t)$ es

$$\frac{2\pi}{2\pi} = 1, \qquad \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2\pi}{60\pi} = \frac{1}{30} \qquad \text{y} \qquad \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40},$$

respectivamente.

Atendiendo a las cuatro funciones en la Figura 6.4 se observa que la gráfica de color azul toma el valor 2 en $t = 0$; a medida que avanza el valor de t, los demás valores son diferentes y, vuelve a tomar el valor 2 en $t = 1$. Esto indica que la función $f_1(t) = \cos(2\pi t)$ corresponde la gráfica de color azul y tiene período 1.

Se observa que la gráfica de la función de color naranja tiene un período que cabe 3 veces en la gráfica de color azul. Esto indica que $f_2(t) = \cos(6\pi t)$ corresponde la gráfica de color naranja y tiene período $\frac{1}{3}$.

De manera semejante, ampliando las gráficas se aprecia que $f_3(t) = \cos(60\pi t)$ corresponde la gráfica de color amarillo y tiene período $\frac{1}{30}$ y $f_4(t) = \cos(80\pi t)$ corresponde la gráfica de color morado y tiene período $\frac{1}{40}$ (la morada "va por dentro" de la amarilla).

(c) Observando la altura sobre el eje vertical se tiene que la amplitud de $f_1(t) = \cos(2\pi t)$ es $a_1 = 2$. La amplitud de $f_2(t) = \cos(6\pi t)$ es $a_2 = 1$. La amplitud de $f_3(t) = \cos(60\pi t)$ es $a_3 = 0'1$. La amplitud de $f_4(t) = \cos(80\pi t)$ es $a_4 = 0'5$.

Luego,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2f_1(t) + f_2(t) + 0'1f_3(t) + 0'5f_4(t) \\ &= 2\cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + 0'1\cos(60\pi t) + 0'5\cos(80\pi t). \end{aligned}$$

(d) Para calcular $\langle f, f_i\rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$, utilizando propiedades del producto escalar, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f, f_i\rangle &= \langle 2\cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + 0'1\cos(60\pi t) + \\ &\quad +0'5\cos(80\pi t), f_i\rangle \\ &= 2\langle\cos(2\pi t), f_i\rangle + \langle\cos(6\pi t), f_i\rangle + 0'1\langle\cos(60\pi t), f_i\rangle + \\ &\quad +0'5\langle\cos(80\pi t), f_i\rangle. \end{aligned}$$

Ahora se deben analizar por separado los "cuatro" productos escalares necesarios para el cálculo. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle\cos(2\pi t), f_i\rangle &= \begin{cases} \langle\cos(2\pi t), \cos(2\pi t)\rangle & \text{si } i = 1 \\ \langle\cos(2\pi t), f_i(t)\rangle & \text{si } i \in \{2, 3, 4\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^1 [\cos(2\pi t)]^2\, \mathrm{d}t & \text{si } i = 1 \\ \int_0^1 [\cos(2\pi t) f_i(t)]\, \mathrm{d}t & \text{si } i \in \{2, 3, 4\} \end{cases} \end{aligned}$$

Se observa que, en general, serán necesarios calcular todos los productos escalares del tipo

$$\int_0^1 [\cos(k_1\pi t)\cos(k_2\pi t)]\, \mathrm{d}t, \qquad \text{para } k_1, k_2 \in \{2, 6, 60, 80\}.$$

Utilizando el entorno simbólico de MATLAB se obtiene

```
>> syms t k1 k2
>> int(cos(k2*pi*t)*cos(k1*pi*t),0,1)
```

```
ans =
piecewise(k1 == k2 | k1 + k2 == 0, sin(2*pi*k2)/(4*k2*pi)+
+ 1/2,...
k1 ~= k2 & k1 + k2 ~= 0, (k1*cos(pi*k2)*sin(pi*k1) - ...
k2*cos(pi*k1)*sin(pi*k2))/(pi*(k1^2 - k2^2)))
```

que proporciona una solución mediante una función a trozos. Si se especifican las características de k_1 y k_2 de ser ambos positivos, se obtiene una solución en forma simplificada

```
>> syms k1 k2 positive
>> int(cos(k2*pi*t)*cos(k1*pi*t),0,1)
ans =
piecewise(k1 == k2, sin(2*pi*k2)/(4*k2*pi) + 1/2, ...
k1 ~= k2, (k1*cos(pi*k2)*sin(pi*k1) - ...
k2*cos(pi*k1)*sin(pi*k2))/(pi*(k1^2 - k2^2)))
```

Más aún, simplificando las expresiones $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_0^1 [\cos(k_1 \pi t)]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

y

$$\int_0^1 [\cos(k_1 \pi t) \cos(k_2 \pi t)] \, \mathrm{d}t = 0 \text{ si } k_1 \neq k_2,$$

que en MATLAB se consigue haciendo

```
>> syms k1 k2 integer
>> int(cos(k2*pi*t)*cos(k1*pi*t),0,1)
ans =
piecewise(k1 == k2 | k1 + k2 == 0, 1/2,
          k1 ~= k2 & k1 + k2 ~= 0, 0)
```

Esto se resume del siguiente modo[1]

$$\langle f_i, f_j\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para todo } i = j \\ 0 & \text{para todo } i \neq j \end{cases}.$$

En particular,

$$\langle \cos(2\pi t), f_i\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in \{2,3,4\} \end{cases}$$

Algo similar ocurre con los demás casos. Es decir, se obtiene

$$\langle f, f_i\rangle = \begin{cases} 2\langle f_1, f_1\rangle & \text{si } i = 1 \\ \langle f_2, f_2\rangle & \text{si } i = 2 \\ 0'1\langle f_3, f_3\rangle & \text{si } i = 3 \\ 0'5\langle f_4, f_4\rangle & \text{si } i = 4 \end{cases}.$$

Por lo tanto, el vector f se escribe como combinación lineal de los vectores f_i para $i = 1, 2, 3, 4$ como sigue

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\langle f, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1(t) + \frac{\langle f, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2(t) + \frac{\langle f, f_3\rangle}{\langle f_3, f_3\rangle} f_3(t) + \frac{\langle f, f_4\rangle}{\langle f_4, f_4\rangle} f_4(t) \\ &= 2f_1(t) + f_2(t) + 0'1 f_3(t) + 0'5 f_4(t), \end{aligned}$$

que coincide con la propia función f. Este resultado era esperable pues se está proyectando la función f sobre cada una de sus "direcciones".

(e) Es claro que hay dos períodos más grandes que corresponden a 1 y $\frac{1}{3}$ y otros dos más pequeños que corresponden a $\frac{1}{30}$ y $\frac{1}{40}$. Al ser las frecuencias los inversos multiplicativos de los períodos, las correspondientes frecuencias son iguales a 1, 3, 30 y 40, siendo las dos primeras las más bajas y las dos segundas las más altas. Esto sugiere definir

$$S_{bf} := \overline{\{f_1(t), f_2(t)\}} \qquad \text{y} \qquad S_{af} := \overline{\{f_3(t), f_4(t)\}}.$$

[1] Observar que este resultado indica que f_i y f_j son ortogonales con respecto al producto escalar dado, aunque no son ortonormales.

En el apartado anterior se ha probado que $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$ es un conjunto ortogonal y, al tratarse de vectores no nulos, es un conjunto linealmente independiente en E. Por lo tanto, los cuatro vectores forman una base ortogonal para E. Se tiene que

$$\dim_{\mathbb{R}}(S_{bf}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(S_{af}).$$

Por la propia definición de E, se tiene que $E = S_{bf} + S_{af}$. Como, además, se cumple que $\dim_{\mathbb{R}}(S_{bf}) + \dim_{\mathbb{R}}(S_{af}) = 2 + 2 = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(E)$ se tiene que $E = S_{bf} \oplus S_{af}$.

(f) El hecho que S_{bf} y S_{af} son subespacios ortogonales de E se ha probado en el apartados anteriores. Una base ortogonal de S_{bf} es $\{f_1(t), f_2(t)\}$ y una de S_{af} es $\{f_3(t), f_4(t)\}$. Para obtener bases ortonormales, basta multiplicar cada vector f_i por $\frac{1}{\|f_i\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle f_i, f_i \rangle}} = \sqrt{2}$. Las bases pedidas son

$$\{\sqrt{2}f_1(t), \sqrt{2}f_2(t)\} \qquad \text{y} \qquad \{\sqrt{2}f_3(t), \sqrt{2}f_4(t)\},$$

respectivamente.

(g) La mejor aproximación de la señal $f(t)$ en el subespacio S_{bf} es la proyección ortogonal de $f(t)$ sobre S_{bf}, es decir,

$$proy_{S_{bf}} f(t) = 2f_1(t) + f_2(t) = 2\cos(2\pi t) + \cos(6\pi t).$$

En la Figura 6.5 se aprecian las gráficas de la señal $f(t)$ y de la mejor aproximación sobre S_{bf} pintadas con el comando `ezplot`.

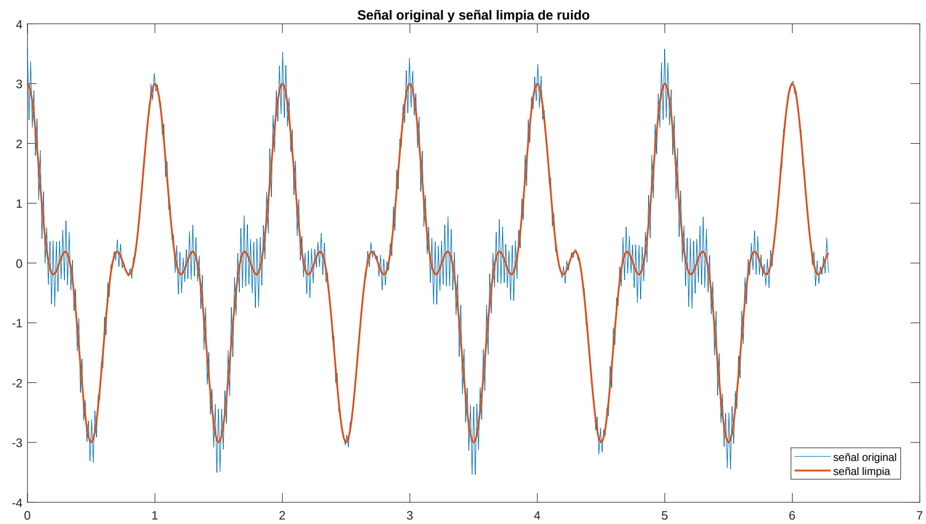

Figura 6.5: Señal original $f(t)$ y su aproximación libre del ruido.

6.7. Ejercicios

(1) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$, se consideran los vectores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

y el producto escalar de Frobenius $\langle A, B\rangle_F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \mathrm{tr}(A^tB)$.

(I) Hallar $\langle A, B\rangle_F$ de tres formas diferentes.

(II) ¿Son A y B ortogonales? En caso negativo, modificar el elemento de la posición $(2, 2)$ de B para que lo sean.

(III) Comprobar que se verifica la ley del paraleloramo para A y B.

(IV) Comprobar que se verifica la identidad de polarización para A y B.

(2) Hallar, si existen, todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los vectores $x = (0, 1, 0)^t$ e $y = (a, 0, 1)^t$ forman un ángulo de 60 grados sexagesimales con respecto al producto escalar del apartado (b) del Ejemplo 6.3. Repetir el ejercicio considerando un ángulo recto.

(3) Encontrar la mejor aproximación del vector $f(x) = x^2$ por un polinomio trigonométrico en $[-\pi, \pi]$ del tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \operatorname{sen}(2x)$$

con el producto escalar dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x, \qquad f, g \in \mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}.$$

Realizar una representación gráfica de la función f y su aproximación.

Bibliografía

[1] C. Badesa, I. Jané, R. Jansana, *Elementos de lógica formal*, Ariel Filosofía, Barcelona, 1998.

[2] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra Lineal y Geometría*, Editorial Reverté, Barcelona, 2000.

[3] J. de Burgos, *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*, Tercera Edición, McGrawHill, Madrid, 2006.

[4] S.H. Friedberg, A.J. Insel, L.E. Spence, *Elementary Linear Algebra*, Pearson Education, Londres, 2008.

[5] E. Gentile, *Anillo de polinomios*, Editorial Docencia, Buenos Aires, 1980.

[6] A. Gilat, J.A. Macías Iglesias, *Matlab. Una introducción con ejemplos prácticos*, Editorial Reverté, 2006.

[7] S.I. Grossman, J.J. Flores Godoy, *Álgebra Lineal*, Séptima edición, McGrawHill, Madrid, 2012.

[8] P.R. Halmos, *Teoría intuitiva de los conjuntos*, Octava edición, Editorial Continental, México, 1973.

[9] E. Hernández Rodríguez, M.J. Vázquez Gallo, M.A. Zurro Moro, *Álgebra Lineal y Geometría*, Tercera edición, Pearson Education, Madrid, 2012.

[10] I. Herstein, D. Winter, *Matrix Theory and Linear Algebra*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1988.

[11] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Segunda Edición, Prentice-Hall, Londres, 1971.

[12] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra II*, Springer, Berlín, 1953.

[13] G. Jerónimo, J. Sabia, S. Tesauri, *Álgebra Lineal*, Fascículo 2, Cursos de grado, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 2008.

[14] C. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, Fundamenta Mathematicae 2, 161–171, 1921.

[15] S. Lang, *Linear Algebra*, Segunda edición, Addison-Wesley Publishing Company, Londres, 1972.

[16] D.C. Lay, S.R. Lay, J.J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Quinta edición, Pearson, Madrid, 2016.

[17] K.T. Leung, *Linear Algebra and Geometry*, Hong Kong University Press, Hong Kong, 1974.

[18] L. Merino, E. Santos, *Álgebra Lineal con métodos elementales*, Thomson, España, 2006.

[19] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Nueva York, 2010.

[20] H. Moore , *MATLAB for Engineers*, Pearson, 2018.

[21] D. Poole, *Linear Algebra: A Modern Introduction*, Segunda edición, Thomson, 2006.

[22] F. Puerta, Red ALAMA, 2011, http://www.red-alama.es/wp-content/uploads/2011/04/isomorfismos-canónicos.pdf.

[23] J. Sancho San Román. Álgebra Lineal y Geometría, Octavio y Félez, Zaragoza, 1974.

[24] Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Cuarta edición, Wellesley -Cambridge Press, 2009.

[25] N. Thome, Álgebra Lineal y Geometría I, Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, 2023.

[26] N. Thome, Álgebra Lineal y Geometría I, Problemas resueltos, Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, 2023.

[27] T. Yuster, The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof, Mathematics Magazine, Mathematical Association of America, 57, 2, 93–94, 1984.

Aspectos históricos y divulgativos

[28] *El libro de las Matemáticas*. Editorial Akal, Madrid, 2020.

[29] A. Doxiadis, *El tío Petris y la conjetura de Goldbach*, Zeta, 2009.

[30] C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, Dover, Nueva York, 2004.

[31] M. Kline, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[32] D. Luzardo, A.J. Peña. *Historia del Álgebra Lineal hasta los albores del Siglo XX*, Divulgaciones Matemáticas, 14, 2, 153–170, (2006).

[33] K. Ríbnikov. *Historia de las Matemáticas*, Editorial MIR, Moscú, 1974.

[34] I. Stewart, *Historia de las Matemáticas: En los último 10000 años*, Segunda edición, Crítica, Barcelona, 2009.

[35] F. Vera, *Veinte matemáticos célebres*, Compañía General Fabril Editora, Buenos Aires, 1964.