Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Álgebra Lineal y Geometría I
Problemas resueltos

Néstor Thome Coppo

www.smm.org.mx

Serie: Textos. Vol. 26 (2023)

ISBN:

Álgebra Lineal y Geometría I
Problemas resueltos

Néstor Thome Coppo

Catedrático de Universidad
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València, España
njthome@mat.upv.es

Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Índice general

Prólogo

Este libro contiene una relación de ejercicios resueltos correspondientes al temario desarrollado por el propio autor en el libro Álgebra Lineal y Geometría I, Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, 2023, destinado a estudiantes de un primer curso universitario del doble grado en Matemáticas con diferentes Ingenierías; se utiliza en la Universitat Politècnica de València.

Se presentan las soluciones de los ejercicios planteados o bien se dan las indicaciones para que, al completar pequeños cálculos que se indican, los ejercicios queden totalmente resueltos.

Todas las notaciones y referencias a resultados como teoremas, proposiciones, corolarios, etc. que se hacen en el presente libro son en relación al libro de teoría citado anteriormente.

Se ha intentado que los ejercicios abraquen los diferentes aspectos en los que un estudiante debe iniciarse. Se plantean desde ejercicios numéricos básicos para afianzar cuestiones teóricas hasta otros donde se deben relacionar conceptos. Otros aspectos, más bien teóricos, se plantean en ejercicios donde se deben realizar demostraciones siguiendo las técnicas aplicadas en algunos resultados similares en el libro de teoría. A medida que el estudiante aprenda la asignatura, irá consolidando los métodos de demostración que le serán útiles a lo largo de toda su carrera.

El temario del libro mencionado ha sido estructurado en un total de 11 capítulos.

En el capítulo 1 se presentan preliminares, conceptos básicos necesarios para comprender la forma en que se desarrolla, se piensa, y se debe proceder en Matemáticas. Una breve introducción a los métodos de demostración, a la teoría de conjuntos, al concepto de función y nociones elementales de estructuras algebraicas.

En el capítulo 2 se hace un repaso de cuestiones conocidas de matrices, se establecen las definiciones y notaciones a utilizar, siendo importante poner el enfoque, para una buena formación del estudiante, en las técnicas de demostración utilizadas para probar las propiedades. Es probable que, además de la definición de matriz, los únicos hechos novedosos sean la forma de operar con matrices particionadas en bloques y la generalización, a matrices de tamaños arbitrarios, de algunos resultados conocidos.

En el capítulo 3 se sistematiza el método de eliminación gaussiana, se prueba con detalle que dicho método funciona y, a través de dicho método, se realiza la clasificación de los sistemas lineales.

El capítulo 4 está dedicado al estudio de la forma escalonada reducida de una matriz, garantizando su existencia y unicidad, lo que permitirá establecer el concepto de rango de una matriz.

En el capítulo 5 se aborda la definición, propiedades y algunas caracterizaciones del concepto de matriz inversa.

El capítulo 6 comienza con el estudio de matrices elementales y su utilización para el cálculo de la inversa (método de Gauss-Jordan). Tras establecer caracterizaciones de la equivalencia de matrices, equivalencia por filas y equivalencia por columnas, se prueba que determinan relaciones de equivalencia y se encuentra la forma normal de Hermite (como formas canónicas de clases de equivalencia en la equivalencia de matrices) y el rango (como un invariante[1] de esta relación).

En el capítulo 7 se aborda el concepto de determinante, introducido de forma recursiva. Se establecen y se demuestran sus propiedades por el método de inducción. Se analiza su relación con la existencia de la matriz inversa y se estudia la fórmula de Cauchy-Binet para el determinante de un producto de matrices. Como aplicaciones se demuestran la regla de Cramer, la fórmula que

[1] En realidad, como un conjunto completo de invariantes.

permite calcular la inversa de una matriz y se estudia la forma de utilizarlo para determinar el rango de una matriz. También se presentan aplicaciones a tipos concretos de matrices (por bloques, de Vandermonde, de compañía).

En el capítulo 8 se aborda uno de los temas centrales del Álgebra Lineal: los espacios vectoriales. Una vez definidos, se estudian los subespacios, las combinaciones lineales, subespacios generados y operaciones con subespacios. Una segunda parte del tema aborda los sistemas de generadores, la dependencia/independencia lineal, y el concepto de base que permite definir la dimensión de un espacio vectorial.

Con la intención de destacar la verdadera importancia que la introducción de coordenadas le confiere al tema de espacios vectoriales, se ha preferido dedicar el capítulo 9 completo a este tema, donde se caracterizan los espacios vectoriales isomorfos a partir de la dimensión, y se presenta este concepto como un invariante[2] de una relación de equivalencia adecuada. Se aplica la teoría desarrollada previamente para determinar la estructura del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, encontrando las ecuaciones paramétricas y cartesianas de un subespacio.

Otro capítulo importante es el capítulo 10, donde se estudian los espacios euclídeos. Se introducen los espacios vectoriales con producto escalar y sobre ellos el concepto de norma y distancia inducidas y ángulo entre vectores. Se desarrolla con detalle el apartado de ortogonalidad y el método de Gram-Schmidt para el cálculo de bases ortogonales, con lo que se prueba la existencia de bases ortogonales en espacios euclídeos de dimensión finita. Por último, se caracterizan los espacios euclídeos de dimensión finita y se prueba que los productos escalares están determinados por las matrices de Gram.

El capítulo 11 está dedicado al estudio de los cuatro subespacios fundamentales asociados a una matriz. Se estudian sus dimensiones, se prueba el Teorema fundamental del rango y su relación con la equivalencia de matrices. Se muestra cómo los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ pueden ser representados a partir de los cuatro subespacios fundamentales asociados a una matriz

[2]En realidad, como un conjunto completo de invariantes.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en el llamado Teorema fundamental del Álgebra Lineal. El libro finaliza con un resultado que resume más de 20 caracterizaciones, estudiadas en capítulos previos, de la existencia de la inversa de una matriz, hecho clave en toda la Teoría de Matrices y en el Álgebra Lineal en general.

Quiero expresar mi agradecimiento a todos los alumnos que, con sus comentarios y sugerencias, han permitido mejorar las versiones previas a esta.

Se agradecerá cualquier sugerencia o comentario que sea enviada al correo electrónico `njthome@mat.upv.es`.

El autor.

No es porque las cosas sean difíciles por lo que no nos atevemos;
sino que por no atrevernos se hacen difíciles. *Séneca.*

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$i\,\mathbb{R}$	conjunto de los números imaginarios puros
$\mathbb{I}_k = \{1, 2, \dots, k\}$	intervalo natural inicial
$\emptyset$	conjunto vacío
$:$ o bien $/$	tal que
$\in$	pertenece a
$\sim$	no
$\exists$	existe
$\forall$	para todo
$\wedge$	y
$\vee$	o (incluyente)
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\oplus$	suma directa
$\perp$	ortogonal
$\oplus^{\perp}$	suma directa ortogonal

Capítulo 1

Preliminares

Índice

1.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Lógica proposicional
- Proposiciones
- Métodos de demostración
- Funciones proposicionales
- Conjuntos y relaciones
- Relaciones de equivalencia
- Aplicación o función
- Números naturales. Principio de inducción
- Estructuras algebraicas

1.2. EJERCICIOS

(1) Demostrar que las siguientes equivalencias son ciertas comprobando que son **tautologías**, es decir, sus tablas de verdad proporcionan siempre valores de verdad V, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes.

(a) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ (doble negación),

(b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (ley de De Morgan),

(c) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ley de De Morgan),

(d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (la implicación en términos de $\sim$ y $\vee$),

(e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (directo y contrarrecíproco son equivalentes),

(f) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ (negación de una implicación),

(g) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (modus ponens),

(h) $(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \sim p$ (modus tollens),

(i) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (silogismo hipotético).

(2) Demostrar que la siguiente proposición es una **contradicción**, es decir, su tabla de verdad proporciona siempre valores de verdad F, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes.

(a) $p \wedge \sim p$.

(b) $p \Leftrightarrow \sim p$.

(3) Escribir en símbolos las funciones proposicionales:

(a) "La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es un número (entero) impar",

(b) "El producto de un número racional no nulo por uno irracional es un número irracional", y demostrarlas. (Ayuda: Para la segunda suponer conocido que el producto de dos números racionales es un número racional).

(4) Se consideran los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x^3 - x = 0\} \quad \text{y} \quad C = \{-1, 0, 1\}.$$

(I) Probar que $A \subseteq B$. ¿Es cierto que $A \subset B$? Justificar.

(II) ¿Es cierto que $C \subset A$? ¿Y que $B = C$? Justificar.

(5) Mostrar que $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

(6) Mostrar que $A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

(7) Demostrar que los siguientes conjuntos son iguales:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\} \qquad \text{y} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \text{ es par}\}.$$

¿Produce algún problema el caso $x^2 = 2$, que es par, para que se cumpla $B \subseteq A$? Justificar.

(8) Demostrar que:

(I) El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto A, es decir, $\emptyset \subseteq A$, para todo conjunto A.

(II) Todo conjunto A está incluido en el conjunto universal U, es decir, $A \subseteq U$, para todo conjunto A.

(III) El conjunto vacío es único. (Ayuda: Supóngase que, además de $\emptyset$, hay otro conjunto vacío y probar que deben ser iguales).

(IV) Si $A \subseteq \emptyset$ entonces $A = \emptyset$.

(9) Probar que si U denota el conjunto universal, se cumple que:

$$A \cap A' = \emptyset \qquad \text{y} \qquad A \cup A' = U.$$

(10) Dados los conjuntos A y B, demostrar que se cumple que:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A.$$

Enunciar y demostrar una propiedad similar cambiando la intersección por la unión.

(11) Demostrar las leyes de De Morgan: El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos. Enunciar y demostrar la propiedad dual para el complemento de la intersección.

(12) Dados los conjuntos A y B, demostrar que: $A \subseteq B$ implica $B' \subseteq A'$.

(13) Dados los conjuntos A y B, demostrar que: $A - B = A \cap B'$.

(14) Sean A y B dos conjuntos disjuntos tales que $A \cup B = U$. Probar que $B = A'$.

(15) Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$B = A \cup (B - A) \qquad \text{con} \qquad A \cap (B - A) = \emptyset.$$

(16) Sean A y B dos conjuntos tales que $a, c \in A$ y $b, d \in B$. Demostrar que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Concluir que si $A = B$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$ si y sólo si $a \neq b$.

(17) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se definen las relaciones binarias dadas por:

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\},$$

$$R_2 = R_1 \cup \{(1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

y

$$R_3 = A \times A.$$

Comprobar que, en todos los casos, se trata de una relación de equivalencia. Determinar las clases de equivalencia, el conjunto cociente y la partición que se produce en A en cada caso.

(18) Sea A un conjunto no vacío y R una relación de equivalencia en A. Demostrar que si $a, b \in A$ entonces aRb si y sólo si a y b pertenecen a una misma clase de equivalencia.

(19) Escribir las familias $\bigcup_{i \in I} A_i$ siendo $\{A_i\}_{i \in I}$ donde $A_i = \{i + 2\}$, con $i \in I$, son conjuntos unitarios (es decir, formados por un solo elemento). Considerar los siguientes casos:

(I) $I = \{1, 2\}$,

(II) $I = \{1, 2, \dots, n\}$,

(III) $I = [0, 1]$.

(20) Analizar si las relaciones R_1, R_2 y R_3 definidas en cada uno de los siguientes apartados son o no una relación de equivalencia. En caso afirmativo, encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente en cada caso.

(a) Para $x, y \in \mathbb{R}$, sea $x\ R_1\ y \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 0$,

(b) Para $x, y \in \mathbb{R}$, sea $x\ R_2\ y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$,

(c) Para $x, y \in \mathbb{Z}$, sea $x\ R_3\ y \Leftrightarrow y - x$ es un número par.

(21) Probar que la relación de equipolencia definida entre vectores fijos del plano ordinario es una relación de equivalencia.

(22) Proporcionar un contraejemplo de dos funciones f y g que permitan constatar que, en general, $g \circ f \neq f \circ g$.

(23) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la ley $f(x) = 2x - 3$. Demostrar que f es biyectiva y calcular su inversa f^{-1}. Comprobar que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$ y que $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

(24) Analizar la existencia de la función inversa f^{-1} de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la ley $f(x) = x^2$. En caso de existir su inversa calcularla, y si no existe, restringir el dominio y el codominio de f a subconjuntos adecuados de $\mathbb{R}$ en los que exista su inversa y calcularla.

La **restricción** de la función $f : Dm(f) \to Im(f)$ a un subconjunto $S \subset Dm(f)$ suele denotarse por $f|_S$ y es la función $f|_S : S \to Im(f)$ definida por $f|_S(x) = f(x)$ para todo $x \in S$.

(25) Demostrar que:

(a) La composición de dos funciones inyectivas es inyectiva.

(b) La composición de dos funciones sobreyectivas es sobreyectiva.

(c) La composición de dos funciones biyectivas es biyectiva.

(26) Comprobar que los conjuntos K_1, K_2 y K_3 del Ejemplo 1.21 son inductivos en $\mathbb{R}$.

(27) Probar que la intersección de la familia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto inductivo de $\mathbb{R}$ siendo $K_n = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} < x\}$. ¿Es $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{N}$? Justificar.

(28) Demostrar, por inducción, que:

(a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1) = n(n+2), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1) = n(2n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(f) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, siendo $x \in \mathbb{R}$ un número positivo fijo, $x \neq 1$.

(29) Probar que la función $h : \{0\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$h(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \text{para} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

es biyectiva. Hallar h^{-1}. ¿Alcanza con que h sea biyectiva para concluir que $\mathbb{Z}$ es un conjunto infinito numerable? Justificar.

(30) Probar que $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos (infinitos).

(31) Mostrar que los conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con las operaciones habituales son anillos conmutativos con unidad (infinitos).

(32) Demostrar que el conjunto $2 \cdot \mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones habituales de $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo sin unidad (infinito).

(33) Demostrar que el elemento neutro en un grupo es único.

(34) Demostrar que, para cada elemento g de un grupo G, sólo existe un elemento inverso de g en G.

(35) Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo y 0_A es el neutro de la adición probar que $0_A \cdot a = 0_A$, $\forall a \in A$.

(36) Se considera el conjunto $A = \{a, b\}$ con $a \neq b$ y las operaciones binarias definidas mediante las tablas

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	a	b

Demostrar que $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad (finito). ¿Es un cuerpo? Justificar la respuesta. Al estudiar Estructuras Algebraicas en profundidad, se prueba que este conjunto se comporta como $\mathbb{Z}_2$.

(37) Se considera el conjunto $K = \{a, b, c\}$ con $a \neq b \neq c \neq a$ y las operaciones binarias definidas mediante las tablas

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Demostrar que $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo. Al estudiar Estructuras Algebraicas con mayor detalle, se prueba que este conjunto se comporta como $\mathbb{Z}_3$.

(38) Sea A un conjunto no vacío. Se considera el conjunto

$$\mathcal{B}(A) = \{f/f : A \to A \text{ es una aplicación}\}$$

de todas las aplicaciones de A en sí mismo. Probar que $(\mathcal{B}(A), \circ)$ es un grupo no abeliano, siendo $\circ$ la composición de aplicaciones.

1.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) Utilizar las tablas de verdad de los conectivos básicos, modus ponens, etc. Son necesarios 2, 4 u 8 valores de verdad, dependiendo de que aparezcan una, dos o tres proposiciones, respectivamente.

(2) Similar al anterior.

(3) (a) $(\forall n \in \mathbb{N}), P(n) : ((n+1)^2 - n^2 \in \mathbb{Z}) \wedge ((n+1)^2 - n^2$ es impar). Obs.: Al no especificar si la diferencia debe ser del mayor menos el menor de los naturales o al revés (pudiendo quedar $n^2 - (n+1)^2$), el resultado puede ser un número entero negativo, no necesariamente un número natural. Dem.: Sea $n \in \mathbb{N}$. Es claro que la diferencia de cuadrados es un número entero pues se trata de sumar, restar y multiplicar números naturales. Al desarrollar el cuadrado y cancelar términos se obtiene $(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$, que es claramente impar.

(b) $(\forall q \in \mathbb{Q})(\forall r \in \mathbb{I}), Q(q, r) : q \neq 0 \Rightarrow qr \in \mathbb{I}$. Dem.: Sean $q \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{I}$ tales que $q \neq 0$. Se debe probar que $qr \in \mathbb{I}$. Suponiendo, por reducción al absurdo, que $qr \notin \mathbb{I}$, debe ser $qr \in \mathbb{Q}$. Como $q \neq 0$, q tiene inverso en el cuerpo $\mathbb{Q}$. Es decir, existe $q^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$. Por ser $q^{-1} \in \mathbb{Q}$ y $qr \in \mathbb{Q}$, al utilizar la ayuda se tiene que su producto cumple $q^{-1}(qr) \in \mathbb{Q}$. Aplicando la propiedad asociativa en $\mathbb{Q}$ y que 1 es el neutro de $\mathbb{Q}$ se tiene: $q^{-1}(qr) = (q^{-1}q)r = 1r = r \in \mathbb{Q}$, de donde se tiene que $r \in \mathbb{Q}$, en contra de la hipótesis. Este absurdo proviene de suponer que $qr \in \mathbb{Q}$, con lo cual se ha probado que $qr \notin \mathbb{Q}$, es decir $qr \in \mathbb{I}$.

(4) (I) Primero se prueba que $A \subseteq B$. En efecto, sea $a \in A$. Luego, $a \in \mathbb{Z}$ y $a^2 = 1$. Entonces $a = 1$ ó $a = -1$. Para ver que $a \in B$ se deben analizar dos casos: (i) Si $a = 1$ entonces $a^3 - a = 1^3 - 1 = 0$, de donde $a \in B$. (ii) Si $a = -1$ entonces $a^3 - a = (-1)^3 - (-1) =$

$-1+1=0$, de donde $a \in B$. Por lo tanto, $A \subseteq B$. Además, $A \subset B$ pues se observa claramente que $0 \in B$ y $0 \notin A$.

(II) C no es un subconjunto propio de A (pues $0 \in C$ y $0 \notin A$) y $B = C$ (pues ambos conjuntos tienen los mismos elementos, basta calcular las raíces del polinomio $x^3 - x$).

(5) Utilizando las definiciones de igualdad e inclusión de conjuntos se tiene: $A = B \Leftrightarrow ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

(6) $A \subset B \Leftrightarrow ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B : y \notin A)) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (A \neq B))$.

(7) Para probar que $A = B$ se debe probar $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
$\underline{A \subseteq B}$: Si x es par entonces x^2 es par (Ejemplo 1.11).
$\underline{B \subseteq A}$: si x^2 es par entonces x es par. En efecto, si por reducción al absurdo fuese x impar entonces $x = 2k+1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Al ser $z = 2k^2+2k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $x^2 = 2z+1$. Es decir, x^2 es impar, que es una contradicción. Luego, x es par.

No produce problemas pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

(8) (I) Se cumple vacuamente.

(II) Sigue directamente de la definición de conjunto universal.

(III) Si $\emptyset'$ fuese otro conjunto vacío, se debe probar que $\emptyset = \emptyset'$, es decir $((x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset') \wedge ((x \in \emptyset' \Rightarrow x \in \emptyset))$. Ambas implicaciones se cumplen vacuamente (O bien, aplicando el apartado (I)).

(IV) Por hipótesis, $A \subseteq \emptyset$. Por el primer apartado, siempre vale que $\emptyset \subseteq A$. Luego, $A = \emptyset$.

(9) Por el primer apartado, $\emptyset \subseteq A \cap A'$. Para ver que $A \cap A' \subseteq \emptyset$, sea $x \in A \cap A'$. Entonces $x \in A$ y $x \in A'$. Luego, $x \in A$ y $x \notin A$, es decir, $x \in \emptyset$ puesto que es estas dos últimas condiciones proporcionan una definición (alternativa) de conjunto vacío.

Por el segundo apartado, es evidente que $A \cup A' \subseteq U$. Para ver que $U \subseteq A \cup A'$, sea $x \in U$. Es claro que pueden ocurrir las opciones disjuntas $x \in A$ ó $x \notin A$. Luego, $x \in A$ ó $x \in A'$, es decir, $x \in A \cup A'$.

(10) Suponer que $A \subseteq B$. Para establecer que $A \cap B = A$ se debe probar que $A \cap B \subseteq A$ y $A \subseteq A \cap B$. La primera es clara pues si $x \in A \cap B$, en particular, $x \in A$. Ahora, si $x \in A$, por hipótesis, como $A \subseteq B$, se tiene que $x \in B$. Luego, $x \in A \cap B$. Así, $A \subseteq A \cap B$.

Recíprocamente, si $A \cap B = A$, se debe probar que $A \subseteq B$. En efecto, si $x \in A$, al ser $A = A \cap B$, se tiene que se tiene que $x \in A \cap B$, en particular, $x \in B$ con lo cual $A \subseteq B$.

La propiedad dual es: $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

(11) Por definición de unión, se recuerda que $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ó $x \in B$. Su negación queda $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ y $x \notin B$. Se debe probar que $(A \cup B)' = A' \cap B'$. Para ver que $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$, sea $x \in (A \cup B)'$. Entonces $x \notin A \cup B$. Por la observación anterior, $x \notin A$ y $x \notin B$, lo que equivale a $x \in A'$ y $x \in B'$. Por definición de intersección, $x \in A' \cap B'$. La otra inclusión se prueba de forma similar; incluso pueden escribirse todos los pasos mediante un $\Leftrightarrow$ y probar las dos inclusiones de forma simultánea.

La propiedad dual establece que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

(12) Suponer que $A \subseteq B$. Sea $x \in B'$. Por definición, $x \notin B$. Por hipótesis se tiene que $x \notin A$, pues si por reducción al absurdo se tuviese que $x \in A \subseteq B$, se tendría $x \in B$, que es una contradicción. Luego, $x \in A'$ y, por tanto $B' \subseteq A'$.

(13) $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A \cap B'$.

(14) Se supone que $A \cup B = U$ y $A \cap B = \emptyset$. Se debe probar que $B = A'$. En efecto, si $x \in B$ es claro que $x \notin A$ pues si, además, $x \in A$ entonces $x \in A \cap B = \emptyset$, lo que es una contradicción. Luego, $x \in A'$, con lo que

$B \subseteq A'$. Para probar la otra inclusión, si $x \in A'$ entonces $x \notin A$. Como $x \in U = A \cup B$ entonces debe ocurrir que $x \in B$ (puesto que $x \notin A$). Así, $A' \subseteq B$.

(15) Es claro que $A \cap (B - A) = \emptyset$ puesto que si $x \in A$ y $x \in B - A$ entonces $x \in A$ y $x \notin A$, lo cual es imposible. Sabiendo que $A \subseteq B$ se debe probar que $B = A \cup (B - A)$. En efecto, si $x \in B$ entonces puede ocurrir que: (a) $x \in A$ o bien (b) $x \notin A$. En el caso (a), es claro que $x \in A \cup (B - A)$. En el caso (b), al ser $x \in B$ y $x \in A'$ se tiene que $x \in B - A$, con lo cual $x \in A \cup (B - A)$. Por tanto, $B \subseteq A \cup (B - A)$. Para la otra inclusión, sea $x \in A \cup (B - A)$. Luego, $x \in A$ ó $x \in B - A$. De la primera opción, $x \in A \subseteq B$, con lo que $x \in B$. De la segunda, $x \in B - A$, con lo cual $x \in B$. En ambos casos, $x \in B$, de donde $A \cup (B - A) \subseteq B$.

(16) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow (\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$. La conclusión pedida se obtiene utilizando el método del contrarrecíproco.

(17) Se deben verificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva para cada relación. Las clases de equivalencia para R_1 son $[a] = \{a\}$, $\forall a \in A$. Es decir, $A/R_1 = \{[1], [2], [3], [4], [5]\}$. Las clases de equivalencia para R_2 son $[1] = \{1, 3, 4\}$, $[2] = \{2, 5\}$. Es decir, $A/R_2 = \{[1], [2]\}$. Las clases de equivalencia para R_3 son $[1] = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$. Es decir, $A/R_3 = \{[1]\}$.

(18) Sean $a, b \in A$ tales que aRb. Se debe probar que existe $c \in A$ tal que $a, b \in [c]$. En efecto, como aRb, por la simetría, bRa. Por la reflexividad, aRa. Así aRa y bRa, de donde $a, b \in [a]$. Basta tomar $c = a$. Recíprocamente, si $a, b \in [c]$ para algún $c \in A$ se tiene que aRc y bRc. Por simetría, aRc y cRb. La transitiviad garantiza que aRb.

(19) $A_1 \cup A_2 = \{3\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{3, 4, \ldots, n + 2\}$, $\bigcup_{i \in [0,1]} A_i = [2, 3]$.

(20) (a) R_1 no lo es (contraejemplo: $(1, 1) \notin R_1$). (b) R_2 lo es ($x\ R_2\ x$ pues $x^2 - x^2 = 0$; si $x\ R_2\ y$ entonces $x^2 - y^2 = 0$, con lo cual $y^2 - x^2 = 0$,

es decir, $y\ R_2\ x$; si $x\ R_2\ y$ e $y\ R_2\ z$ entonces $x^2 - y^2 = 0$ e $y^2 - z^2 = 0$. Sumando miembro a miembro, $x^2 - z^2 = 0$ de donde $x\ R_2\ z$). Clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}$: $[x] = \{x, -x\}$, $\mathbb{R}/R_2 = \{[x] : x \geq 0\}$. (c) R_3 lo es ($x\ R_3\ x$ pues $x - x = 0$, que es par; si $x\ R_3\ y$ entonces $y - x$ es par, con lo cual $x - y$ es par, es decir, $y\ R_3\ x$; si $x\ R_3\ y$ e $y\ R_3\ z$ entonces $y - x$ y $z - y$ son pares, de donde su suma también, es decir, $z - x$ es par, con lo cual $x\ R_3\ z$). Clases de equivalencia: $[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, $[1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$; $\mathbb{Z}/R_3 = \{[0], [1]\}$.

(21) Se deben verificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva para la relación binaria: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen mismo módulo, dirección y sentido, lo cual es inmediato.

(22) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = x^2$.

(23) <u>f es inyectiva</u>: Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ satisfacen $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$, de donde $2x_1 = 2x_2$ y, por tanto, $x_1 = x_2$. <u>f es sobreyectiva</u>: Dado $y \in \mathbb{R}$, se debe buscar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, es decir, de modo que $y = 2x - 3$. Despejando, $x = \frac{y+3}{2}$. Luego, f es biyectiva, con lo que f admite función inversa, cuya expresión es $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x+3}{2}) = 2\frac{x+3}{2} - 3 = x = id_{\mathbb{R}}(x)$. La otra igualdad es similar.

(24) f no es inyectiva: $f(1) = 1 = f(-1)$ con $1 \neq -1$. Luego, f no es biyectiva. Además, f no es sobreyectiva: Dado $y = -1$, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$. Restringiendo el dominio $Dm(f) = \mathbb{R}$ al intervalo $S = [0, +\infty[$ y el codominio $Im(f) = \mathbb{R}$ al intervalo $S = [0, +\infty[$, se prueba (usando la definición) que la restricción $f : S \to S$ es inyectiva y sobreyectiva. Además, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

(25) Los 3 apartados son inmediatos por definición.

(26) $1 \in \mathbb{R}$ y es conocido que si $k \in \mathbb{R}$ entonces $k + 1 \in \mathbb{R}$, luego $K_1 = \mathbb{R}$ es inductivo. $1 \in K_2$ y si $k \in K_2$ entonces $k > \frac{1}{2}$ con lo cual $k + 1 > \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$,

es decir, $k+1 \in K_2$. Luego K_2 es inductivo. Para K_3, es similar a la anterior.

(27) $1 \in K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $1 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Si $k \in \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ entonces $k \in K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $k = 1$ o $k > \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$. Así, $k+1 = 2$ o $k+1 > \frac{5}{2} - \frac{1}{n+1} > \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$. En ambos casos, $k+1 \in K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $k+1 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, lo que prueba que dicha intersección es un conjunto inductivo. Además, $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \mathbb{N}$ pues $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ y $K = \{1,2,3,4,5\} \cap [6,+\infty] \neq K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y K es inductivo.

(28) (a) Si $n = 1$, es claro que $\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, con lo que se cumple la igualdad para $n = 1$. Sea $n > 1$ y suponer que la igualdad se cumple para el natural n, es decir, la hipótesis de inducción garantiza que $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (para ese n). Se debe probar que ia igualdad se cumple para $n+1$, es decir, se debe establecer la igualdad $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{n+1}[n + \frac{1}{n+2}] = \frac{1}{n+1}[\frac{n(n+2)+1}{n+2}] = \frac{1}{n+1}[\frac{n^2+2n+1}{n+2}] = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^2}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$. Por el principio de inducción, se concluye que la igualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando el mismo procedimiento que el anterior, para probar (b) y (c) se deben hallar las raíces de un polinomio de segundo grado y factorizarlo.

(d) Como en (a), primero factorizar, luego operar y hallar las raíces de un polinomio de segundo grado y factorizarlo.

(e) Como en (a), primero factorizar, luego operar y utilizar una identidad notable.

(f) Sumar fracciones.

(29) $h(n_1) = h(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$: se deben analizar 4 casos combinando las opciones n_1 y n_2 pares o impares (dos casos no se pueden dar). Para ver

que h es sobreyectiva, pintar en un eje los números $\{0\} \cup \mathbb{N}$, en otro $\mathbb{Z}$ y unir con flechas de acuerdo a la definición de h. Observar en cuáles se transforman los números pares y en cuáles los impares. Sea $z \in \mathbb{Z}$. Para hallar $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ tal que $h(n) = z$ distinguir los casos: $z \geq 1$ (de $z = \frac{n+1}{2}$ se obtiene $n = 2z - 1$) y $z < 1$ (de $z = -\frac{n}{2}$ se obtiene $n = -2z$). En definitiva, $h^{-1}(z) = \begin{cases} -2z, & \text{si } z < 1 \\ 2z - 1, & \text{si } z \geq 1 \end{cases}$ para $z \in \mathbb{Z}$. Para concluir que $\mathbb{Z}$ sea un conjunto infinito numerable falta una biyección: $f(n) = n - 1$ entre $\mathbb{N}$ y $\{0\} \cup \mathbb{N}$. Al componerlas se tiene la biyección buscada.

(30) Por definición de grupo.

(31) Por definición de anillo.

(32) La suma y el producto de dos números pares es par y las restantes propiedades se herean de $\mathbb{Z}$. Si $2k \in 2 \cdot \mathbb{Z}$ fuese la unidad, para cualquier $u = 2t \in 2 \cdot \mathbb{Z} - \{0\}$ se debería cumplir que $(2k)(2t) = 2t$, es decir, $2k = 1$, lo que no es posible pues $k \in \mathbb{Z}$.

(33) Si e y e' fuesen dos neutros del grupo, por ser e neutro se tiene $ee' = e'$ y por ser e' neutro se tiene $ee' = e$. Luego $e = e'$.

(34) Sea $g \in G$. Si $g_1, g_2 \in G$ fuesen inversos de g entonces $gg_1 = g_1g = e$ y $gg_2 = g_2g = e$. Luego, $g_1 = g_1e = g_1(gg_2) = (g_1g)g_2 = eg_2 = g_2$.

(35) Como $0_A + 0_A = 0_A$, se tiene $0_A \cdot a = (0_A + 0_A) \cdot a = 0_A \cdot a + 0_A \cdot a$. Sumando a ambos miembros el opuesto de $0_A \cdot a$, se tiene $[-(0_A \cdot a)] + 0_A \cdot a = [-(0_A \cdot a)] + [0_A \cdot a + 0_A \cdot a]$. Aplicando la propiedad asociativa de la suma, $0_A = [-(0_A \cdot a) + 0_A \cdot a] + 0_A \cdot a = 0_A + 0_A \cdot a = 0_A \cdot a$.

(36) Se debe comprobar que se verifican todos los axiomas que definen un cuerpo (en la asociatividad para la suma y para el producto hay 8 casos para cada una). El neutro para la suma es a y para el producto es b; opuestos: $-a = a$, $-b = b$; inversos: (el único elemento distinto de a es b) $b^{-1} = b$.

(37) Similar al anterior.

(38) Es necesario comprobar que la composición de dos aplicaciones es una aplicación, que existe un elemento neutro en $\mathcal{B}(A)$ (que será id_A) y que toda aplicación biyectiva f admite elemento inverso (que será la aplicación f^{-1}). Se deben justificar estas afirmaciones recordando que todas ellas han sido probadas en la Sección 1.4 de la página 60.

Parte I

Análisis Matricial

Capítulo 2

Matrices

Índice

2.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Definición
- Tipos especiales de matrices
- Álgebra de matrices
- Trasposición de matrices
- Matrices simétricas y antisimétricas. Traza de una matriz
- Partición de matrices en bloques

2.2. EJERCICIOS

(1) Probar la propiedad conmutativa de la adición de matrices de la Proposición 2.1.

(2) Demostrar que el elemento neutro para la adición de matrices es único.

(3) Para cada matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, probar que existe una única matriz $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que $A + B = B + A = O_{m\times n}$.

(4) Probar las propiedades relativas a la multiplicación de un escalar por una matriz de la Proposición 2.2.

(5) Probar las propiedades relativas a la multiplicación de matrices de la Proposición 2.3.

(6) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix},$$

hallar una matriz triangular inferior C con la misma diagonal principal que $-A$ y una matriz triangular superior D de modo que $A+D = B-C$. ¿Son únicas las matrices C y D?

(7) Demostrar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad AB = BA.$$

Encontrar dos matrices A y B para las cuales $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

(8) Encontrar todas las matrices a coeficientes reales que conmutan con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y expresar el resultado utilizando potencias de la matriz A.

(9) Probar la propiedad relativa a la potencia de otra potencia de matrices de la Proposición 2.4.

(10) Encontrar el resultado de la potencia n-ésima A^n de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y demostrar que es correcto por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Idem para

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(11) Probar las propiedades relativas a la trasposición de matrices de la Proposición 2.5.

(12) Demostrar las propiedades relativas a la simetría de la Proposición 2.6.

(13) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2 ¿Existe en $\mathbb{K}^{n\times n}$ alguna matriz que sea simétrica y antisimétrica a la vez? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, encontrar todas las matrices en esas condiciones. ¿Qué ocurre si $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica 2? En este caso encontrar una de dichas matrices para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ y $n = 2$.

(14) Probar que toda matriz en $\mathbb{K}^{n\times n}$ se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. Supóngase que $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica distinta de 2.

(15) Demostrar que las matrices escalares a coeficientes en $\mathbb{K}$ de tamaño $n \times n$ conmutan con todas las matrices de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y que son las únicas en estas condiciones.

(16) El producto de matrices, en general, es no conmutativo. Dar un ejemplo que permita afirmar que $AB \neq BA$ para dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para $n \geq 2$ arbitrario.

(17) Dar un ejemplo que permita afirmar que $AB = AC$ no implica $B = C$ para matrices para las que los productos están bien definidos.

(18) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justificar adecuadamente la respuesta:

(a) $AB = O_n \qquad \Rightarrow \qquad BA = O_n$.

(b) Si A y B son simétricas entonces $A - B$ es simétrica.

(19) Se consideran dos matrices particionadas $A \in \mathbb{K}^{(a_1+a_2)\times(a_3+a_4)}$ y $B \in \mathbb{K}^{(a_3+a_4)\times(b_1+b_2)}$. Comprobar que la multiplicación de A por B puede realizarse por bloques como se indica en (2.4).

(20) Calcular la matriz A^6 para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

(a) Evaluando directamente.

(b) Dividiendo la matriz A en cuatro bloques de tamaño 2×2 cada uno.

¿Cuál de las dos formas es más sencilla?

(21) Sean $A, C \in \mathbb{K}^{r\times r}$ y $B, D \in \mathbb{K}^{s\times s}$. Demostrar que

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC & O \\ O & BD \end{bmatrix}.$$

Es decir, que el producto de matrices diagonales por bloques es una matriz diagonal por bloques y se calcula multiplicando los bloques respectivos.

(22) Demostrar las propiedades restantes en la Proposición 2.7.

(23) Demostrar que la traza de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ coincide con la de su traspuesta.

(24) Sean A y B matrices reales de tamaños $m \times n$ y $n \times m$, respectivamente, tales que $AB = I_m$ y $BA = I_n$. Demostrar que $m = n$.

(25) Demostrar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para cualquier par de matrices $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Comparar con la Proposición 2.7.

(26) Demostrar que $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$ donde A, B, C son matrices a coeficientes en $\mathbb{K}$ de tamaños apropiados (que se deben indicar). Comprobar que, en general, $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$.

(27) Demostrar que el producto de matrices triangulares superiores (respectivamente, inferiores) de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior (respectivamente, inferior). ¿Qué elementos aparecen en la diagonal del producto?

(28) Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/k) & \mathrm{sen}(2\pi/k) \\ -\mathrm{sen}(2\pi/k) & \cos(2\pi/k) \end{bmatrix},$$

donde k es un entero positivo. Encontrar A^m para cada $m \in \mathbb{N}$. ¿Es posible encontrar una notación para la matriz A que sea más representativa atendiendo a su definición? ¿Cuánto da A^k?

(29) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz antisimétrica y $m \in \mathbb{N}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar adecuadamente:

(a) A^m es antisimétrica si m es impar.

(b) A^m es simétrica si m es par.

Enunciar y demostrar un resultado similar sobre la propiedad de simetría de las potencias naturales de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(30) Hallar, si existen, todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $AA^t = B$, donde

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolverlo de dos formas distintas.

En lo que sigue, se propone una serie de ejercicios que permitirán realizar **productos especiales** *a partir de diferentes particiones de las matrices.*

(31) Demostrar la Proposición 2.8.

(32) En la Proposición 2.8 se ha mostrado que el producto de una matriz por una matriz columna es combinación lineal de las columnas de dicha matriz. Enunciar detalladamente y probar una propiadad dual: El producto de una matriz fila por una matriz es combinación lineal de las filas de dicha matriz.

(33) Sean $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ expresada mediante una partición del tipo $1 \times (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$ con $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$. Probar que si las columnas de A son $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ entonces el producto AD es

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_1 & d_2a_2 & \ldots & d_na_n \end{bmatrix}.$$

Observar que el producto AD es una matriz del mismo tipo que el de A. Enunciar y probar un resultado similar para el producto DB para $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ particionada por filas.

(34) Sean $A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(f_1+f_2+\cdots+f_m)\times n}$ con $f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 1$ y

$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times(c_1+c_2+\cdots+c_p)}$ con $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 1$. Probar que el producto AB puede escribirse como una matriz de tipo $(f_1 + f_2 + \cdots + f_m) \times (c_1 + c_2 + \cdots + c_p)$, siendo $a^{(i)}b_j$ su elemento de la posición (i, j) para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, p$.

(35) Demostrar el apartado (b) de la Proposición 2.9.

(36) Sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times(c_1+c_2+\cdots+c_n)}$ con $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$ y $B = \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ \vdots \\ b^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(f_1+f_2+\cdots+f_n)\times p}$ con $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 1$.
Probar que el producto AB puede escribirse como

$$AB = a_1b^{(1)} + a_2b^{(2)} + \cdots + a_nb^{(n)}.$$

(37) Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times q}$. Probar que

$$A \begin{bmatrix} B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & AC \end{bmatrix}.$$

Indicando previamente cuáles deben ser ahora los tamaños de las matrices A, B y C, probar que

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} AC \\ BC \end{bmatrix}.$$

Para esta segunda prueba recurrir a la de trasposición de matrices por bloques.

2.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) Se prueba como en grupos.

(2) Se prueba como en grupos.

(3) Se prueba como en grupos.

(4) Utilizando la definición y utilizando las correspondientes propiedades de $\mathbb{K}$.

(5) Utilizando la definición y utilizando propiedades de $\mathbb{K}$.

(6) Son únicas, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(7) Calcular $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ y comparar con $A^2 + 2AB + B^2$. Ambas implicaciones se pueden considerar simultáneamente. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(8) Resolviendo $AX = XA$ para $X = [x_{ij}]_{i,j=1}^4$ se obtiene

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} \end{bmatrix} = x_{11}I_4 + x_{12}A + x_{13}A^2 + x_{14}A^3.$$

(9) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se debe probar que $(A^k)^r = A^{k\cdot r}$ para todo $k, r \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Se dividirá en casos: (a) $k = 0$, $r \geq 0$: $(A^0)^r = I^r = I = A^0 = A^{0\cdot r}$, (b) $k \geq 0$, $r = 0$: $(A^k)^0 = I = A^0 = A^{k\cdot 0}$, (c) $k, r \in \mathbb{N}$: Sea k fijo (pero arbitrario). Se realizará por inducción sobre r. En efecto, como $(A^k)^1 = A^k = A^{k\cdot 1}$, la propiedad es válida para $r = 1$. Sea $r > 1$ y suponer que la propiedad es válida para (ese valor de) r, es decir, $(A^k)^r = A^{k\cdot r}$. Se debe probar que es válida para el valor $r+1$, es decir, $(A^k)^{r+1} = A^{k\cdot(r+1)}$.

En efecto, por hipótesis de inducción, $(A^k)^{r+1} = (A^k)^r(A^k)^1 = A^{k\cdot r}A^k = A^{k\cdot r+k} = A^{k\cdot(r+1)}$. Luego, la propiedad es cierta para todos los valores de k y n naturales o cero.

(10) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $B^n = 2^{n-1}B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(11) Por definición.

(12) (b) $(A - A^t)^t = A^t + (-A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$, luego $A - A^t$ es antisimétrica. (c) $(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t$, luego AA^t es simétrica. (d) es similar a (c).

(13) Si fuese $A^t = A$ y $A^t = -A$ entonces $A = -A$, de donde $(1+1)A = O$. Al ser $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2 se tiene que $1+1 \neq 0$, con lo cual $A = O$. Si $\operatorname{car}(A) = 2$, cualquier matriz A cumple la condición $(1 + 1)A = O$ y además $-1 = 1$. Ejemplo: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(14) Se quiere escribir $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como $M = S+A$, siendo $S^t = S$ y $A^t = -A$. Puesto que $M^t = S - A$, al sumar M y M^t se obtiene $M + M^t = 2S$, de donde $S = \frac{1}{2}(M + M^t)$, que es simétrica. Al restar se obtiene $A = \frac{1}{2}(M - M^t)$, que es antisimétrica.

(15) Si $a \in \mathbb{K}$ entonces $(aI)A = (a[\delta_{ij}])A = [a\delta_{ij}]A = [aa_{ij}] = aA$. Por otro lado, $A(aI) = [a_{ij}](a[\delta_{ij}]) = [a_{ij}]([a\delta_{ij}]) = [aa_{ij}] = a[a_{ij}] = aA$. La tercera igualdad sigue de aplicar la definición de multiplicación de matrices. Luego, $(aI)A = aA = A(aI)$, es decir, las matrices escalares conmutan con cualquier otra matriz.

Falta ver que son las únicas que cumplen esa condición. Si $AX = XA$ para toda X, en particular, se cumple para ciertas X del tipo $E_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Sea $A = [a_{ij}]$. Tomando $X = E_{11}$ y operando se tiene $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$ y $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$, es decir, se anulas todos los elementos de la primera fila y columna de A excepto a_{11}.

Particularizando para $X = E_{12}$, se obtiene $a_{11} = a_{22}$ y $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$.

Haciéndolo con $X = E_{21}$, se llega a $a_{32} = \cdots = a_{n2} = 0$. Hasta ahora los elementos de la diagonal coinciden y los restantes de la primera y segunda filas y columnas son nulos.

Siguiendo de este modo con $X \in \{E_{13}, E_{31}, \ldots, E_{1,n-1}, E_{n-1,1}\}$ se obtiene $A = a_{11} I_n$.

(16) Se puede generalizar $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para $n > 2$ a $A = \begin{bmatrix} A_1 & O_{2,n-2} \\ O_{n-2,2} & O_{n-2,n-2} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_1 & O_{2,n-2} \\ O_{n-2,2} & O_{n-2,n-2} \end{bmatrix}$.

(17) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(18) (a) F, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) V, si $A^t = A$, $B^t = B$ entonces $(A - B)^t = [A + (-B)]^t = A^t + (-B)^t = A^t - B^t = A - B$.

(19) Realizar el producto por definición mediante elementos y luego mediante bloques y comparar resultados.

(20) (b) Particionando $A \in \mathbb{K}^{(2+2)\times(2+2)}$ queda A^2 triangular inferior por bloques con $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e I_2 en la diagonal y $2J$ en el bloque $(2,1)$ siendo $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculando $A^6 = A^2 A^2 A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & O_2 \\ 6J & I_2 \end{bmatrix}$.

(21) Basta multiplicar por bloques.

(22) Por definición.

(23) Por definición.

(24) Tomar traza en ambas igualdades y utilizar propiedades de la traza.

(25) Similar a lo probado en Proposición 2.7.

(26) Asociar adecuadamente y aplicar la propiedad del apartado anterior. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^t$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(27) Por inducción sobre n. Para $n > 1$, realizar particiones del tipo $A, B \in \mathbb{K}^{[(n-1)+1]\times[(n-1)+1]}$. Otra forma: Si $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ con $a_{ij} = b_{ij} = 0$ para $i > j$ y $AB = [c_{ij}]$ se tiene que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Así $c_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} & i > j \\ a_{ii}b_{ii} & i = j \end{cases}$.

(28) Puesto que el valor del argumento no simplificará los cálculos, sea $\alpha := \frac{2\pi}{k}$. En realidad, A es una familia de matrices que depende del parámetro α, parece adecuado llamar A_α a dicha matriz.

Calcular A_α^2 y utilizar identidades trigonométricas para simplificar la expresión. Conjeturar que $A^m = \begin{bmatrix} \cos(m\alpha) & \operatorname{sen}(m\alpha) \\ -\operatorname{sen}(m\alpha) & \cos(m\alpha) \end{bmatrix}$, y probarlo por inducción sobre m. $A^k = I_2$.

(29) (a) V, $(A^m)^t = (A^t)^m = (-A)^m = (-1)^m A^m = -A^m$, pues m es impar. (b) V, similar a (a).

(30) No existe pues AA^t es siempre una matriz simétrica y B no lo es. Otra forma: sea $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^3$, operar y resolver un sistema de ecuaciones (¿lineales?), que llevará a contradicciones (como $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = -1$).

(31) Por inducción sobre n. Para $n > 1$ realizar una partición del tipo $A \in \mathbb{K}^{n\times[(n-1)+1]}$.

Otra forma: resolverlo para el caso $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Observar que al calcular Ax se obtiene una matriz columna que se puede expresar como suma de 2 matrices columnas. Escribir luego este argumento para el caso general.

(32) Probar $x^t A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$ como en el ejercicio previo.

(33) Calcular AD considerando D particionada según sus columnas. Tras operar, considerar A particionada según sus columnas y calcular los n productos obtenidos utilizando el ejercicio anterior.

Otra forma: Por inducción sobre n. Para $n > 1$ realizar una partición en D del tipo $D \in \mathbb{K}^{n\times[(n-1)+1]}$ y utilizar el ejercicio anterior.

(34) Utilizar la definición de producto de dos matrices y la notación de las columnas de A y las filas de B.

Otra forma: Sea m fijo. Por inducción sobre p: el caso $p = 1$ es inmediato aplicando productos especiales. Sea $p > 1$, utilizando productos especiales $A \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{p-1} & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_{p-1} & Ab_p \end{bmatrix}$. Se particiona el producto obtenido separando la última columna y utilizando productos especiales con las $p - 1$ primeras columnas obteniendo que:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} Ab_1 & \dots & Ab_{p-1} & Ab_p \end{array}\right] &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_{p-1} \end{bmatrix} & Ab_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{p-1} \end{bmatrix} & Ab_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El resultado sigue por la hipótesis de inducción (en las $p - 1$ primeras columnas) y usando productos especiales (en la última columna).

(35) Generalizar (como en apatado (a)) la idea:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \end{bmatrix}.$$

(36) Por inducción sobre n. Separar la última columna de A y última fila de B y multiplicar matrices por bloques para $n > 1$. Luego se aplica la hipótesis de inducción.

(37) Particionar B y C según sus columnas y utilizar dos veces productos especiales. Para la segunda prueba pensar $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} C = (C^t \begin{bmatrix} A^t & B^t \end{bmatrix})^t$ y aplicar la propiedad anterior.

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales

Índice

3.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Sistemas de ecuaciones lineales
- Método de eliminación de Gauss
- Clasificación de los sistemas lineales

3.2. EJERCICIOS

(1) Plantear y resolver (en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}_2$) tres sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, uno de cada tipo: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

(2) Resolver y clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 3z & + & 3t & = & 3 \\ -2x & + & 11y & + & 11z & + & 10t & = & 11 \\ -4x & + & 8y & + & 8z & + & 7t & = & 7 \end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & 4y & + & 8z & = & 4 \\ -4x & + & 8y & + & 7z & = & 8 \end{array}\right. .$$

(3) Resolver y clasificar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & \frac{7}{2}x_4 & = & \frac{7}{2} \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 4 \end{array}\right. .$$

Observar que la incógnita x_3 no aparece en la última ecuación del sistema equivalente transformado. Reordenar las incógnitas en el sistema original y resolver de nuevo, de modo que el sistema obtenido tenga aspecto triangular (es decir, que los elementos g_{ii} de la expresión (3.6) sean todos no nulos).

(4) Encontrar los valores de a y b reales tales que los sistemas de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 8 \\ 5x & - & 2y & = & 9 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} ax & - & y & = & 6 \\ x & - & 2b\,y & = & 9 \end{array}\right.$$

sean equivalentes.

(5) Encontrar un sistema de ecuaciones equivalente a cada uno de los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & = & 2 \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & = & 1 \end{array}\right. .$$

En caso de sistemas compatibles, encontrar su conjunto solución. Si es compatible indeterminado, expresar su solución general en forma matricial.

(6) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $AX = B$ planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

(7) Determinar los valores de a, b y c reales para que los puntos $(1,4)$, $(-1,6)$ y $(2,9)$ pertenezcan a la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Pintar la gráfica de dicha parábola realizando previamente el completamiento de cuadrados de modo que quede del tipo $y = m(x-h)^2 + k$.

(8) Encontrar, si existen, todos los valores de θ, α, β y $\gamma \in \mathbb{R}$ que sean soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta & = & 2 \\ 2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta & = & 2 \end{array}\right.$$

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\operatorname{sen}\theta & + & \sqrt{2}\,\tan\theta & = & 4 \\ 4\operatorname{sen}\theta & - & 3\sqrt{2}\tan\theta & = & 8 \end{array}\right.$$

(c)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\operatorname{sen}\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\operatorname{sen}\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 2 \\ 6\operatorname{sen}\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}\right. .$$

Indicar si los sistemas anteriores son lineales o no lineales.

(9) Sean a, b, c y d números reales fijos. Demostrar que los valores de λ para los cuales el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a-\lambda)x + by & = & 0 \\ cx + (d-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

tiene soluciones no triviales deben satisfacer la ecuación cuadrática (en la incógnita λ)

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

¿Son números reales los valores de λ obtenidos? ¿Y si $b = c$? Justificar.

(10) Aplicando el método de eliminación de Gauss, encontrar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para que el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & b & -2 \\ -1 & b-2 & 2 \\ 2 & 2 & b-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) tenga una única solución.

(b) tenga infinitas soluciones.

(c) no tenga solución.

3.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) El sistema lineal $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$ es compatible determinado considerado sobre el cuerpo de los números racionales, y su conjunto solución es $S = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$. Considerado sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$, es incompatible y su conjunto solución es $\emptyset$.

El sistema $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$, considerado sobre el cuerpo de los números reales, es compatible indeterminado y su conjunto solución (infinito) es $S = \{(k, -k) : k \in \mathbb{R}\}$. Sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$, es compatible indeterminado y su conjunto solución (finito) es $\{(0,0), (1,1)\}$.

El sistema $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$ es incompatible: $S = \emptyset$ si se lo considera sobre el cuerpo de los números reales, sin embargo, sobre $\mathbb{Z}_2$, es compatible indeterminado y su conjunto solución (finito) es $\{(0,0), (1,1)\}$.

(2) El primero es un sistema incompatible y el segundo es compatible determinado siendo $S = \{(0,1,0)\}$.

(3) Es un sistema compatible indeterminado y $S = \{(0, -\lambda, \lambda, 1) : \lambda \in \mathbb{K}\}$ pudiendo ser $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Intercambiar el orden de las incógnitas x_3 y x_4.

(4) El conjunto solución del primer sistema es $S_1 = \{(1, -2)\}$; $a = 4$, $b = 2$.

(5) Un sistema equivalente al primero es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & -1 \end{array}\right.,$$

y $S_1 = \{(1, 2 - 1)\}$ (compatible determinado).

El segundo es un sistema compatible indeterminado, un sistema equivalente es

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \end{array} \right. ,$$

y $S_2 = \{(-1-2k, k) : k \in \mathbb{K}\}$ pudiendo ser $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

El tercero es un sistema incompatible, un sistema equivalente es

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

y $S_3 = \emptyset$.

(6) $X = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$.

(7) $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, $y = 2x^2 - x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$.

(8) No son sistemas lineales.

(a) Al resolver el sistema lineal en $x = \operatorname{sen}(\theta)$, $y = \cos(\theta)$ se obtiene $\operatorname{sen}(\theta) = 0$, $\cos(\theta) = -1$. De la primera ecuación se tiene $\theta = t\pi$, $t \in \mathbb{Z}$, y de la segunda, $-1 = \cos(\theta) = \cos(t\pi) = (-1)^t$, luego t es impar. Es decir, $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Al resolver el sistema lineal en $x = \operatorname{sen}(\theta)$, $y = \tan(\theta)$ se obtiene $\operatorname{sen}(\theta) = 2$, $\tan(\theta) = 0$. No existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(\theta) = 2 > 1$; $S = \emptyset$.

(c) Al resolver el sistema lineal en $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\beta)$ y $\tan(\gamma)$ se obtiene $\operatorname{sen}(\alpha) = 1$, $\cos(\beta) = -1$ y $\operatorname{tg}(\gamma) = 0$, de donde $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $\beta = \pi + 2k_2\pi$ y $\gamma = k_3\pi$, con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(9) Si $c \neq 0$ entonces mediante operaciones elementales se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \sim_f \begin{bmatrix} c & d-\lambda \\ a-\lambda & b \end{bmatrix} \sim_f \begin{bmatrix} 1 & \frac{d-\lambda}{c} \\ a-\lambda & b \end{bmatrix} \sim_f$$

$$\sim_f \begin{bmatrix} 1 & \frac{d-\lambda}{c} \\ 0 & b + (\lambda - a)\frac{d-\lambda}{c} \end{bmatrix}.$$

Para que el sistema admita solución no nula debe cumplirse que $b+(\lambda-a)\frac{d-\lambda}{c}=0$. Operando $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$.

Si $c=0$ entonces la matriz del sistema es $\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & d-\lambda \end{bmatrix}$.

Si $c=0$ y $d-\lambda=0$, es decir, $\lambda=d$, la matriz del sistema queda $\begin{bmatrix} a-d & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puede ocurrir que: (a) $a=d$. En este caso: (i) $b=0$, sistema compatible indeterminado y satisface la ecuación, (ii) $b\neq 0$, sistema compatible indeterminado y satisface la ecuación.

(b) $a\neq d$. En este caso: (i) $b=0$, solución trivial, se descarta, (ii) $b\neq 0$, sistema compatible indeterminado y satisface la ecuación.

Si $c=0$ y $d-\lambda\neq 0$ entonces $y=0$ con lo que $(a-\lambda)x=0$. Puede ocurrir que: (a) $\lambda=a$, sistema compatible indeterminado y satisface la ecuación, (b) $\lambda\neq a$, solución trivial, se descarta.

El discriminante de la ecuación de segundo grado es: $(a+d)^2-4(ad-bc)$, que puede ser negativo, con lo que las raíces pueden ser reales o complejas.

Si $b=c$ entonces $(a+d)^2-4(ad-b^2)=(a-d)^2+b^2\geq 0$ para todo $a,b,d\in\mathbb{R}$, con lo que todas las soluciones serán reales.

(10) Si $b=0$, el sistema es incompatible.

Si $b\neq 0$, el sistema es compatible y $z=-\frac{1}{b}$. Si $b=1$, el sistema es compatible indeterminado y $S=\{(1-k,k,-1):k\in\mathbb{R}\}$.

Si $b\neq 0$ y $b\neq 1$, el sistema es compatible determinado (para cada uno de estos valores de $b\in\mathbb{R}$) y $S_b=\{(2-\frac{1}{b},0,-\frac{1}{b})\}$.

Capítulo 4

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Rango

Índice

4.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Matriz asociada a un sistema lineal
- Método de Gauss-Jordan
- Matriz escalonada reducida por filas
- Matrices equivalentes por filas
- Existencia y unicidad de la forma escalonada reducida por filas
- Matriz escalonada reducida por columnas
- Rango de una matriz
- Clasificación y compatibilidad de sistemas lineales
- Soluciones de sistemas lineales homogéneos

4.2. EJERCICIOS

(1) Sea $\mathcal{S}$ el conjunto formado por los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas a coeficientes en $\mathbb{K}$. Demostrar que existe una biyección entre $\mathcal{S}$ y $\mathbb{K}^{m\times(n+1)}$. Particularizar esta biyección al caso de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

(2) Utilizando notación matricial, expresar el sistema de ecuaciones lineales (4.1) como

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n = b,$$

donde, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$c_j := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

y, de manera equivalente, mediante

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b.$$

(3) Aplicar el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 6x_5 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 8x_5 & = & b_2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & b_3 \end{array} \right.$$

para los casos:

(a) $b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = 4.$

(b) $b_1 = b_2 = b_3 = 0.$

Para el primer caso, si se trata de un sistema compatible indeterminado, indicar el número de parámetros necesarios para escribir el conjunto solución, su solución general en notación matricial y contrastar con la información obtenida al respecto en el Teorema de Rouché-Frobenius. Contrastar el segundo caso con la Proposición 4.2 y con el Corolario 4.1.

(4) Encontrar la forma escalonada reducida por filas de la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Identificar los unos principales, sus columnas básicas y hallar su rango.

(5) De todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 4y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{cases}$$

determinar aquellas que también satisfacen la relación no lineal $z = y^2(1-x)$. Indicar el significado geométrico de esta situación.

(6) Calcular el rango de las siguientes matrices en el cuerpo de los números reales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 17 & -30 & 51 \\ 23 & 2 & 26 & -46 & 78 \\ 17 & 3 & 21 & -34 & 63 \\ 45 & 4 & 50 & -90 & 150 \end{bmatrix}.$$

(7) Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 3 & 7 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Existe $b \in \mathbb{R}^3$ tal que el sistema $Ax = b$ sea compatible determinado? Justificar.

(b) Utilizar el método de Gauss-Jordan para resolver simultáneamente los dos sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$ siendo

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar la forma escalonada reducida y el rango de A.

(8) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Demostrar que $\operatorname{rg}(kA) = \operatorname{rg}(A)$, para todo $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$.

(9) Demostrar que un sistema de m ecuaciones lineales a coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ con n incógnitas que cumple $m < n$ sólo puede ser incompatible o compatible indeterminado.

(10) Discutir la compatibilidad del sistema en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + by + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + (b+1)y + az = 1 \end{cases}$$

y, si es posible, encontrar el conjunto solución.

(11) Comprobar que cada uno de los sistemas siguientes es compatible indeterminado

$$\begin{cases} x = 1 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 3x - (b+1)z = 2 \\ 3y - 2z = 3a - 2 \end{cases}$$

Luego, buscar las condiciones que deben satisfacer $a, b \in \mathbb{R}$ para que ambos sistemas tengan una solución en común. Determinar dicha solución.

(12) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

¿Cuántas soluciones tienen estos sistemas de ecuaciones? Resolver el segundo sistema considerando que sus coeficientes pertenecen a $\mathbb{R}$ y comparar con lo obtenido. Hallar la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada de cada sistema y su rango (en $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$).

4.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) Sea $\mathcal{S}$ el conjunto formado por los sistemas S de m ecuaciones lineales con n incógnitas a coeficientes en $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ a coeficientes en $\mathbb{K}$. Si $S \in \mathcal{S}$ entonces S es de la forma

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

A partir de S se considera la matriz particionada

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} A & b \end{array} \right] \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}.$$

Se define la aplicación $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ mediante $S \mapsto \tilde{A}$.

$\underline{\varphi \text{ es inyectiva}}$: Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$. Por definición, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$, es decir, $\left[\begin{array}{cc} A_1 & b_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} A_2 & b_2 \end{array} \right]$. Igualando las matrices, los respectivos bloques son iguales, con lo que los sistemas lineales que determinan dichos bloques lo son. Por tanto, $S_1 = S_2$. Luego, φ es inyectiva.

$\underline{\varphi \text{ es sobreyectiva}}$: Dada $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$, se considera la partición indicada de modo que $\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc} A & b \end{array} \right]$. Disponiendo los coeficientes de A como coeficientes de una sistema lineal S y los de b como sus términos independientes, existe un sistema de m ecuaciones lineales con n incógintas a coeficientes en $\mathbb{K}$ de modo que $\varphi(S) = \tilde{A}$. Luego, φ es sobreyectiva.

Por lo tanto, φ es biyectiva y de este modo los conjuntos $\mathcal{S}$ y $\mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ son coordinables o equipotentes, se denota $\mathcal{S} \cong \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$.

Para sistemas de ecuaciones lineales homogéneos basta tomar $b = 0$.

(2) Se obtiene de forma inmediata tras realizar las operaciones matriciales indicadas de multiplicación de una matriz por un escalar, adición de matrices e igualdad de matrices. Para la segunda expresión se debe utilizar uno de los productos especiales.

(3) Si se llama A a la matriz de coeficientes del sistema lineal, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se puede resolver aplicando operaciones elementales por filas a la matriz ampliada $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ y luego particularizando para los valores pedidos en cada apartado, o bien operando sobre la matriz ampliada siguiente $\begin{bmatrix} A & c & d \end{bmatrix}$, resolviendo de forma simultánea los sistemas $Ax = c$ y $Ay = d$. Aparecen 3 columnas básicas y 2 variables libres. Se trata de sistemas compatibles indeterminados. Los conjuntos solución son, respectivamente, $S = \{(20 - 23a + b, -12 + 14a - 2b, -14 + 17a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ y $S = \{(-23a + b, 14a - 2b, 17a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. La solución general del primero, en notación matricial queda

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -12 \\ -14 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -23 \\ 14 \\ 17 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Que el sistema homogéneo admita solución no trivial viene garantizado por la Proposición 4.2 debido a que $n = 5 > 3 = m$. Como $\mathrm{rg}(A) = 3$, por el Corolario 4.1, el sistema admite al menos una solución no trivial.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hay 3 columnas básicas (primera, segunda y

cuarta), 2 columnas no básicas (tercera y quinta), 3 unos principales (en las columnas básicas) y $\operatorname{rg}(A) = 3$.

(5) El conjunto solución del sistema homogéneo es $S = \{(-2k, k, 0) : k \in \mathbb{R}\}$. De estas soluciones, las que cumplen la ecuación no lineal son $(0, 0, 0)$ y $(1, -\frac{1}{2}, 0)$.

Pintando en MATLAB mediante

```
>> ezsurf('y^2*(1-x)')
>> hold on
>> plot3(0,0,0,'r*')
>> plot3(1,-1/2,0,'r*')
```

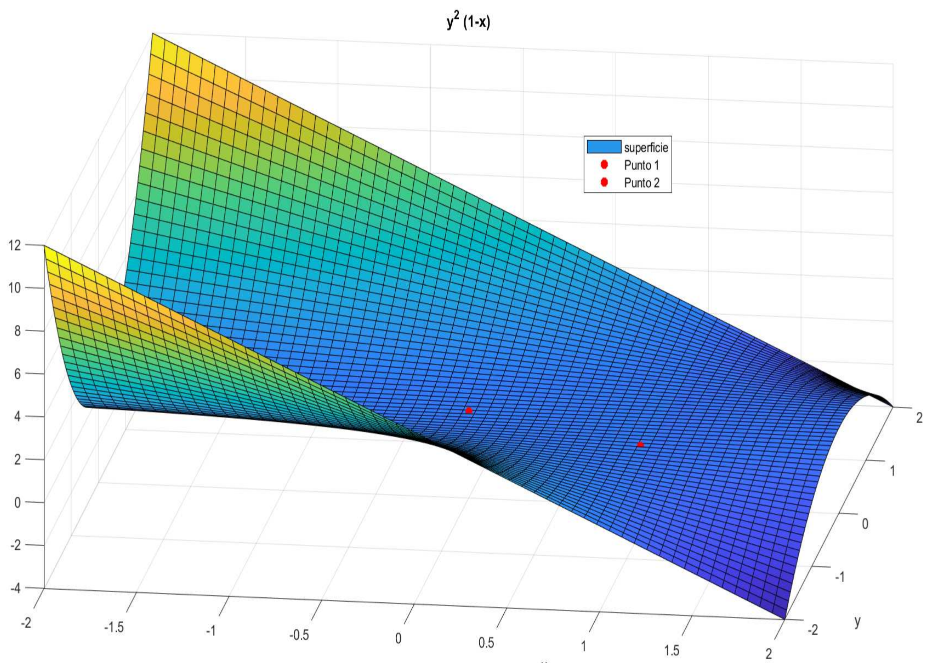

Figura 4.1: Intersección de planos y superficie.

se tiene la gráfica de la Figura 4.1.

Se observa que corresponde a los puntos en que los tres planos que pasan por el origen (del sistema lineal homogéneo) cortan a la superficie dada.

(6) 2, 1, 3.

(7) $$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ -2 & -3 & -1 & b_2 \\ 3 & 7 & -6 & b_3 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 5 & -2b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & -3 & 2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -5b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right]$$

Si $-5b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$, no existe la matriz b pedida. Si $-5b_1 - b_2 + b_3 = 0$, existen infinitas posibilidades para b.

Utilizando el método de Gauss-Jordan se obtiene que el primer sistema es incompatible y el segundo compatible indeterminado y su conjunto solución es $S = \{(-7 - 5k, 3 + 3k, k) : k \in \mathbb{R}\}$.

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathrm{rg}(A) = 2.$$

(8) Como $A \sim_f R_A$ se tiene que $kA \sim_f R_A$ pues al ser $k \neq 0$ se puede multiplicar cada fila por k^{-1} obteniendo $kA \sim_f A \sim_f R_A$. Luego, kA y A tienen la misma forma escalonada reducida por filas, con lo que $\mathrm{rg}(kA) = \mathrm{rg}(A)$ por tratarse del número de filas no nulas de R_A.

(9) Sea S un sistema de m ecuaciones lineales a coeficientes en $\mathbb{K}$ con n incógnitas tal que $m < n$.

El sistema podría ser incompatible (es una posibilidad de la tesis) o compatible.

En caso de ser compatible, al aplicar operaciones elementales por filas a la matriz ampliada del sistema, no podrá aparecer una fila del tipo $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array}\right]$, con $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. Como en la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada hay a lo sumo m unos principales y $m < n$, siempre se dispondrá de al menos una incógnita libre, con lo que el sistema es compatible indeterminado.

(10) Aplicar el método de eliminación de Gauss. Si $b = 1$, el sistema es incompatible.

Si $b \neq 1$ y $a = 2$, el sistema es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S_b = \{(\frac{b}{b-1} - k, \frac{1}{1-b}, k) : k \in \mathbb{R}\}$.

Si $b \neq 1$ y $a \neq 2$, el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es $S_b = \{(\frac{b}{b-1}, \frac{1}{1-b}, 0)\}$.

(11) $S_1 = \{(1, \frac{1+2k}{3}, k) : k \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(\frac{2+(b+1)t}{3}, \frac{3a-2+2t}{3}, t) : t \in \mathbb{R}\}$,

Geométricamente, la solución del primer sistema corresponde a los puntos de una recta (concreta) mientras que la del segundo proporciona los puntos de una recta, pero ésta varía en función de los parámetros a y b. Al igualar las soluciones se llega a $a = 1$ y $(b + 1)t = 1$, con lo cual debe ser $b \neq -1$. En este caso, el punto común tiene la forma $(1, \frac{3+b}{3(b+1)}, \frac{1}{b+1})$.

(12) El primero es un sistema compatible determinado con $S_1 = \{(0, 0, 1)\}$. El segundo es un sistema compatible indeterminado que tiene exactamente 2 soluciones (¡y no infinitas!): $S_2 = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

El tercero es un sistema compatible indeterminado con exactamente 4 soluciones y $S_3 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, que tiene exactamente 4 soluciones (¡y no infinitas!).

El segundo sistema resuelto con sus coeficientes en $\mathbb{R}$ es compatible determinado y $S_2 = \{(0, 0, 0)\}$.

Las FERF de cada sistema son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y los rangos respectivos son: 3, 2 y 1.

Capítulo 5

Matrices invertibles

Índice

5.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Definición
- Propiedades
- Matrices elementales
- Inversas de matrices elementales
- Traspuesta de matrices elementales
- Caracterizaciones de matriz invertible
- Matriz inversa: método de Gauss-Jordan
- Inversa de matrices particionadas

5.2. EJERCICIOS

(1) Comparar la demostración de la Proposición 5.1 con el Ejercicio 34 de la página 97.

(2) Enunciar y demostrar la **ley del orden inverso generalizada** a un número finito de matrices $A_1, A_2, \ldots, A_s \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $s \geq 2$. Probar que si todas son invertibles entonces su producto lo es y encontrar la fórmula para la inversa de dicho producto.

(3) De la ley del orden inverso deducir la siguiente propiedad: Si $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz invertible entonces λA es una matriz invertible y $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

(4) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible y $b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ entonces el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene una única solución (Observar que se debe probar la existencia y unicidad de la solución).

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz invertible. Demostrar que los sistemas matriciales $AX = B$, para cualquier matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, tienen solución única. Encontrar una expresión para dicha solución. ¿Cómo se relaciona este resultado con el del ejercicio anterior?

(6) Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface

$$A^6 - 2A^4 - 9A^2 - 14I_n = O,$$

probar que A es una matriz invertible y expresar su inversa en términos de potencias de A. ¿Cuál es el término en el primer miembro de la igualdad que permite garantizar la existencia de la inversa de la matriz A? ¿Por qué?

(7) Las matrices A y B siguientes corresponden a las matrices ampliadas, en forma escalonada (por filas), de un sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{bmatrix} \square & * & * \\ 0 & \square & * \\ 0 & 0 & \square \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \square & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \square & * & * \end{bmatrix},$$

donde la notación $\square$ representa un número real diferente de cero arbitrario y con el símbolo $*$ se indica un valor real arbitrario (incluyendo el cero).

(a) Determinar, para cada matriz, su forma escalonada reducida por filas.

(b) En cada caso determinar si el sistema es compatible o no. En caso de serlo, determinar si su solución es única.

(c) Responder las preguntas anteriores si se cambia la matriz B por otra en la que se quita la última columna. Justificar.

(d) ¿Y si se quitan la segunda y la quinta columnas de B? Justificar.

(8) Sean $A \in \mathbb{K}^{r\times r}$ y $B \in \mathbb{K}^{s\times s}$ dos matrices invertibles. Demostrar que

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Es decir, la inversa de una matriz diagonal por bloques (invertibles) se puede calcular a partir de la inversa de cada bloque.

(9) Se consideran los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & \frac{4}{5}x_2 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{2}{5}x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Se pide:

(a) Resolver cada sistema utlizando operaciones elementales por filas.

(b) ¿Es posible deducir del apartado anterior si la matriz de coeficientes es invertible o no? Justificar adecuadamente.

(c) Aplicar ahora el método de Gauss-Jordan, para decidir si existen las inversas de las matrices de coeficientes de los sistemas anteriores y, en caso afirmativo, calcularlas.

(10) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible y $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Demostrar que la matriz $A + xy^t$ es invertible si y sólo si $1 + y^tA^{-1}x \neq 0$. En este caso,

$$(A + xy^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + y^tA^{-1}x}A^{-1}xy^tA^{-1}.$$

Esta expresión se conoce como la **fórmula de Sherman-Morrison**. (Como ayuda observar los siguientes hechos. Cuando $x = 0$, la equivalencia se cumple vacuamente; es decir, el caso interesante es $x \neq 0$. Si A y $A+xy^t$ son invertibles entonces el producto $(A+xy^t)A^{-1}$ también lo es. Además, el producto de matrices $y^tA^{-1}x$ es un número real, en realidad, una matriz de tamaño 1×1.)

(11) Demostrar que toda matriz triangular superior (respectivamente, inferior) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con elementos no nulos en la diagonal es invertible, su inversa es triangular superior (respectivamente, inferior) y en la diagonal de la inversa aparecen los inversos multiplicativos de los elementos de la diagonal de A en las respectivas posiciones. (Ayuda: Proceder por inducción y utilizar la Proposición 5.10).

(12) Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Tiene la matriz A alguna estructura especial?

(b) Usando la estructura indicada en el apartado (a), hallar A^{-1}.

(c) Comparar con el cálculo de la inversa mediante la fórmula conocida

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{Adj}(A^t).$$

(13) Se consideran las matrices

$$M = \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times s} \\ C & D \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & O \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix},$$

siendo $D \in \mathbb{R}^{s\times s}$ una matriz invertible. Encontrar los tamaños adecuados de los bloques Q_i, $i = 1, 2, 3$ y calcular el producto $M^{-1}Q$ justificando previamente que M es invertible.

(14) Visualizar en qué se transforma el cuadrado de lado 1 cuyos vértices se hallan en el origen del plano y sobre los ejes coordenados, utilizando las diferentes matrices elementales por filas y considerando los valores de $k = \pm 2$ y $c = \pm 2$ en la interpretación geométrica de la página 225.

(15) Escribir, si es posible, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y su inversa como producto de matrices elementales.

(16) Comprobar que existen inversas a izquierda de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

y calcularlas. ¿Es posible garantizar que la existencia de inversas a izquierda implican la existencia de la inversa de A? Justificar, analizando si se contradicen las equivalencias (a) y (b) del Teorema de caracterizaciones de matriz invertible.

5.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) Se trata de un resultado general de grupos y no del grupo particular $GL_n(\mathbb{K})$.

(2) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_s \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrices invertibles con $s \geq 2$. Entonces el producto $A_1A_2\ldots A_s$ es invertible y

$$(A_1A_2\ldots A_s)^{-1} = A_s^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Se prueba por inducción sobre s (aplicando la propiedad asociativa y el caso probado para $s = 2$).

(3) Sea $B := \lambda I_n$. Como $\lambda \neq 0$, por el método de Gauss-Jordan se prueba que $R_B = I_n$ y $B^{-1} = \frac{1}{\lambda}I_n$. Luego λA es invertible (¿por qué?). Recordando que toda matriz escalar conmuta con cualquier otra matriz cuadrada del mismo tamaño se tiene que $(\lambda A)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I_n) = (\frac{1}{\lambda}I_n)A^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ teniendo en cuenta la siguiente propiedad (su prueba se propone como ejercicio): el producto de una matriz escalar por otra matriz cuadrada del mismo tamaño es igual que la multiplicación del escalar por la matriz. En este caso se aplica dos veces: $(\lambda I_n)A = \lambda A$ y $(\lambda I_n)A^{-1} = \lambda A^{-1}$.

(4) Existencia: Al ser A una matriz invertible se considera $x_0 = A^{-1}b$. Se tiene que $Ax_0 = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_nb = b$.

Unicidad: Si existiesen dos soluciones x_1 y x_2 del sistema $Ax = b$, entonces $Ax_1 = b = Ax_2$, con lo cual $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = 0$. Al ser A invertible, $A^{-1}[A(x_1 - x_2)] = A^{-1}0 = 0$, de donde $x_1 - x_2 = I_n(x_1 - x_2) = (A^{-1}A)(x_1 - x_2) = 0$, por tanto, $x_1 = x_2$.

(5) Una forma es repetir paso por paso la demostración anterior.

Otra forma: particionar X según sus columnas y utilizar un producto especial. Igualando matrices se obtienen n problemas como el del ejercicio anterior. Aplicando dicho resultado, un producto especial permite obtener el resultado final.

(6) $A[\frac{1}{14}(A^5 - 2A^3 - 9A)] = I_n$ (es posible esta operación pues $14 \neq 0$). La existencia de inversa a derecha de A garantiza la existencia de la inversa de A. Se tiene $A^{-1} = \frac{1}{14}A^5 - \frac{1}{7}A^3 - \frac{9}{14}A$.

(7) (a) $R_A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $R_B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right]$.

(b) El primero es un sistema incompatible y el segundo es compatible indeterminado (no tiene solución única pues posee 2 parámetros).

(c) Si $\bar{B}$ es la matriz obtenida al quitar la última columna de B, es $R_{\bar{B}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$ y el sistema es compatible indeterminado (posee 1 parámetro).

(d) Si $\bar{\bar{B}}$ es la matriz obtenida al quitar la segunda y quinta columnas de B, es $R_{\bar{\bar{B}}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$ y el sistema es compatible determinado (posee solución única).

(8) Basta realizar el producto entre $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$ (¿a derecha o izquiera?) y utilizar el teorema de caracterizaciones de matriz invertible para concluir.

(9) (a) $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ y $(x_1, x_2) = (-\frac{4}{5}k, k) : k \in \mathbb{R}$.

(b) Se obtiene $R_A = I_3$ (A es invertible pues se cumple cualesquiera de las siguientes condicions equivalentes: $R_A = I_3$, $A \sim_f I_3$, la única solución del sistema homogéneo es la trivial) y $R_B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$ (B no es invertible pues se cumple cualesquiera de las siguientes condicions equivalentes: $R_B \neq I_2$, $B \nsim_f I_2$, el sistema homogéneo admite soluciones no triviales), siendo A y B las matrices de coeficientes del primer y segundo sistemas, respectivamente.

(c) $\begin{bmatrix} A & I_3 \end{bmatrix} \sim_f \begin{bmatrix} I_3 & A^{-1} \end{bmatrix}$ siendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ y al ser $R_B \neq I_2$, no será posible transformar $\begin{bmatrix} B & I_2 \end{bmatrix} \sim_f \begin{bmatrix} I_2 & B^{-1} \end{bmatrix}$, con lo cual no existe B^{-1}.

(10) Si $x = 0$, la equivalencia se cumple vacuamente. Se puede suponer, pues, $x \neq 0$.

($\Rightarrow$) Como A y $A+xy^t$ son matrices invertibles entonces el producto $(A+xy^t)A^{-1}$ también lo es. Por la caracterización de matrices invertibles, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(A+xy^t)A^{-1}z = 0$ admite únicamente la solución trivial.

Se debe probar que $1 + y^tA^{-1}x \neq 0$. Suponiendo, por reducción al absurdo, que $1+y^tA^{-1}x = 0$ se tiene que $(A+xy^t)A^{-1}x = AA^{-1}x + xy^tA^{-1}x = x + xy^tA^{-1}x = x(1 + y^tA^{-1}x) = x0 = 0$, es decir, se ha encontrado una solución no trivial x del sistema homogéneo $(A + xy^t)A^{-1}z = 0$, lo que produce una contradicción.

($\Leftarrow$) La hipótesis $1 + y^tA^{-1}x \neq 0$ asegura que el denominador de la expresión dada tiene sentido. Para demostrarlo basta calcular el producto $(A+xy^t)[A^{-1} - \frac{1}{1+y^tA^{-1}x}A^{-1}xy^tA^{-1}]$ y ver que da la identidad, es decir, se ha obtenido una inversa a derecha de $A+xy^t$. El teorema de caracterizaciones de matriz invertible asegura el resultado final.

(11) Por inducción sobre n. Si $n = 1$, es inmediata. Sea $n > 1$ y suponer que la propiedad es cierta para toda matriz en $\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ triangular superior con elementos no nulos en la diagonal. Considerar $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$, una matriz triangular superior con elementos no nulos en la diagonal y sobre ella una partición del tipo $[(n-1)+1] \times [(n-1)+1]$, es decir, $A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & a_{nn} \end{bmatrix}$. Por la Proposición 5.10, $A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}Ca_{nn}^{-1} \\ O & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$. Dicho resultado es aplicable puesto que la matriz $B \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ tiene elementos no nulos en

la diagonal y la hipótesis de inducción garantiza que existe B^{-1}, es triangular superior y tiene elementos diagonales iguales a los inversos multiplicativos de los elementos de la correspondiente posición de B. Por tanto, la matriz A^{-1} es triangular superior y tiene elementos diagonales iguales a los inversos multiplicativos de los elementos de la correspondiente posición de A.

Otra forma: También es posible demostrarlo aplicando el método de Gauss-Jordan con tan sólo dos tipos de operaciones elementales: en el primer paso, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, se multiplica la fila i-ésima por el inverso multiplicativo a_{ii}^{-1} y, en el segundo paso, el 1 encontrado como pivote se utiliza para eliminar todos los elementos no nulos que se encuentren en su misma columna, por encima suyo. Claramente, se preserva la triangularidad superior de la inversa y los elementos de la diagonal de A^{-1} son a_{ii}^{-1} para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

(12) (a) Es triangular superior con elementos no nulos en la diagonal. (b) La inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior y los elementos de la diagonal de la matriz inversa son los inversos de los elementos de los lugares correspondientes de la matriz original, es decir, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -\frac{1}{2} & 0 \\ y & z & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Con sólo encontrar los elementos de las posiciones $(2,1)$, $(3,1)$ y $(3,2)$ del producto AA^{-1} se encontrará el resto de la matriz inversa: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{13}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Con dicha fórmula se debe realizar un mayor número de cálculos.

(13) $Q_1 \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{s\times p}$, $Q_3 \in \mathbb{R}^{s\times q}$, con p, q naturales arbitrarios. La inversa de M existe por ser M triangular superior por bloques con sus bloques diagonales I_r y D invertibles. Por ejemplo, aplicando el método de Gauss-Jordan o el resultado dual del probado para matrices triangulares superiores invertibles, se encuentra que $M^{-1} =$

$\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times s} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}$. Luego,

$$M^{-1}Q = \begin{bmatrix} Q_1 & O_{r\times q} \\ D^{-1}[Q_2 - CQ_1] & D^{-1}Q_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+s)\times(p+q)}.$$

(14) Pintar en el plano los vértices $P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcular los productos matriciales $E_1(2)P_i$, para $i = 0, 1, 2, 3$ y pintar los resultados obtenidos en cada caso. Repetir el cálculo de los productos con las matrices $E_1(-2)$, $E_{21}(2)$ y $E_{21}(-2)$.

(15) Premultiplicando A por las matrices elementales dadas por $E_{21}(-1)$ y $E_{12}(-4)$ se obtiene I_2, es decir, $E_{12}(-4)E_{21}(-1)A = I_2$. Calculando la inversa de cada matriz elemental, que también resulta ser una matriz elemental y del mismo tipo (concretamente, $(E_{12}(-4))^{-1} = E_{12}(4)$ y $(E_{21}(-1))^{-1} = E_{21}(1)$) y teniendo en cuenta el orden en que se sitúan se tiene $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Puesto que las matrices elementales a aplicar no son únicas, el resultado no es único. Del mismo modo que $A^{-1} = E_{12}(-4)E_{21}(-1)$ no es la única forma en que se puede escribir A^{-1} como producto de matrices elementales.

(16) Por definición, se buscan matrices del tipo $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ tales que $BA = I_2$. Multiplicando e igualando matrices se llega a un sistema lineal de 4 ecuaciones con 6 incógnitas, y resolviéndolo se obtiene $B = \begin{bmatrix} 3c-1 & 2-6c & c \\ 1+3f & -1-6f & f \end{bmatrix}$ con $c, f \in \mathbb{R}$.
La existencia de inversas a izquierda no implica la existencia de la inversa de A pues A no es cuadrada. No se contradice pues es aplicable sólo para matrices cuadradas.

Capítulo 6

Equivalencia de matrices

Índice

6.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas

- Equivalencia de matrices por filas
- Equivalencia de matrices por columnas
- Equivalencia de matrices
- Forma escalonada reducida
- Más propiedades del rango

6.2. EJERCICIOS

(1) Escribir todas las posibles formas de las matrices elementales por filas en $\mathbb{K}^{2\times 2}$. Repetir para las matrices elementales por columnas y establecer una relación entre unas y otras.

(2) Demostrar que la matriz identidad I_2 se puede transformar en la matriz elemental E_{12} (de tipo I) utilizando únicamente 4 operaciones elementales por filas de tipo II y de tipo III. Generalizando este hecho a matrices de tamaño arbitrario, se deduce que la operación elemental de tipo I no es independiente de las demás (y, por tanto, ¡es redundante!).

(3) Demostrar que si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} W \\ C \end{bmatrix}$$

entonces $AC = W$. Enunciar y demostrar un resultado similar operando por filas. Comparar con las matrices P y ${}_AR$ obtenidas en el Ejemplo 6.3.

(4) Demostrar que si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entonces $A \sim_c B \Leftrightarrow A^t \sim_f B^t$.

(5) Proporcionar un ejemplo de dos matrices que cumplan $A \sim B$ y, sin embargo, $A \nsim_f B$.

(6) Hallar la forma escalonada reducida por filas R_A de las siguientes matrices A y una matriz Q que permita expresar $QA = R_A$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

(7) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Escribir la matriz A como producto de una matriz invertible (que debe ser calculada utilizando matrices elementales) por su forma escalonada reducida por filas.

(b) Hallar la forma escalonada reducida de A.

(c) Indicar si $A \sim B$ y si $A \sim_f B$. Justificar.

(8) Sean $A, R \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $Q, U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $P, V \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si

$$\begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & U \\ V & O \end{bmatrix},$$

probar que $QAP = R$, $U = Q$ y $V = P$. Deducir de este resultado el procedimiento utilizado en el Ejemplo 6.4.

(9) Demostrar que si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{p\times q}$ entonces

$$\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B).$$

(10) Dar un ejemplo de dos matrices reales A y B que cumplan $\operatorname{rg}(AB) < \text{mín}\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\}$ y otro donde se cumpla la igualdad de ambas cantidades.

(11) Hallar la forma escalonada por filas (triangulada, sin reducirla) de una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ suponiendo que $a_{11} \neq 0$ y $\delta := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. ¿Qué expresión aparece en la posición $(3, 3)$ de la matriz reducida?

(12) Sean $A, R \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Si R_A es la forma escalonada reducida por filas de A y A es una matriz escalonada reducida por filas, probar que $A = R_A$.

(13) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. En este ejercicio se estudian las inversas laterales (a izquierda y a derecha) de A.

(a) Si existe una inversa a izquierda de A, probar que $\operatorname{rg}(A) = n$.

(b) Suponiendo que $\operatorname{rg}(A) = n$, justificar la existencia de una matriz invertible $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ tal que

$$QA = \begin{bmatrix} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}.$$

Ahora calcular el producto $Q \begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix}$ y, particionando la matriz Q mediante

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+(m-n))\times m},$$

probar que la matriz $Q_1 \in \mathbb{K}^{n\times m}$ es tal que

$$Q_1 A = I_n.$$

Concluir que este procedimiento permite hallar una inversa a izquierda de A (si existe).

(c) Deducir que existe una inversa a izquierda de A si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = n$.

(d) Si la matriz Q del apartado (b) viene dada por

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+(m-n))\times m},$$

probar que las matrices $Q_1 + XQ_2$ son inversas a izquierda cualquiera que sea $X \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

(e) En uno de los apartados anteriores, el tamaño de una de sus matrices es erróneo. ¿De cuál se trata?

(f) Si $X_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$ satisface $X_0 A = I_n$, probar que

$$\{X \in \mathbb{K}^{n\times m} : XA = I_n\} = X_0 + \{Z \in \mathbb{K}^{n\times m} : ZA = O_n\},$$

es decir, que toda inversa a izquierda de A se determina como suma de una inversa a izquierda particular de A (solución del sistema no homogéneo $XA = I_n$) más todas las matrices Z solución del sistema homogéneo $ZA = O_n$.

(g) Establecer resultados duales a los anteriores para las inversas a derecha.

(h) Justificar si las siguientes matrices admiten inversas a izquierda y, en caso afirmativo, hallar una de ellas. Repetir el ejercicio para las inversas a derecha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$, $F_{12} = C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $F_1(c) = C_1(c) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$F_2(c) = C_2(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ $(c \neq 0)$, $F_{21}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = (C_{21}(k))^t$,
$F_{12}(k) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (C_{12}(k))^t$, $k \in \mathbb{K}$.

(2) $I_2 \sim_f E_{12}$ pues $E_{12} = E_2(-1)E_{12}(1)E_{21}(-1)E_{12}(1)I_2$.

(3) Basta multiplicar por bloques y sustituir adecuadamente.

(4) $A \sim_c B \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible: $AP = B \Leftrightarrow \exists P^t \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible: $P^tA^t = B^t \Leftrightarrow A^t \sim_f B^t$.

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(6) (a) $R_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) $R_A = I_3$, $Q = A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

(7) (a) y (b) Como $E_{12}(-3)E_2(-1/5)E_{32}(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-1)I_3 = Q$, se tiene que

$$Q^{-1} = E_{21}(1)E_{31}(2)E_{32}(1)E_2(-5)E_{12}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$R_A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $A = Q^{-1}R_A$, con Q^{-1} invertible.

(c) $A \sim B$ pues $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(B)$ y $A \not\sim_f B$ pues calculando R_B se obtiene que $R_A \neq R_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(8) Basta multiplicar por bloques y sustituir adecuadamente.

(9) Si $A = O$ o bien $B = O$, el resultado es trivial. Sean $\mathrm{rg}(A) = r > 0$ y $\mathrm{rg}(B) = s > 0$. Entonces $A \sim FNH_r$ ($Q_A A P_A = FNH_r$, con $Q_A.P_A$ invertibles) y $B \sim FNH_s$ ($Q_B B P_B = FNH_s$, con $Q_B.P_B$ invertibles). Multiplicando por bloques:

$$\begin{bmatrix} Q_A & O \\ O & Q_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A & O \\ O & P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FNH_r & O \\ O & FNH_s \end{bmatrix}.$$

Al ser P_A, P_B, Q_A, A_B matrices invertibles, las matrices por bloques que las contienen lo son. Por la invariancia del rango, se tiene que $\mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} FNH_r & O \\ O & FNH_s \end{bmatrix}\right) = r + s = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$, donde la penúltima igualdad sigue tras reordenar filas (si fuese necesario) para obtener su forma escalonada de Hermite.

(10) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para el primer caso. Para el segundo, dos matrices invertibles cualesquiera de tamaño 2×2.

(11) Como $a_{11} \neq 0$, utilizando las matrices elementales $E_{21}(-\frac{a_{21}}{a_{11}}), E_{31}(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$ se consiguen ceros debajo de a_{11}. El pivote de la posición $(2,2)$ es $a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} = \frac{\delta}{a_{11}} \neq 0$. Aplicando ahora la matriz elemental $E_{32}\left(-\frac{a_{11}}{\delta}(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12})\right)$ se llega a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \frac{\delta}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

siendo $\gamma = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} - \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{\delta}(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12})$. Realizando operaciones se obtiene $\gamma = \frac{\det(A)}{\delta}$, donde $\det(A)$ denota el determinante de la matriz A.

(12) Siempre se cumple que $A \sim_f R_A$. Como, además, $A \sim_f A$ (pues $\sim_f$ es reflexiva por tratarse de una relación de equivalencia) se tiene que A es equivalente por filas a dos matrices escalonadas reducidas por filas: R_A y la propia A. Por la unicidad de la forma escalonada reducida por filas de una matriz, se tiene que $A = R_A$.

(13) (a) Si existe $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ tal que $BA = I_n$ entonces $n = \operatorname{rg}(I_n) = \operatorname{rg}(BA) \leq \operatorname{rg}(A) \leq n$. Luego, $\operatorname{rg}(A) = n$.

(b) Siempre existe una matriz invertible $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ tal que $QA = R_A$. Como $\operatorname{rg}(A) = n$ y $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, tiene que haber un uno principal por columna y $m \geq n$, es decir, $R_A = \begin{bmatrix} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$. Ahora, $\begin{bmatrix} Q_1A \\ Q_2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} A = QA = R_A = \begin{bmatrix} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, de donde $Q_1A = I_n$.

En definitiva, aplicando el método de Gauss-Jordan a la matriz $\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix}$ se obtiene

$$Q \begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QA & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & Q_1 \\ O_{(m-n)\times n} & Q_2 \end{bmatrix},$$

y la matriz Q_1 que resulte en el bloque superior derecho proporciona una inversa a izquierda de A.

(c) Inmediato de los anteriores.

(d) De (b), $Q_2A = O_{(m-n)\times n}$. Luego, $(Q_1+XQ_2)A = Q_1A+XQ_2A = I_n + XO_{(m-n)\times n} = I_n$.

(e) La matriz X del apartado (d) debe ser de tamaño $n \times (m-n)$.

(f) Sea $X_0A = I_n$. Por doble inclusión: ($\subseteq$) Si $XA = I_n$, basta tomar $Z := X - X_0$ y ver que $ZA = O$ ($\supseteq$) Si $X = X_0 + Z$ con $ZA = O$, es fácil ver que $XA = I_n$.

(g) Existe una inversa a derecha de A si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = m$. Basta aplicar traspuestas al resultado anterior.

(h) Como $\mathrm{rg}(B) = 2 \neq 3$ y $\mathrm{rg}(C) = 2 \neq 3$, B y C no admiten inversa a izquierda. Como $\mathrm{rg}(A) = 2$, que coincide con la cantidad de columnas de A, la matriz A admite inversa a izquierda. Al ser $\begin{bmatrix} A & I_3 \end{bmatrix} \sim_f \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$, $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es tal que $Q_1 A = I_2$.

Como $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3$ y $\mathrm{rg}(B) = 2 \neq 3$, A y B no admiten inversa a derecha. Como $\mathrm{rg}(C) = 2$, que coincide con la cantidad de filas de A, la matriz C admite inversa a derecha. Al ser $\begin{bmatrix} C \\ I_3 \end{bmatrix} \sim_c$ $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es tal que $CP_1 = I_2$.

Capítulo 7

Determinantes

Índice

7.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Definición
- Propiedades. Interpretaciones geométricas
- Determinante y existencia de la inversa de una matriz
- Determinante y producto de matrices
- Determinante y traspuesta de una matriz
- Desarrollo por cualesquiera de las columnas o cualesquiera de las filas
- Cálculo del rango de una matriz
- Determinantes de matrices por bloques

7.2. EJERCICIOS

(1) Calcular el área del paralelogramo de la Figura 7.2 de la página 267 utilizando el área de triángulos y rectángulos.

(2) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Demostrar que el desarrollo de Laplace se puede realizar utilizando cualquier columna o cualquier fila de A.

(3) Sea $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Demostrar que la definición de determinante coincide con el desarrollo de Laplace utilizando:

(a) la segunda fila de A.

(b) la tercera columna de A.

(4) Para matrices reales invertibles A y B de tamaño 3×3 y matrices reales C_1 y C_2 de tamaños adecuados, se tiene la ecuación matricial siguiente

$$(3A^{-1}B^t)^{-1} + [\det(4(B^{-1})^t) \cdot X]^t = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}^t .$$

(a) Despejar la matriz X.

(b) Usando el apartado (a), encontrar una matriz X que satisfaga la ecuación matricial dada, para:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 12 & -3 \\ -24 & 18 & -6 \\ -12 & 30 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^t \qquad \text{y} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^t .$$

(c) El apartado (b) puede resolverse reemplazando directamente las matrices A, B, C_1 y C_2 en la ecuación matricial y calculando todas las operaciones indicadas. ¿Qué ventajas tiene resolverlo a partir del primer apartado?

(5) Sean α y β dos números reales fijos y sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & \alpha & \beta \\ \beta & x & \alpha \\ \alpha & \beta & x \end{bmatrix}.$$

(a) Encontrar todos los valores de $x \in \mathbb{C}$ que anulen el determinante de A. (Ayuda: se obtendrá una raíz real y dos complejas).

(b) Aplicando propiedades de determinantes, comprobar que las raíces obtenidas en el apartado anterior verifican la condición requerida.

(6) Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular $|\det(A)|$ y el área del paralelogramo que determinan los dos vectores que forman las columnas de la matriz A. ¿Qué se puede observar? Representar gráficamente. ¿Se puede generalizar a dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$?

(7) Realizar dibujos en $\mathbb{R}^2$ que permitan visualizar todas las interpretaciones geométricas realizadas en este tema.

(8) Demostrar las tres primeras propiedades de la Proposición 7.4 utilizando la Proposición 5.7 y propiedades de determinantes probadas previamente.

(9) Probar que la fórmula de Cauchy-Binet es válida para un número finito de matrices cuadradas con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, todas del mismo tamaño.

(10) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz compleja A de tamaño $n \times n$ que verifica $A^{p+1} = A$, donde $p \in \mathbb{N}$? Justificar la respuesta.

(11) (a) Dados dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano $\mathbb{R}^2$, demostrar que existe una única recta que pasa por ellos y dicha

ecuación está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,1)$.

(12) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demostrar que las raíces de la ecuación

$$\det \begin{bmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{bmatrix} = 0$$

son números reales. Comparar la dificultad en su resolución con el mismo ejercicio planteado en la página 51.

(13) Demostrar que si la suma de cada par de elementos correspondientes de dos filas del determinante de una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ es un múltiplo (constante) de los correspondientes elementos de otra fila entonces el determinante de A es cero.

(14) Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla; si es falsa, dar un contraejemplo.

- $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$, $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
- $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$, $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- $\det(A^m) = [\det(A)]^m$, $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.
- $\mathrm{Adj}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = [\mathrm{Adj}(A)]^t$, $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(15) Sea $n \in \mathbb{N}$. Utilizar únicamente la definición para demostrar, por el método de inducción, que el determinante de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que tiene una fila completa de ceros es nulo.

(16) La propiedad del Corolario 7.2 requiere que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ pues se demuestra como consecuencia de la Proposición 7.3. Demostrar, por

inducción, que la misma propiedad es válida sin asumir dicha restricción. (Ayuda: distinguir los casos de filas iguales consecutivas y no consecutivas).

(17) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que el determinante de una matriz triangular inferior $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es el producto de los elementos de su diagonal. Hacerlo de dos formas: la primera utilizando como definición de determinante el desarrollo de Laplace por la primera columna y el método de inducción (se puede utilizar la propiedad del determinante de una matriz con una fila nula) y la segunda utilizando la relación entre el determinante de una matriz y el de su traspuesta.

(18) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Demostrar que $A[\mathrm{Adj}(A)]^t = \det(A)I_n$. Primero calcular el producto $P = [p_{ij}] := A[\mathrm{Adj}(A)]^t$. Luego, analizar los elementos p_{ij} separando los casos $i = j$ e $i \neq j$.

(19) Sea $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz particionada según sus columnas a_j ($j = 1, \dots, n$) y sean, para cada $i = 1, \dots, n$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & b & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

donde la matriz A_i se obtiene cambiando la columna i-ésima de A por la columna b. Probar que, para cada $i = 1, \dots, n$, se cumple que:

(a) $\det(A_i) = b_1A_{1i} + \dots + b_iA_{ii} + \dots + b_nA_{ni}$, donde A_{ij} es el complemento algebraico correspondiente a la posición (i, j) de A.

(b) si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ satisface $Ax = b$ entonces $\det(A_i) = x_i \det(A)$.

(Ayuda: Para el segundo apartado, sustituir cada b_i en $\det(A_i)$ por la relación que ofrece el sistema lineal. Luego, aplicar propiedades de determinantes).

(20) Demostrar la regla de Cramer utilizando la fórmula de la inversa de una matriz y el ejercicio anterior.

(21) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$\det\left(A\begin{bmatrix} 4+4i & \alpha^2 \\ -\alpha & 1-i \end{bmatrix}A^{-1}\right) = 0,$$

para toda matriz invertible $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Comprobar que los valores obtenidos son soluciones de la ecuación indicada.

(22) Hallar condiciones necesarias y suficientes para que una matriz de Vandermonde sea invertible.

(23) Analizar la validez del siguiente razonamiento:

"Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si existe $(I_n - AB)^{-1}$ entonces existe $(I_n - BA)^{-1}$."

En efecto, aplicando la propiedad distributiva se tiene que $B(I_n - AB) = B - BAB = (I_n - BA)B$. Puesto que $I_n - AB$ es invertible, multiplicando a derecha ambos miembros de $B(I_n - AB) = (I_n - BA)B$ por $(I_n - AB)^{-1}$ se llega a $B = (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}$. Usando la fórmula de Cauchy-Binet queda $\det(B) = \det(I_n - BA)\det(B)\det((I_n - AB)^{-1})$. Luego, $\det(I_n - BA)\det((I_n - AB)^{-1}) = 1$. Como $\mathbb{K}$ es un cuerpo, no tiene dividores de cero y, además, $\det((I_n - AB)^{-1}) \neq 0$ por ser $(I_n - AB)^{-1}$ invertible, entonces se obtiene que $\det(I_n - BA) \neq 0$, con lo que $I_n - BA$ es invertible.

(24) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $I_n - AB$ es invertible entonces probar que $I_n - BA$ es invertible y además

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A.$$

¿Es válido el resultado si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$? Justificar.

(25) Demostrar que si $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son tales que $I_n + AB$ es invertible entonces
$$\begin{bmatrix} I_n & B \\ -A & I_n \end{bmatrix}$$
es invertible.

7.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) $(a+c)(b+d)-cb-cb-\frac{cd}{2}-\frac{ab}{2}-\frac{cd}{2}-\frac{ab}{2}=ad-cb=\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right)$.

(2) Realizar el desarrollo por la fila 1, por la fila 2, por la columna 1 y por la columna 2 y ver que los 4 resultados coinciden.

(3) (a) Realizando el desarrollo de Laplace por la segunda fila,

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) &= \\ &= a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &\quad + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -a_{21}[a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}] + a_{22}[a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}] - \\ &\quad -a_{23}[a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}] \\ &= -a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31} - \\ &\quad -a_{23}a_{11}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}, \end{aligned}$$

que coincide con el desarrollo por la primera columna.

(b) Similar al anterior.

(4) (a) $X=\frac{\det(B)}{64}\left\{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}-\frac{1}{3}A^tB^{-1}\right\}$.

(b) $X=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{9}{32} \\ \frac{21}{16} & -\frac{17}{32} & -\frac{17}{32} \\ \frac{37}{64} & -\frac{11}{64} & -\frac{5}{16} \end{bmatrix}$.

(c) Se requieren menos operaciones.

(5) (a) $\det(A)=x^3+\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta x$. El resultado obtenido es una suma de tres cubos y luego un triple producto, lo que recuerda al cubo

de un binomio. Al desarrollar $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, de donde $-(\alpha+\beta)^3+\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$. Se ha obtenido que una raíz de $\det(A)=0$ es $x=-(\alpha+\beta)$. Aplicando la regla de Ruffini se obtiene que $\det(A)=[x+(\alpha+\beta)][x^2-(\alpha+\beta)x+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)]$. Calculando las raíces del polinomio de segundo grado obtenido se llega a $x=\alpha\epsilon+\beta\bar{\epsilon}$ y $x=\alpha\bar{\epsilon}+\beta\epsilon$, siendo $\epsilon := \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y donde la barra representa el conjugado.

(b) Para comprobar que $x=-(\alpha+\beta)$ anula el determinante, basta sumar las 3 filas y colocarlas en la primera, obteniendo así una fila nula.

Para comprobar que $x=\alpha\epsilon+\beta\bar{\epsilon}$ es solución, de nuevo, se comienza sumando las 3 filas y colocándolas en la primera. Aplicando homogeneidad en la primera fila, se obtiene un determinante con unos en dicha fila, donde es posible anular dos de ellos mediante operaciones elementales y luego calcular el determinante 2×2 que queda.

Otra forma para comprobar este último caso es poniendo en la primera fila el resultado de sumar ella misma más la segunda previamente multiplicada por $-\bar{\epsilon}$ y más la tercera previamente multiplicada por $-\epsilon$. Se obtiene la primera fila nula.

La raíz que falta se comprueba de forma similar a la anterior.

(6) $\det(A)=-14$ y $|\det(A)|=14$ coincide con el área de dicho paralelogramo (para calcular esta área utilizar, por ejemplo, el módulo del producto vectorial de los vectores dados).

(7) Realizar dibujos para visualizar las intepretaciones realizadas en las páginas 279, 282, 283 y 287.

(8) Sea $B=E_{ij}A$. La matriz B tiene las mismas filas que la matriz A, en la que se han intercambiado la fila i-ésima con la fila j-ésima. Este hecho produce un cambio en el signo del determinante, por tanto, $\det(B)=-\det(A)$.

Las otras dos propiedades se prueban de manera similar.

(9) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Se debe probar que $\det(A_1A_2\ldots A_p) = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_p)$. Es inmediato por inducción sobre p y utilizando la fórmula de Cauchy-Binet para el caso $p = 2$.

(10) Como $\det(A^{p+1}) = \det(A)$, la fórmula de Cauchy-Binet aplicada repetidas veces lleva a $[\det(A)]^{p+1} = \det(A)$. Por tanto, $[(\det(A))^p - 1]\det(A) = 0$. De aquí resulta que $\det(A) = 0$ o bien $\det(A) = \sqrt[p]{1}$ (que son las p raíces de la unidad de orden p. Para su cálculo se puede consultar el anexo sobre números complejos).

(11) (a) Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación de dicha recta. Utilizando que los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pasan por la recta, debe cumplirse que $ax_1 + by_1 + c = 0$ y $ax_2 + by_2 + c = 0$. Las tres ecuaciones deben cumplirse de forma simultánea y producen el sistema lineal $\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & c & = & 0 \\ ax_1 & + & by_1 & + & c & = & 0 \\ ax_2 & + & by_2 & + & c & = & 0 \end{array}\right.$ que matricialmente se expresa mediante $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para que este sistema lineal homogéneo tenga solución (a, b, c) no trivial debe cumplirse que la matriz de coeficientes tenga rango menor que 3, es decir, que no sea invertible, o bien que su determinante se anule.

(b) $L : x + y - 5 = 0$.

(12) Calculando el determinante y resolviendo la ecuación de segundo grado que queda, las raíces son $x = \frac{-(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$. Puesto que el discriminante $(a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene que sus raíces son números reales.

(13) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ una matriz que, por ejemplo, satisface la con-

dición $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$. Luego,

$$|A| = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kg & kh & ki \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k|A| = k0 = 0.$$

Del mismo modo se puede probar si la suma no se coloca en la tercera fila sino en otra.

(14) (a) F. Contraejemplo: $A = -B = I_n$ con n par. (b) F. Contraejemplo: $\lambda = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (c) V. Demostración: Aplicar n veces la homogeneidad de la aplicación determinante. (d) V. Demostración: Puede probarse por el método de inducción y utilizando la fórmula de Cauchy-Binet. (e) V. Demostración: $[\mathrm{Adj}(A)]^t = [A_{ij}]^t = [A_{ji}] = \mathrm{Adj}(A^t)$.

(15) Si $n = 1$, es trivial por definición. Sea $n > 1$ y suponer que la propiedad se cumple para toda matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ con una fila nula. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz con la i-ésima fila nula. El desarrollo de Laplace por la primera columna da

$$\begin{aligned} \det(A) &= \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + \cdots + a_{i-1,1}(-1)^{(i-1)+1}\det(M_{i-1,1}) + \\ &\quad +0(-1)^{i+1}\det(M_{i,1}) + a_{i+1,1}(-1)^{(i+1)+1}\det(M_{i+1,1}) + \cdots + \\ &\quad +a_{n,1}(-1)^{n+1}\det(M_{n,1}). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, se tiene que $\det(M_{j,1}) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ pues todos esos menores son de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ y tienen una fila de ceros. Luego, $\det(A) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(16) Caso 1: A tiene 2 filas consecutivas iguales. Por inducción sobre n. Para el caso $n = 2$ es inmediato ver que el determinante de una matriz de tamaño 2×2 con las 2 filas iguales es 0. Para el caso

$n > 2$ se aplica el desarrollo de Laplace por la primera columna de A. Por la hipótesis de inducción los complementos algebraicos relativos a las posiciones de las filas no consecutivas son todos 0. Los complementos algebraicos relativos a las posiciones de las filas consecutivas (e iguales) son números opuestos. Luego, la suma de todos es 0, i.e., $\det(A) = 0$.

Caso 2: A tiene 2 filas iguales no consecutivas. Sean la i-ésima y la j-ésima filas iguales de A. Se realiza un número finito de intercambios de filas para que la i-ésima y la j-ésima resulten consecutivas (alternando, quizás, el signo) y se aplica el Caso 1.

(17) El caso $n = 1$ es trivial. Sea $n > 1$. Al realizar el desarrollo de Laplace por la primera columna, los menores complementarios de todas las posiciones, salvo la primera, son nulos por tener la primera fila nula. Queda así, $\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) = a_{11}\det(M_{11})$. Puesto que M_{11} es una matriz triangular inferior de tamaño $(n-1)\times(n-1)$, la hipótesis de inducción asegura que $\det(M_{11}) = a_{22}\dots a_{nn}$. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene el resultado.

Otra forma: Como el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta y para matrices triangulares superiores el resultado está probado, el resultado sigue inmediatamente para matrices triangulares inferiores.

(18) Por definición de matriz adjunta se tiene que

$$P = [p_{ij}] := A[\mathrm{Adj}(A)]^t = [a_{ij}][A_{ij}]^t = [a_{ij}][A_{ji}].$$

Al multiplicar,

$$P = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \dots & a_{11}A_{n1} + \cdots + a_{1n}A_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}A_{11} + \cdots + a_{nn}A_{1n} & \dots & a_{n1}A_{n1} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Si $i = j$, los elementos de la diagonal obtenidos tienen la forma $p_{ii} = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = \det(A)$, para todo $i = 1,\dots,n$.

Si $i \neq j$, los elementos de la fuera de la diagonal obtenidos son de la forma $p_{ij} = a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ (con $i \neq j$) por tratarse de los elementos de una fila y los complementos algebraicos correspondientes a las posiciones de una paralela.

Luego, $P = \begin{bmatrix} \det(A) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n$.

(19) (a) Basta desarrollar $\det(A_i)$ por la columna i-ésima. (b) Para cada fila b_i de b, con $k = 1, 2, \ldots, n$, sustituir b_k en la expresión $\det(A_i)$ por su igual $a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n$. Aplicando propiedades de determinantes, se anularán todos excepto uno de ellos.

(20) Suponiendo que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible, el sistema $Ax = b$ admite solución única y viene dada por $x = A^{-1}b$ y también se sabe que $\det(A) \neq 0$. Utilizando que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\mathrm{Adj}(A)]^t = \frac{1}{\det(A)}[A_{ij}]^t = \frac{1}{\det(A)}[A_{ji}]$, se tiene que

$$x = \frac{1}{\det(A)}[\mathrm{Adj}(A)]^t b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix}$$

pues

$$[\mathrm{Adj}(A)]^t b = \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + \cdots + A_{n1}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + \cdots + A_{nn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix}.$$

(21) Utilizando la fórmula de Cauchy-Binet, se prueba que el problema original equivale a $\det\left(\begin{bmatrix} 4+4i & \alpha^2 \\ -\alpha & 1-i \end{bmatrix}\right) = 0$ y este último es equivalente a $\alpha^3 = -8$. Repasando el anexo sobre números complejos, si fuese necesario, las 3 raíces cúbicas del número comlejo $z = -8$ son $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1 + i\sqrt{3}$ y $\alpha_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

(22) A partir de la Proposición 7.8, el determinante de la matriz de Vandermonde es no nulo si y sólo si los valores de x_i son distintos dos a dos, es decir, $x_i \neq x_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

(23) Es falso. El paso incorrecto se encuentra al decir que $\det(B) = \det(I_n - BA)\det(B)\det((I_n - AB)^{-1})$ implica $\det(I_n - BA)\det((I_n - AB)^{-1}) = 1$ pues para ello debería ser $\det(B) \neq 0$, que no se conoce como hipótesis. Sin embargo, a pesar de esta "prueba" incorrecta, el resultado es verdadero como se prueba en el Ejercicio 1224.

(24) Basta probar que $(I_n - BA)(I_n + B(I - AB)^{-1}A) = I_n$. En efecto, $(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A - BA - BAB(I_n - AB)^{-1}A = I_n + B[(I_n - AB)^{-1} - I_n - AB(I_n - AB)^{-1}]A = I_n + B[(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1} - I_n]A = I_n + B[I_n - I_n]A = I_n$. Se ha probado que la expresión dada es una inversa a derecha de $I_n - BA$, lo que garantiza que es su inversa pues se trata de matrices cuadradas.

Otra forma: Sea $X := (I_n - AB)^{-1}$. Se debe probar que $(I_n - BA)(I_n + BXA) = I_n$. Por definición de matriz inversa, $(I_n - AB)X = X(I_n - AB) = I_n$, de donde $ABX = X - I_n$. Ahora, $(I_n - BA)(I_n + BXA) = I_n + BXA - BA - BA(BXA) = I_n + BXA - BA - B(ABX)A = I_n + BXA - BA - B(X - I_n)A = I_n + BXA - BA - BXA + BA = I_n$. Como antes, la expresión dada es la inversa de $I_n - BA$.

El resultado es válido para $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Se deben poner los subíndices adecuados (m ó n) en las matrices identidades.

(25) Se trata de resolver la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} I_n & B \\ -A & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por bloques y despejando adecuadamente se obtiene $X = (I_n + BA)^{-1}$, $Y = -B(I_n + AB)^{-1}$, $Z = A(I_n + BA)^{-1}$, $T = (I_n + AB)^{-1}$, con lo que se obtiene el resultado. Se debe tener en cuenta que, por el ejercicio anterior, si $I_n + AB$ es invertible entonces $I_n + BA$ también lo es.

Otra forma: Premultiplicando la matriz dada por la matriz elemental por bloques $\begin{bmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{bmatrix}$ se tiene $\begin{bmatrix} I_n & B \\ O & I_n + AB \end{bmatrix}$. Por la fórmula de Cauchy-Binet se tiene que

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ -A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ O & I_n + AB \end{vmatrix}$$

puesto que el determinante de la matriz elemental por bloques es 1 (por tratarse de una matriz triangular inferior con unos en su diagonal). Luego, $\begin{vmatrix} I_n & B \\ -A & I_n \end{vmatrix} = |I_n|\,|I_n + AB| \neq 0$ por hipótesis. Observar que se ha utilizado que el determinante de una matriz triangular superior por bloques es el producto de los determinantes de cada bloque diagonal. Luego, la matriz dada es invertible.

Parte II

Álgebra Lineal

Capítulo 8

Espacios vectoriales

Índice

8.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Modelos geométricos y algebraicos
- Definición
- Subespacios vectoriales
- Combinaciones lineales. Subespacio generado
- Sistemas de generadores
- Dependencia e independencia lineal
- Bases de un espacio vectorial
- Dimensión
- Operaciones con subespacios

8.2. EJERCICIOS

(1) Comprobar que todos los ejemplos proporcionados en la Sección 8.3.1 determinan un espacio vectorial.

(2) Se considera el conjunto $V = \mathbb{Z}$ de los números enteros con la suma habitual y con la operación externa:

$$\text{Si } q \in \mathbb{Q} \text{ y } z \in \mathbb{Z}, \text{ entonces } q \cdot z = 0.$$

Comprobar que en $(V, +, \cdot)$ se cumplen todos los axiomas de espacio vectorial salvo V_8, y por tanto, $\mathbb{Z}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ con estas operaciones.

(3) ¿Cómo se deberían reordenar los axiomas de la definición de espacio vectorial para necesitar sólo una de las dos igualdades en el axioma de existencia del elemento neutro de la suma y existencia del simétrico para cada elemento del espacio?

(4) Demostrar que, de los axiomas (V_1)-(V_8) que cumple un conjunto V para ser un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, el axioma (V_4) puede deducirse de los axiomas (V_1), (V_2), (V_3), (V_5), (V_6) y (V_8). (Ayuda: Probar primero que $\vec{u} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{v}$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ desarrollando de dos formas diferentes la expresión $(1 + 1)(\vec{u} + \vec{v})$.)

(5) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Demostrar que:

(I) $-u = (-1)u$.

(II) $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$.

(III) $(\lambda - \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{u}$.

(6) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Demostrar que son válidas las siguientes **leyes de cancelación** o **reglas de simplificación**:

(I) $\lambda\vec{u} = \lambda\vec{v}$ y $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

(II) $\lambda\vec{u} = \mu\vec{u}$ y $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$.

(7) Deducir que el espacio vectorial cartesiano $\mathbb{K}^n$, el espacio vectorial de las matrices $\mathbb{K}^{m\times n}$ y el espacio vectorial de las sucesiones son casos particulares del Ejemplo 8.7.

(8) Se considera el conjunto $\mathcal{C}^m([-1,1])$ de todas las funciones reales a valores en el intervalo $[-1,1]$ que poseen derivadas de orden m continuas. Definiendo las operaciones de suma $+$ y producto por escalares $\cdot$ punto a punto, probar que $(\mathcal{C}^m([-1,1]),+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

(9) Sea $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Se define la suma y el producto por escalares de $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ como

$$\begin{array}{rcl} x \oplus y & = & x \cdot y \quad (\text{donde } \cdot \text{ es el producto de } \mathbb{R}), \\ \dfrac{a}{b} \otimes x & = & x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}, \quad \left(\text{donde } \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ es tal que } b > 0\right) \end{array}$$

para cualquier $x, y \in V$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Probar que $(V, \oplus, \otimes)$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

(10) Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Se considera como nuevo espacio el producto cartesiano $V \times W$ y sobre él las siguientes operaciones de suma $+ : (V\times W)\times(V\times W) \to V\times W$ y producto por escalares $\cdot : \mathbb{K} \times (V \times W) \to V \times W$ definidas como

$$\begin{array}{rcl} (v_1, w_1) + (v_2, w_2) & = & (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\ \lambda \cdot (v, w) & = & (\lambda v, \lambda w) \end{array}.$$

Demostrar que $(V \times W, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, llamado **espacio producto** $V \times W$.

(11) Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $S \subseteq V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) S es un subespacio vectorial de V.

(b) Se cumple que:

(S_1') $S \neq \emptyset$,

(S_2) Si $u, v \in S$ entonces $u + v \in S$,

(S_3) Si $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $\lambda.u \in S$.

(12) Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $S \subseteq V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) S es un subespacio vectorial de V.

(b) Se cumple que:

(S_1) $0 \in S$,

(S_4') Si $u, v \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $u + \lambda.v \in S$.

(13) Indicar, justificando la respuesta, si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios vectoriales:

(a) $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y \right\}$.

(b) $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1 \right\}$.

(c) $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - 2y = 0 \right\}$.

Representar gráficamente cada subconjunto y analizar la pertenencia o no a cada S_i del vector nulo de $\mathbb{R}^2$, de la suma y del producto de un vector por un escalar para unos cuantos vectores.

(14) En este ejercicio se estudian matrices que conmutan, con respecto a la multiplicación de matrices, con una matriz fijada.

(a) Demostrar que el conjunto de matrices que conmutan con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determina un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$. Hallar su dimensión y una base.

(b) Considerar ahora una matriz fija $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ arbitraria. Demostrar que el conjunto de matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $AX = XA$ forma un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(15) Analizar si los siguientes subconjuntos son subespacios de los espacios vectoriales a los que pertenecen:

(a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x - z = 0, y = 2t \right\}$.

(b) $S = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_0 = 1 = a_1\}$.

(c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}$.

(d) $S = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_1 = a_0, a_2 = -a_1\}$.

(16) Para los apartados del ejercicio anterior que sean subespacios determinar una base y su dimensión.

(17) Indicar si el vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pertenece al subespacio

$$\overline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}}.$$

¿Cuál es la dimensión del subespacio anterior?

(18) Analizar la validez o falsedad de la siguiente afirmación: "el subconjunto $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con la suma y el producto por escalares habituales de $\mathbb{C}^2$".

(19) Mostrar (de dos maneras diferentes) que los vectores $1, x, x^2$ y x^3 son linealmente independientes en $\mathbb{R}_3[x]$.

(20) Determinar si cada uno de los sistemas

$$S_1 = \{1, 1+x, -1+x\},\ S_2 = \{1+x, -1+x\}\ \text{ y }\ S_3 = \{3, x-2, x+1, x^2\}$$

constituye una base de $\mathbb{R}_2[x]$. En caso de no ser base, pero ser un conjunto linealmente independiente, extenderlo a una base de $\mathbb{R}_2[x]$; en caso de ser un conjunto de generadores, extraer de él un subconjunto que sea una base.

(21) Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 (junto al polinomio nulo) que se anulan en $x = 0$ y en $x = 1$.

(a) Mostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Hallar la forma general de los polinomios de S.

(c) Hallar una base de S y su dimensión.

(22) Determinar la dimensión y una base de los siguientes subespacios vectoriales:

(a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ 2a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-c \\ b+c \\ 5c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -2a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-c \\ 2a+b+c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-\frac{b}{2}+2c \\ 2a-b+4c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(f) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2x+y \\ x \\ -x-2y \\ x+y+z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(g) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(23) Se considera el conjunto M_S de las matrices de tamaño $n \times n$ triangulares superiores a coeficientes reales con la adición y la multiplicación por escalares habituales.

(a) Probar que M_S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Calcular su dimensión y una base.

(b) Para $n = 4$, escribir el vector

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como combinación lineal de los vectores de la base encontrada.

(24) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $u, v \in V$ dos vectores no nulos. Demostrar que $\{u, v\}$ es linealmente dependiente si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $u = \lambda v$.

(25) ¿Es el conjunto $\{x^2,\ x|x|\}$ linealmente independiente en el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[-1, 1]$? Justificar la respuesta. Interpretar el resultado en una gráfica. ¿Se obtiene el mismo resultado si se analizan en el intervalo $[-1, 0]$? ¿Se puede justificar esta pregunta mediante el ejercicio anterior?

(26) Probar que el conjunto $\{\cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial de las funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

(27) Sea $\mathcal{C}^{(n-1)}_{[a,b]}$ el conjunto de funciones reales que poseen $n - 1$ derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Si $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ es un subconjunto de $\mathcal{C}^{(n-1)}_{[a,b]}$ y existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que[1]

$$\det\left(\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \ldots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

[1]El determinante considerado se llama **wronskiano** de $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$. Se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales lineales y fue utilizado en 1812 por el matemático polaco Józef Hoene-Wroński (1776-1853) llamado de este modo en 1882 por el matemático escocés Thomas Muir (1844-1934).

entonces $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{C}^{(n-1)}_{[a,b]}$. Deducir de este resultado, si es posible, los dos Ejercicios anteriores. (Ayuda: Plantear la combinación lineal nula de las funciones dadas y derivar $n-1$ veces. Luego, analizar el sistema lineal resultante).

(28) Usando como argumento su dimensión, demostrar que los subespacios vectoriales:

(a) de $\mathbb{R}^1$ son sólo los subespacios triviales.

(b) no triviales de $\mathbb{R}^2$ son las rectas que pasan por $(0,0)$.

(c) no triviales de $\mathbb{R}^3$ son las rectas que pasan por $(0,0,0)$ y los planos que pasan por $(0,0,0)$.

(29) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es linealmente dependiente el conjunto $S = \{1 + ax, a + (a+2)x\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$? Justificar la respuesta.

(30) ¿Bajo qué restricciones sobre los valores de a y b en $\mathbb{R}$ puede garantizarse que el conjunto $S = \{a + ax + ax^2, bx^2, 1\}$ genera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$? Justificar la respuesta.

(31) Hallar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que existan matrices no nulas $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para el valor de α encontrado probar que el conjunto

$$S = \left\{ B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Hallar una base de S y su dimensión.

(32) Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ un conjunto linealmente independiente de matrices de tamaño $m \times n$ a coeficientes reales y sean B y C dos matrices invertibles reales de tamaños $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Demostrar que

$$\{BA_1C, BA_2C, \ldots, BA_pC\}$$

es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^{m\times n}$. ¿Se debe cumplir alguna relación entre m, n y p?

(33) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Demostrar que la suma de dos combinaciones lineales de $u_1, u_2, \dots, u_n$ es otra combinación lineal de $u_1, u_2, \dots, u_n$ y el producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ por una combinación lineal de $u_1, u_2, \dots, u_n$ es otra combinación lineal de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

(34) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $S \leq V$ y $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq S$. Probar que $\overline{\{u_1, u_2, \dots, u_n\}} \subseteq S$.

(35) Se considera una famila de subespacios $\{S_i\}_{i\in I}$ de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Demostrar que la intersección $\cap_{i\in I} S_i$ es un subespacio de V.

(36) Dar un ejemplo de dos subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $S_1 \cup S_2$ no sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(37) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $S_1, S_2 \leq V$. Demostrar que

$$S_1 \cup S_2 \leq V \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_1 \subseteq S_2 \ \text{ ó } \ S_2 \subseteq S_1.$$

(38) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto

$$S_k = \{ax + b \in \mathbb{R}_1[x] : a + b = k\}$$

sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_1[x]$. Para dicho valor de k, determinar la dimensión y una base de S_k.

(39) Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Demostrar que $S \leq V \Leftrightarrow S = \overline{S}$.

(40) Comprobar que el cuerpo (finito) $\mathbb{Z}_2$ definido en los Ejemplos 1.18 y 1.39 puede considerarse como $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial. Hallar una base del mismo.

(41) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$. Demostrar que:

(I) $\overline{\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n\}} = \overline{\{u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n\}}$.

(II) $\overline{\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_n\}} = \overline{\{u_1, \dots, cu_i, \dots, u_n\}}$, para todo $c \in \mathbb{K} - \{0\}$.

(III) $\overline{\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n\}} = \overline{\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j + cu_i, \dots, u_n\}}$ para todo $c \in \mathbb{K}$ y $j \neq i$.

Deducir que las operaciones elementales de vectores preservan las combinaciones lineales. Comparar este resultado con el obtenido en la Proposición 8.7.

(42) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial finitamente generado. Demostrar que V considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial también es finitamente generado.

(43) Probar que si el sistema lineal formado por las ecuaciones $ax+by=0$ y $cx+dy=0$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{K}$) tiene solución no trivial entonces los vectores: (a) (a, c) y (b, d) de $\mathbb{K}^2$ son linealmente dependientes; (b) (a, b) y (c, d) de $\mathbb{K}^2$ son linealmente dependientes.

(44) Encontrar una matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ particionada según sus columnas para la cual

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y la forma escalonada reducida por filas de A es

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(45) Probar que la familia

$$\mathcal{C} = \left\{ P_i(x) = x^i \right\}_{i=0}^{n}$$

es un conjunto linealmente independiente del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$. Para ello, escribir al vector nulo como una combinación lineal de $\mathcal{C}$ y derivarlo n veces. Comparar con el Ejemplo 8.56.

(46) Probar que los subespacios $S_1 = \overline{\{(1,0)\}}$ y $S_2 = \overline{\{(2,3)\}}$ satisfacen $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^2$. Nótese que, en definitiva, se trata de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

(47) Se utilizará la notación $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ para indicar el conjunto de los números naturales pares. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ de las funciones polinomiales en la variable x. Sean

$$S_1 = \overline{\{1, x^2, x^4, \dots\}} = \overline{\{x^j\}_{j \in \{0\} \cup 2\mathbb{N}}}$$

y

$$S_2 = \overline{\{x, x^3, x^5, \dots\}} = \overline{\{x^j\}_{j \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}}}.$$

Probar que $\mathbb{R}[x] = S_1 \oplus S_2$.

(48) Demostrar que las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in]\frac{1}{3}, 1] \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 0 & x \in]\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad \text{y} \quad h(x) = 1 - x,$$

son linealmente independientes en el espacio de todas las funciones reales definidas sobre el intervalo $[0, 1]$. Indicar si la función k definida por

$$k(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 0 & x \in]\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

cumple que $k \in \overline{\{f, g\}}$. Representar gráficamente.

(49) Demostrar que las funciones continuas e^x, $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ no pertenecen a $\overline{\{1, x, x^2, x^3, \dots\}}$. En consecuencia, estas funciones trascendentes familiares no pueden ser expresadas como combinaciones lineales (finitas) de polinomios.

(50) Siguiendo la idea de la demostración de la Proposición 8.8, enunciar y probar una proposición similar que establezca que la equivalencia por columnas preserva las relaciones de dependencia lineal entre las filas de una matriz.

(51) Sea V un espacio vectorial. Es conocido que al unir un sistema de generadores de un subespacio S_1 de V con un sistema de generadores de un subespacio S_2 de V, se obtiene un sistema generador de $S_1 + S_2$. Para ver que este hecho no se cumple para bases, encontrar dos subespacios S_1 y S_2 del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tales que al unir una base de S_1 con una de S_2 se obtiene un sistema linealmente dependiente de $S_1 + S_2$. ¿Contradice este hecho el apartado (c) de la Proposición 8.18? Justificar.

8.3. SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

(1) Se debe aplicar la definición comprobando que se cumplen todos los axiomas.

(2) El axioma V_8 no se cumple pues $1 \cdot z = 0 \neq z$ para todo $z \neq 0$. Por ejemplo, $1 \cdot 1 = 0 \neq 1$.

(3) Se debe situar la conmutatividad antes de la existencia del elemento neutro de la adición y de la existencia del simétrico.

(4) Se comienza probando la sugerencia de la ayuda: $u + u + v + v = 1u + 1u + 1v + 1v = (1+1)u + (1+1)v = (1+1)(u+v) = 1(u+v) + 1(u+v) = u + v + u + v$. Sumando $(-1)u$ a izquierda y $(-1)v$ a derecha en ambos miembros y asociando adecuadamente se tiene que $u + v = v + u$.

(5) (I) Se debe probar que el opuesto de u es $(-1)u$. Para ello, $u + (-1)u = 1u + (-1)u = [1 + (-1)]u = 0u = 0$. Análogamente se prueba que $(-1)u + u = 0$. Por la definición y unicidad del opuesto $-u$ del vector u se tiene $-u = (-1)u$.

(II) $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda(\vec{u} + (-1)\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda[(-1)\vec{v}] = \lambda\vec{u} + [\lambda(-1)]\vec{v} = \lambda\vec{u} + [(-1)\lambda]\vec{v} = \lambda\vec{u} + (-1)[\lambda\vec{v}] = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$.

(III) Similar al anterior.

(6) (I) Como $\lambda \neq 0$, existe $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda^{-1}\lambda = 1 (= \lambda\lambda^{-1})$. Premultiplicando ambos miembros de la igualdad dada por λ^{-1} y utilizando el axioma (V_7) y el axioma (V_8), se tiene el resultado.

(II) Sigue directamente del tercer apartado del ejercicio anterior y del apartado (e) de la Proposición 8.1.

(7) $\mathbb{K}^n$: la aplicación $x : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ se define por $x(i) = x_i$, siendo $x_i \in \mathbb{K}$. Se denota, $x = (x(1), \ldots, x(n)) = (x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathbb{K}^{m \times n}$: la aplicación $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ se define por $A(i, j) = a_{ij}$, siendo $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Sucesiones: la aplicación $x : X = \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ se define por $x(n) = x_n$, siendo $x_n \in \mathbb{K}$. Se denota, $x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) = (x_1, x_2 \dots, x_n, \dots)$.

(8) Este espacio cobra sentido al recordar que existen funciones derivables con derivada no continua. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es una función que admite derivada primera pero dicha derivada no es una función continua.

En realidad, el espacio $(\mathcal{C}^m([-1,1]), +, \cdot)$ es semejante al espacio vectorial más general $(\mathbb{K}^A, +, \cdot)$, siendo $A = [-1, 1]$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donde además las funciones deben poseer derivada de orden m continua. Se debe recordar que la derivada de la suma de dos funciones derivables es la suma de las derivadas de cada función, es decir, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, y que el producto de un escalar por una función derivable es derivable y $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

Observar ahora la relación con los axiomas que se cumplen en $\mathbb{K}^A$.

(9) Se debe observar que $\oplus$ es una operación interna y $\otimes$ una operación externa con $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Los axiomas $(V_1), (V_2), (V_3)$ y (V_4) son inmediatos pues se cumplen en $\mathbb{R}^+$ con el producto.

V_5: $\frac{a}{b} \otimes (u \oplus v) = (uv)^{\frac{a}{b}} = u^{\frac{a}{b}} v^{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b} \otimes u) \oplus (\frac{a}{b} \otimes v)$.

V_6: $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \otimes u = u^{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} = u^{\frac{a}{b}} u^{\frac{c}{d}} = (\frac{a}{b} \otimes u) \oplus (\frac{c}{d} \otimes u)$.

V_7: $\frac{a}{b} \otimes (\frac{c}{d} \otimes u) = (u^{\frac{c}{d}})^{\frac{a}{b}} = u^{\frac{c}{d}\frac{a}{b}} = u^{\frac{a}{b}\frac{c}{d}} = (\frac{a}{b}\frac{c}{d}) \otimes u$.

V_8: $1 \otimes u = u^1 = u$.

Con un argumento similar al del Anexo E se puede probar que $(V, \oplus, \otimes)$ tiene dimensión infinita.

(10) Basta aplicar la definición y los correspondientes axiomas en cada espacio V y W.

(11) Por la Proposición 8.3, S es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple: (a') $0 \in S; u+v \in S, \forall u, v \in S; \lambda u \in S, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in S$. Ahora se probará: (a') $\Leftrightarrow$ (b).

(a') $\Rightarrow$ (b) Es claro que $0 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$. Las otras condiciones coinciden.

(b) $\Rightarrow$ (a') Como $S \neq \emptyset$, existe $u \in S$. Tomando $\lambda = -1 \in \mathbb{K}$, se tiene que $\lambda u = (-1)u = -u \in S$. Luego, $0 = u + (-u) \in S$. Las otras condiciones coinciden.

(12) Por la Proposición 8.3, basta probar que las condiciones $u+v \in S, \forall u, v \in S$ y $\lambda u \in S, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in S$ son equivalentes a (S_4') (pues la condición $0 \in S$ es común a ambos). En efecto, si se cumple que S es cerrado para la suma y para el producto por escalares entonces para $v \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda.v \in S$. Por la otra condición, si $u \in S$ se tiene que $u + \lambda.v \in S$, con lo que se prueba (S_4').

Se supone ahora que se cumple (S_4'), y que $u, v \in S$. Tomando $\lambda = 1 \in \mathbb{K}$ se tiene que $u + \lambda.v = u + 1.v = u + v \in S$. Ahora, si $v \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, para $u = 0$, resulta $u + \lambda.v = \lambda.v \in S$ (por ser v arbitrario, su nombre es irrelevante).

(13) Se deben analizar las 3 condiciones de la Proposición 8.3.

(a) No es cerrado para la suma ni para el producto por escalares; S_1 no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. (b) $(0,0) \notin S_2$; S_2 no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. (c) S_3 es subespacio de $\mathbb{R}^2$ pues $0 - 2.0 = 0$, con lo cual $(0,0) \in S_3$. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_3$ entonces $x_1 - 2y_1 = 0$ y $x_2 - 2y_2 = 0$. Sumando miembro a miembro, $(x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0$, de donde $(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = 0$, con lo cual $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S_3$. Si $(x, y) \in S_3$ entonces $x - 2y = 0$ y si $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda(x - 2y) = \lambda 0 = 0$, de donde $(\lambda x) - 2(\lambda y) = 0$, con lo cual $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in S_3$.

(14) (a) Se debe probar que $S = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : XA = AX\} \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$. En efecto, $OA = AO$, luego $O \in S$. Si $B, C \in S$ entonces $BA = AB$ y

$CA = AC$. Luego, $(B+C)A = BA + CA = AB + AC = A(B+C)$, con lo que $B + C \in S$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $B \in S$ entonces $AB = BA$. Luego, $A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda(BA) = (\lambda B)A$, con lo cual $\lambda B \in S$. Por tanto, $S \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

La forma genérica de un elemento de S es $X = \begin{bmatrix} t-z & z \\ z & t \end{bmatrix}$, con $z, t \in \mathbb{R}$. Luego, $X = z \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, de donde $S = \overline{\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}}$. Al tratarse de 2 matrices linealmente independientes, forman base de S y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

(b) Se prueba como en (a).

(15) (a) $S \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$. (b) $S \not\leq \mathbb{R}_2[x]$ (pues $0 \notin S$). (c) $S \leq \mathbb{R}^2$. (d) $S \leq \mathbb{R}_3[x]$.

(16) (a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$. (c) $\mathcal{B} = \{(1, -2)\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$. (d) $\mathcal{B} = \{1 + x - x^2, x^3\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

(17) Si pertenece pues

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si S es el subespacio generado por los vectores dados, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$.

(18) $\boxed{F}$ Sean $S := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ y $V := \mathbb{C}^2 = \{(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) : x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$. Es claro que $S \subseteq V$, $(0,0) \in S$ y S es cerrado para la suma de elementos de S. Con esto, S es un subgrupo aditivo de V. Sin embargo, S no es cerrado para el producto por escalares (de $\mathbb{C}$). Por ejemplo, si $\lambda = i$, $u = (1, 0) \in S$, el producto $\lambda u = (i, 0) \notin S$.

(19) Primera forma: Por definición. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Igualando polinomios se tiene que $a = b = c = d$, con lo cual $\{1, x, x^2, x^3\}$ es linealmente independiente.

Segunda forma: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando 3 veces ambos miembros de la igualdad y particularizando para $x = 1$ se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & = & a & + & b & + & c & + & d \\ 0 & = & & & b & + & 2c & + & 3d \\ 0 & = & & & & & 2c & + & 6d \\ 0 & = & & & & & & & 6d \end{array} \right. ,$$

cuya única solución es la trivial.

(20) S_1 es linealmente dependiente pues $1 = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(-1+x)$ y no constituye un sistema generador de $\mathbb{R}_2[x]$ pues, por ejemplo, $x^2 \notin \overline{S_1}$.

S_2 es linealmente independiente pero no un sistema de generadores de $\mathbb{R}_2[x]$. El conjunto $S_2 \cup \{x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

S_3 es linealmente dependiente y es un sistema de generadores de $\mathbb{R}_2[x]$. El conjunto $S_3 - \{x-2\} = \{3, x+1, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(21) Sea $S = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = 0 \wedge P(1) = 0\} \cup \{O\}$.

(a) $O \in S$. Si $P, Q \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $P(0) = P(1) = 0$ y $Q(0) = Q(1) = 0$. Luego, $(P+Q)(0) = P(0) + Q(0) = 0 + 0 = 0$, $(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0$, $(\lambda P)(0) = \lambda P(0) = \lambda 0 = 0$ y $(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda 0 = 0$, de donde $S \leq \mathbb{R}_3[x]$.

(b) $P(x) = bx + cx^2 + (-b-c)x^3$, con $b, c \in \mathbb{R}$.

(c) $\{x - x^3, x^2 - x^3\}$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

(22) (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$, , $S = \mathbb{R}^2$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$, $S = \mathbb{R}^3$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$.

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$, $S = \mathbb{R}^2$.

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$.

(f) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$.

(g) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$.

(23) (a) Que M_S sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$ sigue inmediatamente de los siguientes hechos: la matriz nula es triangular superior, la suma de dos triangulares superiores es triangular superior y el producto de un escalar por una matriz triangular superior es triangular superior.

Para encontrar una base de M_S basta considerar las matrices que poseen todos los elementos iguales a 0, excepto un único 1 que recorra todas las posiciones de la diagonal principal y todas las que se hallen por encima de ella. Habrá un total de $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ matrices de este tipo, que coincide con la dimensión de M_S. Luego, una base es $\{E_{1j} : j = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{E_{2j} : j = 2, \ldots, n\} \cup \{E_{3j} : j = 3, \ldots, n\} \cup \cdots \cup \{E_{n-1,j} : j = n-1, n\} \cup \{E_{nn}\}$, siendo E_{ij} las matrices de la base canónica de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) $A_0 = 1E_{11} + 4E_{12} + 9E_{13} + 7E_{14} + 3E_{23} + E_{24} + 2E_{33} + 5E_{34} - E_{44}$.

(24) ($\Rightarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $au + bv = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$, es decir, a y b no son simultáneamente nulos, lo que es lo mismo que decir que uno de ellos es no nulo.

Si $a \neq 0$ entonces $u = -\frac{b}{a}v$. Tomando $\lambda = -\frac{b}{a}$ se tiene que $u = \lambda v$ con $\lambda \neq 0$ (pues si fuese $\lambda = 0$ se tendría que $b = 0$, de donde $0 = au$ y como $a \neq 0$ se llegaría a $u = 0$, que es una contradicción).

Del mismo modo se razona si $b \neq 0$.

($\Leftarrow$) Si $u = \lambda v$ para cierto $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, la expresión $0 = 1u - \lambda v$ asegura que $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente pues los coeficientes son $1 \neq 0$ y $\lambda \neq 0$ (alcanzaría con tener un sólo coeficiente no nulo para concluir).

(25) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 = 0(x) = ax^2 + bx|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, dicha ecuación se verifica para $x = 1$ y $x = -1$, de donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$, cuya única solución es $a = b = 0$. Luego, las funciones dadas son linealmente independientes en $[-1, 1]$. Sin embargo, en $[-1, 0]$, se tiene que $x|x| = x(-x) = -x^2$. Luego, por el ejercicio anterior, se trata de funciones linealmente dependientes en dicho intervalo.

(26) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 = 0(x) = a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, dicha ecuación se verifica para $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, de donde se obtiene $a = b = 0$. Luego, las funciones dadas son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Otra forma: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 = 0(x) = a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos miembros de la ecuación anterior y particularizando ambas ecuaciones en $x = 0$ se obtiene de nuevo $a = b = 0$.

(27) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $0 = 0(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando $n-1$ veces y sustituyedo en el punto $x = x_0$ se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \ldots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que por hipótesis, la matriz de coeficientes del sistema es invertible, la solución del sistema es la trivial. Por lo tanto, el conjunto

$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{C}^{(n-1)}_{[a,b]}$.

Es claro que $f_1(x) = x^2$ es una función derivable en $[-1, 1]$ (con $f_1'(x) = 2x$) y se puede probar que la función $f_2(x) = x|x|$ también lo es (con $f_2'(x) = 2|x|$). El sistema lineal asociado es

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0|x_0| \\ 2x_0 & 2|x_0| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0|x_0| \\ 2x_0 & 2|x_0| \end{bmatrix}\right) = 0, \text{ para todo } x_0,$$

el resultado no es aplicable para concluir.

Es claro que $f_1(x) = \cos(x)$ y $f_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$. El sistema lineal asociado es

$$\begin{bmatrix} \cos(x_0) & \operatorname{sen}(x_0) \\ -\operatorname{sen}(x_0) & \cos(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que

$$\det\left(\begin{bmatrix} \cos(x_0) & \operatorname{sen}(x_0) \\ -\operatorname{sen}(x_0) & \cos(x_0) \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0, \text{ para todo } x_0,$$

cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ cumple la hipótesis y el resultado es aplicable para concluir que dicho conjunto es linealmente independiente en $\mathcal{C}^{(1)}_{\mathbb{R}}$.

(28) (a) Sea $S \leq \mathbb{R}^1$. Entonces $\dim_{\mathbb{R}}(S) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^1) = 1$. Luego, $\dim_{\mathbb{R}}(S) \in \{0, 1\}$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 0$ entonces $S = \{0\}$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$ entonces $S \leq \mathbb{R}^1$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^1)$. Se tiene que $S = \mathbb{R}^1$.

(b) Sea $S \leq \mathbb{R}^2$. Entonces $\dim_{\mathbb{R}}(S) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$. Luego, $\dim_{\mathbb{R}}(S) \in \{0, 1, 2\}$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 0$ entonces $S = \{0\}$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$ entonces $S \leq \mathbb{R}^2$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. Se tiene que $S = \mathbb{R}^2$. Sea entonces $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$. En este caso, existe $u \in S$, $u \neq 0$, tal que $\mathcal{B}_S = \{u\}$ es una base de S y, por tanto, $S = \overline{\{u\}}$. Luego, cualquier vector

$(x, y) \in S$ es combinación lineal del vector u, es decir, $(x, y) = \lambda u$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, que corresponde a la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen de coordenadas.

(c) Si $S \leq \mathbb{R}^3$, debe ser $\dim_{\mathbb{R}}(S) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$. Luego, $\dim_{\mathbb{R}}(S) \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 0$ entonces $S = \{0\}$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$ entonces $S \leq \mathbb{R}^3$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Se tiene que $S = \mathbb{R}^3$.

Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$, en este caso, existe $u \in S$ tal que $\mathcal{B}_S = \{u\}$ es una base de S y, por tanto, $S = \overline{\{u\}}$. Luego, cualquier vector $(x, y, z) \in S$ es combinación lineal del vector linealmente independiente u, es decir, $(x, y) = \lambda u$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, que corresponde a la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$, en este caso, existen $u, v \in S$ tales que $\mathcal{B}_S = \{u, v\}$ es una base de S y, por tanto, $S = \overline{\{u, v\}}$. Luego, cualquier vector $(x, y, z) \in S$ es combinación lineal de los vectores linealmente independientes u y v, es decir, $(x, y, z) = \lambda u + \mu v$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que corresponde a la ecuación vectorial de un plano que pasa por el origen de coordenadas.

(29) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 + 0x = 0(x) = \alpha[1 + ax] + \beta[a + (a+2)x] = (\alpha + a\beta) + (a\alpha + (a+2)\beta)x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Identificando coeficientes en los polinomios se tiene que $\alpha + a\beta = 0$ y $a\alpha + (a+2)\beta = 0$. Luego, $\alpha = -a\beta$. Sustituyendo se obtiene $\beta[-a^2 + a + 2] = 0$. De esta expresión se llega a que $\beta = 0$ o bien $a^2 - a - 2 = 0$. Si fuese $\beta = 0$ entonces $\alpha = 0$, con lo que los polinomios dados serían linealmente independientes, en contra de lo pedido. Luego, debe ser $a^2 - a - 2 = 0$, es decir, $a = -1$ ó $a = 2$. Se observa que si $a = -1$ entonces el conjunto linealmente dependiente es $\{1 - x, -1 + x\}$ y si $a = 2$ entonces el conjunto linealmente dependiente es $\{1 + 2x, 2 + 4x\}$.

(30) Puesto que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, es claro que $\overline{S} = \mathbb{R}_2[x] \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\overline{S}) = 3$, lo que obliga a que sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ (pues si alguno de los dos escalares fuese nulo, S no dispondría de 3 elementos). Además, $\dim_{\mathbb{R}}(\overline{S}) = 3 \Leftrightarrow S$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$ (pues S

tiene 3 elementos). Se analizará esta última condición. En efecto, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $0 = 0(x) = \alpha(a + ax + ax^2) + \beta(bx^2) + \gamma(1) = (\alpha a + \gamma) + (\alpha a)x + (\alpha a + \beta b)x^2$. Identificando coeficientes en ambos polinomios $\alpha a + \gamma = 0$, $\alpha a = 0$, $\alpha a + \beta b = 0$. Al ser $a \neq 0$ y $b \neq 0$, debe cumplirse que $\alpha = 0 = \gamma = \beta$, con lo que los vectores de S son linealmente independientes en $\mathbb{R}_2[x]$.

Otra forma: Si en lugar de resolver un sistema homogéneo se plantea un sistema no homogéneo, se puede analizar por definición de sistema generador, bajo qué condiciones un vector genérico $p(x) = r+sx+tx^2$ pertenece a $\overline{S}$.

(31) $\alpha = 6$. La forma genérica de dichas matrices es $B = \begin{bmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{bmatrix}$, con $z, t \in \mathbb{R}$. Una base de S es $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

(32) Sigue de la definición de independencia lineal y utilizando la hipótesis de que B y C son invertibles. Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn$, la relación pedida es $p \leq mn$.

(33) Véase la demostración de la Proposición 8.4.

(34) Recuérdese la definición de subespacio generado.

(35) Véase la prueba de la Proposición 8.11 y téngase en cuenta que $x \in \cap_{i\in I} S_i$ si y sólo si $x \in S_i$, para todo $i \in I$.

(36) Si $S_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, se tiene que $(1, 0) \in S_1$ y $(0, 1) \in S_2$ pero $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin S_1 \cup S_2$.

(37) ($\Rightarrow$) Suponiendo que $S_1 \cup S_2 \leq V$ se debe probar que $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$. Si se cumple que $S_1 \subseteq S_2$, no hay nada que probar. Se supone entonces que $S_1 \nsubseteq S_2$ y se debe probar que $S_2 \subseteq S_1$. En efecto, como $S_1 \nsubseteq S_2$, existe $x \in S_1$ tal que $x \notin S_2$.

Sea $y \in S_2$. Se debe probar que $y \in S_1$. Como $x \in S_1$, se tiene que $x \in S_1 \cup S_2$. Análogamente, como $y \in S_2$, se tiene que $y \in S_1 \cup S_2$. Al ser $S_1 \cup S_2 \leq V$, se tiene que $x+y \in S_1 \cup S_2$, de donde resultan dos posibilidades: (a) $x+y \in S_1$ o bien (b) $x+y \in S_2$. Si se diese el caso (a), como $S_1 \leq V$, $-x \in S_1$ y se tiene que $y = (-x)+(x+y) \in S_1$, que es la tesis. Si se diese el caso (b), como $S_2 \leq V$, $-y \in S_2$ y se tiene que $x = (-y)+(x+y) \in S_2$, que es una contradicción.

($\Leftarrow$) Es trivial pues si $S_1 \subseteq S_2$ entonces $S_1 \cup S_2 = S_2$, que es un subespacio de V. Algo similar ocurre si $S_2 \subseteq S_1$.

(38) $k = 0$, $\dim_{\mathbb{R}}(S_0) = 1$ y una base de S_0 es $\{x-1\}$.

(39) ($\Rightarrow$) La inclusión $S \subseteq \overline{S}$ es evidente pues si $x \in S$ entonces $x = 1x$. Para probar que $\overline{S} \subseteq S$, sea $x \in \overline{S}$. Entonces x es combinación lineal finita de elementos de S. Como S es subespacio, $x \in S$.

($\Leftarrow$) Si $S = \overline{S}$, es evidente que S es un subespacio de V.

(40) Se deben chequear los 8 axiomas de espacio vectorial considerando todas las variaciones posibles de ceros y unos en cada caso (por ejemplo, se requieren 8 cálculos para demostrar el axioma (V_7)). Una base de $\mathbb{Z}_2$ es $\{1\}$.

(41) Cada apartado se prueba por doble inclusión utilizando la definición de subespacio generado. Mientras que en la Proposición 8.7 se analiza las operaciones elementales en relación a la independencia lineal, en este ejercicio se analiza en relación a sistemas de generadores.

(42) Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un sistema (finito) de generadores de V como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Entonces para cualquier vector $v \in V$, existen escalares complejos $z_j = a_j + ib_j$ (con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$) para $j = 1, 2, \ldots, r$ tales que $v = \sum_{j=1}^{r} z_j u_j = \sum_{j=1}^{r}(a_j + ib_j)u_j = \sum_{j=1}^{r}(a_j u_j + ib_j u_j) = \sum_{j=1}^{r} a_j u_j + \sum_{j=1}^{r} b_j(iu_j)$. De este modo, v es combinación lineal de $\{u_1, \ldots, u_r, iu_1, \ldots, iu_r\}$ con escalares reales. Por lo tanto, V es finitamente generado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial (aunque requiere el doble de vectores).

(43) Si (x, y) es una solución no trivial del sistema, basta expresar ma-

tricialmente el sistema lineal según sus columnas como $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, de donde se obtiene (a). Para probar (b), recordar que una matriz y su traspuesta tienen el mismo rango.

(44) Si las columnas de R_A se denotan mediante r_1, r_2, r_3, r_4, de la forma de R_A se tienen las siguientes relaciones de linealidad $r_2 = -6r_1$ y $r_4 = -2r_1 + 3r_3$. Luego, $a_2 = -6a_1$ y $a_4 = -2a_1 + 3a_3$ con lo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -1 & -5 \\ 2 & -12 & 0 & -4 \\ 3 & -18 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

(45) Por definición de independencia lineal.

(46) Todo vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como

$$(x, y) = \left(x - \frac{2}{3}y\right)(1, 0) + \frac{y}{3}(2, 3) \in S_1 + S_2.$$

Luego, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^2$. Si $(x, y) \in S_1 \cap S_2$ se prueba que $(x, y) = (0, 0)$. Luego, $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0)\}$. Así, $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^2$.

(47) Toda combinación lineal finita de vectores de $\mathbb{R}[x]$ tiene la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$. Si n es par, $p(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \in S_1 + S_2$. De forma similar se procede si n es impar. Luego, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}[x]$. Si $p(x) \in S_1 \cap S_2$ se tiene que $p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ (considerando que n es par y razonando de forma similar para n impar). Luego, $a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + a_4x^4 - a_5x^5 + \cdots - a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$. Identificando coeficientes, $a_i = 0$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Así, $p(x) = 0$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. De este modo, $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}[x]$.

(48) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ escalares tales que $0 = 0(x) = af(x) + bg(x) + ch(x)$, para todo $x \in [0, 1]$. En particular, ambos miembros coinciden para

$x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$. Al sustituir se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuya solución es $a = b = c = 0$. Luego $\{f, g, h\}$ es linealmente independiente en el espacio de todas las funciones reales definidas sobre el intervalo $[0, 1]$. Por otro lado, $k(x) = 1f(x) + 1g(x)$, es decir, $k \in \overline{\{f, g\}}$.

(49) Si fuese $e^x \in \overline{\{1, x, x^2, x^3, \dots\}}$, existiría una subconjunto finito

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\} \subseteq \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

tal que $e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ para ciertos $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Es importante observar que el subconjunto finito no debe contener necesariamente todas las potencias consecutivas desde $1 = x^0$ hasta x^n, pero en caso de faltar alguna de tales potencias se puede considerar que el coeficiente que la acompaña en la combinación lineal es un 0. Derivando n veces ambos miembros de la ecuación anterior y particularizando, luego, en $x = 0$ se obtiene un sistema lineal con matriz de coeficientes invertible. Luego, $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Es decir, $e^x = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que es una contradicción.

De manera similar se procede con las otras dos funciones.

(50) Es similar a la demostración de la Proposición 8.8 pero ahora trabajando con columnas (es decir, utilizando que $A \sim_c B$ si y sólo si existe P invertible tal que $B = AP$).

(51) $S_1 = \overline{\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}}$, $S_2 = \overline{\{(0, 2, 0), (0, 0, 1)\}}$. No se contradice el apartado (c) de la Proposición 8.18 puesto que no se cumple que $S_1 + S_2 = S_1 \oplus S_2$.

Capítulo 9

Coordenadas en espacios vectoriales

Índice

9.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Coordenadas de un vector respecto de una base
- Isomorfismo de Descartes
- Caracterización de espacios vectoriales isomorfos
- Dimensión, coordenadas y rango
- Matriz de cambio de base
- Subespacios y sistemas homogéneos
- Ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas de subespacios

9.2. EJERCICIOS

(1) Probar que el conjunto $S = \{a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] : a_0 + 2a_1 = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}_1[x]$ y hallar su dimensión. Demostrar que, como espacios vectoriales, S y $\mathbb{R}_0[x]$ son isomorfos.

(2) Establecer isomorfismos de espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ entre los siguientes espacios: el espacio vectorial de las matrices columnas $\mathbb{K}^{m\times 1}$, el espacio cartesiano $\mathbb{K}^m$ y espacio vectorial de las matrices fila $\mathbb{K}^{1\times m}$.

(3) Encontrar espacios isomorfos a los siguientes, indicando su dimensión:

   (i) Subespacio de matrices diagonales a coeficientes reales de tamaño $n \times n$.

   (ii) Subespacio de matrices triangulares superiores a coeficientes reales de tamaño $n \times n$.

   (iii) Subespacio de los polinomios p a coeficientes reales de grado menor o igual que 5 (junto al polinomio nulo) tales que $p(0) = 0$.

(4) Demostrar que la composición de dos isomorfismos de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales es un isomorfismo de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

(5) Indicar, justificando la respuesta, cuáles de los siguientes vectores son miembros de $S = \overline{\{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}}$, considerando a S como subespacio del espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

   (a) 1.

   (b) $x + 1$.

   (c) $\cos(2x)$.

   (d) $\cos(x)$.

   Para los que lo sean, escribir sus coordenadas respecto de la base dada de S.

(6) Para el sistema

$$\begin{cases} 2x+y &= 6 \\ -x-\frac{1}{2}y &= -3 \end{cases}$$

comprobar que se verifica el teorema que permite expresar su solución general como suma de una solución particular del sistema no homogéneo más la solución general del sistema homogéneo asociado. Representar gráficamente.

(7) Resolver el siguiente sistema lineal (no homogéneo)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 9 \end{cases}$$

y expresar su solución general como suma de una solución particular del sistema no homogéneo más la solución general del homogéneo asociado (es decir, esta última como una combinación lineal de elementos de una base del sistema homogéneo).

(8) Demostrar que si x_0 es una solución no trivial del sistema homogéneo $Ax=0$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces el sistema admite infinitas soluciones no triviales. ¿Es cierto el mismo resultado si A tiene coeficientes complejos? ¿Y si los coeficientes de A son elementos de $\mathbb{Z}_2$?

(9) Considerar el vector $u=(1,3,-2)^t$ y las bases de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$\mathcal{B} = \{b_1 = (1,0,0)^t,\, b_2 = (1,1,0)^t,\, b_3 = (1,1,1)^t\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \{b'_1 = (-1,1,2)^t,\, b'_2 = (1,1,0)^t,\, b'_3 = (1,1,1)^t\}.$$

(a) Hallar las coordenadas del vector u con respecto a la base $\mathcal{B}$.

(b) Calcular las coordenadas del vector u con respecto a la base $\mathcal{B}'$ usando:

(i) las coordenadas del vector u en la base canónica.

(ii) las coordenadas del vector u en la base $\mathcal{B}$.

(10) Sean $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $a \in \mathbb{R}$ un número fijo no nulo.

(a) Probar que $\mathcal{B} = \{1, x + a, (x + a)^2\}$ es una base de V.

(b) Hallar $[\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}$ siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de V.

(c) Escribir el vector $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ en la base $\mathcal{B}$. Realizarlo de dos formas distintas.

(d) Para $a = 0$, ¿coinciden los resultados obtenidos en los apartados anteriores?

(e) Calcular el polinomio de Taylor[1] de p de grado 2 alrededor del punto $x_0 = 1$ y comparar con el resultado del apartado (c) para el caso $a = -1$.

(11) Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las soluciones (x, y, z) del sistema homogéneo $x+y-z = 0$. Hallar unas ecuaciones paramétricas y unas cartesianas de S respecto de la base:

(a) canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$.

(12) Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_4[x]$ de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual que 4 junto al polinomio nulo y el subespacio $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(x) = p(-x)\}$. Hallar unas ecuaciones paramétricas y unas cartesianas de S:

(a) en la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

(b) en la base $\mathcal{B} = \{1, x - a, (x - a)^2, (x - a)^3, (x - a)^4\}$ para $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(13) Hallar unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^5$ definido por

$$S = \overline{\{e_2 + e_4, e_5\}}$$

[1] Se recuerda que el polinomio de Taylor $p_2(x)$ de una función f (suficientemente derivable) alrededor de un punto x_0 viene dado por la expresión $p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

en la base canónica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ de $\mathbb{R}^5$. Repetir el ejercicio en la base $\mathcal{B}$ dada por

$$\{(1,1,1,1,1),(0,1,1,1,1),(0,0,1,1,1),(0,0,0,1,1),(0,0,0,0,1)\}.$$

(14) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, encontrar unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas en la base canónica de $\mathbb{R}^5$ del siguiente subespacio

$$U = \overline{\{(1,1,1,1,1),(0,2,1,0,2),(-1,3,1,-1,3)\}}.$$

(15) En el espacio

$$\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

encontrar unas ecuaciones paramétricas del siguiente subespacio, dado mediante unas ecuaciones cartesianas en la base canónica por

$$[S]_{\mathcal{C}} : \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_0 & + & 3a_2 & = & 0 \\ a_1 & - & 2a_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

(16) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ encontrar, de tres formas diferentes, unas ecuaciones cartesianas en la base canónica del subespacio dado según las siguientes ecuaciones paramétricas en la base canónica

$$[S]_{\mathcal{C}} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \lambda - \mu \\ x_3 & = & \lambda + \mu - \gamma \\ x_4 & = & 2\lambda + \gamma \end{array} \right. , \quad \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}.$$

(17) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión 4 se considera la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y los subespacios vectoriales

$$U = \overline{\{u_1 - 2u_2 - u_3, 3u_1 + u_3, 2u_2\}}$$

y W de ecuaciones cartesianas

$$[W]_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccccc} a_1 & + & a_3 & = & 0 \\ a_2 & - & a_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Encontrar unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de los subespacios $U \cap W$ y $U + W$ en la base $\mathcal{B}$.

9.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) $p(x) \in S \Leftrightarrow p(x) = a_1(x-2)$, con $a_1 \in \mathbb{R}$; $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$. Se tiene que $S \cong \mathbb{R}_0[x]$ pues $\dim_{\mathbb{R}}(S) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_0[x]) = 1$.

(2) Se consideran las aplicaciones $\varphi : \mathbb{K}^{m\times 1} \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_m)$$

y $\psi : \mathbb{K}^{1\times m} \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_m).$$

Es inmediato probar que ambas aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas y respetan las operaciones.

(3) (I) $\mathbb{R}^n$, dimensión n.
(II) $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$.
(III) $\mathbb{R}^5$, dimensión 5.

(4) Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ dos isomorfismos de espacios vectoriales. Si $u, v \in V$ cumplen $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$ entonces $g(f(u)) = g(f(v))$. Como g es inyectiva, $f(u) = f(v)$. Al ser f inyectiva, $u = v$, con lo cual $g \circ f$ es inyectiva. Sea $v'' \in V''$. Por ser g sobreyectiva, existe $v' \in V'$ tal que $g(v') = v''$. Dado que $v' \in V'$ y f es sobreyectiva, existe $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Luego, $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(v') = v''$, con lo cual $g \circ f$ es sobreyectiva. Se tiene pues que $g \circ f$ es biyectiva. Falta ver que $g \circ f$ respeta las operaciones de los espacios vectoriales. En efecto, sean $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Usando que f y g respetan las operaciones se tiene que $(g \circ f)(v_1 + \lambda v_2) = g(f(v_1 + \lambda v_2)) = g(f(v_1) + \lambda f(v_2)) = g(f(v_1)) + \lambda g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1) + \lambda (g \circ f)(v_2)$. Luego, $g \circ f$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(5) (a) $1 \in S$ pues $1 = 1\operatorname{sen}^2(x) + 1\cos^2(x)$. Luego, $[1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $x+1 \notin S$ pues si $x+1 = a\operatorname{sen}^2(x) + b\cos^2(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para $x = 0$ se obtiene $b = 1$ y para $x = \pi$ se obtiene $b = \pi + 1$, que es una contradicción.

(c) $\cos(2x) \in S$ pues $\cos(2x) = (-1)\operatorname{sen}^2(x) + 1\cos^2(x)$. Luego, $[\cos(2x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\cos(x) \notin S$ pues si $\cos(x) = a\operatorname{sen}^2(x) + b\cos^2(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para $x = 0$ se obtiene $b = 1$ y para $x = \pi$ se obtiene $b = -1$, que es una contradicción.

(6) $S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Se trata de la ecuación vectorial de una recta, que pasa por el punto $(3, 0)$, desplazada paralelamente a otra que pasa por el origen.

(7) El conjunto solución S se puede escribir a partir de una solución particular p del sistema no homogéneo más la solución general S_h del sistema homogéneo (es decir, mediante $S = p + S_h$) donde

$$S = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(8) Si $Ax_0 = 0$, es evidente que $A(\alpha x_0) = \alpha A x_0 = \alpha 0 = 0$, luego αx_0 también es solución no trivial para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Lo mismo ocurre en el cuerpo de los números complejos, pero no en $\mathbb{Z}_2$ (véase contraejemplo en el Ejercicio (12) del Capítulo 4).

(9) (a) $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. (b) $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$.

(10) (a) Al ser $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, basta probar que los 3 vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes. Por definición, se supone que el polino-

mio nulo es combinación lineal de los 3 vectores dados y se particulariza, por ejemplo, para $x=-a$, $x=0$, $x=-2a$. Se deduce que los coeficientes de dicha combinación son nulos.

(b) Expresando cada vector de $\mathcal{B}$ como combinación lineal de la base $\mathcal{C}$ y disponiéndolos por columnas, $[\mathcal{B}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) El polinomio $p(x) = 1+2x+3x^2$ en la base canónica tiene coordenadas $[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Luego, $[p(x)]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{C}]_{\mathcal{B}}[p(x)]_{\mathcal{C}} = ([\mathcal{B}]_{\mathcal{C}})^{-1}[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1-2a+3a^2 \\ 2-6a \\ 3 \end{bmatrix}$.

Otra forma: Escribiendo el polinomio como combinación lineal de los polinomios de la base $\mathcal{B}$ se tiene $1+2x+3x^2 = (1-2a+3a^2)1 + (2-6a)(x+a)+3(x+a)^2$, de donde $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1-2a+3a^2 \\ 2-6a \\ 3 \end{bmatrix}$.

(d) Las expresiones obtenidas también son válidas para $a=0$ (pues ambas bases coinciden), aunque no es un caso interesante.

(e) $p_2(x) = p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2}(x-1)^2 = 6+8(x-1)+3(x-1)^2$.

(11) (a) Ecuaciones paramétricas $[S]_{\mathcal{C}} : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \alpha \\ y &=& \beta \\ z &=& \alpha+\beta \end{array} \right.$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{C}} : \{x+y-z=0$.

(b) Ecuaciones paramétricas $[S]_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& \alpha-\beta \\ y' &=& -\alpha \\ z' &=& \alpha+\beta \end{array} \right.$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{B}} : \{x'+2y'+z'=0$.

(12) (a) Ecuaciones paramétricas $[S]_{\mathcal{C}}: \begin{cases} a_0 &= \alpha \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \beta \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= \gamma \end{cases}$ $, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{C}}: \begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{cases}$.

(b) Ecuaciones paramétricas

$$[S]_{\mathcal{B}}: \begin{cases} \alpha &= a_0 + a^2a_2 + 2a^4a_4 \\ \beta &= 2aa_2 + 4a^3a_4 \\ \gamma &= a_2 + 6a^2a_4 \\ \delta &= 4aa_4 \\ \pi &= a_4 \end{cases} \quad , a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}$$

y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{B}}: \begin{cases} \beta - 2a\gamma + 8a^3\pi &= 0 \\ \delta - 4a\pi &= 0 \end{cases}$.

(13) (a) Ecuaciones paramétricas $[S]_{\mathcal{C}}: \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= \alpha \\ x_5 &= \beta \end{cases}$ $, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{C}}: \begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_2 - a_4 &= 0 \end{cases}$.

(b) Ecuaciones paramétricas $[S]_{\mathcal{B}}: \begin{cases} x_1' &= 0 \\ x_2' &= \alpha \\ x_3' &= -\alpha \\ x_4' &= \alpha \\ x_5' &= -\alpha + \beta \end{cases}$ $, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{B}} : \begin{cases} a_1 & = & 0 \\ a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_2 - a_4 & = & 0 \end{cases}$.

(14) Ecuaciones paramétricas $[U]_{\mathcal{C}} : \begin{cases} x_1 & = & \alpha - \beta \\ x_2 & = & \alpha + 3\beta \\ x_3 & = & \alpha + \beta \\ x_4 & = & \alpha - \beta \\ x_5 & = & \alpha + 3\beta \end{cases}$ $, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[U]_{\mathcal{C}} : \begin{cases} x_1 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_5 & = & 0 \end{cases}$. Así, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$.

(15) Ecuaciones paramétricas $[S]_{\mathcal{C}} : \begin{cases} b_0 & = & -3\alpha \\ b_1 & = & 2\beta \\ b_2 & = & \alpha \\ b_3 & = & \beta \end{cases}$ $, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y ecuaciones cartesianas $[S]_{\mathcal{C}} : \begin{cases} b_0 + 3b_2 & = & 0 \\ b_1 - 2b_3 & = & 0 \end{cases}$.

(16) Una forma es siguiendo la demostración del Teorema 9.6, otra es eliminando parámetros y una tercera es aplicar el método de Gauss-Jordan: $x_1 = 0$.

(17) $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$, $\mathcal{B}_U = \{u_1 - 2u_2 - u_3, 3u_1 + u_3, 2u_2\}$, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$, $\mathcal{B}_W = \{u_1 - u_3, u_2 + u_4\}$. Uniendo sistemas de generadores y eliminando superfluos, $\mathcal{B}_{U+W} = \{3u_1+u_3, 2u_2, u_1-u_3, u_2+u_4\}$ es una base de $U+W$, de donde, $U+W = \mathbb{R}^4$. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1$ y $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{u_1 - u_3\}$ es una base de $U \cap W$. Luego, unas ecuaciones paramétricas son

$$[U+W]_{\mathcal{B}} : \begin{cases} x_1 & = & \alpha \\ x_2 & = & \beta \\ x_3 & = & \gamma \\ x_4 & = & \delta \end{cases} , \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

y si $[u_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{bmatrix}$ y $[u_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \\ u_{34} \end{bmatrix}$ entonces

$$[U \cap W]_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \alpha(u_{11} - u_{31}) \\ x_2 & = & \alpha(u_{12} - u_{32}) \\ x_3 & = & \alpha(u_{13} - u_{33}) \\ x_4 & = & \alpha(u_{14} - u_{34}) \end{array} \right. , \alpha \in \mathbb{R}$$

y unas ecuaciones cartesianas

$$[U + W]_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{lcl} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

y

$$[U \cap W]_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{lcl} x_2(u_{11} - u_{31}) - x_1(u_{12} - u_{32}) & = & 0 \\ x_3(u_{11} - u_{31}) - x_1(u_{13} - u_{33}) & = & 0 \\ x_4(u_{11} - u_{31}) - x_1(u_{14} - u_{34}) & = & 0 \end{array} \right.$$

donde, al ser $u_1 - u_3 \neq 0$, se ha supuesto que, por ejemplo $u_{11} - u_{31} \neq 0$.

Capítulo 10

Espacios euclídeos

Índice

10.1. TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo corresponden a los temas:

- Espacios vectoriales con producto interno
- Norma y distancia
- Ángulo de dos vectores
- Ortogonalidad
- Bases ortonormales
- Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt
- Complemento ortogonal
- Proyección ortogonal y mejor aproximación
- Isomorfismo de espacios euclídeos
- Matriz de Gram

10.2. EJERCICIOS

(1) Comprobar que en el cuerpo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución[1].

(2) Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

  (a) Condición de **positividad**: $\langle u, u \rangle > 0$ para todo $u \in E - \{0\}$.

  (b) Condición (de **no negatividad**): $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in E$ y la condición (de **definición positiva**): $\langle u, u \rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$.

(3) Probar que si E es un espacio euclídeo real con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

  (a) $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in E$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

  (b) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ y $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para todo $u, v, w \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Enunciar un resultado similar para la linealidad en el segundo argumento.

(4) Probar que en un espacio euclídeo, el vector nulo es el único vector que tiene norma igual a 0.

(5) Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo real, $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ y $u, u_1, \ldots, u_n \in E$, $v, v_1, \ldots, v_m \in E$. Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

  (a) $\langle 0, u \rangle = 0$ para todo $u \in E$ utilizando que el vector nulo es producto del escalar cero por el vector u. Comparar esta demostración con la dada en la Proposición 10.1.

  (b) $\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^m b_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle$.

  (c) Si $\langle u, w \rangle = 0$, para todo $w \in E$ entonces $u = 0$.

[1] Este ejercicio justifica que, para definir un producto escalar, es necesario considerar $\mathbb{K}$-espacios vectoriales donde los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ admitan raíz cuadrada.

(d) Si $\langle w, v\rangle = 0$, para todo $w \in E$ entonces $v = 0$.

(e) Si $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$, para todo $w \in E$ entonces $u = v$.

(f) Si $\langle w, u\rangle = \langle w, v\rangle$, para todo $w \in E$ entonces $u = v$.

(Sugerencia: en el apartado (a) utilizar el método de inducción doble, sobre n y sobre m.)

(6) Sea E un espacio euclídeo y $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \subseteq E$. Probar que si para algún $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, v_i es combinación lineal de los restantes y ortogonal a todos ellos entonces $v_i = 0$.

(7) Comprobar la validez de los axiomas (PE1)-(PE3) en el Ejemplo 10.1 utilizando las componentes de los vectores y comparar con la resolución utilizando el producto matricial.

(8) Indicar, justificando la respuesta, si en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ la aplicación definida por

$$\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4,$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix},$$

define un producto escalar.

(9) Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Probar que la aplicación

$$\langle x, y\rangle = x^t A y$$

define un producto escalar en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. ¿Ocurre lo mismo si se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$? ¿Y con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$? Justificar.

(10) Comprobar que la aplicación definida en el Ejemplo 10.6 es, efectivamente, un producto escalar sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

(11) (a) Demostrar que

$$\langle x, y\rangle = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\right]$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ siendo $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ e $y = (y_1, y_2, y_3)^t$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

(b) Si se cambia la matriz del apartado anterior por

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

¿sigue siendo un producto escalar la aplicación considerada?

(c) ¿Qué producto escalar se obtiene en el primer apartado si se cambia la matriz dada por la matriz identidad de tamaño 3×3?

(12) En el espacio euclídeo $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x \qquad \text{para } p, q \in \mathbb{R}_2[x]$$

calcular la norma del vector $r(x) = x - 1$.

(13) Sean x e y dos vectores de un espacio vectorial real con producto interior y sea $y \neq 0$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $x - ay$ sea ortogonal a y.

(14) Los vectores x e y de un espacio euclídeo real forman un ángulo de $\pi/3$ radianes y la norma de x es 4. Determimar la norma de y para que $y - x$ sea ortogonal a x.

(15) Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo real de dimensión finita $n \geq 1$ y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E. Para dos

vectores $x, y \in E$ tales que

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

probar que:

(a) su producto escalar es

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = ([x]_{\mathcal{B}})^t [y]_{\mathcal{B}}.$$

(b) la norma de x viene dada por

$$\|x\| = +\sqrt{([x]_{\mathcal{B}})^t [x]_{\mathcal{B}}}.$$

Este ejercicio asegura que el producto escalar y la norma en un espacio euclídeo E cualquiera de dimensión finita n se calculan como el producto escalar y la norma de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico siempre que se utilice una base ortonormal de E para dicho cálculo.

(16) Construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico a partir de la base

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0)^t,\ u_2 = (1,2,0)^t,\ u_3 = (0,1,2)^t\}.$$

(17) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se considera la aplicación definida por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right) q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1), \qquad p, q \in \mathbb{R}_2[x].$$

(a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$ y, por tanto, $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo.

(b) Hallar el complemento ortogonal de $U = \overline{\{x\}}$ respecto del producto interior indicado y una base de $U^{\perp}$.

(c) Verificar que se cumple la propiedad que relaciona las dimensiones de los subespacios vectoriales U y $U^{\perp}$.

(d) Calcular la proyección ortogonal de $p(x) = 1 + 3x - x^2$ sobre U.

(18) Sea $\langle ., . \rangle$ la aplicación real

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida como sigue

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle := u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$$

siendo $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ y $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$.

(b) ¿Cuál es la norma inducida por el producto escalar considerado?

(c) ¿Cuáles son todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ de norma 1? Realizar una interpretación geométrica.

(d) Calcular el ángulo y la distancia entre los vectores $u = (1, 1, -1)^t$ y $v = (1, 1, 0)^t$.

(e) Hallar $U^{\perp}$, una base y su dimensión siendo $U = \overline{\{u_0\}}$ para $u_0 = (1, 1, -1)^t$.

(f) Aplicando el método de Gram-Schmidt construir una base ortonormal para $U^{\perp}$ a partir de la base hallada en el apartado anterior. Comprobar que los vectores hallados son ortogonales a u_0 con respecto a este producto escalar.

(g) Expresar $w = (7, 1, -1)^t$ como suma de un vector de U y otro de $U^{\perp}$. ¿Es única dicha representación? Justificar.

(h) Hallar la proyección ortogonal de $w = (7, 1, -1)^t$ sobre U y su componente ortogonal.

(i) Comprobar el teorema de Pitágoras para los vectores hallados en el apartado anterior.

(19) Obtener, si es posible, un conjunto ortogonal a partir de las columnas de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

utilizando el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^4$.

(20) En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico considerar los vectores $u_1 = (4, -3, 0)^t$ y $u_2 = (1, 2, 0)^t$.

(a) Hallar un vector $u_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a u_1 y u_2 de modo que $||u_3|| = 4$ y tal que su tercera componente sea positiva. ¿Cuántos vectores hay en estas condiciones? Intentarlo primero de manera intuitiva y luego analíticamente.

(b) A partir de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, hallar una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Podrían haberse determinado a priori y de manera intuitiva las direcciones de los vectores de la base ortonormal pedida?

(c) Expresar $v = (5, 10, 15)^t$ como combinación lineal de los vectores de la base ortonormal hallada en el apartado anterior (¡sin resolver sistemas de ecuaciones lineales!).

(21) Las *funciones de Walsh* son funciones ortogonales[2] convenientes para usar en *sistemas digitales*. Las tres primeras funciones de Walsh se definen a continuación:

$$f_1(x) = \alpha \text{ si } x \in [0, 1]; \qquad f_2(x) = \begin{cases} -\beta, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \beta, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

[2]Respecto del mismo producto escalar que se ha definido sobre las funciones continuas. En realidad, para que sea producto escalar debería definirse sobre un conjunto que escapa el nivel de este libro y aquí se prescindirá de estas cuestiones técnicas.

y

$$f_3(x) = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\gamma, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{4} \\ \gamma, & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

siendo α, β y γ números reales positivos.

(a) Comprobar que las funciones f_1, f_2 y f_3 son ortogonales sobre el intervalo $[0, 1]$.

(b) Determinar los valores de α, β y γ para que las funciones f_1, f_2 y f_3 sean ortonormales sobre el intervalo $[0, 1]$.

(c) Calcular la proyección ortogonal de la función $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, sobre el subespacio generado por las funciones f_1, f_2 y f_3.

(22) A partir de la base canónica encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ si el producto escalar está definido por

$$\langle p,\, q\rangle = p(x_1)q(x_1) + p(x_2)q(x_2) + p(x_3)q(x_3) \qquad \text{para } p,\, q \in \mathbb{R}_2[x]$$

donde $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. ¿A qué es igual la matriz de Gram de este producto escalar respecto de la base encontrada? ¿Y respecto de la base $\mathcal{B} = \{x+1, x-1, x^2\}$? ¿Son $x+1$ y $x-1$ ortogonales? Justificar.

(23) Se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 24 \\ 4 & -8 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

¿Se puede aplicar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal a partir de las columnas de la matriz A? ¿Por qué? Intentarlo e indicar a qué resultado se llega.

(24) Este problema de Cálculo Diferencial será necesario para el resolver el próximo ejercicio. Probar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a > 0$

satisfacen que

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

entonces $b^2 - 4ac \leq 0$. (Ayuda: Encontrar el valor mínimo que alcanza el polinomio en la variable x.)

(25) Proporcionar tres demostraciones alternativas de la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

(a) Para la primera, sustituir el valor de λ por aquel para el cual la expresión (10.3) alcance el mínimo absoluto y razonar por qué dicho valor es el adecuado.

(b) Al definir la proyección ortogonal de un vector v sobre un vector no nulo u, ambos de un espacio euclídeo, se encuentra que $\text{proy}_u v = \lambda u$ siendo $\lambda = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$. Razonando geométricamente en una gráfica de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar canónico, se observa que $0 \leq \|\alpha u - v\| = d(\alpha u, v)$ obtiene su valor mínimo cuando se toma $\alpha = \lambda$. Ahora, desarrollar el cálculo de $0 \leq \|\lambda u - v\|^2$ para llegar a la conclusión en un espacio euclídeo arbitrario.

(c) Para la tercera, supóngase el caso (no trivial) en que ambos vectores sean no nulos. Ahora, la desigualdad es equivalente a la expresión $\left|\left\langle \frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v \right\rangle\right| \leq 1$. Para demostrarla, considerar la suma y la resta de los vectores $\frac{1}{\|u\|}u$ y $\frac{1}{\|v\|}v$ y realizar el producto escalar de cada uno consigo mismo.

(26) Probar que, en la desigualdad de Cauchy-Swcharz, la igualdad se obtiene si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

(27) Probar que, en la desigualdad triangular, la igualdad se obtiene si y sólo si los vectores son linealmente dependientes y un vector se obtiene como un múltiplo no negativo del otro.

(28) Demostrar que en un espacio euclídeo E se cumple:

(a) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, para todo $x, y \in E$.

(b) $\|-x\| = \|x\|$, para todo $x \in E$.

(c) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, para todo $x, y \in E$.

(29) Demostrar la ley del paralelogramo de la Proposición 10.2.

(30) Demostrar la identidad de polarización de la Proposición 10.2.

(31) Realizar una interpretación geométrica de la ley del paralelogramo y de la desigualdad triangular en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar canónico.

(32) Sea E un espacio euclídeo real y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dos escalares no nulos con el mismo signo. Probar que $\text{áng}(u, v) = \text{áng}(\alpha u, \beta v)$, para todo $u, v \in E$.

(33) **Teorema del coseno**: Sea E un espacio euclídeo real y sean $u, v \in E$ dos vectores no nulos. Probar que

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos(\text{áng}(u, v)).$$

Realizar una interpretación geométrica en $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar canónico.

(34) Estudiar en qué caso se da la igualdad en el Teorema de la mejor aproximación. Realizar una interpretación geométrica en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico siendo el subespacio S un plano que pasa por el origen. Considerar los casos $u \in S$ y $u \notin S$.

(35) Comprobar que de la desigualdad de Cauchy-Schwarz particularizada al espacio:

(a) $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico se obtiene

$$\begin{aligned} &(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq \\ &\leq \quad (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2). \end{aligned}$$

(b) $\mathcal{C}[a, b]$ con el producto escalar del Ejemplo 10.3 se obtiene

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right).$$

(c) $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto escalar de Frobenius del Ejemplo 10.4 se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2\right).$$

(d) $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar del Ejemplo 10.6 se obtiene

$$\begin{aligned}(6u_1v_1 - u_2v_1 + u_3v_1 - u_1v_2 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_3)^2 \leq \\ \leq \quad \left(6u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2 - 2u_1u_2 + 2u_1u_3\right) \cdot \\ \left(6v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2 - 2v_1v_2 + 2v_1v_3\right).\end{aligned}$$

(36) Comprobar que las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisfacen el teorema de Pitágoras con el producto escalar de la integral en el espacio de las funciones continuas definidas en $[-\pi, \pi]$.

(37) **Teorema de Pitágonas generalizado**: Sea $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espacio euclídeo real. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subseteq E$ es un conjunto ortogonal con $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, entonces

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_s\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_s\|^2.$$

(38) Probar que en todo espacio euclídeo real es válida la implicación recíproca del Teorema de Pitágoras.

(39) **Ley del rombo**: Sea $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espacio euclídeo real y sean $x, y \in E$. Entonces

$$\|x\| = \|y\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle x + y, x - y\rangle = 0.$$

Realizar una interpretación geométrica en el caso del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar canónico y $\{x, y\}$ un conjunto linealmente independiente.

(40) La norma del Ejemplo 10.10 de la página 543 se conoce como **norma 1**. Hallar la expresión de la **distancia inducida por la**

norma 1 entre dos puntos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Esta distancia recibe el nombre de **métrica del taxista** y fue desarrollada por el matemático alemán Herman Minkowski (1864-1909). Partiendo ahora de la expresión encontrada, comprobar que esta función satisface los axiomas de distancia. Interpretar geométricamente el significado de esta distancia en $\mathbb{R}^2$ calculándola entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 4)$; esto permitirá ver por qué también se la conoce como **distancia Manhattan**. Para ello, pintar los puntos dados y dibujar, desde el origen, 4 unidades sobre el eje horizontal y desde el punto obtenido, 4 unidades sobre el eje vertical hasta llegar al punto $(4, 4)$. Por otro lado, pintar sucesivamente escalones horizontales y verticales de una unidad cada uno para llegar desde $(0, 0)$ hasta $(4, 4)$ y contar el número total de escalones.

(41) Hallar el complemento ortogonal del subespacio

$$S = \overline{\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}}$$

del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico. Luego, calcular $(S^\perp)^\perp$ y comparar con S.

(42) En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el producto escalar de Frobenius, se considera el subespacio

$$S = \overline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}}.$$

Se pide:

(a) Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-subespacio vectorial S.

(b) Calcular la dimensión de $S^\perp$.

(c) Encontrar una base ortonormal de S y una de $S^\perp$.

(d) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular $\mathrm{proy}_S(A)$ y $\mathrm{proy}_S(B)$.

(e) Para las matrices A y B del apartado anterior, calcular las distancias (inducida por la norma de Frobenius) de A y de B a sus respectivas proyecciones ortogonales sobre S y proporcionar un significado geométrico para dichos resultados.

(43) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^7$ se considera el producto escalar canónico, el vector $u = (1,1,1,1,1,1,1)$ y el subespacio

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbb{R}^7 : \sum_{i=1}^{7} i x_i = 0 \right\}.$$

Calcular la mejor aproximación de u en el subespacio S hallando previamente $\text{proy}_{S^\perp}(u)$. Observar que se ahorran numerosos cálculos si se procede de esta forma indirecta. Generalizar este ejercicio a $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario (Ayuda: Recordar las fórmulas de la suma de los n primeros números naturales y la de sus cuadrados.)

(44) **Desigualdad de Bessel**: Sea $(E, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ un espacio euclídeo real y sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subseteq E$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos. Probar que para cualquier vector $u \in E$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\langle u, u_k \rangle^2}{\|u_k\|^2} \leq \|u\|^2.$$

Deducir que $\|\text{proy}_{\overline{S}}(u)\| \leq \|u\|$. Además, la igualdad se cumple si y sólo si $u \in \overline{S}$.

(Ayuda: Considerar $u = \text{proy}_{\overline{S}}(u) + \widetilde{u_2}$ con $\widetilde{u_2} \perp \overline{S}$. Aplicar el Teorema de Pitágoras y luego desarrollar $\|\text{proy}_{\overline{S}}(u)\|^2$ escribiendo la proyección ortogonal como una combinación lineal de los elementos de $\overline{S}$ mediante los coeficientes de Fourier).

(45) Sea $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz cuyas columnas son ortonormales respecto del producto escalar canónico de $\mathbb{R}^m$.

(a) Demostrar que $Q^t Q = I_n$.

(b) ¿Podría suceder que $QQ^t \neq I_m$? ¿Y si $m = n$? Justificar la respuesta.

10.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) $0^2 = 0 \neq 2$, $1^2 = 1 \neq 2$ y $2^2 = 1 \neq 2$.

(2) (a) $\Rightarrow$ (b) Es evidente que (a) y $\langle 0, 0\rangle = 0$ implican $\langle u, u\rangle \geq 0$ para todo $u \in E$ y, además, que $\langle u, u\rangle = 0$ si $u = 0$. Falta ver que $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. Si fuese $u \neq 0$, por (a), $\langle u, u\rangle > 0$, en contra de la hipótesis.

(b) $\Rightarrow$ (a) Basta utilizar la condición de no negatividad y observar que, por la definición positiva, 0 es el único vector que cumple $\langle u, u\rangle = 0$.

(3) (a) $\Rightarrow$ (b) Particularizar primero a $\alpha = 1$ y luego a $v = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sigue de forma directa al aplicar las hipótesis.

Para el segundo argumento: $\langle w, \alpha u + v\rangle = \alpha\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$ para todo $u, v, w \in E$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Se debe probar que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, que sigue directamente de la propiedad similar para producto escalar y de la definición de norma.

(5) (a) Sea $u \in E$. Dado que $\vec{0} = 0\vec{u}$ se tiene que $\langle \vec{0}, \vec{u}\rangle = \langle 0\vec{u}, \vec{u}\rangle = 0\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = 0$.

(b) Se comienza por inducción sobre n. Si $n = 1$, se cumple

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{1} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle &= \left\langle a_1 u_1, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\ &= a_1 \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle . \end{aligned} \tag{10.1}$$

Para llegar al resultado buscado, que es

$$\left\langle \sum_{i=1}^{1} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \langle u_i, v_j\rangle, \tag{10.2}$$

se debe realizar ahora inducción sobre m (es decir, operar en el segundo argumento, manteniendo fijo el valor de $n = 1$). Para ello, si $m = 1$,

$$\begin{aligned} a_1 \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{1} b_j v_j \right\rangle &= a_1 \langle u_1, b_1 v_1 \rangle \\ &= a_1 b_1 \langle u_1, v_1 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{1} a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle. \end{aligned}$$

Luego, de esta última igualdad y por (10.1) queda probado (10.2) para el caso $m = 1$ (dentro del caso $n = 1$).
Sea $m > 1$ y suponer que la igualdad vale para $m - 1$. Se debe probar que vale para m. En efecto,

$$\begin{aligned} a_1 \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle &= \\ &= a_1 \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{m-1} b_j v_j + b_m v_m \right\rangle \\ &= a_1 \left[\left\langle u_1, \sum_{j=1}^{m-1} b_j v_j \right\rangle + \langle u_1, b_m v_m \rangle \right] \\ &= a_1 \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{m-1} b_j v_j \right\rangle + a_1 \langle u_1, b_m v_m \rangle \\ &= a_1 \sum_{j=1}^{m-1} b_j \langle u_1, v_j \rangle + a_1 b_m \langle u_1, v_m \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} a_1 b_j \langle u_1, v_j \rangle + a_1 b_m \langle u_1, v_m \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_1 b_j \langle u_1, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \langle u_1, v_j \rangle . \end{aligned}$$

Queda así probado completamente el caso $n = 1$, estableciendo (10.2) para todo $m \in \mathbb{N}$.
Sea ahora $n > 1$. Se debe suponer que la igualdad vale para $n-1$ y probar que vale para n. En efecto, para todo $m \in \mathbb{N}$ (fijo pero arbitrario) se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i + a_n u_n, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle + \left\langle a_n u_n, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle + a_n \left\langle u_n, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle . \qquad (10.3)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (10.1), la igualdad (10.3) se ha probado para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora se debe proceder por inducción sobre m operando en el segundo argumento. Si $m = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{1} b_j v_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, b_1 v_1 \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_1 \langle u_i, v_1 \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{1} a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle .
\end{aligned}$$

Sea $m > 1$ y suponer que la igualdad vale para $m - 1$. Se debe probar que vale para m. En efecto, por (10.3),

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{m-1} b_j v_j + b_m v_m \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\left\langle u_i, \sum_{j=1}^{m-1} b_j v_j \right\rangle + \langle u_i, b_m v_m \rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\sum_{j=1}^{m-1} b_j \langle u_i, v_j \rangle + b_m \langle u_i, v_m \rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m-1} b_j \langle u_i, v_j \rangle + \sum_{i=1}^{n} a_i b_m \langle u_i, v_m \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m-1} a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m}^{m} a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle .
\end{aligned}$$

(c) y (d) Particularizar a $w = u$ y $w = v$, respectivamente.

(e) De la hipótesis y propiedades del producto escalar se tiene $\langle u - v, w \rangle = 0$, para todo $w \in E$. Ahora aplicar (b).

(f) Similar al anterior.

(6) $\langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i, \sum_{j=1, j\neq i}^{s} a_j v_j \rangle = \sum_{j=1, j\neq i}^{s} a_j \langle v_i, v_j \rangle = 0$.

(7) Similar al Ejemplo 10.2.

(8) No. A pesar de cumplir los axiomas (PE1)-(PE3) no cumple el axioma (PE4). Contraejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ cumple que $\langle A, A \rangle = -2 \not\geq 0$. Ademas, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ cumple que $\langle B, B \rangle =$

0 pero $B \neq O$.

(9) Para la primera matriz se prueba de forma similar al Ejemplo 10.2. Para la segunda se cumplen los axiomas (PE1)-(PE3) pero no se cumple (PE4). Contraejemplo: $\langle x, x\rangle = -\frac{1}{2} \ngeq 0$ para $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para la tercera matriz tampoco se cumple. Contraejemplo: $\langle x, y\rangle = 4 \neq 6 = \langle y, x\rangle$ para $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(10) Los 3 primeros axiomas se prueban fácilmente mediante notación matricial. Para el axioma (PE4), completando cuadrados, se tiene que $\langle u, u\rangle = 6u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + 2u_2^2 + u_3^2 = 6\left(u_1 - \frac{1}{6}u_2 + \frac{1}{6}u_3\right)^2 + \frac{11}{6}\left(u_2 + \frac{1}{11}u_3\right)^2 + \frac{9}{11}u_3^2$ para $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, de donde se tiene el resultado de forma sencilla.

(11) (a) Similar al ejercicio previo, con $\langle x, x\rangle = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 2\left(x_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2 + x_3\right)^2 + x_3^2$ para $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

(b) La matriz dada no es simétrica.

(c) Se obtiene el producto escalar canónico.

(12) $\|x - 1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(13) $a = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$.

(14) $\|y\| = 8$.

(15) (a) Como $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ e $y = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$, aplicando propiedades del producto escalar se obtiene $\langle x, y\rangle = \langle x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n, y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = ([x]_{\mathcal{B}})^t[y]_{\mathcal{B}}$. (b) Particularizando (a) al caso $y = x$ se obtiene la norma.

(16) $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^t, (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^t, (0, 0, 1)^t\right\}$.

(17) (a) Se debe utilizar la definición de suma de dos funciones y de producto de un escalar por una función. Observar que si un polinomio de grado 2 tiene 3 raíces reales entonces debe ser el polinomio nulo.

(b) Si $q(x) = x$ se deben calcular los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que $\langle p, q\rangle = 0$. Se obtiene $9a + 10b + 12c = 0$ y una base de $U^\perp$ es $\left\{x - \frac{10}{9}x^2, 1 - \frac{4}{3}x^2\right\}$.

(c) $\dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(U^\perp) = 1 + 2 = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$.

(d) $\mathrm{proy}_U(p) = \frac{\langle p,x\rangle}{\langle x,x\rangle}x = \frac{33}{10}x$.

(18) (a) Es un producto escalar de la forma

$$\langle u, v\rangle = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

(b) $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2}$.

(c) $u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2 = 1$, que corresponden al lugar geométrico de todos los puntos del espacio tridimensional que determina el elipsoide de ecuación $u_1^2 + \frac{u_2^2}{1/2} + \frac{u_3^2}{1/3} = 1$.

(d) $\text{áng}(u, v) = \frac{\pi}{4}$ y $\mathrm{d}(u, v) = \sqrt{3}$.

(e) $\mathcal{B}_{U^\perp} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ y $\dim_{\mathbb{R}}(U^\perp) = 2$.

(f) $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 0)^t, \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1)^t\right\}$.

(g) $w = (2, 2, -2)^t + (5, -1, 1)^t \in U + U^\perp$, es única pues $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^3$.

(h) $(2, 2, -2)^t$, $(5, -1, 1)^t$.

(i) $\|(7, 1, -1)^t\|^2 = 54$, $\|(2, 2, -2)^t\|^2 + \|(5, -1, 1)^t\|^2 = 24 + 30$.

(19) $\left\{(1, 1, 1, 1)^t, (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})^t, (2, -2, 2, -2)^t\right\}$.

(20) (a) $u_3 = (0, 0, 4)^t$.

(b) $\left\{b_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)^t, b_2 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^t, b_3 = (0, 0, 1)^t\right\}$. Por la forma del primer y tercer vectores se puede deducir la del segundo, cambiando el orden de las coordenadas y un signo.

(c) Usando coeficientes de Fourier generalizados, $v = -2b_1 + 11b_2 + 15b_3$.

(21) (a) Probar que las integrales en $[0,1]$ del producto de cada par de funciones distintas es 0, es decir, $\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_1, f_3\rangle = \langle f_2, f_3\rangle = 0$.
(b) $\alpha = \beta = \gamma = 1$.
(c) Si $S = \overline{\{f_1, f_2, f_3\}}$, se tiene $\operatorname{proy}_S(f) = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{4}f_2$.

(22) $\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}x, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)\right\}$, $G_{\mathcal{B}'} = I_3$,

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$\langle x+1, x-1\rangle = -4 \neq 0$, por tanto $x+1$ y $x-1$ no son ortogonales.

(23) No, pues son linealmente dependientes. Al aplicar el método se llega a un vector nulo.

(24) Como $p(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular, $p(x_0) \geq 0$ para el número x_0 tal que $p(x_0)$ es el mínimo absoluto de p en todo $\mathbb{R}$. Al derivar e igualar a 0 se obtiene el punto crítico $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Puesto que $p''(x_0) = 2a > 0$, se trata de un mínimo (en este caso, absoluto). Al sustituir dicho valor, $0 \leq p(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Al ser $a > 0$ se tiene que $b^2 - 4ac \leq 0$.

(25) (a) Al demostrar dicha desigualdad se ha obtenido $0 \leq \|u + \lambda v\| = \langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$. Se ha encontrado un polinomio de segundo grado (pues $\langle v, v\rangle \neq 0$ ya que $v \neq 0$) que es no negativo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. En particular, lo será para el valor mínimo que tome dicha función, que se ha calculado en el ejercicio previo; $\lambda = -\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$. Luego, $0 \leq \langle u, u\rangle + 2\left(-\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\right)\langle u, v\rangle + \left(-\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\right)^2\langle v, v\rangle = \|u\|^2 - 2\frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2} + \frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 = \|u\|^2 - \frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2}$. Despejando se obtiene el resultado.
(b) Siguiendo el razonamiento del enunciado, al sustituir en $0 \leq \|\lambda u - v\|^2 = \langle \lambda u - v, \lambda u - v\rangle = \lambda^2\langle u, u\rangle - 2\lambda\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$ el

valor $\lambda = -\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$ se tiene el resultado de forma similar al apartado anterior.
(c) Si $u \neq 0 \neq v$ se debe probar que $\left|\left\langle \frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v\right\rangle\right| \leq 1$. En efecto, $0 \leq \left\langle \frac{1}{\|u\|}u + \frac{1}{\|v\|}v, \frac{1}{\|u\|}u + \frac{1}{\|v\|}v\right\rangle = \left(\frac{1}{\|u\|}\right)^2 \langle u,u\rangle + 2\frac{1}{\|u\|}\frac{1}{\|v\|}\langle u,v\rangle + \left(\frac{1}{\|v\|}\right)^2 \langle v,v\rangle = 2+2\frac{1}{\|u\|}\frac{1}{\|v\|}\langle u,v\rangle$. Despejando se llega a $-\|u\|\|v\| \leq \langle u,v\rangle$. De forma semejante, $0 \leq \left\langle \frac{1}{\|u\|}u - \frac{1}{\|v\|}v, \frac{1}{\|u\|}u - \frac{1}{\|v\|}v\right\rangle = 2 - 2\frac{1}{\|u\|}\frac{1}{\|v\|}\langle u,v\rangle$. Despejando se llega a $\langle u,v\rangle \leq \|u\|\|v\|$. Ambas desigualdades proporcionan $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. Para $u=0$ ó $v=0$ la desigualdad es evidente.

(26) Al revisar la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se observa que, en definitiva, la única desigualdad surge de la expresión (10.3) de la página 538, a saber, $0 \leq \|u+\lambda v\|$. Luego, la igualdad en dicha desigualdad se obtiene $\Leftrightarrow 0 = \|u+\lambda v\| \Leftrightarrow 0 = u+\lambda v \Leftrightarrow \{u,v\}$ es linealmente dependiente (si $u=0$, es evidente, y si $u \neq 0$, el coeficiente que lo acompaña en $0 = u+\lambda v$ es $1 \neq 0$).

(27) Es claro que si $u=0$ ó $v=0$, se cumple la igualdad en la desigualdad triangular. Sean, pues, $u \neq 0 \neq v$. Al revisar la demostración de la desigualdad triangular se observa que hay dos desigualdades en la expresión (10.4) de la página 539: una es $\langle u,v\rangle \leq |\langle u,v\rangle|$ y la otra se obtiene al aplicar la desigualdad de Cauchy- Schwarz. En la segunda, la igualdad se da si y sólo si $\{u,v\}$ son linealmente dependientes (por el ejercicio previo); luego, al ser $u \neq 0 \neq v$, existe un escalar no nulo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Falta probar que $\langle u,v\rangle = |\langle u,v\rangle| \Leftrightarrow \lambda \geq 0$. En efecto, $\langle u,v\rangle = |\langle u,v\rangle| \Leftrightarrow \langle u,\lambda u\rangle = |\langle u,\lambda u\rangle| \Leftrightarrow \lambda\langle u,u\rangle = |\lambda\langle u,u\rangle| \Leftrightarrow \lambda\langle u,u\rangle = |\lambda||\langle u,u\rangle|$ (por ser $\langle u,u\rangle > 0$ ya que $u \neq 0$) $\Leftrightarrow \lambda = |\lambda| \Leftrightarrow \lambda \geq 0$. Luego, la igualdad en la desigualdad triangular se obtiene $\Leftrightarrow \{u,v\}$ son linealmente dependientes y uno de los vectores es un múltiplo no negativo del otro.

(28) (a) y (b) se prueban inmediatamente utilizando que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ y propiedades del producto escalar. (c) Basta aplicar la desigualdad triangular a $x = (x-y)+y$ e $y = (y-x)+x$ y propiedades de la norma y del valor absoluto.

(29) Se prueba inmediatamente utilizando que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ y propiedades del producto escalar (o bien a partir del ejercicio anterior).

(30) Se prueba inmediatamente utilizando que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ y propiedades del producto escalar.

(31) La ley del paralelogramo asegura que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo coincide con la suma de los cuadrados de las longitudes de cada uno de los lados de dicho paralelogramo.

La desigualdad triangular asegura que, en un triángulo, la longitud de la hipotenusa es menor o igual que la suma de las longitudes de los catetos.

(32) Sigue de calcular el coseno de dichos ángulos.

(33) Sigue inmediatamente de desarrollar $\|u-v\|^2$ y de la definición de ángulo. El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

(34) Al revisar la demostración del Teorema de la mejor aproximación se observa que aparece una única desigualdad. Luego, la igualdad se obtiene si y sólo si $\|\mathrm{proy}_S(u)-v\| = 0$ si y sólo si $v = \mathrm{proy}_S(u)$.

(35) Son inmediatas, basta calcular los productos escalares y las normas involucradas.

(36) $\langle f, g\rangle = 0$, $\|f\|^2 = \pi = \|g\|^2$ y $\|f+g\|^2 = 2\pi$.

(37) Por inducción sobre s, aplicando el Teorema de Pitágoras y observando que u_s es ortogonal a $u_1 + \cdots + u_{s-1}$.

(38) Se prueba inmediatamente utilizando que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ y propiedades del producto escalar.

(39) Se prueba inmediatamente utilizando que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ y propiedades del producto escalar. Las diagonales $x + y$ y $x - y$ del paralelogramo determinado por los vectores x e y son ortogonales si y sólo si x e y tienen el mismo módulo, es decir, cuando determinan un rombo.

(40) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Los axiomas de la definición de distancia se comprueban inmediatamente a partir de las correspondientes propiedades del valor absoluto, $d((0, 0), (4, 4)) = 8$.

(41) $S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, $(S^\perp)^\perp = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = 0\} = S$.

(42) (a) $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 3$, (b) $\dim_{\mathbb{R}}(S^\perp) = 1$, (c)

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{S}^\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, (d) $\operatorname{proy}_S(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\operatorname{proy}_S(B) = B$.
(e) Se tiene que $\|\operatorname{proy}_S(A) - A\|_F = 3 \neq 0$ y $\|\operatorname{proy}_S(B) - B\|_F = 0$. Luego, $A \notin S$ y $B \in S$.

(43) $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 6$ y $b = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \in S^\perp$. Luego, $S^\perp = \overline{\{b\}}$. Además, $\operatorname{proy}_{S^\perp}(u) = \frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. La proyección de u sobre S es $\operatorname{proy}_S(u) = \frac{1}{5}(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2)$.

(44) Sea $p := \operatorname{proy}_{\overline{S}}(u)$. Entonces $u = p + (u - p)$ con $p \in S$ y $u - p \in S^\perp$. Por el Teorema de Pitágoras, $\|u\|^2 = \|p\|^2 + \|u - p\|^2 \geq \|p\|^2$, de donde $\|u\| \geq \|p\|$. Para obtener el resultado basta aplicar el Teorema de Pitágoras generalizado para calcular $\|p\|$ escribiendo previamente a p como combinación lineal de los vectores del subespacio $\overline{\{S\}}$ mediante los coeficientes generalizados de Fourier. La igualdad se tiene si y sólo si $u - p = 0$ si y sólo si $u = p$ si y sólo si $u \in \overline{\{S\}}$.

(45) (a) Sea $Q = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}$ particionada según sus columnas

$q_1, \ldots, q_n$. Multiplicando por bloques y utilizando que $q_i^t q_j = \langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$ se tiene que $Q^t Q = I_n$.

(b) Si puede ocurrir: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sin embargo, si $m = n$ y $Q^t Q = I_n$, se tiene que Q es invertible y $Q^{-1} = Q^t$ con lo cual $QQ^t = Q^t Q = I_n$.

Capítulo 11

Subespacios asociados a una matriz

Índice

11.1. TEMARIO

Los ejercicios asociados a este capítulo corresponden a los temas:

- Los cuatro subespacios fundamentales
- Propiedades de los subespacios fundamentales
- Dimensión de los subespacios fundamentales
- Teorema fundamental del rango
- Relación con la equivalencia de matrices
- Bases de los subespacios fundamentales
- Teorema fundamental del Álgebra Lineal
- Método de los mínimos cuadrados
- Existencia y unicidad de la inversa de Moore-Penrose

11.2. EJERCICIOS

(1) Si $A \in \mathbb{K}^{2\times 3}$ y $B \in \mathbb{K}^{3\times 2}$, utilizando los elementos de las matrices probar que $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{F}(AB) \subseteq \mathcal{F}(B)$.

(2) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Analizar la validez de la siguiente afirmación:

“$A \sim B$ si y sólo si $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ y $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$.”

(3) Demostrar el apartado (b) del Lema 11.1 a partir del apartado (a) por doble inclusión. (Ayuda: Si $y \in \mathcal{C}(A)$, ¿dónde está y^t?)

(4) Para la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se considera el conjunto:

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = 0\},$$

de todas las soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$, llamado el *espacio nulo* de la matriz A.

(a) Demostrar que $\mathcal{N}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
En los apartados subsiguientes se considerará la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Hallar una base $\mathcal{B}$ y la dimensión de $\mathcal{N}(A)$.

(c) Hallar un sistema de generadores de $\mathcal{N}(A)$ que no formen una base de $\mathcal{N}(A)$ y, por otro lado, hallar un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathcal{N}(A)$ que no formen una base de $\mathcal{N}(A)$.

(d) ¿Son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ las filas de la matriz A? Justificar.

(e) Encontrar el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por las filas de la matriz A. ¿Generan las filas de la matriz A todo $\mathbb{R}^4$? Justificar.

(f) Usando la base hallada en el apartado (b), responder:

(i) ¿Es el vector $u = (0, -1, 1, 2)^t$ un elemento de $\mathcal{N}(A)$?

(II) ¿Y el vector $v = (-1, 0, 1, 2)^t$?

(III) Sabiendo que $z_p = (0, 1, 0, 0)^t$ es una solución particular del sistema lineal $Az = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, escribir su solución general.

(IV) Hallar el único vector $y \in \mathcal{R}(A^t)$ que resuelve (es decir, es solución particular) el sistema del apartado anterior y escribir su solución general.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ una matriz no nula con rango fila f y rango columna c (definidos como las dimensiones de los correspondientes subespacios fundamentales). Demostrar que:

(a) Existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{m\times c}$ y una matriz $C \in \mathbb{K}^{c\times n}$ tal que $A = BC$.

(b) Existe una matriz $M \in \mathbb{K}^{m\times f}$ y una matriz $N \in \mathbb{K}^{f\times n}$ tal que $A = MN$.

(c) $\dim(\mathcal{F}(A)) \leq \dim(\mathcal{F}(C)) \leq c$ y $\dim(\mathcal{C}(A)) \leq \dim(\mathcal{C}(M)) \leq f$.

Deducir que $f = c$.

(6) Utilizar la Proposición 2.8 para probar que las columnas de una matriz (cuadrada) invertible a coeficientes en $\mathbb{K}$ forman una base del espacio columna de dicha matriz.

(7) Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Demostrar el **Teorema de Rouché-Frobenius**:

$$Ax = b \text{ tiene solución} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{rg}([\ A \quad b\ ]) = \mathrm{rg}([\ A\ ])$$

utilizando el espacio columna de A, teoría de espacios vectoriales y el teorema fundamental del rango.

(8) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demostrar que:

(a) $\mathcal{N}(A^tA) = \mathcal{N}(A)$.

(b) $\mathcal{N}(AA^t) = \mathcal{N}(A^t)$.

(c) $\mathrm{rg}(A^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

(d) $\operatorname{rg}(AA^t) = \operatorname{rg}(A^t)$.

(e) $\mathcal{R}(A^tA) = \mathcal{R}(A^t)$.

(f) $\mathcal{R}(AA^t) = \mathcal{R}(A)$.

(g) Si se denota por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las columnas de la matriz A, utilizando la notación de la Proposición 10.12 probar que $A^tA = G(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, la matriz de Gram formada con los productos escalares de las columnas $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(9) Resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ siendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Para ello se pide:

(a) Hallar un vector solución particular p de $Ax = b$ con tercera componente no nula y encontrar $S = p + \mathcal{N}(A)$.

(b) Hallar el único vector $\alpha \in [\mathcal{N}(A)]^\perp$ tal que $A\alpha = b$ y encontrar $S = \alpha + \mathcal{N}(A)$.

(c) Comparar ambas soluciones eligiendo una solución arbitraria de S y expresarla según cada uno de los conjuntos de los apartados anteriores.

(d) Calcular los restantes subespacios fundamentales y sus dimensiones.

(e) Realizar una interpretación geométrica en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ situando los subespacios $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^t)$, $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(A^t)$.

(10) Probar que las soluciones de un sistema lineal compatible coinciden con sus soluciones de mínimos cuadrados.

(11) Sea $O \neq A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Si $A = QP$ es una factorización de rango completo de A, probar que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(P)$.

(12) Encontrar la recta de ecuación $y = ax + b$ que mejor aproxima a los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,3)$ en el sentido de los mínimos cua-

drados. Representar gráficamente los puntos y la recta obtenida. En Estadística se conoce como la **recta de regresión**.

(13) Encontrar las soluciones de mínimos cuadrados de los siguientes sistemas $Ax = b$. Analizar, en cada caso, si es única o no. Hallar la solución de mínimos cuadrados de norma mínima para cada uno de ellos (procediendo mediante un método geométrico, mediante uno algebraico (las ecuaciones normales) y a partir de una factorización de rango completo.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

11.3. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

(1) Al calcular el producto AB se obtiene una matriz de tamaño 2×2. Ahora cada columna se puede escribir como combinación lineal de las columnas de A. De este modo, todo elemento de $\mathcal{C}(AB)$ resultará ser un elemento de $\mathcal{C}(A)$. De forma similar se procede con las filas de AB. En este caso, cada combinación lineal de las filas de AB resultará ser una combinación lineal de las filas de B.

(2) La afirmación es falsa. Al tratarse de un *si y sólo si*, con que una implicación sea falsa, la afirmación lo será. Este es el caso. Se cumple que $(\Leftarrow)$ es verdadera (pues con que se cumpla una de las dos condiciones $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ o bien $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$ se tiene que $A \sim_f B$ o bien $A \sim_c B$, con lo cual $A \sim B$). Sin embargo, $(\Rightarrow)$ es falsa como se puede comprobar mediante el siguiente contraejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, donde $A \sim_c B$ (es decir, se cumple $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$) pero $A \nsim_f B$ (con lo cual $\mathcal{F}(A) \neq \mathcal{F}(B)$).

(3) $y \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow y^t \in \mathcal{F}(A^t) \Leftrightarrow y^t = x^t A^t$ para algún $x^t \in \mathbb{K}^{1\times n}$ $\Leftrightarrow y^t = (Ax)^t$ para algún $x^t \in \mathbb{K}^{1\times n} \Leftrightarrow y = Ax$ para algún $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

(4) (a) Es inmediato comprobar las 3 condiciones que caracterizan un subespacio vectorial.

(b) $\mathcal{B}_{\mathcal{N}(A)} = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}(A)) = 2$.

(c) Un sistema de generadores que no es base:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Un conjunto linealmente independiente que no es base: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Si, por ser vectores no nulos y no ser uno múltiplo del otro.

(e) $\mathcal{F}(A) = \{(a+2b, a+b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^4$.

(f) (I) No pues al plantear la combinación lineal pedida se obtiene un sistema lineal incompatible, (II) Si, $v = 1b_1 + 2b_2$, (III) $S = z_p + \mathcal{N}(A) = z_p + \lambda b_1 + \mu b_2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (IV) y debe satisfacer $Ay = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, con y combinación lineal de las columnas de A^t, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Resolviendo, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 0$, con lo cual $y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(5) (a) Sean $f = \mathrm{rg}_f(A)$ y $c = \mathrm{rg}_c(A)$. Se considera la matriz B construida mediante unas columnas $\{b_1, ..., b_c\}$ que formen una base del espacio $\mathcal{C}(A)$. Escribiendo cada vector de $\mathcal{C}(A)$ como combinación lineal de las columnas b_i anteriores y expresando el resultado como un producto de matrices se consigue $A = BC$ pa-

ra cierta matriz C (que contiene los escalares de la combinación lineal).

(b) Dada A, aplicando a A^t el apartado (a) y trasponiendo se obtiene el resultado pedido.

(c) Usando que $\mathcal{F}(BC) \subseteq \mathcal{F}(C)$ y $\mathcal{C}(MN) \subseteq \mathcal{C}(M)$ se tiene que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(A)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(C)) \leq c$ pues C tiene c filas. De forma similar, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}(M)) \leq f$ pues M tiene f columnas. Luego, $f = c$ pues $f = \operatorname{rg}_f(A) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(A)) \leq c$ y $c = \operatorname{rg}_c(A) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}(A)) \leq f$.

(6) Las columnas de una matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ determinan un sistema generador de $\mathcal{C}(A)$ pues, por el Lema 11.1 y por la Proposición 2.8, $\mathcal{C}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{K}^{n\times 1}\} = \{x_1a_1 + \cdots + x_na_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\} = \overline{\{a_1, \ldots, a_n\}}$. Además, dichas columnas forman un conjunto linealmente independiente pues si $0 = y_1a_1 + \cdots + y_na_n = A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, y por ser A invertible se tiene $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = 0$.

(7) Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Por el Lema 11.1, existe $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow b$ es combinación lineal de las columnas $a_1, \ldots, a_n$ de $A \Leftrightarrow \overline{\{a_1, \ldots, a_n, b\}} = \overline{\{a_1, \ldots, a_n\}} \Leftrightarrow \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n & b \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n & b \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}([\ A \quad b\ ]) = \operatorname{rg}([\ A\ ])$.

La penúltima equivalencia es cierta pues: ($\Rightarrow$) Si dos subespacios vectoriales coinciden entonces lo mismo ocurre con sus dimensiones. ($\Leftarrow$) Si se cumple la última igualdad de rangos, la igualdad de los correspondientes espacios columna sigue del hecho que siempre se cumple la inclusión $\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\right) \subseteq$

$\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n & b \end{bmatrix}\right)$ y, al ser dos subespacios con la misma dimensión, deben ser iguales.

(8) (a) $(\supseteq)$ $x \in \mathcal{N}(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^tAx = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{N}(A^tA)$.
$(\subseteq)$ $x \in \mathcal{N}(A^tA) \Rightarrow A^tAx = 0 \Rightarrow x^tA^tAx = 0 \Rightarrow (Ax)^t(Ax) = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle = 0$ (donde el producto escalar es el canónico de $\mathbb{R}^{m\times 1}$) $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{N}(A)$.
(b) Aplicar (a) a la matriz A^t (en lugar de la matriz A).
(c) A partir de la dimensión de los subespacios fundamentales, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}(A)) + \mathrm{rg}(A) = n$, de donde $\mathrm{rg}(A) = n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}(A))$. Del mismo modo, para la matriz A^tA se tiene $\mathrm{rg}(A^tA) = n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}(A^tA))$ puesto que $A^tA \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tomando dimensiones en (a) y sustituyendo se tiene el resultado.
(d) Aplicar (c) a la matriz A^t (en lugar de la matriz A).
(e) Se conoce que siempre se cumple la inclusión $\mathcal{R}(A^tA) \subseteq \mathcal{R}(A^t)$. Su igualdad sigue del hecho que ambos espacios tienen la misma dimensión, lo que se deduce de (c) y recordando que A y A^t tienen el mismo rango.
(f) Aplicar (e) a la matriz A^t (en lugar de la matriz A).
(g) Basta multiplicar matrices por bloques y recordar que el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ es $\langle x, y\rangle = x^ty$.

(9) (a) Se observa que $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, es decir, el vector de términos independientes es múltiplo de la segunda columna de A y, además, la tercera columna de A no produce restricciones, $p = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{N}(A) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\} = \overline{\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$, $S = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1+\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) Los vectores $\alpha \in [\mathcal{N}(A)]^{\perp}$ tienen la forma $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Resolviendo el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ se obtiene $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \beta \end{bmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) Coinciden si se toma $\beta = 1 + \alpha$.

(d) $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}(A^t) = \overline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$, $\mathcal{N}(A^t) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(e) Los subespacios $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A^t)$ se deben pintar en $\mathbb{R}^2$, y corresponden a los subespacios triviales. Los subespacios $\mathcal{R}(A^t)$ y $\mathcal{N}(A)$ se deben pintar en $\mathbb{R}^3$, y corresponden al plano OXY y al eje OZ, respectivamente. El conjunto solución $S = \alpha + \mathcal{N}(A)$ es una recta paralela a $\mathcal{N}(A)$ que pasa por el "punto" α. Se observa que cualquier punto de la forma $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ z_0 \end{bmatrix}$, con $z_0 \in \mathbb{R}$, sirve para representar el conjunto S como $S = z_0 + \mathcal{N}(A)$, en particular puede ser $z_0 = 1$, que corresponde al punto p.

(10) Sea $Ax = b$ un sistema compatible con $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Ax_0 = b$. Luego, $S := \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = b\} \neq \emptyset$. De $\|Ax_0 - b\| = 0 \leq \|Ax - b\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, se tiene que la solución x_0 es solución de mínimos cuadrados. Recíprocamente, si x_0 es solución de mínimos cuadrados, $\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. En particular, si $x \in S$ se tiene, $0 \leq \|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\| = 0$. Luego, $Ax_0 - b = 0$, es decir, $x_0 \in S$.

(11) ($\subseteq$) Si $x \in \mathcal{N}(A)$ entonces $Ax = 0$, es decir, $QPx = 0$. Como

$\mathrm{rg}(Q) = r$ (esto es, Q tiene rango completo por columnas), existe una inversa a izquierda Q_I de Q (véase Proposición 11.5) con lo que se cumple que $Q_I Q = I_r$. Premultiplicando ambos miembros de $QPx = 0$ por Q_I se llega a $Px = 0$. Así, por definición, $x \in \mathcal{N}(P)$. Por lo tanto, $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(P)$.

($\supseteq$) Si $x \in \mathcal{N}(P)$ entonces $Px = 0$. Premultiplicando por Q se tiene $Ax = QPx = 0$, de donde $x \in \mathcal{N}(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

(12) Al sustituir los puntos en la ecuación de la recta se obtiene el sistema $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Al premultiplicar por la traspuesta de la matriz de coeficientes y resolviendo las ecuaciones normales obtenidas se llega a $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}$.

(13) (a) $\mathrm{rg}(A) = 2 = n$, hay solución única de mínimos cuadrados: $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. (b) $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = n$, hay infinitas soluciones de mínimos cuadrados: El conjunto solución de mínimos cuadrados está formado por los (infinitos) vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ donde

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2\alpha \\ y & = & 1 - 2\alpha \\ z & = & \alpha \end{array} \right. , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Minimizando la expresión $f(\alpha) = 2(1 - 2\alpha)^2 + \alpha^2$ se obtiene $\alpha = \frac{4}{9}$, con lo cual la solución de mínimos cuadrados de norma mínima es $x_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$. Una factorización de rango completo de A es $A = QP \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Luego, $Q_I = (Q^tQ)^{-1}Q^t =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $P_D = P^t(PP^t)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Finalmente, $x_* = P_D Q_I b = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$. (c) $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = n$, hay infinitas soluciones de mínimos cuadrados: El conjunto solución de mínimos cuadrados está formado por los (infinitos) vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ donde

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3 - 2\alpha \\ y & = & 1 - 2\alpha \\ z & = & \alpha \end{array} \right. , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Minimizando la expresión $f(\alpha) = (3-2\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2 + \alpha^2$ se obtiene $\alpha = \frac{8}{9}$, con lo cual la solución de mínimos cuadrados de norma mínima es $x_* = \begin{bmatrix} \frac{11}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix}$. Sirve la misma factorización de rango completo que en (b).

"Tal es el destino del filósofo. Respecto a sí mismo, elevará su alma hasta el más alto grado del conocimiento inteligible, para fijar así las miradas de su espíritu en ese foco, de donde irradia toda luz, y de donde nace toda realidad visible e inteligible: 'En los confines del mundo intelectual está la idea del bien, que se percibe con dificultad, pero que no es posible percibir, sin deducir que ella es la causa de todo cuanto existe de bello y de bueno; que en el mundo visible produce la luz y el astro de que esta procede; que en el mundo invisible produce directamente la verdad y el conocimiento; y, en fin, que es preciso fijar bien las miradas en esta idea, para conducirse con sabiduría en la vida pública y en la privada.' Esta idea es Dios mismo, principio eterno e inmutable del orden moral y del orden político. Ahora se comprenderá por qué el fin de la educación filosófica, destinada a formar los jefes futuros del Estado, debe ser el de dirigir la inteligencia de estos hacia la idea del Bien. Esto es lo mismo que presentar el orden divino como modelo de gobierno.

¿Cómo se elevará el alma progresivamente de las primeras tinieblas a esta pura luz? Esto será objeto de ciertas ciencias, que los magistrados futuros cultivarán con preferencia, como una especie de aprendizaje intelectual.

En primera línea entra la aritmética, en lo que tiene de más elevada, 'no para hacerla servir, como sucede entre los mercaderes y comerciantes, para las compras y las ventas, sino para elevarse por medio de la pura inteligencia a la contemplación de la esencia de los números.'

Después viene la geometría, muy propia para formar en el alma 'ese espíritu filosófico, que eleva nuestras miradas hacia las cosas de lo alto, en lugar de abatirlas sobre las cosas de este mundo', con tal que procuremos fijarnos, no en las figuras, sino en la ideas que representan.

En tercer lugar, será preciso crear una ciencia, aún no inventada, pero necesaria para completar la precedente, una geometría de los sólidos de tres dimensiones.

Y en cuarto lugar, la astronomía, estudiada con el mismo espíritu que las tres primeras ciencias.

Pero todas éstas no serán más que preludios de la verdadera ciencia filosófica, la que pone al hombre en situación de dar y entender la razón de todas las cosas. ¿Cuál es? La dialéctica, ciencia y método a la vez, que da al alma la facultad de elevarse desde los objetos más humildes hasta la idea del bien, y de descender luego de la idea del bien hasta los más humildes objetos, recorriendo así en su marcha todos los grados del ser. Esta es la ciencia última, 'la cima y el coronamiento de las demás ciencias'."

Platón, Obras completas, edición de Patricio de Azcárate, tomo 7, Madrid 1872.

Bibliografía

[1] C. Badesa, I. Jané, R. Jansana, *Elementos de lógica formal*, Ariel Filosofía, Barcelona, 1998.

[2] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra Lineal y Geometría*, Editorial Reverté, Barcelona, 2000.

[3] J. de Burgos, *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*, Tercera Edición, McGrawHill, Madrid, 2006.

[4] S.H. Friedberg, A.J. Insel, L.E. Spence, *Elementary Linear Algebra*, Pearson Education, Londres, 2008.

[5] E. Gentile, *Anillo de polinomios*, Editorial Docencia, Buenos Aires, 1980.

[6] S.I. Grossman, J.J. Flores Godoy, *Álgebra Lineal*, Séptima edición, McGrawHill, Madrid, 2012.

[7] P.R. Halmos, *Teoría intuitiva de los conjuntos*, Octava edición, Editorial Continental, México, 1973.

[8] E. Hernández Rodríguez, M.J. Vázquez Gallo, M.A. Zurro Moro, *Álgebra Lineal y Geometría*, Tercera edición, Pearson Education, Madrid, 2012.

[9] I. Herstein, D. Winter, *Matrix Theory and Linear Algebra*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1988.

[10] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Segunda Edición, Prentice-Hall, Londres, 1971.

[11] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra II*, Springer, Berlín, 1953.

[12] G. Jerónimo, J. Sabia, S. Tesauri, *Álgebra Lineal*, Fascículo 2, Cursos de grado, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 2008.

[13] C. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, Fundamenta Mathematicae 2, 161–171, 1921.

[14] S. Lang, *Linear Algebra*, Segunda edición, Addison-Wesley Publishing Company, Londres, 1972.

[15] D.C. Lay, S.R. Lay, J.J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Quinta edición, Pearson, Madrid, 2016.

[16] K.T. Leung, *Linear Algebra and Geometry*, Hong Kong University Press, Hong Kong, 1974.

[17] L. Merino, E. Santos, *Álgebra Lineal con métodos elementales*, Thomson, España, 2006.

[18] C.D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Nueva York, 2010.

[19] D. Poole, *Linear Algebra: A Modern Introduction*, Segunda edición, Thomson, 2006.

[20] F. Puerta, Red ALAMA, 2011, http://www.red-alama.es/wp-content/uploads/2011/04/isomorfismos-canónicos.pdf.

[21] J. Sancho San Román. Álgebra Lineal y Geometría, Octavio y Félez, Zaragoza, 1974.

[22] Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Cuarta edición, Wellesley -Cambridge Press, 2009.

[23] N. Thome, Álgebra Lineal y Geometría I, Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, 2023.

[24] N. Thome, Álgebra Lineal y Geometría I, Prácticas Informáticas con MATLAB, Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, 2023.

[25] T. Yuster, The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof, Mathematics Magazine, Mathematical Association of America, 57, 2, 93–94, 1984.

Aspectos históricos y divulgativos

[26] *El libro de las Matemáticas*. Editorial Akal, Madrid, 2020.

[27] A. Doxiadis, *El tío Petris y la conjetura de Goldbach*, Zeta, 2009.

[28] C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, Dover, Nueva York, 2004.

[29] M. Kline, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[30] D. Luzardo, A.J. Peña. *Historia del Álgebra Lineal hasta los albores del Siglo XX*, Divulgaciones Matemáticas, 14, 2, 153–170, (2006).

[31] K. Ríbnikov. *Historia de las Matemáticas*, Editorial MIR, Moscú, 1974.

[32] I. Stewart, *Historia de las Matemáticas: En los último 10000 años*, Segunda edición, Crítica, Barcelona, 2009.

[33] F. Vera, *Veinte matemáticos célebres*, Compañía General Fabril Editora, Buenos Aires, 1964.