Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Homología, Cohomología y Amenabilidad

Carlos C. Peña

www.smm.org.mx

Serie: Textos. Vol. 29 (2023)

ISBN: 978-607-8008-20-9

Homología, cohomología y amenabilidad

Carlos César Peña

Universidad Nacional Centro Provincia de Buenos Aires.

Campus Universitario, Tandil, Pcia. Buenos Aires, Argentina.

Facultad de Ciencias Exactas. Departamento Matemática.

Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada.

E-mail: ccpenia@exa.unicen.edu.ar

Índice general

Introducción 1
Homología y cohomología 1
Relación con el problema de Lebesgue 1
Grupos y álgebras amenables 2
Algunos ejemplos 2
Extensiones del concepto de amenabilidad 7
Objetivos 9

Capítulo 1. Homología y cohomología 11
1.1. Categorías y functores 11
1.2. Límites directo e inverso 16
1.3. Homología singular 17
1.4. Grupos de cohomología de Hochschild 18
1.5. Resoluciones y grupos de homología y cohomología 20
1.6. Grupos de extensión 21
1.7. Ejemplos 27
1.7.1. Sobre $\mathrm{Hom}(R[G], S)$, G-grupo, R, S anillos 27
1.7.2. Functor entre las categorías de grupos y anillos 28
1.7.3. Sobre $\mathrm{Hom}(R[G], S)$, R-anillo conmutativo, S una R-álgebra 29
1.7.4. Algunas categorías 29
1.7.5. Functores isomorfos 30
1.7.6. Categorías equivalentes 30
1.7.7. Functores exactos y grupos de cohomología 32
1.7.8. Expulsores 33
1.7.9. Sobre sistemas y límites directos 34
1.8. Problemas 35

Capítulo 2. Aplicaciones a álgebras y módulos de Banach 37
2.1. Límites directos de álgebras de Banach 37
2.2. Homología en álgebras de Banach 38
2.3. Álgebras super-amenables o contractivas 46
2.4. Álgebras y semigrupos amenables 49
2.5. Caracterización de álgebras amenables 56
2.6. Módulos libres, colibres, proyectivos, inyectivos, playos 60
2.7. Biproyectividad y biplayicidad 64
2.8. Connes-amenabilidad 75
2.9. Amenabilidad de C^*-álgebras 84

2.10. Ejemplos 88
2.10.1. Paradojalidad de $\mathbb{N}$ respecto a biyecciones de $\mathbb{Z}$ 88
2.10.2. Promedios topológicos y amenabilidad 88
2.10.3. Amenabilidad de productos tensoriales 92
2.10.4. Diagonal virtual de grupos amenables discretos 94
2.10.5. Productos tensoriales e independencia lineal 95
2.10.6. Amenabilidad de $\mathcal{A}(X)$ 96
2.10.7. Amenabilidad y la propiedad de Radon-Nykodým 101
2.10.8. Sobre la biproyectividad de $\mathrm{L}^1(G)$ 104
2.10.9. Biproyectividad de álgebras amenables compactas 106
2.10.10. Biproyectividad de álgebras de Banach abelianas 107
2.10.11. Inyectividad de $\mathcal{B}(X, Y)$ 111
2.10.12. Playicidad de $F \hat{\otimes} G$ 113
2.10.13. Super-amenabilidad de álgebras de Banach duales amenables 114
2.10.14. Amenabilidad, Connes-amenabilidad y amenabilidad interna de grupos localmente compactos 115
2.10.15. Sobre fuerte Connes-amenabilidad 119
2.11. Problemas 125

Capítulo 3. ANEXO 1: Grupos 133
3.1. Grupos, semigrupos, subgrupos. Grupo opuesto. 133
3.2. Grupos abelianos. Generadores. Centro y orden de un grupo y de un elemento. Grupos cíclicos. 134
3.3. Homomorfismos de grupos 134
3.4. Productos directos, subgrupos normales y cocientes. 135
3.5. Teoremas de isomorfismo 136
3.6. Teorema de Lagrange 138
3.7. Acciones y representaciones de grupos 138
3.8. Automorfismos interiores 140
3.9. Teorema de Cauchy 141
3.10. Teoremas de Sylow 141
3.11. Grupos abelianos finitos. Teoremas de Gauss y de Schering - Kronecker 143
3.12. Ejemplos 145
3.12.1. Grupos de permutaciones 145
3.12.2. Grupos dihedral y cuaterniónico 148
3.12.3. Grupo lineal 148
3.12.4. Generadores de $\mathrm{sl}(2, p)$ 150
3.12.5. Grupos, cocientes, índices 150
3.12.6. Sobre p-grupos 151
3.12.7. Sobre subgrupos de Sylow 152
3.12.8. Sobre conmutadores. 155
3.13. Problemas 158

Capítulo 4. ANEXO 2: Módulos 165
4.1. Anillos 165
4.2. Módulos 167
4.3. Álgebras 168
4.4. Homomorfismos de módulos. Submódulos. Módulo generado. 168
4.5. Suma, producto, cocientes y suma directa de módulos. 169
4.6. Módulos libres 171
4.7. Sucesiones exactas 172
4.8. Productos tensoriales 173
4.9. Módulos simples y semisimples 175
4.10. Módulos proyectivos 176
4.11. Módulos inyectivos 178
4.12. Módulos noetherianos y artinianos 180
4.13. Módulos playos 181
4.14. Representaciones y radical de Jacobson 183
4.15. Teoremas de Wedderburn, Schur y Jacobson 186
4.16. Ejemplos 191
4.16.1. Sobre anillos 191
4.16.2. Anillos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathbb{Z}[x,y]/\langle xy\rangle$ 191
4.16.3. Gráficos de endomorfismos de A-módulos 192
4.16.4. Sobre anillos semisimples 193
4.16.5. Módulo sin submódulos simples 196
4.16.6. $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es $\mathbb{Z}$-módulo libre 196
4.16.7. $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\mathbb{Z})$ 197
4.16.8. Un módulo no libre proyectivo 199
4.16.9. Sobre productos tensoriales 199
4.16.10. Sobre Módulos divisibles 202
4.16.11. Sobre módulos inyectivos 203
4.16.12. Módulos colibres 203
4.16.13. $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) \approx \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^2$ en Mod-$\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$ 204
4.17. Problemas 206

Índice alfabético 215

Bibliografía 221

Introducción

Homología y cohomología. Las homología y cohomología algebraicas fueron axiomatizadas por S. Eilenberg y N. E. Steenrod en 1945 [**49**], e introducidas luego por H. Cartan y S. Eilenberg en el celebrado libro Homological Algebra en 1956 [**20**]. Constituyen un vasto marco teórico en el que confluyen vertientes diversas de la matemática: desde el álgebra propiamente dicha, la geometría algebraica, la topología algebraica o el análisis funcional. Sin embargo, ideas, enfoques y técnicas subsumidas por esta teoría se manifestaron previamente en trabajos de B. Riemann a mediados del s. XIX, de E. Betti [**14**], de H. Poincaré en 1895, etc. [**83**].

Relación con el problema de Lebesgue. En 1972 quedó establecida definitivamente la adecuación de estas herramientas para el tratamiento de problemas complejos en análisis funcional [**90**]. Desde entonces se inicia el capítulo sobre *teoría de amenabilidad*, lo que permite abordar problemas complejos de teoría de la medida, planteados por H. Lebesgue en 1904.
El teorema de la convergencia monótona es una propiedad relevante de la integral de Lebesgue. Lebesgue planteó, precisamente, en qué medida dicha propiedad es fundamental. Puesto que el teorema de convergencia monótona equivale a numerabilidad aditiva, el problema concierne a la existencia de alguna medida positiva μ sobre $\mathbb{R}$, finita, no numerablemente aditiva e invariante por traslaciones tal que $\mu([0,1]) = 1$. Entre 1904 y 1938 este problema derivó en el estudio de medidas invariantes finitamente aditivas. La invariancia por isometrías dió lugar al teorema de Banach-Tarski [**11**] y la consiguiente *teoría de descomposiciones paradojales*. Se observó entonces que la integral de Lebesgue se construye sobre el grupo aditivo de los números reales. Construcciones análogas, sobre otras estructuras con condiciones algebraicas y topológicas distintas, habrán de derivar en situaciones previsiblemente diferentes. La clase de grupos amenables fue introducida por J. von Neumann en 1929, explicando paradojas derivadas del teorema de Banach-Tarski cuando la dimensión del espacio es mayor a dos [**121**] [**76**].
Entre 1940 y 1950 se conectan las nociones de medidas finitamente aditivas y *promedios*, siendo relevantes los aportes de M. M. Day. Dado un grupo G, la existencia de una medida finitamente aditiva $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0, +\infty)$ tal que $\mu(G) = 1$ y $\mu(gE) = \mu(E)$ para cada $g \in G$ y $E \in \mathcal{P}(G)$ - o G-invariante a izquierda - es equivalente a la existencia de un promedio invariante sobre G, i.e. un funcional $m \in \mathrm{l}^\infty(G)^*$ tal que $\langle 1, m\rangle = \| m \| = 1$ y $\langle {}_g\phi, m\rangle = \langle \phi, m\rangle$

para todo $g \in G$ y $\phi \in \mathrm{l}^\infty(G)$, donde ${}_g\phi(g') = \phi(gg')$ en todo caso [**40**].
En 1962 H. Kamowitz extendió la cohomología de Hochschild al contexto de álgebras de Banach conmutativas [**95**]. Ello permitió la revisión de resultados principales de Hochschild con relación a álgebras asociativas finito-dimensionales separables (o semisimples sobre toda extensión del cuerpo base), cuestiones ligadas al radical del álgebra y el teorema de Wedderburn sobre complementariedad del radical [**84**]. Sin consideraciones topológicas sobre álgebras infinito-dimensionales éstas investigaciones no eran posibles [**127**] [**150**]. El teorema de descomposición de Wedderburn ya había sido considerado en álgebras de Banach en 1951 y, en particular, sobre el álgebra de Banach de funciones complejas sobre un espacio compacto separado en 1960 [**54**] [**6**]. H. Kamowitz probó que dadas una C*-álgebra abeliana A y un A-bimódulo de Banach *conmutativo* X los grupos de cohomología de Hochschild $\mathcal{H}^1(A, X)$ y $\mathcal{H}^2(A, X)$ de A con coeficientes en X son triviales.
En 1966, sobre un grupo localmente compacto G, A. Guichardet extendió el análisis a grupos de cohomología de Hochschild $\mathcal{H}^n(\mathrm{L}^1(G), X)$ [**72**], [**73**]. Asimismo, avances en el contexto de álgebras de operadores y de álgebras y módulos topológicos se reportaron en [**93**] en 1971 y [**145**] en 1972.
B. E. Johnson, también en 1972, probó que la amenabilidad de grupos localmente compactos es una propiedad cohomológica (cf. [**90**], Th. 2.5). Esto representó un hito en la teoría, dando inicio al estudio de álgebras amenables y al establecimiento definitivo de técnicas integradas de homología y cohomología. En esta misma memoria, Johnson planteó una serie de problemas abiertos que han sido y siguen siendo motivo de investigación.

Grupos y álgebras amenables. Un grupo G se dice amenable si posee algún promedio invariante. El grupo libre con dos generadores o el grupo especial ortogonal SO(3) son no amenables [**76**]. Los grupos no amenables dan lugar a situaciones geométricas que retan el sentido común, haciendo imperioso comprender qué diferencia grupos amenables de los no amenables. Sabemos ahora que un grupo localmente compacto G es amenable si y solo si el primer grupo de cohomología de Hochschild de $\mathrm{L}^1(G)$ con valores en el dual de cualquier $\mathrm{L}^1(G)$ bimódulo de Banach es trivial (cf. [**90**]. Th. 2.5). Más generalmente, un álgebra de Banach A se dice amenable si el primer grupo de cohomología de Hochschild de A con valores en el dual de cualquier A-bimódulo de Banach es trivial.

Algunos ejemplos.

1. (J. von Neumann [**121**], 1929) (a) El grupo libre en dos generadores no es amenable.
   (b) Todo grupo finito es amenable.
   (c) Todo grupo soluble es amenable.
   (d) Si la cadena de subgrupos conmutadores de G termina en la identidad al cabo de un número finito de iteraciones G es amenable.

2. (M. M. Day [**37**], 1942) (a) Todo semigrupo abeliano es amenable.
(b) Sean S semigrupo amenable a izquierda (a derecha, amenable), S' semigrupo, $f : S \to S'$ epimorfismo. Entonces S' es amenable a izquierda (a derecha, amenable).
(c) Si G es grupo amenable a izquierda (a derecha, amenable) cada subgrupo es amenable a izquierda (a derecha, amenable).
3. (M. M. Day [**39**], 1950) (a) Si un semigrupo S es amenable a izquierda y derecha resulta amenable.
(b) Un semigrupo es amenable a izquierda si y solo si lo es a derecha si y solo si es amenable.
(c) Sea H subgrupo normal de un grupo G tal que H y G/H son amenables. Entonces G es amenable.
(d) Sea S_i un conjunto de subsemigrupos amenables de un semigrupo S tal que $S = \cup S_i$ y dados i, j existe k tal que $S_i \cup S_j \subseteq S_k$. Entonces S_k es amenable.
(e) Sean S, S' semigrupos y $f : S \to S'$ un epimorfismo. Si S es amenable a izquierda (a derecha, amenable) entonces S' es amenable a izquierda (a derecha, amenable).
4. (E. Følner [**55**], 1955) Un grupo localmente compacto G con medida de Haar λ es amenable si y solo si dados $\epsilon > 0$ y un subconjunto compacto K de G existe un subconjunto boreliano E de G de medida positiva finita tal que para todo $g \in K$ es $\lambda(E \triangle gE) < \epsilon\lambda(E)$.
5. (M. M. Day [**40**], 1957) (a) Límites y productos de grupos amenables son amenables.
(b) Un grupo es amenable si y solo si todo subgrupo finitamente generado es amenable.
(c) Se caracterízan semigrupos amenables.
6. (A. Hulanicki [**86**], 1964) Un grupo localmente compacto G es amenable si y solo si $\mathrm{C}^*(G) = \mathrm{C}^*_r(G)$.[1]
7. (H. Leptin [**108**], 1968) Un grupo localmente compacto G es amenable si y solo si el álgebra de Fourier $\mathrm{A}(G)$ tiene aproximación acotada de la unidad (V. (2.11.26)).
8. (B. E. Johnson [**90**], 1972) (a) Toda C*-álgebra abeliana es amenable. (b) La condición necesaria y suficiente para que un álgebra de Banach finito-dimensional sea amenable es que sea semisimple. (c) Las álgebras de operadores compactos $\mathcal{K}(\mathrm{l}^p)$, con $1 < p < +\infty$, y $\mathcal{K}(\mathrm{C}[0,1])$, son amenables.

[1]Indicamos $\mathrm{C}^*(G)$ a la C*-*álgebra de* G, y $\mathrm{C}^*_r(G)$ a la C*-*álgebra reducida de* G. Claramente la representación regular a izquierda $\Lambda : \mathrm{L}^1(G) \to \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))$ es fiel. Dada $\theta \in \mathrm{L}^1(G)$ sea $\theta^*(g) = \theta(g^{-1})^- \Delta_G(g^{-1})$, donde $g \in G$ y Δ_G es la función modular de G. Así $\mathrm{L}^1(G)$-deviene *-álgebra de Banach y Λ resulta *-representación de álgebras de Banach. Haciendo $\mid \theta \mid = \| \Lambda(\theta) \|$ se obtiene una C*-norma de $\mathrm{L}^1(G)$. Se defime $\mathrm{C}^*_r(G)$ como la C*-álgebra que sigue al completar $\mathrm{L}^1(G)$ respecto a dicha norma. Por otra parte, $\mathrm{C}^*(G)$ es la C*-álgebra con base en $\mathrm{L}^1(G)$ respecto a la mayor norma C* de $\mathrm{L}^1(G)$.

9. (B. E. Johnson [**91**], 1972) Se caracteriza las álgebras amenables mediante *diagonales virtuales y aproximadas*.
10. (A. Connes [**28**], 1976) Toda C*-álgebra amenable A es *nuclear*, o sea cualquiera sea el álgebra de Banach B el producto tensorial $A \otimes B$ admíte una única norma C*.
11. (S. Wassermann [**147**], 1976) Una W*-*álgebra*[2] $\mathfrak{M}$ es amenable si y solo si existen $k \in \mathbb{N}$, espacios compactos *hiper-stoneanos*[3] $\Omega_1, ..., \Omega_k$ y $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ tales que $\mathfrak{M} \approx \oplus_{j=1}^{k} \mathrm{M}_{n_j} \otimes \mathrm{C}(\Omega_j)$.
12. (M. V. Sheinberg [**138**], 1977). Un álgebra de Banach uniforme es amenable si y solo si es autoadjunta.
13. (J. Duncan, I. Namioka [**44**], 1978) Dado un semigrupo S, si $\mathrm{l}^1(S)$ es amenable entonces S es amenable, aunque la afirmación recíproca no es cierta. Un semigrupo inverso S es amenable si y solo si el subgrupo maximal de S es amenable.
14. (A. To-Ming Lau [**105**], 1978) Se ha caracterizado la amenabilidad mediante propiedades de extensión de tipo Hahn-Banach. Precisamente, A es amenable si y solo si dados un A-bimódulo de Banach X y un A-submódulo de Banach Y de X, cada $f \in Y^*$ tal que $af = fa$ para todo $a \in A$ existe $\tilde{f} \in X^*$ extensión de f tal que $a\tilde{f} = \tilde{f}a$ para todo $a \in A$.
15. (A. Ya. Helemskii, M. V. Sheinberg [**79**], 1979) La amenabilidad de un álgebra de Banach A equivale a cualquiera de las siguientes propiedades: (a) El A-bimódulo A_1 es playo. (b) A tiene aproximación acotada de la unidad y A_1 es A-bimódulo playo. (c) A tiene aproximación acotada de la unidad y $\hat{\pi}_A^* : A^* \to (A\hat{\otimes}A)^*$ tiene algún inverso a izquierda que es homomorfismo de A-bimódulos de Banach.
16. (R. I. Grigorchuck [**66**], 1980) Sea G grupo finitamente generado por un conjunto $\{u_1, ..., u_k\}$. El siguiente es un criterio de amenabilidad, para lo cual podemos suponer $k > 1$ ya que todo grupo abeliano es amenable. Sea F_k el grupo libre en k generadores $\{x_1, ..., x_k\}$. Sea $Q : \mathrm{F}_k \to G$ el homomorfismo tal que $Q(x_i) = u_i$ si $i = 1, ..., k$. Dado $x \in \mathrm{F}_k$ sea $l(x)$ la longitud de la palabra reducida en las letras $x_k^{-1}, ..., x_1^{-1}, x_1, ..., x_k$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea
$$\gamma_n = \mid \{x \in \mathrm{F}_k : l(x) = n\} \mid$$
Entonces existe $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_{2n}^{1/(2n)}$ y G es amenable si y solo si $\gamma = 2k - 1$.
17. (U. Haagerup [**74**], 1983) Toda C*-álgebra nuclear es amenable [**74**]. Quedan así identificadas las C*-álgebras amenables y las C*-álgebras nucleares.
18. (A. T. Lau, V. Losert [**107**], 1986) Un grupo localmente compacto G es amenable si y solo si todo subespacio X de $\mathrm{L}^\infty(G)$, w^*-cerrado,

[2] O sea una C*-álgebra que posee algún predual.

[3] Un espacio compacto Hausdorff Ω es hiper-stoneano si $\mathrm{C}(\Omega)$ es una W*-álgebra.

complementable e invariante por traslaciones a izquierda, es el rango de alguna proyección que conmuta con traslaciones a izquierda.

19. (P. C. Curtis, Jr, R. J. Loy [**32**], 1989) La amenabilidad de un álgebra de Banach A equivale a cualquiera de las siguientes propiedades: (d) A tiene aproximación acotada de la unidad y la sucesión exacta
$$0 \to A^* \xrightarrow{\hat{\pi}_A^*} (A \hat{\otimes} A)^* \xrightarrow{\iota^*} K^* \to 0$$
es escindida, con $K = \ker(\hat{\pi}_A)$ y $\iota : K \hookrightarrow A \hat{\otimes} A$. (e) A tiene aproximación acotada de la unidad y, para cada A-módulo esencial X, toda sucesión exacta corta admisible de A-bimódulos
$$0 \to X^* \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$
es escindida.
20. (N. Grønbæk [**67**], 1990) El álgebra de Banach $l^1(S)$ sobre un semigrupo conmutativo S es amenable si y solo si S es un semiretículo finito de grupos conmutativos, i.e. hay un semigrupo conmutativo finito Y en el que cada elemento es idempotente y S es la unión disjunta $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ de subsemigrupos de S, con $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ para cada $\alpha, \beta \in Y$.
21. (J. Duncan, A. L. T. Paterson [**45**], 1990) El álgebra de Banach $\mathrm{l}^1(S)$ sobre un *semigrupo inverso*[4] es amenable si y solo si S tiene un número finito de idempotentes y cada subgrupo de S es amenable.
22. (N. Grønbæk [**68**], 1990) Sean G un grupo localmente compacto y $w : G \to \mathbb{R}_{>0}$ un *peso*[5] sobre G. Entonces el *álgebra de Beurling*[6] $\mathrm{L}^1(G, w)$ es amenable si y solo si G es grupo amenable y $\sup_{g \in G} w(g)w(g^{-1}) < \infty$.
23. (N. Grønbæk [**69**], 1991) Si (E, F) es un *par dual de espacios de Banach el álgebra de Banach* de operadores F-nucleares sobre E es amenable si y solo si E es finito-dimensional.
24. (N. Grønbæk, B. E. Johnson, A. Willis [**70**], 1994) Se determinaron condiciones de amenabilidad de álgebras de operadores aproximables y compactos. Entre otros resultados, siguen la amenabilidad de $\mathcal{A}(\mathrm{C}(K))$, con K espacio compacto Hausdorff, y de $\mathcal{A}(\mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu))$, con $1 \le p \le \infty$. Por otra parte $\mathcal{A}(\mathrm{l}^p \hat{\otimes} \mathrm{l}^q)$ es amenable si y solo si $1/p + 1/q < 1$.
25. (H. G. Dales, F. Ghahramani y A. Ya. Helemskii [**35**], 2002) El álgebra de Banach $\mathrm{M}(G)$ de medidas de Borel acotadas sobre un

[4] Un semigrupo S se dice inverso si para todo $s \in S$ existe $s^* \in S$ único tal que $ss^*s = s$ y $s^*ss^* = s^*$.

[5] O sea w es una función continua positiva tal que $w(g_1 g_2) \le w(g_1)w(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y $w(e) = 1$, donde e denota a la unidad de G.

[6] $\mathrm{L}^1(G, w)$ consta de las funciones medibles $\phi : G \to \mathbb{C}$ respecto a la medida de Haar tales que $\phi w \in \mathrm{L}^1(G)$. Haciendo $\| \phi \|_{1,w} = \| \phi w \|_1$ el espacio $\mathrm{L}^1(G, w)$ deviene claramente espacio de Banach. Si para $\phi, \psi \in \mathrm{L}^1(G, w)$ hacemos $\phi \odot \psi = [(\phi w) * (\psi w)]w^{-1}$ entonces $\mathrm{L}^1(G, w)$ resulta álgebra de Banach, i.e. la correspondiente álgebra de Beurling de G respecto a w.

grupo localmente compacto G es amenable si y solo si G es amenable y discreto.

26. (D. R. Farenick, B. E. Forrest, L. W. Marcoux [**52**], 2005) La subálgebra $\mathcal{A}_T$ de $\mathcal{B}(H)$ generada por un operador T -H espacio de Hilbert- es amenable si y solo si T es similar a un operador normal cuyo espectro tiene interior vacío y complemento conexo.
27. (E. Feizi, A. Pourabbas [**53**], 2006) Sean G grupo localmente compacto con un peso w. El álgebra de medidas $\mathrm{M}(G, w)$ es amenable si y solo si G es grupo discreto amenable, $\sup_{g\in G} w(g)w(g^{-1}) < \infty$ y $w \geq 1$.
28. (S. J. Bhatt, P. A. Dahbi [**10**], 2013) Sean A álgebra de Banach conmutativa, B un álgebra de Banach y $T : B \to A$ homomorfismo de álgebras tal que $\| T \| \leq 1$. Entonces $A \times_T B$ es amenable si y solo si A y B son amenables.[7]
29. (A. Ebadian, A. Jabbari [**46**], 2015) Un *álgebra de Segal pesada*[8] $\mathrm{S}^1_w(G)$ es amenable si y solo si $\mathrm{S}^1_w(G) = \mathrm{L}^1_w(G)$.
30. (R. Ghamarshoushtari, Y. Zhang [**62**], 2015) Dados un espacio compacto X y un álgebra de Banach A, $\mathrm{C}(X, A)$ es amenable si y solo si A es amenable.
31. (E. Biyabani, A. Rejali [**15**], 2018) Sean (X, d) espacio métrico, A un álgebra de Banach, $\alpha > 0$ tales que $\mathrm{Lip}_\alpha(X, A)$ y $\mathrm{lip}_\alpha(X, A)$ separan puntos de X. La condición necesaria y suficiente para que éstas *álgebras de Lipschitz*[9] sean amenables es que (X, d) sea *uniformemente discreto*[10] y que A sea amenable.
32. (M. Essmaili, A. S. Marzijarani, A. Rejali [**50**], 2021) Sean A, B álgebras de Banachy $\theta \in \sigma(B)$. Son equivalentes: (a) $A \times_\theta B$ es

[7] Si indica $A \times_T B$ al álgebra definida sobre el producto $A \times B$ con las operaciones naturales de suma y producto por escalares y la multiplicación

$$(a, b)(a', b') = (aa' + T(b)a' + T(b')a, bb')$$

para $a, a' \in A$ y $b.b' \in B$. Con la norma $(a, b) =\| a \| + \| b \|$ se tiene un álgebra de Banach. Estas álgebras generalizan las álgebras de Lau o F-álgebras [**106**].

[8] Sean G grupo localmente compacto y w un peso sobre G. $\mathrm{S}^1_w(G)$ es álgebra de Segal pesada si (a) $\mathrm{S}^1_w(G)$ es densa en $\mathrm{L}^1_w(G)$. (b) $\mathrm{S}^1_w(G)$ es álgebra de Banach invariante por traslaciones respecto a alguna norma $\| \circ \|_{\mathrm{S}^1_w(G)}$. (c) $\|_a f \|_{\mathrm{S}^1_w(G)} \leq w(a) \| f \|_{\mathrm{S}^1_w(G)}$ para cada $a \in G$ y $f \in \mathrm{S}^1_w(G)$. (d) Dados $f \in \mathrm{S}^1_w(G)$ y $\epsilon > 0$ hay algún entorno U de la unidad de G tal que $\|_a f - f \|_{\mathrm{S}^1_w(G)} < \epsilon$ si $a \in U$. (e) $\| f \|_{1,w} \leq \| f \|_{\mathrm{S}^1_w(G)}$ si $f \in \mathrm{S}^1_w(G)$.

[9] Se indica

$$\mathrm{Lip}_\alpha(X, A) = \{f \in \mathrm{l}^\infty(X, A) : p_{\alpha,A}(f) < \infty\},$$
$$\mathrm{lip}_\alpha(X, A) = \{f \in \mathrm{Lip}_\alpha(X, A) : \lim_{d(x,y)\to 0} \frac{\| f(x) - f(y) \|}{d(x, y)^\alpha} = 0\},$$

con $p_{\alpha,A}(f) = \sup_{x\neq y} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\alpha}$. Haciendo $\| f \|_\alpha (f) = p_{\alpha,A}(f) + \| f \|_\infty$ resultan las correspondientes álgebras de Lipschitz, ambas de Banach.

[10] O sea existe $\epsilon > 0$ tal que $d(x, y) \geq \epsilon$ toda vez que $x \neq y$.

amenable. (b) $\theta \in \sigma(B)$ es biplaya y tiene aproximación acotada de la identidad. (c) A y B son amenables.

33. (A. L. Barrenechea, C. C. Peña [**12**], 2022) Sean A, B, algebras de Banach tales que B es A-*bimódulo algebraico*[11] de Banach con unidad e_B de modo que $ae_B = e_Ba$ para todo $a \in A$. Entonces $A \bowtie B$ - la *extensión módulo de Banach generalizada de A y B* - es amenable si y solo si A y B lo son[12].
34. (M. J. Mehdipour, A. Rejali [**117**], 2022) Si G es grupo localmente compacto con un peso w, $\mathrm{L}^1(G,w)^{**}$ es amenable si y solo si G es finito.

Extensiones del concepto de amenabilidad. La teoría de amenabilidad irrumpió con éxito resonante, esclareciendo y dando solución a la compleja problemática planteada por H. Lebesgue ya descripta. Esta teoría está en una suerte de punto de inflexión. Por un lado, la teoría es lo suficientemente fuerte para dar lugar al desarrollo de una teoría general. Sin embargo, es un tanto débil en cuanto al alcance de situaciones que logra abarcar. Establece una suerte de condiciones de finitud en álgebras de Banach (cf. [**118**], p. 284). Muchos teoremas válidos para grupos finitos pueden generalizarse a grupos amenables pero no a clases más amplias. Por ejemplo, como se ha consignado los criterios de amenabilidad no aplican a semigrupos [**44**]. Por otra parte las condiciones de amenabilidad de W*-álgebras aplican a una subclase muy restricta de las mismas [**147**].
Se ha debido por ello redefinir nociones de amenabilidad, ya sea restrigiendo las clases de bimódulos en cuestión, la estructura de las derivaciones subyacentes, etc.. Surgieron así nuevos puntos de vista, adecuados al objeto de estudio preciso. Entre otras derivaciones mencionamos algunas otras nociones de amenabilidad, a saber:

1. *Connes-amenabilidad*, propicias para el estudio de álgebras de von Neumann [**27**][**28**], [**81**][**92**], 1976.[13]
2. *Débil-amenabilidad* [**7**], 1987.[14]
3. *Super-amenabilidad* o *contractibilidad*.[15]

[11] O sea B es A-bimódulo de Banach y dados $a \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ valen las identidades

$$a(b_1b_2) = (ab_1)b_2, (b_1b_2)a = b_1(b_2a), (b_1a)b_2 = b_1(ab_2).$$

[12] $A \bowtie B$ es el producto $A \times B$ con las operaciones

$$\begin{aligned} z(a_1,b_1) + (a_2,b_2) &= (za_1 + a_2, zb_1 + b_2), \\ (a_1,b_1)(a_2,b_2) &= (a_1a_2, a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2), \end{aligned}$$

y la norma $\| (a,b) \| = \| a \| + \| b \|$.

[13] V. (2.8).

[14] Un álgebra de Banach A es débilmente amenable si toda derivación acotada de A con valores en A^* es interna [**34**].

[15] V. (2.3).

4. *Amenabilidad de operadores*, adecuada al estudio de álgebras de operadores [**130**], 1995[16].
5. *n-Débil amenabilidad y amenabilidad débil permanente* [**34**], 1998.[17]
6. *Amenabilidad aproximada*, *amenabilidad esencial*, *amenabilidad aproximadamente esencial* [**63**], 2004.[18]
7. *Amenabilidad por ideales* [**65**], 2004.[19]
8. *Pseudo-amenabilidad* [**24**], 2009.[20]
9. Amenabilidad por caracteres [**120**] [**97**], 2008.[21]
10. *Connes-σ-amenabilidad* [**119**], 2022.
11. Etc..

---

[16](a) Se llama *espacio de operadores* a todo espacio vectorial V munido de una *norma matricial* $\parallel \circ \parallel$, o sea una asignación de normas $\parallel \circ \parallel_n$ en $\mathrm{M}_n(V)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que
(i) $\parallel a \oplus b \parallel_{n+m} = \text{máx}\{\parallel a \parallel_n, \parallel b \parallel_m\}$ si $a \in \mathrm{M}_n(V)$ y $b \in \mathrm{M}_m(V)$.
(ii) $\parallel zaw \parallel_n \leq \parallel z \parallel \parallel a \parallel_m \parallel w \parallel$ si $z \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, $a \in \mathrm{M}_m(V)$, $w \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
(b) Cada aplicación lineal $\phi : V \to W$ entre espacios de operadores sobre un mismo cuerpo induce aplicaciones lineales naturales $\phi_n : \mathrm{M}_n(V) \to \mathrm{M}_n(W)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
(c) Escribamos $\parallel \phi \parallel_{cb} = \sup\{\parallel \phi_n \parallel : n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que ϕ es *operador completamente acotado* si $\parallel \phi \parallel_{cb} < \infty$. En particular, un operador ϕ se dice *completamente contractivo* si $\parallel \phi \parallel_{cb} \leq 1$.
(d) Sean A un espacio de operadores y $m : A \times A \to A$ una forma bilineal. Se dice que m es *forma bilineal completamente contractiva* si el operador lineal $\hat{m} : A \hat{\otimes} A \to A$ es completamente contractivo.
(e) Un álgebra de Banach A que es espacio de operadores se dice *completamente contractiva* si la multiplicación $A \times A \to A$ es completamente contractiva.
(f) Sea A un álgebra de Banach completamente contractiva. Se llama *A-bimódulo de operadores* a todo A-bimódulo de Banach E, que es además espacio de operadores y tal que las acciones de A en E son completamente contractivas.
(g) Sea A un álgebra de Banach completamente contractiva. A se dice *amenable por operadores* si para todo A-bimódulo dual de operadores E cada derivación $D : A \to E$ completamente acotada es interna [**131**].

[17]Decimos que un álgebra de Banach A es *n-débilmente amenable* si toda derivación acotada $D : A \to A^{n*}$ es interna, donde $A^{1*} = A$, $A^{2*} = (A^{1*})^*$, etc., y que es *permanentemente débilmente amenable* si es n-débilmente amenable para todo $n \in \mathbb{N}$.

[18](a) Un álgebra de Banach A es *aproximadamente amenable* si para todo A-bimódulo de Banach X cada derivación acotada $D : A \to X^*$ es *aproximadamente interna*, i.e. hay alguna red $\{\xi_j\}_{j\in J}$ en X^* tal que $D(a) = \text{lím}_{j\in J}(a\xi_j - \xi_j a)$ para todo $a \in A$.
(b) A se dice *esencialmente amenable* si para todo A-bimódulo de Banach pseudounitario X cada derivación acotada $D : A \to X^*$ es interna.
(c) A se dice *aproximadamente esencialmente amenable* si para todo A-bimódulo de Banach pseudounitario X cada derivación $D : A \to X^*$ es aproximadamente interna.

[19]Un álgebra de Banach A se dice *amenable por ideales* si toda derivación acotada $D : A \to (A/I)^*$ es interna, cualquiera sea el ideal bilátero cerrado I de A.

[20]Un álgebra de Banach A es *pseudo-amenable* si posee alguna diagonal aproximada (V. (2.52)).

[21]Sean A álgebra de Banach y $\psi \in \sigma(A)$. Todo espacio de Banach E admite una estructura de A-módulo a izquierda (derecha) haciendo $ax = \psi(a)x$ ($xa = \psi(a)x$) para $a \in A$ y $x \in E$. Si toda derivación acotada de A con valores en el dual de tales bimódulos de Banach es interna decimos que A es *amenable por caracteres a izquierda* (*a derecha*) .

Objetivos. La temática sobre homología y cohomología, con aplicaciones a amenabilidad y teoría de operadores, es objeto de estudio del proyecto Análisis Funcional en Espacios y Álgebras de Banach. El mismo es desarrollado por el autor en sede del Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada de la Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina.
Abordaremos homología y cohomología en conexión con amenabilidad en álgebras de Banach. La temática interesa a la comunidad matemática, quizás debido a la transversalidad de sus alcances. La teoría es compleja y su desarrollo demanda de herramientas delicadas. Trataremos de presentar las mismas, en la medida de nuestros alcances, con el mayor grado de claridad posible. Desde luego, la presentación de los temas es incompleta dada la vastedad teórica de la materia. En su defecto, guiados en la selección del material por un criterio personal, introductorio y pedagógico, procuramos un desarrollo detallado desglosando en distintos apartados procesos que pueden resultar largos o complejos.
El trabajo consta de cuatro capítulos: el primero de carácter general sobre homología y cohomología. El segundo sobre aplicaciones en álgebras y módulos de Banach. Los capítulos tercero y cuarto son anexos, con elementos sobre teoría general de grupos y de módulos. Cada capítulo consta de secciones con contenido teórico, de ejemplos presentados en subsecciones, y finalmente de problemas propuestos.
Finalmente, expreso mi respeto y agradecimiento por la atención y la consideración dispensada por el Dr. Emilio Lluis-Puebla y por los colegas del Comité de Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana.

Carlos C. Peña
Tandil, Argentina, 2023

Capítulo 1

Homología y cohomología

1.1. Categorías y functores

1. [**48**][**42**][**111**] Llamamos *categoría* a toda terna $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}, \circ)$, donde $\mathcal{O}$ es una clase de *objetos*, $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}$ son *flechas* o *morfismos* entre los objetos y $\circ$ es una *regla de composición* entre objetos de modo tal que:
(i) Dados $A, B \in \mathcal{O}$ hay un conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$ de morfismos de A en B, eventualmente vacío (V. §4.16.e).
(ii) Si $A, B, C \in \mathcal{O}$,
$$\circ : \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C), \ \ \circ (f, g) \triangleq f \circ g.$$
(iii) Si $A, B, C \in \mathcal{O}$, exíste $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ tal que $1_A \circ g = g$ y $f \circ 1_A = f$ si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$.
(iv) Dados $A, B, C, D \in \mathcal{O}$ y morfismos
$$f \in \mathrm{Hom}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}(B, C),\ h \in \mathrm{Hom}(C, D),$$
se tiene $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. V. ejemplos (4.16.1.7.4).
3. Sean $\mathcal{C}_i = (\mathcal{O}_i, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}_i}, \circ_i)$, $i = 1, 2$, dos categorías. Se llama *functor* entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, y escribimos $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, a todo funcional F que transforma objetos y morfismos de $\mathcal{C}_1$ en objetos y morfismos de $\mathcal{C}_2$ de acuerdo a las condiciones siguientes, que definen los llamados *functores covariantes* y *functores contravariantes*:
(i) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para cada $A \in \mathcal{O}_1$.
(ii) Si $A, B \in \mathcal{O}_1$ y $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ resulta $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ (resp. $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(B), F(A))$.
(iii) Dados $A, B, C \in \mathcal{O}_1$, $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ y $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ entonces $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (resp. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$).
4. Dadas categorías $\mathcal{C}_i = (\mathcal{O}_i, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}_i}, \circ_i)$, $i = 1, 2$, decimos que $\mathcal{C}_1$ es *subcategoría* de $\mathcal{C}_2$ si $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ y $\mathrm{mor}_1 \subseteq \mathrm{mor}_2$. Decimos que $\mathcal{C}_1$ es *subcategoría total* de $\mathcal{C}_2$ si además $\mathrm{mor}_1 = \mathrm{mor}_2$.
5. Sean R, S anillos, $\mathcal{C}$ una subcategoría total de la categoría de R-módulos y $\mathcal{D}$ una subcategoría total de la categoría de S-módulos. Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *aditivo* si dados R-módulos $M, N \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ y R-homomorfismos $f, g : M \to N$ es $F(f + g) = F(f) + F(g)$. En ese caso, $F : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(F(M), F(N))$ deviene homomorfismo de grupos abelianos en el caso covariante, y asimismo $F : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(F(N), F(M))$ en el caso contravariante.

6. Sean R, S anillos, $U \in R$-Mod-S, $M, N \in R$-Mod. Entonces:
   (a) ${}_R\mathrm{Hom}({}_RU_S, {}_RM) \in S$-Mod.
   (b) ${}_R\mathrm{Hom}({}_RM, {}_RU_S) \in$ Mod-S.
   (c) Quedan definidas
$$
\begin{aligned}
&{}_R\mathrm{Hom}({}_RU_S, \circ) : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_S\mathrm{Mod},\\
&{}_R\mathrm{Hom}(\circ, {}_RU_S) : {}_R\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}_S.
\end{aligned}
$$
   (d) Además
$$\mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{{}_R\mathrm{Hom}({}_RU_S,\circ)} {}_S\mathrm{Hom}[{}_R\mathrm{Hom}({}_RU_S, M), {}_R\mathrm{Hom}({}_RU_S, N)].$$
   (e) Asimismo
$$\mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{{}_R\mathrm{Hom}(\circ,{}_RU_S)} \mathrm{Hom}_S[{}_R\mathrm{Hom}(N, {}_RU_S), {}_R\mathrm{Hom}(M, {}_RU_S)].$$
   (f) Luego ${}_R\mathrm{Hom}({}_RU_S, \circ)$ y ${}_R\mathrm{Hom}(\circ, {}_RU_S)$ son functores aditivos covariante y contravariante entre las categorías de R-módulos a izquierda y S-módulos a izquierda y de R-módulos a izquierda y de S-módulos a derecha respectivamente.
7. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ subcategorías totales de la categoría de módulos sobre un anillo R y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor.
   (a) Si F es covariante y para cada sucesión exacta
$$0 \to L \to M \to N \to 0$$
   la sucesión $0 \to F(L) \to F(M) \to F(N)$ es exacta se dice que el functor F es *exacto a izquierda*. En caso que la sucesión
$$F(L) \to F(M) \to F(N) \to 0$$
   resulte siempre exacta diremos que F es *exacto a derecha*.
   (b) Si F es contravariante y para cada sucesión exacta
$$0 \to L \to M \to N \to 0$$
   la sucesión $0 \to F(N) \to F(M) \to F(L)$ es exacta se dice que el functor F es *exacto a izquierda*, siéndolo *a derecha* si
$$F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0.$$
   (c) Son *exactos* los functores exactos a izquierda y derecha.
8. Los functores Hom son exactos a izquierda.
9. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functores covariantes (con modificaciones lógicas esta construcción aplica también a functores contravariantes). Una *transformación natural* de F en G es una correspondencia $\eta : \mathcal{O}_\mathcal{C} \to \mathrm{mor}_\mathcal{D}$ de modo que para $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(C_1, C_2)$ el diagrama
$$
\begin{array}{ccc}
F(C_1) & \xrightarrow{F(f)} & F(C_2)\\
\eta_{C_1}\downarrow & & \downarrow \eta_{C_2}\\
G(C_1) & \xrightarrow{G(f)} & G(C_2)
\end{array}
$$

es conmutativo. Escribimos entonces $\eta : F \to G$. Si cada η_C para $C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ es isomorfismo decimos que η define un *isomorfismo natural* entre F y G y escribimos $F \approx G$. (V. §4.16.1.7.5, §4.16.1.7.6, §4.17. 64).

10. Diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes* si hay functores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G \approx \mathrm{Id}_\mathcal{D}$ y $G \circ F \approx \mathrm{Id}_\mathcal{C}$. Entonces escribiremos $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$.
11. Sean $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ functores equivalentes tales que $F \circ G \approx \mathrm{Id}_\mathcal{D}$ y $G \circ F \approx \mathrm{Id}_\mathcal{C}$. Entonces $F' \circ G' \approx \mathrm{Id}_\mathcal{D}$ y $G' \circ F' \approx \mathrm{Id}_\mathcal{C}$. En efecto, sean $\phi : \mathcal{O}_\mathcal{D} \to \mathrm{mor}_\mathcal{C}$, $\eta : \mathcal{O}_D \to \mathrm{mor}_\mathcal{D}$, $\nu : \mathcal{O}_C \to \mathrm{mor}_\mathcal{C}$ funciones tales que en todo caso los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccc} G'(D_1) & \xrightarrow{G'(f)} & G'(D_2) \\ \phi_{D_1}\downarrow & & \downarrow\phi_{D_2} \\ G(D_1) & \xrightarrow{G(f)} & G(D_2), \end{array} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{array}{ccc} (FG)(D_1) & \xrightarrow{(FG)(f)} & (FG)(D_2) \\ \eta_{D_1}\downarrow & & \downarrow\eta_{D_2} \\ D_1 & \xrightarrow{f} & D_2, \end{array} \tag{1.1.2}$$

$$\begin{array}{ccc} (GF)(C_1) & \xrightarrow{(GF)(g)} & (GF)(C_2) \\ \nu_{C_1}\downarrow & & \downarrow\nu_{C_2} \\ C_1 & \xrightarrow{g} & C_2. \end{array} \tag{1.1.3}$$

Por (1.1.2) tenemos

$$\begin{array}{ccc} (FG')(D_1) & \xrightarrow{(FG')(f)} & (FG')(D_2) \\ F(\phi_{D_1})\downarrow & & \downarrow F(\phi_{D_2}) \\ (FG)(D_1) & \xrightarrow{(FG)(f)} & (FG)(D_2) \\ \eta_{D_1}\downarrow & & \downarrow\eta_{D_2} \\ D_1 & \xrightarrow{f} & D_2. \end{array}$$

Hagamos $\psi_D = \eta_D \circ F(\phi_D)$, $D \in \mathcal{O}_\mathcal{D}$. Así $\psi : \mathcal{O}_\mathcal{D} \to \mathrm{mor}_\mathcal{D}$. Como $G \approx G'$ por (1.1.1) para cada $D \in \mathcal{O}_\mathcal{D}$ resulta

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{(FG')(D)} &= F(\mathrm{Id}_{G'(D)}) = F(\phi_D^{-1} \circ \phi_D) = F(\phi_D^{-1}) \circ F(\phi_D), \\ \mathrm{Id}_{(FG)(D)} &= F(\mathrm{Id}_{G(D)}) = F(\phi_D \circ \phi_D^{-1}) = F(\phi_D) \circ F(\phi_D^{-1}), \end{aligned}$$

o sea $F(\phi_D)$ es inversible y $F(\phi_D)^{-1} = F(\phi_D^{-1})$. Podemos concluir que ψ_D es inversible y, siendo D arbitrario, $F \circ G' \approx \mathrm{Id}_\mathcal{D}$. Asimismo, ya con (1.1.3), será $G' \circ F \approx \mathrm{Id}_\mathcal{C}$.
Existe ahora $\theta : \mathcal{O}_\mathcal{C} \to \mathrm{mor}_\mathcal{D}$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
(F'G')(D_1) & \xrightarrow{(F'G')(f)} & (F'G')(D_2) \\
\theta_{G'(D_1)} \downarrow & & \downarrow \theta_{G'(D_2)} \\
(FG')(D_1) & \xrightarrow{(FG')(f)} & (FG)(D_2) \\
\psi_{D_1} \downarrow & & \downarrow \psi_{D_2} \\
D_1 & \xrightarrow{f} & D_2,
\end{array}$$

de donde $F' \circ G' \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, y análogamente $G' \circ F' \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

12. Queda definida una relación $\approx$ de equivalencia de categorías. Claramente dicha relación es reflexiva y simétrica. Sean $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \approx \mathcal{E}$, digamos vía functores

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{G'} \mathcal{D} \xrightarrow{F'} \mathcal{C}$$

y transformaciones naturales $\eta : F' \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ y $\nu : G' \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. Dado $C \in \mathcal{C}$ tenemos

$$\begin{array}{ccc}
(G'G)(F(C)) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{F(C)}} & (G'G)(F(C)) \\
\nu_{F(C)}\downarrow & & \downarrow \nu_{F(C)} \\
F(C) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{F(C)}} & F(C).
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{ccc}
F'((G'G)(F(C))) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{F'(F(C))}} & F'((G'G)(F(C))) \\
F'(\nu_{F(C)}) \downarrow & & \downarrow F'(\nu_{F(C)}) \\
(F'F)(C) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{(F'F)(C)}} & (F'F)(C) \\
\eta_C \downarrow & & \downarrow \eta_C \\
C & \xrightarrow{\mathrm{Id}_C} & C.
\end{array}$$

Sea $\theta_C = \eta_C \circ F'(\nu_{F(C)})$. Resulta $\theta : (F'G')(GF) \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ aplicación natural y $(F'G')(GF) \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Análogamente, $(GF)(F'G') \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ y por ello $\mathcal{C} \approx \mathcal{E}$.

13. Sean $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$ functores. Decimos que (F, G) es un *par de functores adjuntos* si dados $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ y $B \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ hay una biyección $\tau_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{F(f)^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B) \\
\tau_{A,B} \downarrow & & \downarrow \tau_{A',B} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B))
\end{array}$$

si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', A)$, y

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B') \\
\tau_{A,B} \downarrow & & \downarrow \tau_{A,B'} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{F(g)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B'))
\end{array}$$

si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B')$.[1]

[1] Si $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ y $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ escribimos $f^*(s) = s \circ f$ y $g_*(x) = g \circ x$.

14. Dado ${}_RM_S$, $(M\otimes_S, {}_R\operatorname{Hom}(M,\circ))$ es par de functores adjuntos.

 En efecto, se tiene $S\text{-Mod}\xrightarrow{M\otimes_S} R\text{-Mod}\xrightarrow{{}_R\operatorname{Hom}(M,\circ)} S\text{-Mod}$. Además, dados ${}_SN$ y ${}_RL$ hay un isomorfismo

$$\tau^M_{N,L} : {}_R\operatorname{Hom}(M\otimes_S N, L) \to {}_S\operatorname{Hom}(N, {}_R\operatorname{Hom}(M,L))$$

 tal que $\tau^M_{N,L}(T)(n)(m) = T(m\otimes n)$ para cada T, m, n. Fijados T y n se tiene una aplicación aditiva de M en L, que claramente es además R-homomorfismo a izquierda.
 Entonces $\tau^M_{N,L}(T) : N \to_R \operatorname{Hom}(M,L)$, aplicación ciertamente aditiva. Además para s, n, m dados se tiene

$$\begin{aligned}\tau^M_{N,L}(T)(sn)(m) &= T(m\otimes(sn))\\ &= T((ms)\otimes n)\\ &= \tau^M_{N,L}(T)(n)(ms)\\ &= (s\tau^M_{N,L}(T)(n))(m),\end{aligned}$$

 o sea $\tau^M_{N,L}(T)$ es homomorfismo de S-módulos a izquierda y $\tau^M_{N,L}$ está bien definida. Si $S \in_S \operatorname{Hom}(N, {}_R\operatorname{Hom}(M,L))$ sea $f_S : M\times N \to L$ tal que $f_S(m,n) = S(n)(m)$ para cada m, n. Es fácil ver que f_S es función S-admisible, de modo que existe $\eta_{N,L}(S) : M\otimes_S N \to L$ morfismo aditivo único tal que $\eta_{N,L}(S)(m\otimes n) = S(n)(m)$ para cada m, n. Como

$$\begin{aligned}\eta_{N,L}(r(m\otimes n)) &= \eta_{N,L}((rm)\otimes n))\\ &= S(n)(rm)\\ &= rS(n)(m)\\ &= r\eta_{N,L}(m\otimes n)\end{aligned}$$

 podemos inferir que $\eta_{N,L}(S)$ es homomorfismo de R-módulos a izquierda. Más aún, es fácil ver que $\eta_{N,L}$ y $\tau^M_{N,L}$ son aplicaciones recíprocas.
 Dados un S-módulo a izquierda N', un R-módulo a izquierda L', $f \in_R \operatorname{Hom}(L, L')$ y $g \in_S \operatorname{Hom}(N', N)$ se tiene

$$\tau^M_{N,L}\circ(\mathrm{Id}_M\otimes g)^* = g^*\circ\tau_{N,L}, \tag{1.1.4}$$

$$\tau_{N,L'}\circ_R\operatorname{Hom}(M,f) = {}_R\operatorname{Hom}(M,f)\circ\tau_{N,L}. \tag{1.1.5}$$

 Precisamente, si $x \in_R \operatorname{Hom}(M\otimes_S N, L)$ es

$$\begin{aligned}(g^*\circ\tau^M_{N,L})(x)(n')(m) &= \tau^M_{N,L}(x)(g(n'))(m)\\ &= x(m\otimes g(n'))\\ &= (x\circ(\mathrm{Id}_M\otimes g))(m\otimes n')\\ &= (\mathrm{Id}_M\otimes g)^*(x)(m\otimes n')\\ &= (\tau^M_{N,L}\circ(\mathrm{Id}_M\otimes g)^*)(x)(n')(m)\end{aligned}$$

cualesquiera sean n', m, y vale (1.1.4).
Asimismo, haciendo ${}_R\mathrm{Hom}(M, f) = f_*$, si $s \in_R \mathrm{Hom}(M \otimes_S N, L)$ escribimos

$$\begin{aligned}\tau^M_{N,L'}(f_*(s))(n)(m) &= f_*(s)(m \otimes n) \\ &= f(s(m \otimes n)) \\ &= (f \circ \tau^M_{N,L}(s)(n))(m) \\ &= f_*(\tau^M_{N,L}(s))(n)(m)\end{aligned}$$

cualesquiera sean n, m y vale (1.1.5).

1.2. Límites directo e inverso

1. Sea I conjunto casi ordenado (V. 4.16.1.7.4.e). Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $F : I \to \mathcal{C}$ un functor. Decimos que F es *sistema directo* o *sistema inverso* según F sea variante o contravariante respectivamente. En consecuencia, se tratará de una familia de objetos $\{F_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$ y de morfismos $\varphi^i_j : F_i \to F_j$ (resp. $\varphi^i_j : F_j \to F_i$) para cada par $i \le j$ en I de modo que $\varphi^i_i = \mathrm{Id}_{F_i}$ para todo i y, además, $\varphi^i_k = \varphi^j_k \circ \varphi^i_j$ (resp. $\varphi^i_k = \varphi^i_j \circ \varphi^j_k$) si $i \le j \le k$ en I.
2. Sea $F = \{F_i, \varphi^i_j\}$ un sistema directo. El *límite directo* de este sistema será cierto $\varinjlim F_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ y una familia de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ tales que $\alpha_i = \alpha_j \circ \varphi^i_j$ para todo $i \le j$ en I. Además, se verificará además la siguiente propiedad universal: dados $X \in \mathbb{O}_{\mathcal{C}}$ y morfismos $f_i : F_i \to X$ tales que $f_i = f_j \circ \varphi^i_j$ si $i \le j$ en I habrá un único morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ tal que $f_i = \beta \circ \alpha_i$ para cada i.
3. Veamos que existen límites directos de sistemas directos de R-módulos $\{F_i, \varphi^i_j\}$. En efecto, sean $\iota_i : F_i \hookrightarrow \oplus_{i\in I} F_i$ las inmersiones naturales y sea S el submódulo de $\oplus_{i\in I} F_i$ generado por elementos del tipo $\iota_j(\varphi^i_j(a_i)) - \iota_i(a_i)$, con $i \le j$ en I y $a_i \in F_i$. Escribiremos $\varinjlim F_i = (\oplus_{i\in I} F_i)/S$ y, si $i \in I$ y $a_i \in F_i$, $\alpha_i(a_i) = \iota_i(a_i) + S$. Así

$$\alpha_j(\varphi^i_j(a_i)) = \iota_j(\varphi^i_j(a_i)) + S = \iota_i(a_i) + S = \alpha_i(a_i)$$

y resulta $\alpha_i = \alpha_j \circ \varphi^i_j$ si $i \le j$ en I.
Sean $X \in \mathbb{O}_{\mathcal{C}}$ y morfismos $f_i : F_i \to X$ tales que $f_i = f_j \circ \varphi^i_j$ si $i \le j$ en I. Si $i \le j$ en I y $a_i \in F_i$ tenemos

$$(\oplus_{i\in I} f_i)(\iota_i(a_i) - \iota_j(\varphi^i_j(a_i))) = f_i(a_i) - f_j(\varphi^i_j(a_i)) = 0_X.$$

Luego $\oplus_{i\in I} f_i$ es nulo sobre S y queda definido un único morfismo $\beta : (\oplus_{i\in I})/S \to X$ tal que

$$\begin{aligned}(\beta\circ\alpha_i)(a_i) &= \beta(\iota_i(a_i)+S)\\ &= \beta(\iota_i(a_i)-\iota_j(\varphi_j^i(a_i))+\beta(\iota_j(\varphi_j^i(a_i)))\\ &= f_j(\varphi_j^i(a_i))\\ &= f_i(a_i),\end{aligned}$$

verificándose la propiedad universal.

1.3. Homología singular

1. Dado $q\in\mathbb{N}_0$ introducimos el *q-simplex usual*
$$\Delta_q = \{(t_0,...,t_q)\in\mathbb{R}_{\geq 0}^{q+1} : t_0+...+t_q = 1\}.$$
2. Dados un espacio topológico X y un anillo unitario R sea $\mathrm{L}_{q,R}(X)$ el R-módulo libre generado por $C(\Delta_q, X)$.
3. Si $0\leq j\leq q$ sea $F_q^j : \Delta_{q-1}\to\Delta_q$ tal que
$$F_q^j(t_0,...,t_{q-1}) = (t_0,...,t_{j-1},0,t_j,...,t_{q-1}).$$
4. Llamamos *q-cadena en X* a toda función continua $\sigma : \Delta_q\to X$.
5. Indicamos
$$\begin{aligned}&\partial_q : C(\Delta_q, X)\to C(\Delta_{q-1}, X),\\ &\partial_q(\sigma) = \sum_{j=0}^{q}(-1)^j\sigma\circ F_q^j.\end{aligned}$$
6. Quedan inducidos sendos morfismos de R-módulos
$$\partial_q : \mathrm{L}_{q,R}(X)\to\mathrm{L}_{q-1,R}(X).$$
7. Si $q\geq 2$ se tiene $\partial_{q-1}\circ\partial_q = 0$.
Precisamente, sea $\sigma\in C(\Delta_2, X)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\partial_1\circ\partial_2)(\sigma)(1) &= \partial_2(\sigma)(0,1)-\partial_2(\sigma)(1,0)\\ &= \sigma(0,0,1)-\sigma(0,0,1)+\sigma(0,1,0)-[\sigma(0,1,0)-\sigma(1,0,0)+\sigma(1,0,0)]\\ &= 0\end{aligned}$$

e inferimos que $\partial_1\circ\partial_2 = 0$. Si $q>1$ es fácil ver que

$$F_q^j\circ F_{q-1}^i = F_q^i\circ F_{q-1}^{j-1} \text{ si } 0\leq i<j\leq q. \tag{1.3.1}$$

Dada ahora $\sigma \in C(\Delta_q, X)$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\partial_{q-1} \circ \partial_q)(\sigma) &= \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\partial_q \sigma) \circ F_{q-1}^j \\
&= \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \sigma \circ F_q^k \circ F_{q-1}^k \\
&+ \sum_{0 \le i < j < q} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_q^j \circ F_{q-1}^i \\
&= A + B + C.
\end{aligned}$$

Pero por (1.3.1) resulta

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^{j-1} \\
&= \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j-1} \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^{j-1} \\
&= - \sum_{0 \le i \le k \le q-1} (-1)^{i+k} \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^k \\
&= -A - \sum_{0 \le i < k \le q-1} (-1)^{i+k} \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^k \\
&= -A - B
\end{aligned}$$

y podemos concluir la afirmación.

8. Queda definida la sucesión de R-módulos y morfismos

$$\ldots \to \mathrm{L}_{q,R}(X) \xrightarrow{\partial_q} \mathrm{L}_{q-1,R}(X) \to \ldots \to \mathrm{L}_{1,R}(X) \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{L}_{0,R}(X) \to 0$$

en la que $\mathrm{im}(\partial_q) \subseteq \ker(\partial_{q-1})$ si $q \geq 2$. Se llama *q-ciclos* y *q-bordes* a los elementos de $\ker(\partial_q)$ y de $\mathrm{im}(\partial_q)$ respectivamente. Dado $q \in \mathbb{N}$ escribimos además al *q-ésimo grupo de homología de X con coeficientes en R* mediante

$$\mathcal{H}_q(X, R) = \frac{\ker(\partial_q)}{\mathrm{im}(\partial_{q+1})}.$$

1.4. Grupos de cohomología de Hochschild

En esta sección consideraremos un álgebra asociativa unitaria A sobre un anillo conmutativo unitario K.

1. [**84**] Dado un A-bimódulo X y $n \in \mathbb{N}$ escribiremos

$$\mathcal{L}^0(A,X) \triangleq X,$$
$$\mathcal{L}^n(A,X) \triangleq \{T : A^n \to X, T \text{ función -}n\text{- multilineal}\}.$$

   Los elementos de $\mathcal{L}^n(A,X)$ se denominan *-n-cocadenas*.
2. Si $n \in \mathbb{N}$ el espacio $\mathcal{L}^n(A,X)$ deviene A-bimódulo con las operaciones

$$\begin{aligned}(a \cdot T)(a_1,...,a_n) &\triangleq a \cdot T(a_1,...,a_n),\\ (T \cdot a)(a_1,...,a_n) &\triangleq T(aa_1,a_2,...,a_n)\\ &+ \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j T(a,a_1,...,a_ja_{j+1},...,a_n)\\ &+ (-1)^n T(a,a_1,...,a_{n-1}) \cdot a_n.\end{aligned}$$

3. Queda definida la sucesión

$$(0) \to X \xrightarrow{\partial^1} \mathcal{L}^1(A,X) \xrightarrow{\partial^2} ... \xrightarrow{\partial^n} \mathcal{L}^n(A,X) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \mathcal{L}^{n+1}(A,X)...$$

   y dado $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene $\mathcal{B}^n(A,X) \subseteq \mathcal{Z}^n(A,X)$.
4. Consideremos el complejo

$$... \to \otimes_1^n A \otimes X \xrightarrow{d_n} \otimes_1^{n-1} A \otimes X \xrightarrow{d_{n-1}} ... \xrightarrow{d_2} A \otimes X \xrightarrow{d_1} X \to 0,$$

   con $d_1(a \otimes x) = xa - ax$ y, si $n > 1$,

$$\begin{aligned}d_n(a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes x) &= a_2 \otimes ... \otimes a_n \otimes (xa_1)\\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_1 \otimes ... \otimes (a_ia_{i+1}) \otimes ...\otimes\\ &+ (-1)^n a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1} \otimes (a_nx).\end{aligned}$$

   Observar que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ si $n \in \mathbb{N}_0$.
5. Si $n \in \mathbb{N}$ hay isomorfismos $\Lambda_n :\to \mathcal{L}^n(A,X^*)$.
   Dados $\varphi \in (\otimes_1^n A \otimes X)^*$, $a_1,...,a_n \in A$ y $x \in X$ basta hacer

$$\Lambda(\varphi)(a_1,...,a_n)(x) = \varphi(a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes x).$$

   Por otra parte, dado $T \in \mathcal{L}^n(A,X^*)$ por la propiedad universal del producto tensorial existe $\Lambda^{-1}(T) \in (\otimes_1^n A \otimes X)^*$ único tal que $\Lambda^{-1}(T)(a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes x) = T(a_1,...,a_n)(x)$ en tensores básicos. Ciertamente Λ y Λ^{-1} son aplicaciones recíprocas.
6. Si $n \in \mathbb{N}$ hay operadores ∂^n, denominados *operadores cobordismo*, que tornan conmutativos los diagramas

$$\begin{array}{ccc}(\otimes_1^{n-1} A \otimes X)^* & \xrightarrow{d_n^*} & (\otimes_1^n A \otimes X)^*\\ \Lambda_{n-1} \downarrow & & \downarrow \Lambda_n\\ \mathcal{L}^{n-1}(A,X^*) & \xrightarrow{\partial^n} & \mathcal{L}^n(A,X^*).\end{array}$$

Si $T \in \mathcal{L}^{n-1}(A, X^*)$ y $a_1, ..., a_n \in A$ es fácil ver que

$$\begin{aligned}\partial^n T(a_1, ..., a_n) = a_1 T(a_2, ..., a_n) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i T(a_1, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_n) \\ + (-1)^n T(a_1, ..., a_{n-1}) a_n.\end{aligned}$$

7. En particular, $T \in \ker(\partial^2)$ si y solo si $T(a_1 a_2) = a_1 T(a_2) + T(a_1) a_2$ cualesquiera sean $a_1, a_2 \in A$, i.e. si y solo si se trata de una *derivación.* Además $\partial^1(x')(a) = ax' - x'a$ para cada $x' \in X^*$ y $a \in A$. Observamos que $\partial^1(x')$ es derivación. Escribiremos $\partial^1(x') = \mathrm{ad}_{x'}$, y diremos que se trata de la *derivación interna soportada en* x'.
8. Dado $n \in \mathbb{N}$ indicamos el *n-ésimo grupo de cohomología de Hochschild de A con coeficientes en X^** mediante
$$\mathcal{H}^n(A, X^*) \triangleq \frac{\ker(\partial^{n+1})}{\mathrm{im}(\partial^n)}$$
Los elementos de $\mathrm{im}(\partial^n)$ se llaman *n-cobordes* y los de $\ker \partial^n$ se llaman *n-cociclos.*
9. En particular, el primer grupo de cohomología de Hochschild es el cociente de la clase de derivaciones respecto a derivaciones internas.

1.5. Resoluciones y grupos de homología y cohomología

1. [**111**] Se llama *resolución a izquierda* (resp. *resolución a derecha*) de R-módulos a toda sucesión

$$M_* : ... \to M_{n-1} \to M_n \to M_{n+1} \to ... \tag{1.5.1}$$

$$[\text{resp. } M^* : ... \to M_{n+1} \to M_n \to M_{n-1} \to ...] \tag{1.5.2}$$

tal que

$$\mathrm{im}(M_{n-1} \to M_n) \subseteq \ker(M_n \to M_{n+1})$$
$$[\text{resp. } \mathrm{im}(M_{n+1} \to M_n) \subseteq \ker(M_n \to M_{n-1})]$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. También se dice entonces que se tiene un *complejo de cocadenas* (resp. *un complejo de cadenas*) . Los homomorfismos $M_n \to M_{n\pm1}$ se denominan *homomorfismos conectores*.

2. Indicamos

$$\mathcal{H}^n(M_*) = \frac{\ker(M_n \to M_{n+1})}{\mathrm{im}(M_{n-1} \to M_n)}$$
$$[\text{resp. } \mathcal{H}_n(M^*) = \frac{\ker(M_n \to M_{n-1})}{\mathrm{im}(M_{n+1} \to M_n)}]$$

al n-ésimo *grupo de cohomología* (resp. *de homología*) del complejo de cocadenas M_* (resp. del complejo de cadenas M^*).

3. Dado ${}_RM$ se llama *resolución a izquierda* (*resolución a derecha*) de M a toda resolución del tipo

$$M^* : ... \to M_1 \to M_0 \to M \to 0 \to 0... \tag{1.5.3}$$

$$[\text{resp. } M_* : ... \to 0 \to 0 \to M \to M_0 \to M_1 \to ...]. \tag{1.5.4}$$

4. Todo R-módulo a izquierda M tiene una *resolución libre* (y por lo tanto *proyectiva*) exacta a izquierda, i.e. una resolución exacta del tipo (1.5.3) en la que cada M_n es R-módulo libre a izquierda.
   Para ello, sea L_0 un R-módulo libre a izquierda tal que $L_0 \to M \to 0$. Asimismo sea L_1 un R-módulo libre a izquierda tal que
   $$L_1 \xrightarrow{\alpha_1} \ker(L_0 \to M) \to 0.$$
   La sucesión
   $$L_1 \to \ker(L_0 \to M) \hookrightarrow L_0 \to M \to 0$$
   resulta exacta, o bien $L_1 \xrightarrow{\beta_1} L_0 \to M \to 0$ es exacta, donde β_1 es la composición de α_1 con la inclusión de $\ker(L_0 \to M)$ en L_0. Claramente, inductivamente sigue el resultado.
5. Todo R-módulo a izquierda M tiene una *resolución inyectiva exacta a derecha*, i.e. una resolución exacta del tipo (1.5.4) en la que cada M_n es R-módulo inyectivo.
   Por §4.11(4) hay un R-módulo inyectivo I_0 tal que $0 \to M \to I_0$. Asimismo hay un R-módulo a izquierda inyectivo I_1 tal que el diagrama
   $$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \to & M & \xrightarrow{\gamma_0} & I_0 & \xrightarrow{q_0} & \dfrac{I_0}{\gamma_0(M)} \\ & & & & & & \downarrow \gamma_1' \\ & & & & & & I_1 \end{array}$$
   es exacto. Luego la sucesión $0 \to M \xrightarrow{\gamma_0} I_0 \xrightarrow{\gamma_1} I_1$ es exacta si $\gamma_1 \triangleq \gamma_1' \circ q_0$, y claramente sigue el resultado inductivamente.

1.6. Grupos de extensión

1. Sean M, N dos R-módulos a izquierda y $M^* \to M \to 0$ una resolución exacta proyectiva a izquierda de M. Indiquemos
   $$M^{*r} : ... \to M_1 \to M_0 \to 0$$
   a la *resolución proyectiva* M^* reducida, la cual ya no será necesariamente exacta pues $M_1 \to M_0$ podría no ser suryectiva.
2. Queda inducido un complejo de cocadenas
   $${}_R\text{Hom}(M^{*r}, N) : 0 \xrightarrow{\partial^{-1}} {}_R\text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\partial^0} {}_R\text{Hom}(M_0, N) \xrightarrow{\partial^1} ....$$
   Introducimos los *grupos de extensión* de M en N mediante
   $${}_R\text{Ext}^n(M, N) \triangleq \mathcal{H}^n({}_R\text{Hom}(M^{*r}, N)),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

3. La construcción anterior es consistente pues no depende de la resolución exacta proyectiva M^*.
(i) Precisamente, sea $M'^* \to M \to 0$ otra resolución exacta proyectiva de M. Hay entonces un *morfismo de cadenas* $f : M^{*r} \to M'^{*r}$, i.e. una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de morfismos de R-módulos a izquierda tales que $f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1}$, donde $M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n$ y $M'_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} M'_n$ indican los homomorfismos conectores para cada n. Precisamente, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & M_0 & & \\ & & \downarrow d_0 & & \\ M'_0 & \xrightarrow{d'_0} & M & \to & 0 \end{array}$$

hay, por la proyectividad de M_0, un morfismo $M_0 \xrightarrow{f_0} M'_0$ tal que $d_0 = d'_0 \circ f_0$. Además, puesto que

$$d'_0 \circ (f_0 \circ d_1) = (d'_0 \circ f_0) \circ d_1 = d_0 \circ d_1 = 0,$$

que $\ker(d'_0) = \mathrm{im}(d'_1)$ y que M_1 es proyectivo, del esquema

$$\begin{array}{ccccc} & & M_1 & & \\ & & \downarrow f_0 \circ d_1 & & \\ M'_1 & \xrightarrow{d'_1|^{\mathrm{im}(d'_1)}} & \mathrm{im}(d'_1) & \to & 0 \end{array}$$

sigue que hay un morfismo $M_1 \xrightarrow{f_1} M'_1$ tal que $d'_1 \circ f_1 = f_0 \circ d_1$.
Sea $n \in \mathbb{N}_{>1}$ y supongamos hallados morfismos $f_j : M_j \to M'_j$ tales que $d'_j \circ f_j = f_{j-1} \circ d_j$ si $1 \leq j \leq n$. Tenemos

$$d'_n \circ (f_n \circ d_{n+1}) = (d'_n \circ f_n) \circ d_{n+1} = (f_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} = 0,$$

o sea $\mathrm{im}(f_{n+1} \circ d_{n+1}) \subseteq \mathrm{im}(d'_{n+1})$. Como M_{n+1} es proyectivo, existe un morfismo $M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M'_{n+1}$ tal que $d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ y sigue el paso inductivo.
(ii) Asimismo habrá un morfismo de cadenas $f' : M'^{*r} \to M^{*r}$. En particular, tendremos

$$d_0 = d'_0 \circ f_0,$$
$$d'_0 = d_0 \circ f'_0.$$

Luego

$$d_0 = d'_0 \circ f_0 = (d_0 \circ f'_0) \circ f_0 = d_0 \circ (f'_0 \circ f_0),$$

o sea $d_0 \circ (\mathrm{Id}_{M_0} - f'_0 \circ f_0) = 0_{M_0}$.
(iii) El morfismo de cadenas

$$f' \circ f : M^{*r} \to M^{*r},\ f' \circ f = \{f'_n \circ f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0},$$

será *homotópico* al complejo de cadena $\mathrm{Id}_{M^*} = \{\mathrm{Id}_{M_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, lo que indicamos $\mathrm{Id}_{M^{*r}} \sim f' \circ f$. O sea habrá una sucesión de morfismos de R-módulos a izquierda $\rho = \{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq -1}}$, con $M_n \xrightarrow{\rho_n} M_{n+1}$, tales que

$$\mathrm{Id}_{M_n} - f'_n \circ f_n = d_{n+1} \circ \rho_n + \rho_{n-1} \circ d_n,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.6.1}$$

Para ello, sabemos que $\mathrm{im}(\mathrm{Id}_{M_0} - f'_0 \circ f_0) \subseteq \mathrm{im}(d_1)$. Por la proyectividad de M_0 y del esquema

$$\begin{array}{ccccc} & & M_0 & & \\ & & \downarrow & \mathrm{Id}_{M_0} - f'_0 \circ f_0 & \\ M_1 & \xrightarrow{d_1|^{\mathrm{im}(d_1)}} & \mathrm{im}(d_1) & \to & 0 \end{array}$$

habrá un morfismo $M_0 \xrightarrow{\rho_0} M_1$ tal que $\mathrm{Id}_{M_0} - f'_0 \circ f_0 = d_1 \circ \rho_0$. En particular, hagamos $\rho_{-1} = 0_{M,M_0}$.
Dado $n \in \mathbb{N}$ supongamos hallados ρ_k para $k \leq n$. Por (1.6.1) tenemos

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ (\mathrm{Id}_{M_{n+1}} - f'_{n+1} \circ f_{n+1}) &= d_{n+1} - d_{n+1} \circ (f'_{n+1} \circ f_{n+1}) \\ &= d_{n+1} - (f'_n \circ f_n) \circ d_{n+1} \\ &= (\mathrm{Id}_{M_n} - f'_n \circ f_n) \circ d_{n+1} \\ &= d_{n+1} \circ (\rho_n \circ d_{n+1}). \end{aligned}$$

Así $\mathrm{im}(\mathrm{Id}_{M_{n+1}} - f'_{n+1} \circ f_{n+1} - \rho_n \circ d_{n+1}) \subseteq \mathrm{im}(d_{n+2})$. Por la proyectividad de M_{n+1} hay un morfismo $M_{n+1} \xrightarrow{\rho_{n+1}} M_{n+2}$ tal que

$$\mathrm{Id}_{M_{n+1}} - f'_{n+1} \circ f_{n+1} - \rho_n \circ d_{n+1} = d_{n+2} \circ \rho_{n+1},$$

y sigue el paso inductivo.
(iv) Asimismo será $\mathrm{Id}_{M'^*} \sim f \circ f'$.
(v) Si $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} &f'^{-}_n : \mathcal{H}^n(\mathrm{Hom}(M^{*r}, N)) \to \mathcal{H}^n(\mathrm{Hom}(M^{'*r}, N)), \\ &f'^{-}_n(T + \mathrm{im}(\partial^{n-1})) = T \circ f'_{n-1} + \mathrm{im}(\partial'^{(n-1)}),\ T \in \ker(\partial^n). \end{aligned}$$

Si $n \geq 2$ y $T = \partial^{n-1}(S)$ para cierto R-homomorfismo a izquierda S, observamos que $d_{n-1} \circ f'_{n-1} = f'_{n-2} \circ d'_{n-1}$ y tenemos

$$\begin{aligned} T \circ f'_{n-1} &= (S \circ d_{n-1}) \circ f'_{n-1} \\ &= S \circ (d_{n-1} \circ f'_{n-1}) \\ &= S \circ (f'_{n-2} \circ d'_{n-1}) \\ &= (S \circ f'_{n-2}) \circ f'_{n-1} \\ &= \partial'^{(n-1)}(S \circ f'_{n-2}) \end{aligned}$$

y f'^{-}_n está bien definida. Análogamente, como $d_0 \circ f'_0 = d'_0$ también f'^{-}_1 está bien definida. Es fácil ver que cada f'^{-}_n es isomorfismo de grupos con inverso $(f'^{-}_n)^{-1} = f^{-}_n$.
(vi) Consideramos una resolución exacta proyectiva de M

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbf{P}_M^{*r}: & ...\to & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 \xrightarrow{d_0} & P_0 & \to 0 \\ & & & & & \downarrow d_{-1} & \\ & & & & & M & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

de la que resulta

(1.6.2) $$\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_M^{*r}, N) : 0 \to \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{\partial^1} ...$$

Así $\mathcal{H}^0(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_M^{*r}, N)) = \ker(\partial^0)$.
Sea $F : \ker(\partial^0) \to \mathrm{Hom}(M, N)$, $F(g) = \overline{g}$, donde $\overline{g}(m) = g(p_0)$ si $d_{-1}(p_0) = m$, $m \in M$, $p_0 \in P_0$ y $g \in \ker(\partial^0)$. Como g es nula sobre $\ker(d_{-1})$ entonces $\overline{g}$ está bien definida y $\overline{g} \in \mathrm{Hom}(M, N)$.
Asimismo, F está bien definida y es homomorfismo de grupos abelianos. Se trata de un monomorfismo: sea $F(g) = 0_{\mathrm{Hom}(M,N)}$. Luego dado $p_0 \in P_0$,

$$g(p_0) = \overline{g}(d_{-1}(p_0)) = 0_N.$$

Además F es suryectiva: dado $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ sea $g \triangleq f \circ d_{-1}$. Luego $g \in \mathrm{Hom}(P_0, N)$, más aún, $g \in \ker(\partial^0)$. Es fácil ver que $F(g) = f$.
Concluímos que

(1.6.3) $${}_R\mathrm{Ext}^0(M, N) = \mathcal{H}^0({}_R\mathrm{Hom}(\mathbf{P}_M^{*r}, N)) \approx_R \mathrm{Hom}(M, N).$$

4. Sea ${}_R\overline{\mathrm{Ext}}^n(M, N) \triangleq \mathcal{H}^n({}_R\mathrm{Hom}(M, I_{*r}))$, $n \in \mathbb{N}_0$, donde consideramos $0 \to N \xrightarrow{d^{-1}} I_*$ resolución inyectiva de N y la correspondiente resolución inyectiva reducida $I_{*r} : 0 \to I_0 \to I_1 \to ...$
Puede verse que esta construcción no depende de la resolución inyectiva que se tome.
Puesto que ${}_R\mathrm{Hom}(M, \circ)$ es exacto a izquierda la sucesión
$$0 \to \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\partial_{-1}}_R \mathrm{Hom}(M, I_0) \xrightarrow{\partial_0}_R \mathrm{Hom}(M, I_1) \xrightarrow{\partial_1} ...$$
es inyectiva. Además
$${}_R\mathrm{Hom}(M, I_{*r}) : 0 \xrightarrow{\partial_0}_R \mathrm{Hom}(M, I_0) \xrightarrow{\partial_0}_R \mathrm{Hom}(M, I_1) \xrightarrow{\partial_1} ...$$
y tenemos
$${}_R\overline{\mathrm{Ext}}^0(M, N) \approx \ker(\partial_0) = \mathrm{im}(\partial_{-1}) \approx_R \mathrm{Hom}(M, N).$$
5. (cf. [**128**], Th. 7.8) Resulta ${}_R\mathrm{Ext}^n(M, N) =_R \overline{\mathrm{Ext}}^n(M, N)$.
6. Dos extensiones escindidas de L por N son equivalentes.
En efecto consideremos el diagrama con filas exactas escindidas
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & N & \to & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{Id}_L & & & & \downarrow \mathrm{Id}_N & & \\ 0 & \to & L & \xrightarrow{\gamma} & M' & \xrightarrow{\delta} & N & \to & 0 \end{array}$$
Por §4.17(22) bastará probar que existe un morfismo de módulos $\epsilon : M \to M'$ que lo torna conmutativo.
Para ello, sean $\beta' : N \to M$ y $\delta' : N \to M'$ morfismos de módulos

inversos a derecha de β y δ respectivamente.
Resultan $M = \alpha(L) \oplus \beta'(N)$ y $M' = \gamma(L) \oplus \delta'(N)$.
Como α y β' monomorfismos dado $m \in M$ hay únicos $l \in L$ y $n \in N$ tales que $m = \alpha(l) + \beta'(n)$. Hagamos $\epsilon(m) \triangleq \gamma(l) + \delta'(n)$.
Es fácil ver que $\epsilon \circ \alpha = \gamma$ y $\beta = \delta \circ \epsilon$.

7. (i) Sea $[\aleph]$ la clase de equivalencia de una extensión

$$\aleph : 0 \to N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$$

e indiquemos $e(N, M)$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de extensiones de N por M. Veamos que $e(N, M) \equiv_R \operatorname{Ext}^1(M, N)$.
(ii) Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \\ & & & & & & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\ \ldots & 0 & \to & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \to & 0 \end{array}$$

en el que la primer fila es resolución proyectiva de M. Por §1.8(8) hay morfismos $\alpha : P_1 \to N$ y $\beta : P_0 \to L$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{cccccccccc} \ldots & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\ \ldots & 0 & \to & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \to & 0 \end{array}$$

es conmutativo.
Por (1.6.2) tenemos $\partial^1(\alpha) = 0$ y $\alpha + \operatorname{im}(\partial^0) \in_R \operatorname{Ext}^1(M, N)$.
Hagamos $E : e(N, M) \to_R \operatorname{Ext}^1(M, N)$, $E([\aleph]) = \alpha + \operatorname{im}(\partial^0)$.
Consideremos una extensión equivalente a $\aleph$ de N por M, digamos

$$\aleph' : 0 \to N \xrightarrow{f'} L' \xrightarrow{g'} M \to 0.$$

Habrán entonces morfismos $L' \xrightarrow{\kappa} L$, $P_1 \xrightarrow{\alpha'} N$ y $P_0 \xrightarrow{\beta'} L'$ tales que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{cccccccccc} \ldots & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \beta' & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\ \ldots & 0 & \to & N & \xrightarrow{f'} & L' & \xrightarrow{g'} & M & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id}_N & & \downarrow \kappa & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\ \ldots & 0 & \to & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \to & 0. \end{array}$$

Por §1.8(8) hay algún morfismo $P_0 \xrightarrow{s} N$ tal que $\alpha - \alpha' = s \circ d_0$, o sea $\alpha + \operatorname{im}(\partial^0) = \alpha' + \operatorname{im}(\partial^0)$ y E está bien definido.
(iii) Veamos que E es suryectivo: sea $\gamma + \operatorname{im}(\partial^0) \in_R \operatorname{Ext}^1(M, N)$.
Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \to & \dfrac{P_1}{\ker(d_0)} & \xrightarrow{\hat{d}_0} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow \hat{\gamma} & & & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\ & & N & & & & M & & \end{array}$$

en el que $\hat{d}_0(p_1 + \ker(d_0)) = d_0(p_1)$ y $\hat{\gamma}(p_1 + \ker(d_0)) = \gamma(d_0(p_1))$ si $p_1 \in P_1$. A mbas aplicaciones definen sendos morfismos de R-módulos a izquierda. Sean

$$\mathcal{W} \triangleq \{(\hat{\gamma}(u), -\hat{d}_0(u)) : u \in \frac{P_1}{\ker(d_0)}\}$$

y $\Lambda = \dfrac{N \oplus P_0}{\mathcal{W}}$. Hacemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \dfrac{P_1}{\ker(d_0)} & \xrightarrow{\hat{d}_0} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow \hat{\gamma} & & \downarrow \theta & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\ 0 & \to & N & \xrightarrow{\zeta} & \Lambda & \xrightarrow{\nu} & M & \to & 0 \end{array} \tag{1.6.4}$$

donde para $n \in N$ y $p_0 \in P_0$ escribimos

$$\begin{aligned} \zeta(n) &= (n, 0_{P_0}) + \mathcal{W}, \\ \theta(p_0) &= (0_N, p_0) + \mathcal{W}, \\ \nu((n, p_0) + \mathcal{W}) &= \epsilon(p_0). \end{aligned}$$

En particular, ν está bien definida porque $\epsilon \circ \hat{d}_0 = 0$. Las tres aplicaciones definen morfismos de R-módulos.
Dado $u \in P_1/\ker(d_0)$, digamos $u = p_1 + \ker(d_0)$, tenemos

$$\begin{aligned} (\theta \circ \hat{d}_0)(u) &= \theta(d_0(p_1)) \\ &= (0_N, d_0(p_1)) + \mathcal{W} \\ &= (\gamma(p_1), 0_{P_0}) + (\gamma(-p_1), -d_0(-p_1)) + \mathcal{W} \\ &= (\gamma(p_1), 0_{P_0}) + \mathcal{W} \\ &= \zeta(\gamma(p_1)) \\ &= (\zeta \circ \hat{\gamma})(u). \end{aligned}$$

Además dado $p_0 \in P_0$ tenemos

$$(\nu \circ \theta)(p_0) = \nu((0_N, p_p) + \mathcal{W}) = \epsilon(p_0)$$

y $\nu \circ \theta = \epsilon$. Por otra parte, sea $\zeta(n) = 0_\Lambda$, digamos $n = \hat{\gamma}(u')$ y $0_{P_0} = -d_0(\hat{u'})$, con $u' = p_1' + \ker(d_0)$ y $p_1' \in P_1$. Luego $p_1' \in \ker(d_0)$ y $\ker(d_0) = \mathrm{im}(d_1) \subseteq \ker(\gamma)$, i.e. $n = 0_N$ y ζ es inyectiva.
Como ϵ es suryectiva y $\epsilon = \nu \circ \theta$ entonces ν es suryectiva.
Es claro que $\mathrm{im}(\zeta) \subseteq \ker(\nu)$. Sea $\lambda \in \ker(\nu)$ y veamos existe $n \in N$ tal que $\lambda = \zeta(n)$. Podemos escribir $\lambda = (n', p_0) + \mathcal{W}$, con $\epsilon(p_0) = 0_M$. Como $\hat{d}_0$ es suryectiva sea $u'' \in P_1/\ker(d_0)$ tal que $-\hat{d}_0(u'') = p_0$, digamos $u'' = p_1'' + \ker(d_0)$. Haciendo $n'' \triangleq \hat{\gamma}(u'')$ resulta

$$\zeta(n'') = (\zeta \circ \hat{\gamma})(u'') = (\theta \circ \hat{d}_0)(u'') = \theta(-p_0) = (0_N, -p_0) + \mathcal{W}.$$

Luego

$$\lambda = (n', p_0) + \mathcal{W} = [(n', 0_{P_0}) + \mathcal{W}] + \zeta(-n'') = \zeta(n' - n'').$$

Concluímos que el diagrama (1.6.4) conmuta y tiene filas exactas. Si $\sqsupset$ denota la correspondiente segunda fila, $\sqsupset$ es extensión de N mediante M y $E([\sqsupset]) = \gamma + \operatorname{im}(\partial^0)$.
(iv) Finalmente, E es inyectivo.
Sea $E(\sqsupset) = E(\sqsupset')$, digamos $\gamma + \operatorname{im}(\partial^0) = \gamma' + \operatorname{im}(\partial^0)$. Además de (1.6.4), tenemos un segundo diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \dfrac{P_1}{\ker(d_0)} & \xrightarrow{\hat{d_0}} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow \hat{\gamma}' & & \downarrow \theta' & & \downarrow \mathrm{Id}_M & & \\
0 & \to & N & \xrightarrow{\zeta'} & \Lambda' & \xrightarrow{\nu'} & M & \to & 0.
\end{array} \tag{1.6.5}
$$

Por §1.7(2), (Λ, θ, ζ) es expulsor de los morfismos $\hat{d_0}$ y $\hat{\gamma}$. Combinado con (1.6.5) hay un morfismo de R-módulos entre Λ y Λ', o sea $\sqsupset = \sqsupset'$.

1.7. Ejemplos

1.7.1. Sobre Hom$(R[G], S)$, G-grupo, R, S anillos. Sean R, S anillos, G, H grupos. Hay una biyección entre $\operatorname{Hom}(R[G], S)$ y el conjunto de pares

$$(\alpha, \zeta) \in \operatorname{Hom}(R, S) \times \operatorname{Hom}(G, \mathrm{U}(S))$$

tales que : $\alpha(r) \smile \zeta(g)$ si $r \in R$ y $g \in G$.
Para ello, fijemos $F \in \operatorname{Hom}(R[G], S)$. Definimos

$$\alpha : R \to S,\ \alpha(r) = F(r\delta_e),$$
$$\zeta : G \to \mathrm{U}(S),\ \zeta(g) = F(\delta_g).$$

Dados $r, r' \in R$ es $(r\delta_e) * (r'\delta_e) = rr'\delta_e$, y como F es homomorfismo de anillos $\alpha \in \operatorname{Hom}(R, S)$.
Asimismo, ζ deviene claramente homomorfismo de grupos.
Además si $r \in R$ y $g \in G$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha(r)\zeta(g) &= F(r\delta_e)F(\delta_g) \\
&= F((r\delta_e) * \delta_g) \\
&= F(r\delta_g) \\
&= F(\delta_g * (r\delta_e)) \\
&= F(\delta_g)F(r\delta_e) \\
&= \zeta(g)\alpha(r).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, dado (α', ζ') en las condiciones prescriptas sea

$$
\begin{aligned}
&F' : R(G) \to S, \\
&F'(v) = \sum_{g \in G} \alpha'(v(g))\zeta'(g) \text{ si } v \in R[G].
\end{aligned}
$$

Como $\{g \in G : (\alpha' \circ v)(g) \neq 0_R\} \subseteq \{g \in G : v(g) \neq 0_R\}$ vemos que $F'(v)$ está definido para cada $v \in R[G]$.
Evidentemente F' es aditiva y si $v, w \in R[G]$ tenemos

$$\begin{aligned} F'(v * w) &= \sum_{g\in G} \alpha'((v*w)(g))\zeta'(g) \\ &= \sum_{g\in G} \alpha'[\sum_{g_1\in G} v(g_1)w(g_1^{-1}g)]\zeta'(g_1(g_1^{-1}g)) \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{g_1\in G} \alpha'(v(g_1))\alpha'(w(g_1^{-1}g))\zeta'(g_1)\zeta'(g_1^{-1}g) \\ &= \sum_{g_1\in G} \alpha'(v(g_1))\zeta'(g_1)\sum_{g\in G}\alpha'(w(g_1^{-1}g))\zeta'(g_1^{-1}g) \\ &= F'(v)F'(w), \end{aligned}$$

o sea F' es homomorfismo de anillos.
Es fácil ver que las aplicaciones $F \to (\alpha, \zeta)$ son recíprocas.

1.7.2. Functor entre las categorías de grupos y anillos. Dado $\Psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ existe $R[\Psi] \in \mathrm{Hom}(R[G], R[H])$ único que es idéntico sobre R y coincide con Ψ sobre G. Así $R[\circ]$ es functor entre la categoría de grupos y la categoría de anillos.
En efecto, sea

$$R[\Psi](v) = \textstyle\sum_{g\in G} v(g)\delta_{\Psi(g)} \text{ si } v \in R[G].$$

Dados $v \in R[G]$ y $h \in H$, como

$$R[\Psi](v)(h) = \textstyle\sum_{g\in G:\Psi(g)=h} v(g)$$

resulta

$$\begin{aligned} \mid \{h \in H : R[\Psi](v)(h) \neq 0_R\} \mid &\leq \mid \Psi(\{g \in G : v(g) \neq 0_R\}) \mid \\ &< \infty, \end{aligned}$$

i.e. $R[\Psi])(v) \in R[H]$. Evidentemente $R[\Psi]$ es aditivo y si $v, w \in R[G]$ se tiene

$$\begin{aligned} R[\Psi](v*w) &= \sum_{g\in G}(v*w)(g)\delta_{\Psi(g)} \\ &= \sum_{g\in G}[\sum_{g_1\in G} v(g_1)w(g_1^{-1}g)]\delta_{\Psi(g_1(g_1^{-1}g))} \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{g_1\in G} v(g_1)w(g_1^{-1}g)\delta_{\Psi(g_1)} * \delta_{(\Psi(g_1^{-1}g))} \\ &= \sum_{g_1\in G} v(g_1)\delta_{\Psi(g_1)}\sum_{g\in G} w(g_1^{-1}g)\delta_{\Psi(g_1^{-1}g)} \\ &= R[\Psi](v) * R[\Psi](w). \end{aligned}$$

Además $R[\Psi](\delta_g) = \delta_{\Psi(g)}$ y $R[\Psi](r\delta_{e_G}) = r\delta_{e_H}$ si $g \in G$ y $r \in R$.

1.7.3. Sobre Hom$(R[G], S)$, R-anillo conmutativo, S una R-álgebra. Sean R anillo conmutativo y S una R-álgebra. Hay una biyección

$$\mathrm{Hom}(G, \mathrm{U}(S)) \approx \mathrm{Hom}(R[G], S).$$

Basta hacer

$$\mathrm{Hom}(G, \mathrm{U}(S)) \xrightarrow{R[\circ]} \mathrm{Hom}(R[G], S),$$

$$\mathrm{Hom}(R[G], S) \xrightarrow{\zeta^{\sim}} \mathrm{Hom}(G, \mathrm{U}(S)),$$

donde $\zeta^{\sim}(v)(g) = v(\delta_g)$ si $v \in \mathrm{Hom}(R[G], S)$ y $g \in G$.

1.7.4. Algunas categorías. [**128**] Indicamos algunos ejemplos de categorías.

(a) La categoría $\mathfrak{C}$ de conjuntos, en la que los objetos son los conjuntos, los morfismos son funciones entre conjuntos y el producto de morfismos es la composición usual de funciones.

(b) La categoría $\mathfrak{T}$, en que los objetos son espacios topológicos, los morfismos son funciones continuas y el producto de morfismos es la composición de funciones continuas.

(c) Fijados anillos R, S, las categorías ${}_R\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_S$ y ${}_R\mathfrak{M}_S$ de R-módulos a izquierda, S-módulos a derecha y (R, S)-módulos respectivamente.

(d) Sea S un *monoide*, i.e. un semigrupo con identidad. Indicamos $\mathfrak{C}(S)$ a la categoría en que $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})} = \{*\}$, donde $*$ es un conjunto, $\mathrm{Hom}(*, *) = S$ y la composición de morfismos es el producto de elementos de S.

Observar cómo en este caso hay un único objeto y cómo los morfismos no son necesariamente funciones en el sentido usual.

(e) Sea X un *conjunto casi ordenado*, i.e. munido de una relación binaria $\leq$ reflexiva y transitiva. Sea $\mathfrak{C}_X$ la categoría en la que $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}_X} = X$ y además, si $x, y \in X$, hacemos $\mathrm{Hom}(x, y) = \{\iota_y^x\}$ si $x \leq y$ y $\mathrm{Hom}(x, y) = \emptyset$ en otro caso, y por otra parte $\iota_x^y \circ \iota_y^x = \iota_z^x$ si $x \leq y \leq z$.

(f) Sean K-anillo conmutativo unitario y A una K-álgebra asociativa unitaria. Sea $A^e = A \otimes A^{op}$ el *álgebra envolvente*, o sea la K-algebra en la que $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (b'b)$ en tensores básicos.

[**125**] La categoría ${}_A\mathfrak{M}_A$ de A-bimódulos es equivalente a las categorías ${}_{A^e}\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_{A^e}$ de A^e-módulos a izquierda y derecha respectivamente.

Para ello, dado $M \in_A \mathfrak{M}_A$ hay una acción de A^e en $\mathfrak{M}$ tal que $(a \otimes b)m = amb$ y $m(a \otimes b) = bma$ en tensores básicos, con $a, b \in A$ y $m \in M$. Así M deviene A^e-bimódulo. Por otra parte, si $N \in_{A^e} \mathfrak{M}$ (resp. $N \in \mathfrak{M}_{A^e}$) y hacemos $an = (a \otimes 1_A)n$ y $na = (1_A \otimes a)n$ resulta $N =_A N_A$ (resp. $an = n(1_A \otimes a)$ y $na = n(a \otimes 1_A)$, resultando $N =_{A^{op}} N_{A^{op}}$) para cada $a \in A$ y $n \in N$. devienen morfismos de A^e-módulos.

(g) La categoría Gab de grupos abelianos.

(h) A-unmod: la categoría de A-*módulos de Banach unitarios*[2] a izquierda sobre A, donde A es álgebra de Banach unitaria.

[2]Un A-módulo de Banach a izquierda X sobre un álgebra de Banach con unidad 1 se dice unitario si $1x = x$ cualquiera sea $x \in X$.

(i) Ban, Fr, LCS denotan las categorías de espacios de Banach, de Fréchet y de espacios localmente convexos completos separados respectivamente, con las correspondientes clases de operadores lineales continuos.
(j) Lin y A-Algmod son las categorías de espacios vectoriales y operadores lineales y de módulos puramente algebraicos a izquierda sobre un anillo A.
(k) $\square$ indica el *functor de olvido*. Por ejemplo $\square$: A-Mod $\to$Ban, en que se prescinde de multiplicación externa, o $\square$: A-Mod$\to$ A-Algmod en que se prescinde de la topología.

1.7.5. Functores isomorfos. Fijado un anillo unitario R los functores ${}_R\mathrm{Hom}(R,\circ)$ e $\mathrm{Id}_{R\mathfrak{M}}$ sobre la categoría de R-módulos a izquierda son isomorfos.
Precisamente, sean $M, N \in_R \mathfrak{M}$ y $f \in_R \mathrm{Hom}(M,N)$. Tenemos

$$\begin{array}{ccc} {}_R\mathrm{Hom}(R,M) & \xrightarrow{{}_R\mathrm{Hom}(R,f)} & {}_R\mathrm{Hom}(R,N) \\ \eta_M \downarrow & & \downarrow \eta_N \\ M & \xrightarrow{f} & g \end{array}$$

donde para $g \in_R \mathrm{Hom}(R,M)$ hacemos

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Hom}(R,f)(g) &= f\circ g, \\ \eta_M(g) &= g(1_R). \end{aligned}$$

Observamos que η_M es biyectiva, con $\eta_M^{-1}(m) \in_R \mathrm{Hom}(R,M)$ tal que para $r \in R$ y $m \in M$ resulta $\eta_M^{-1}(m)(r) = rm$.

1.7.6. Categorías equivalentes. Un functor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ define una equivalencia de categorías si y solo si es *fiel*, *pleno* y *denso*. [3]
($\Rightarrow$) Sea $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ functor tal que $F\circ F' \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ y $F'\circ F \approx \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Sean $\eta : F'\circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ y $\nu : F\circ F' \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ aplicaciones naturales.
Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ y $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1,C_2)$ t.q. $F(f) = F(f') \triangleq k$. Entonces $f\circ\eta_{C_1} = \eta_{C_2}\circ F'(k) = f'\circ\eta_{C_1}$, y como η_{C_1} es suryectivo $f = f'$ y F es fiel.
Dado $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C_1),F(C_2))$ existe $l \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(C_1,C_2)$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (F'F)(C_1) & \xrightarrow{F'(h)} & (F'F)(C_2) \\ \eta_{C_1} \downarrow & & \downarrow \eta_{C_2} \\ C_1 & \xrightarrow{l} & C_2. \end{array}$$

Asimismo

$$\begin{array}{ccc} (F'F)(C_1) & \xrightarrow{(F'F)(l)} & (F'F)(C_2) \\ \eta_{C_1} \downarrow & & \downarrow \eta_{C_2} \\ C_1 & \xrightarrow{l} & C_2. \end{array}$$

[3]Sea dado un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Decimos que F es
(i) Fiel si $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1,C_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C_1),F(C_2))$ es inyectivo si $C_1, C_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.
(ii) Pleno si $F(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1,C_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C_1),F(C_2))$ si $C_1, C_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.
(iii) Denso si para cada $D \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ existe $C \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ tal que $F(C) \approx D$.

conmuta y debe ser $F'(h) = (F'F)(l)$. Pero F' es necesariamente inyectivo, $h = F(l)$ y F es pleno.
Dado ahora $D \in \mathcal{O}_\mathcal{D}$. Entonces $F'(D) \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ y $\nu_\mathcal{D} : F(F'(D)) \approx D$, de modo que F es denso.
($\Leftarrow$) Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functor fiel, pleno y denso. Definiremos un functor $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ F' \approx \mathrm{Id}_\mathcal{D}$ y $F' \circ F \approx \mathrm{Id}_\mathcal{C}$. Como F es denso dado $D \in \mathcal{O}_\mathcal{D}$ existen $C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ y un isomorfismo $\psi_D \in \mathrm{mor}_\mathcal{D}$, $\psi_D : D \to F(C)$
Hagamos $F'(D) \triangleq C$, de modo que $\psi_D : D \to F(F'(D))$. Como F es pleno y fiel, si $g \in \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(D, D')$ existe $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(F'(D), F'(D'))$ unico tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & D' \\ \psi_D \downarrow & & \downarrow \psi_{D'} \\ (FF')(D) & \xrightarrow{F(f)} & (FF')(D'). \end{array}$$

Escribamos $F'(g) \triangleq f$, de modo que $F(F'(g)) \circ \psi_D = \psi_{D'} \circ g$. Si además $g' \in \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(D', D'')$ vemos que

$$\begin{aligned} F(F'(g') \circ F'(g)) \circ \psi_D &= (F(F'(g')) \circ F(F'(g))) \circ \psi_D \\ &= F(F'(g')) \circ (F(F'(g)) \circ \psi_D) \\ &= F(F'(g')) \circ (\psi_{D'} \circ g) \\ &= (F(F'(g')) \circ \psi_{D'}) \circ g \\ &= (\psi_{D''} \circ g') \circ g \\ &= \psi_{D''} \circ (g' \circ g) \\ &= F(F'(g' \circ g)) \circ \psi_D. \end{aligned}$$

Como ψ_D es isomorfismo y F es fiel $F'(g' \circ g) = F'(g') \circ F'(g)$.
Por lo tanto $F'(1_D) = 1_{F'(D)}$ si $D \in \mathcal{O}_\mathcal{D}$, pues si $f_2 \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(F'(D), C_2)$ se tiene

$$\begin{aligned} F(F'(1_D) \circ f_2) &= F(F'(1_D)) \circ F(f_2) \\ &= (F(F'(1_D)) \circ \psi_D) \circ (\psi_D^{-1} \circ F(f_2)) \\ &= (\psi_D \circ 1_D) \circ (\psi_D^{-1} \circ F(f_2)) \\ &= F(f_2), \end{aligned}$$

de donde $F'(1_D) \circ f_2 = f_2$.
Análogamente $f_1 \circ F'(1_D) = f_1$ cuando $f_1 \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(C_1, F'(D))$. Como C_1, C_2 son cualesquiera concluímos que $F'(1_D) = 1_{F'(D)}$ y F' es un functor.
Notamos que $\psi : \mathrm{Id}_\mathcal{D} \to F \circ F'$ es aplicación natural. Además dado $C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ tenemos el isomorfismo $\psi_{F(C)} \in \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(C), F((F'F)(C)))$. Puesto que F es pleno existe

$$\zeta_C \in \mathrm{Hom}(C, (F'F)(C))$$

tal que $F(\zeta_C) = \psi_{F(C)}$. Bastará ver finalmente que $\zeta : \mathrm{Id}_\mathcal{C} \to F \circ F'$ es aplicación natural. Para ello, dada $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(C_1, C_2)$ tenemos

$$\begin{array}{ccc} F(C_1) & \xrightarrow{F(f)} & F(C_2) \\ \psi_{F(C_1)} \downarrow & & \downarrow \psi_{F(C_2)} \\ (FF')(F(C_1)) & \xrightarrow{(FF')(F(f))} & (FF')(F(C_2)). \end{array}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} F(\zeta_{C_2} \circ f) &= F(\zeta_{C_2}) \circ F(f) \\ &= F((F'F)(f)) \circ F(\zeta_{C_1}) \\ &= F((F'F)(f) \circ \zeta_{C_1}). \end{aligned}$$

Puesto que F es fiel $\zeta_{C_2} \circ f = (F'F)(f) \circ \zeta_{C_1}$ y sigue la tesis.

1.7.7. Functores exactos y grupos de cohomología. Sean dados $F : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ functor exacto covariante, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E} \in$ Comp. Veamos que $F(\mathcal{H}_n(\mathcal{E})) \approx \mathcal{H}_n(F(\mathcal{E}))$.
Para ello, por la exactitud de la sucesión

$$0 \to \operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1}) \xrightarrow{\iota_n} \ker(d^{\mathcal{E}}_n) \xrightarrow{\pi_n} \frac{\ker(d^{\mathcal{E}}_n)}{\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})} \to 0$$

la sucesión siguiente es exacta

$$0 \to F[\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})] \xrightarrow{F(\iota_n)} F[\ker(d^{\mathcal{E}}_n)] \xrightarrow{F(\pi_n)} F[\frac{\ker(d^{\mathcal{E}}_n)}{\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})}] \to 0.$$

Por lo tanto

$$F(\mathcal{H}_n(\mathcal{E})) = F[\frac{\ker(d^{\mathcal{E}}_n)}{\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})}] \approx \frac{F[\ker(d^{\mathcal{E}}_n)]}{\operatorname{im}(F(\iota_n))}. \tag{1.7.1}$$

Sabemos que $\mathcal{H}_n(F(\mathcal{E})) = \dfrac{\ker(F(d^{\mathcal{E}}_n))}{\operatorname{im}(F(d^{\mathcal{E}}_{n+1}))}$. Además

$$0 \to \ker(d^{\mathcal{E}}_n) \xrightarrow{j_n} E_n \xrightarrow{d^{\mathcal{E}}_n} E_{n-1}$$

es exacta, de donde

$$0 \to F[\ker(d^{\mathcal{E}}_n)] \xrightarrow{F(j_n)} F(E_n) \xrightarrow{F(d^{\mathcal{E}}_n)} F(E_{n-1}) \tag{1.7.2}$$

resulta exacta. Luego $F(j_n)$ es monomorfismo e $\operatorname{im}(F(j_n)) = \ker(F(d^{\mathcal{E}}_n))$.
Hagamos

$$\zeta_n : \frac{F[\ker(d^{\mathcal{E}}_n)]}{\operatorname{im}(F(\iota_n))} \to \frac{\ker(F(d^{\mathcal{E}}_n))}{\operatorname{im}(F(d^{\mathcal{E}}_{n+1}))},$$
$$\zeta_n(u + \operatorname{im}(F(\iota_n))) = F(j_n)(u) + \operatorname{im}(F(d^{\mathcal{E}}_{n+1})).$$

Supongamos $u = F(\iota_n)(v)$ para cierto $v \in F[\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})]$. Podemos escribir

$$d^{\mathcal{E}}_{n+1} = j_n \circ \iota_n \circ d^{\mathcal{E}r}_{n+1} \tag{1.7.3}$$

con $d^{\mathcal{E}r}_{n+1} = d^{\mathcal{E}}_{n+1} |^{\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})}$. Tenemos $F(\operatorname{im}(d^{\mathcal{E}}_{n+1})) = F(d^{\mathcal{E}r}_{n+1})(F(E^{\mathcal{E}}_{n+1}))$ porque F es exacto y $d^{\mathcal{E}r}_{n+1}$ es suryectivo.
Existe entonces $w \in F(E^{\mathcal{E}}_{n+1})$ tal que $v = F(d^{\mathcal{E}r}_{n+1})(w)$ y

$$F(j_n)(u) = F(j_n \circ \iota_n)(v) = F(j_n \circ \iota_n \circ d^{\mathcal{E}r}_{n+1})(w) = F(d^{\mathcal{E}}_{n+1})(w),$$

o sea ζ_n está bien definida.
Por (1.7.2) y (1.7.3) sigue fácilmente que ζ_n isomorfismo de R-módulos y por (1.7.1) sigue la tesis.

1.7.8. Expulsores.

1. (i) Sean $A, B, C \in R$-Mod y $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{g} C$ morfismos de R-módulos. Existe un R-módulo D y morfismos $B \xrightarrow{\beta} D$, $C \xrightarrow{\gamma} D$ tales que $\beta \circ f = \gamma \circ g$.
En efecto, sean $\mathcal{W} \triangleq \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$ y $D \triangleq (B \oplus C)/\mathcal{W}$. Hagamos $\beta(b) = (b, 0_C) + \mathcal{W}$, $\gamma(c) = (0_B, c) + \mathcal{W}$, con $b \in B$ y $c \in C$. Dado $a \in A$ resulta
$$\begin{aligned}(\beta \circ f)(a) &= \beta(f(a))\\ &= (f(a), 0_C) + \mathcal{W}\\ &= (0_B, g(a)) + \mathcal{W}\\ &= \gamma(g(a))\\ &= (\gamma \circ g)(a).\end{aligned}$$
(ii) Supongamos existen un R-módulo D' y morfismos $B \xrightarrow{\beta'} D'$, $C \xrightarrow{\gamma'} D'$ tales que $\beta' \circ f = \gamma' \circ g$.
Queda definido $B \oplus C \xrightarrow{\beta' \oplus \gamma'} D'$ y $\mathcal{W} \subseteq \ker(\beta' \oplus \gamma')$. En consecuencia existe $D \xrightarrow{\delta} D'$ tal que $\delta((b, c) + \mathcal{W}) = \beta'(b) + \gamma'(c)$ para cada b, c. Claramente $\beta' = \delta \circ \beta$ y $\gamma' = \delta \circ \gamma$.
Más aún, δ queda unívocamente determinado: Supongamos hay un morfismo $D \xrightarrow{\epsilon} D'$ tal que $\epsilon \circ \beta = \beta'$ y $\epsilon \circ \gamma = \gamma'$. Luego
$$\epsilon((b, c) + \mathcal{W}) = \epsilon(\beta(b) + \gamma(c)) = \beta'(b) + \gamma'(c) = \delta((b, c) + \mathcal{W})$$
cualesquiera sean b, c.
(iii) La terna (D, β, γ) se denomina *expulsor de los morfismos f y g*. En (ii) señalamos la *propiedad universal del expulsor de morfismos.*
(iv) El mismo queda unívocamente determinado salvo isomorfismos. Precisamente, consideremos expulsores (D, β, γ) y (D', β', γ') de f y g. Sean $D \xrightarrow{\delta} D'$ y $D' \xrightarrow{\delta'} D$ los morfismos únicos correspondientes. Entonces $(\delta' \circ \delta) \circ \beta = \beta$ y $(\delta' \circ \delta) \circ \gamma = \gamma$ y, por unicidad, $\delta' \circ \delta = \mathrm{Id}_D$. Análogamente resulta $\delta \circ \delta' = \mathrm{Id}_{D'}$.
2. Consideremos el diagrama exacto conmutativo de R-módulos y morfismos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X_{-1} & \xrightarrow{\alpha} & X_0 & \xrightarrow{\beta} & X_1 & \to & 0\\ & & \gamma \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \mathrm{Id}_{X_1} & & \\ 0 & \to & Y_{-1} & \xrightarrow{\epsilon} & Y_0 & \xrightarrow{\varphi} & X_1 & \to & 0 \end{array} \tag{1.7.4}$$

y veamos que (Y_0, δ, ϵ) es expulsor de los morfismos α y γ.
Sea $X_0 \oplus Y_{-1} \xrightarrow{F} Y_0$, $F(x_0, y_{-1}) = \delta(x_0) + \epsilon(y_{-1})$.
Claramente F es morfismo de R-módulos.
Además F es suryectivo. En efecto, dado $y_0 \in Y_0$ sea $x_0 \in X_0$ tal que $\beta(x_0) = \varphi(y_0)$. Entonces $\varphi(y_0) = \varphi(\delta(x_0))$ e $y_0 - \delta(x_0) \in \ker(\varphi)$. Exíste entonces $y_{-1} \in Y_{-1}$ tal que $y_0 = \delta(x_0) + \epsilon(y_{-1})$, de modo que $y_0 \in \mathrm{im}(F)$. Por otra parte, si

$$\mathcal{W} \triangleq \{(\alpha(x_{-1}), -\gamma(x_{-1})) : x_{-1} \in X_{-1}\}$$

resulta $\mathcal{W} \subseteq \ker(F)$.
Sea ahora $(x_0, y_{-1}) \in \ker(F)$. Sigue que $\delta(x_0) \in \mathrm{im}(\epsilon)$, de donde $\varphi(\delta(x_0)) = 0_{X_1}$, i.e. $\beta(x_0) = 0_{X_1}$. En consecuencia existe $x_{-1} \in X_{-1}$ tal que $\alpha(x_{-1}) = x_0$. Ahora

$$-\epsilon(y_{-1}) = \delta(x_0) = \delta(\alpha(x_{-1})) = \epsilon(\gamma(x_{-1})),$$

o sea $y_{-1} + \gamma(x_{-1}) \in \ker(\epsilon)$. Como ϵ es inyectiva $y_{-1} = -\gamma(x_{-1})$ y $(x_0, y_{-1}) \in \mathcal{W}$.
Concluímos que $\mathcal{W} = \ker(F)$ e $Y_0 \approx (X_0 \oplus Y_{-1})/\mathcal{W}$ y sigue enseguida la afirmación.

1.7.9. Sobre sistemas y límites directos.

1. Consideremos un *sistema directo constante*, digamos: fijado un conjunto casi ordenado I sea $F_i = F$ y $\varphi^i_j = \mathrm{Id}_F$ cualesquiera sean $i \leq j$ en I, con F cierto R-módulo. Entonces $\varinjlim F_i \approx F$.
   Con la notación de (1.2.3), sea $X = F$ y $f_i = \mathrm{Id}_F$ para cada $i \in I$. Por la propiedad universal del límite directo hay un único R-morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to F$ tal que dados $n \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_n \in I$, $a_{i_1}, ..., a_{i_n} \in F$, escribiendo $x = \sum_{j=1}^n \iota_{i_j}(a_{i_j}) + S$ en $\varinjlim F_i$, tenemos
   $$\beta(x) = \textstyle\sum_{j=1}^n \beta(\alpha_{i_j}(a_{i_j})) = \sum_{j=1}^n f_{i_j}(a_{i_j}) = \sum_{j=1}^n a_{i_j}.$$
   Evidentemente β es epimorfismo.
   Supongamos $\beta(x) = 0_F$. Sea $k \in I$ tal que $i_j \leq k$ si $1 \leq j \leq n$. Entonces
   $$x = \textstyle\sum_{j=1}^n (\iota_{i_j}(a_{i_j}) - \iota_k(a_{i_j})) + S = 0_{\varinjlim F_i}$$
   y β deviene isomorfismo de R-módulos.
2. Consideremos un sistema directo trivial, o sea: sea I conjunto casi ordenado en el que $i \leq j$ si y solo si $i = j$. Un sistema directo de R-múdulos sobre I es una familia de R-módulos $\{F_i\}_{i \in I}$. Observar que en (1.2.3) resulta $S = (0_{\oplus_{i\in I} F_i})$. Luego $\varinjlim F_i \approx \oplus_{i \in I} F_i$.
3. Si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión creciente de R-módulos es $\varinjlim F_n \approx \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Precisamente, hagamos $F = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y sean $\varphi^n_{n+m} : F_n \hookrightarrow F_{n+m}$ y $f_n : F_n \hookrightarrow F$ las inclusiones usuales. Con la notación de (1.2.3), como $f_n = f_{n+m} \circ \varphi^n_{n+m}$ para cada n, m por la universalidad del límite directo hay un único morfismo de R-módulos $\beta : \varinjlim F_i \to F$ tal que $f_n = \beta \circ \alpha_n$ para todo n. Es evidente entonces que β es

epimorfismo. Razonando como en (1.7.1) se ve además que β es monomorfismo.

1.8. Problemas

1. Sean Comp la categoría de complejos de cadena, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathcal{H}_n$: Comp$\to$ R-Mod es un functor aditivo.
2. Sea $F : R - \text{Mod} \to \text{Gab}$ tal que $F(M) = \mathbb{Z}$ y $F(f) = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$ cuando $f \in_R \text{Hom}(N, P)$, cualesquiera sean los R-módulos a izquierda M, N, P. Entonces F no es functor aditivo.
3. Todo functor aditivo preserva sucesiones exactas escindidas.
4. Sean A un álgebra, $X \in A$-Mod. En §1.6.3 se hizo referencia a las nociones de homotopía y equivalencia homotópica de morfismos de cadenas. Un morfismo de cadenas $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ se dice *homotópicamente nulo* si hay una sucesión de morfismos $\{\rho_n : M_n \to N_{n-1} : n \in \mathbb{Z}\}$ tales que
$$f_n = d^{\mathcal{N}}_{n+1} \circ \rho_n + \rho_{n-1} \circ d^{\mathcal{M}}_n$$
para todo n. Dos morfismos de cadena $f, g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ se dicen si $f - g$ es homotópicamente nulo, en cuyo caso se escribe $f \sim g$.
(i) Mostrar que $\sim$ es relación de equivalencia sobre ${}_R\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Indicaremos f_* a la $\sim$-clase de equivalencia de $f \in_R \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.
(ii) Dado $\eta \in \dfrac{{}_R\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})}{\sim}$ queda inducido $\eta_* : \mathcal{H}_*(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}_*(\mathcal{N})$ tal que para $k \in \mathbb{Z}$ resulta
$$\eta_{*k} : \mathcal{H}_k(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}_k(\mathcal{N}),$$
$$\eta_{*k}(m_k + \text{im}(\partial^{\mathcal{M}}_{k+1})) = f_k(m_k) + \text{im}(\partial^{\mathcal{N}}_{k+1}) \text{ si } \eta = f_*.$$
Probar que esta construcción es correcta e independiente de representantes.
(iii) Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L}$, complejos de cadena, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $g : \mathcal{N} \to \mathcal{L}$, morfismos de cadena. Entonces $g \circ f : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ es morfismo de cadenas y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
5. Si ${}_RM$ es proyectivo, ${}_R\text{Ext}^n(M, N) = (0)$ si $n \in \mathbb{N}$ cualquiera sea ${}_RN$.
6. Si ${}_RN$ es inyectivo, ${}_R\text{Ext}^n(M, N) = (0)$ si $n \in \mathbb{N}$ cualquiera sea ${}_RM$.
7. Sea $\{M^k\}_{k \in K}$ una familia de complejos de cadena, con
$$M^k : ... \to M^k_{n+1} \xrightarrow{d^k_{n+1}} M^k_n \xrightarrow{d^k_n} M^k_{n-1} \to ...$$
Hacemos
$$\oplus_{k \in K} M^k : ... \to \oplus_k M^k_{n+1} \xrightarrow{\oplus_k d^k_{n+1}} \oplus_k M^k_n \xrightarrow{\oplus_k d^k_n} \oplus_k M^k_{n-1} \to ...$$
Entonces $\oplus_{k \in K} M^k$ es un complejo de cadenas y
$$\mathcal{H}_n(\oplus_{k \in K} M^k) \approx \oplus_{k \in K} \mathcal{H}_n(M^k), \ n \in \mathbb{Z}.$$
8. Considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \to & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \to 0 \\
 & & & & & & & & \downarrow f & \\
\dots & \to & X'_2 & \xrightarrow{d_2} & X'_1 & \xrightarrow{d_1} & X'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & A' & \to 0
\end{array}$$

en el que las filas son complejos de cadena. Si cada X_n es proyectivo y la fila superior es exacta hay un morfismo de cadenas $\overline{f} : \mathbf{X}_A \to \mathbf{X'}_{A'}$ de modo que el diagrama resultante conmuta. Más aún, dos tales morfismos de cadena son homotópicos.

9. Un homomorfismo de Λ-complejos $A \xrightarrow{f} A'$ se dice *de grado* u si $df = (-1)^u fd$.
   Si $A \xrightarrow{g} A'$ es otro tal homomorfismo de grado u, escribimos $s : f \approx g$ en caso que s sea un homomorfismo de Λ-complejos $A \xrightarrow{s} A'$ de grado $u - 1$ tal que $ds + (-1)^u sd = g - f$. Decimos entonces que f y g son *homotópicos* y que s es una *homotopía* entre ellos .
   (i) Sean $A \xrightarrow{f} A'$ y $A' \xrightarrow{f'} A''$ homomorfismos de Λ-complejos de grados u y v respectivamente. Probar que $A \xrightarrow{f' \circ f} A''$ es homomorfismo de grado $u + v$.
   (ii) Si $s : f \approx g$ y $s' : f' \approx g'$ entonces $s'f + (-1)^v g's : f'f \approx g'g$.
10. Probar (2.1.4).

Capítulo 2

Aplicaciones a álgebras y módulos de Banach

En este capítulo asumimos al lector familiarizado con nociones de álgebras topológicas, y más específicamente normadas o de Banach, como asimismo con aspectos generales de análisis funcional.

2.1. Límites directos de álgebras de Banach

1. Sea $\mathcal{S} = \{A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de álgebras de Banach y morfismos contractivos de álgebras de Banach. Si B es álgebra de Banach, una sucesión acotada de morfismos de álgebras de Banach $\{A_n \xrightarrow{\psi_n} B\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice $\mathcal{S}$-compatible si $\psi_n = \psi_{n+1} \circ f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\| \psi_n \| \leq 1$ para cada n.
2. Veremos que hay un par $(A, \{\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ formado por un álgebra de Banach A y morfismos acotados de álgebras de Banach $A_n \xrightarrow{\hat{f}_n} A$ de modo que cualquiera sea la sucesión $\mathcal{S}$-compatible $\{A_n \xrightarrow{\psi_n} B\}_{n\in\mathbb{N}}$ hay un único morfismo de álgebras de Banach acotado $\psi : A \to B$ tal que $\psi_n = \psi \circ \hat{f}_n$ si $n \in \mathbb{N}$. Escribiremos $(A, \hat{f}_n) = \varinjlim(A_n, f_n)$.
3. Para ello sea
$$\mathcal{A} = \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \triangleq \{a = (a_n) \in \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n : \sup_n \| a_n \| < \infty\}.$$
Con las operaciones naturales y la norma $\| a \| = \sup_n \| a_n \|$ si $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ resulta álgebra de Banach.
4. Sea además
$$\mathcal{B} = \{a \in \mathcal{A} : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_{n+1} = f_n(a_n) \text{ si } n \geq k\}.$$
Entonces $\mathcal{B}$ es subálgebra de $\mathcal{A}$.
5. Dado $a \in \mathcal{B}$ está definido $\rho(a) = \lim_n \| a_n \|$ y ρ es seminorma submultiplicativa sobre $\mathcal{B}$. Además $N = \rho^{-1}(\{0\})$ es ideal bilátero de $\mathcal{B}$. Sea $| a + N | = \rho(a)$ en $\mathcal{B}/N$. Sea A el *álgebra envolvente* de A respecto a la norma $| \circ |$, o sea la completación de $\mathcal{B}/N$ respecto a dicha norma.
6. Si $n \in \mathbb{N}$ hagamos $\hat{f}_n : A_n \to A$ mediante
$$\begin{aligned}\hat{f}_n(a_n) &= (0, ..., 0, a_n, f_n(a_n), f_{n+1}(f_n(a_n)), ...) + N \\ &= \hat{f}^n(a_n) + N \\ &= (0, ..., 0, f_{n,n}(a_n), f_{n,n+1}(a_n), f_{n.n+2}(a_n), ...) + N,\end{aligned}$$

donde $f_{n,n} = \mathrm{Id}_{A_n}$ y $f_{n,n+k} = f_{n+k-1} \circ ... \circ f_{n+1} \circ f_n$ si $n, k \in \mathbb{N}$. Claramente cada $\hat{f}_n$ es morfismo de álgebras y si $a_n \in A_n$ resulta

$$| \hat{f}_n(a_n) | = \rho(\hat{f}^n(a_n)) \leq \| a_n \| .$$

7. Sea $\{A_n \xrightarrow{\psi_n} B\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión $\mathcal{S}$-compatible. Hemos de definir un morfismo de álgebras de Banach $\psi : A \to B$ tal que $\psi \circ \hat{f}_n = \psi_n$ para cada n. Fijados $n, m \in \mathbb{N}$ debería ser $\psi_n(a_n) = \psi_m(a_m)$ cuando $\hat{f}_n(a_n) = \hat{f}_m(a_m)$. Precisamente, en ese caso
$$0 = \rho(\hat{f}_n(a_n) - \hat{f}_m(a_m)) = \lim_{k \to \infty} \| f_{n,k}(a_n) - f_{m,k}(a_m) \| .$$
Si $l > n$ tenemos
$$\begin{aligned} \psi_l \circ f_{n,l} &= \psi_l \circ f_{l-1} \circ ... \circ f_n \\ &= \psi_{l-1} \circ f_{l-2} \circ ... \circ f_n \\ &= ... \\ &= \psi_n. \end{aligned}$$
Si $k \geq \max\{n, m\}$ será
$$\begin{aligned} \| \psi_n(a_n) - \psi_m(a_m) \| &= \| \psi_k(f_{n,k}(a_n) - f_{m,k}(a_m)) \| \\ &\leq \| f_{n,k}(a_n) - f_{m,k}(a_m) \| . \end{aligned}$$
Haciendo $k \to \infty$ sigue la afirmación. Más aún, $A = \cup_n \hat{f}_n(A_n)$ y queda bien definida ψ. Por otra parte, si $l > n$ y $a \in A_n$ tenemos
$$\begin{aligned} \| \psi(\hat{f}_n(a)) \| &= \| \psi_n(a) \| \\ &= \| \psi_l(f_{n,l}(a)) \| \\ &\leq \| f_{n,l}(a) \| . \end{aligned}$$
Si $l \to \infty$ sigue que $\| \psi(\hat{f}_n(a)) \| \leq | \hat{f}_n(a) |$ y ψ resulta acotado.

2.2. Homología en álgebras de Banach

1. Sea A-álgebra de Banach unitaria. Un complejo
$$(\mathfrak{C}) : ... \leftarrow X_n \xleftarrow{d_n} X_{n+1} \leftarrow ...$$
en A-mod se dice:
(i) *exacto en* X_n si $\mathrm{im}(d_n) = \ker(d_{n-1})$;
(ii) *exacto*, si lo es en cada X_n.
(iii) *escindido* si cada $d_n |^{\ker(d_{n-1})}$ es un retracto;
(iv) *admisible* si es admisible en cuanto complejo de espacios localmente convexos.
2. Dado un complejo $(\mathfrak{C}) : 0 \leftarrow X \xleftarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} Z \leftarrow 0$ son equivalentes:
(a) $(\mathfrak{C})$ es escindido.
(b) $(\mathfrak{C})$ es exacto, φ es un retracto y ψ es *topológicamente inyectivo*, o sea $\psi(Z)$ es cerrado en Y y $Y \xleftarrow{\psi} Z$ es isomorfismo de espacios de Banach.
(c) $(\mathfrak{C})$ es exacto, ψ es coretracción y φ es abierto.

(d) Hay morfismos $X \overset{\rho}{\to} Y$ y $Y \overset{\theta}{\to} Z$ tales que $\varphi \circ \rho = \mathrm{Id}_X$, $\theta \circ \psi = \mathrm{Id}_Z$ y $\mathrm{Id}_Y = \psi \circ \theta + \rho \circ \varphi$.
(e) $(\mathfrak{C})$ es equivalente al complejo natural

$$(\mathfrak{D}) : 0 \leftarrow X \leftarrow X \oplus Z \leftarrow Z \leftarrow 0$$

(►)(a ⇒ b) Siendo $\mathfrak{C}$ escindido es inmediato que φ deviene retracto y existe $\rho : \ker(\varphi) \to Z$ tal que $\mathrm{Id}_{\ker(\varphi)} = \psi \mid^{\ker(\varphi)} \circ \rho$. En consecuencia $\ker(\varphi) \subseteq \mathrm{im}(\psi)$ y necesariamente $(\mathfrak{C})$ es exacto en Y. Luego $\mathrm{im}(\psi)$ resulta cerrado y ψ es topológicamente inyectivo como consecuencia del teorema de la función abierta.
(b ⇒ c) Evidente.
(c ⇒ d) Sea $\theta \in \mathcal{B}(Y, Z)$ tal que $\theta \circ \psi = \mathrm{Id}_Z$. Así $Y = \mathrm{im}(\psi) \oplus \ker(\theta)$ e $\mathrm{im}(\psi)$ es cerrado porque $(\mathfrak{C})$ es exacto. Como además ψ deviene inyectivo $\mathrm{im}(\psi) \approx Z$ por el teorema de la función abierta.
Además está definido $F \in \mathcal{B}(Y/\ker(\varphi), X)$ tal que $F(\pi(y)) = \varphi(y)$ si $y \in Y$, donde $\pi : Y \to Y/\ker(\varphi)$ es la proyección al cociente. Evidentemente F es monomorfismo. Además dado U abierto en $Y/\ker(\varphi)$ es $F(U) = \varphi(\pi^{-1}(U))$, y como φ es abierto y π continuo entonces $F(U)$ es abierto, o sea F resulta isomorfismo de espacios de Banach.
Notar que $X = \varphi(\ker(\theta))$ y que $\varphi \mid_{\ker(\theta)}$ es inyectiva. Definimos $X \overset{\rho}{\to} Y$ haciendo $\rho(x) = y$ si $\varphi(y) = x$ e $y \in \ker(\theta)$. Por construcción $\varphi \circ \rho = \mathrm{Id}_X$.
Dado $y \in Y$ es $\varphi(y - \psi(\theta(y))) = \varphi(y)$ e $y - \psi(\theta(y)) \in \ker(\theta)$. Luego $\rho(\varphi(y)) = y - \psi(\theta(y))$ y sigue (d).
(d ⇒ e) Observar que $\varphi \oplus \theta \in \mathcal{B}(Y, X \oplus Z)$ es isomorfismo, con $(\varphi \oplus \theta)^{-1}(x, z) = \rho(x) + \psi(z)$, de donde sigue enseguida (e).
(e ⇒ a) Es inmediato.

3. Por (2.2.2)(d), si una sucesión exacta corta $\mathfrak{C}$ es admisible entonces $K(\mathfrak{C})$ también lo es.
4. Dado un complejo largo exacto $(\mathfrak{C}, d)$ para cada n tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & X_{n-1} & \xleftarrow{d_{n-1}} & & X_n & \xleftarrow{d_n} & X_{n+1} \quad \ldots \\ & \iota_{n-1} \nwarrow & & \swarrow j_{n-1} & \iota_n \nwarrow & & \swarrow j_n \\ & & \mathfrak{K}_{n-1} & & & \mathfrak{K}_n & \end{array}$$

con $\mathfrak{K}_n = \ker(d_{n-1})$, ι_n es la inclusión y $j_n = d_n \mid^{\mathfrak{K}_n}$. Queda definida una sucesión de sucesiones exactas cortas

$$(\mathfrak{C}_n) : 0 \leftarrow \mathfrak{K}_{n-1} \xleftarrow{j_{n-1}} X_n \xleftarrow{\iota_n} \mathfrak{K}_n \leftarrow 0.$$

Se dice que $\{(\mathfrak{C}_n)\}$ son las *componentes* de $\mathfrak{C}$ y que $(\mathfrak{C})$ es el *producto de Yoneda de* dicha sucesión.
5. Las siguientes afirmaciones de un complejo largo

$$(\mathfrak{C}) : \ldots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \xleftarrow{d_n} X_{n+1} \leftarrow \ldots$$

son equivalentes:
(a) $(\mathfrak{C})$ es escindido.
(b) $(\mathfrak{C})$ es *contráctil*, i.e. $(\mathfrak{C})$ es homotópicamente nulo (V. (1.8.4).

(c) $(\mathfrak{C})$ es exacto y cada componente $(\mathfrak{C}_n)$ es escindido.
(d) $(\mathfrak{C})$ es isomorfo a un complejo de la forma

$$(\mathfrak{D}) : ... \leftarrow Y_{n-1} \oplus Y_n \xleftarrow{d'_{n-1}} Y_n \oplus Y_{n+1} \xleftarrow{d'_n} Y_{n+1} \oplus Y_{n+2} \leftarrow ...$$

con $d'_n\ |_{Y_{n+1}} = \mathrm{Id}_{Y_{n+1}}$ y $\ker(d'_n) = Y_{n+2}$ para cada n.
►(a ⇒ b) Debemos probar que hay una sucesión de morfismos acotados $X_n \xrightarrow{s_n} X_{n+1}$ tal que $\mathrm{Id}_{X_n} = d_n \circ s_n + s_{n-1} \circ d_{n-1}$.
Para cada n la sucesión exacta corta siguiente es escindida:

$$0 \leftarrow \ker(d_{n-2}) \xleftarrow{\varphi_n = d_{n-1}|^{\ker(d_{n-2})}} X_n \xleftarrow{\psi_n = \iota_{n-1}} \ker(d_{n-1}) \leftarrow 0.$$

Además $X_n \approx \ker(d_{n-1}) \oplus \ker(d_{n-2})$ y hay morfismos acotados $\ker(d_{n-2}) \xrightarrow{\rho_n} X_n$ y $X_n \xrightarrow{\theta_n} \ker(d_{n-1})$ tales que

$$\varphi_n \circ \rho_n = \mathrm{Id}_{\ker(d_{n-2})} \tag{2.2.1}$$

$$\theta_{n-1} \circ \psi_{n-1} = \mathrm{Id}_{\ker(d_{n-2})}, \tag{2.2.2}$$

$$\mathrm{Id}_{X_n} = \psi_n \circ \theta_n + \rho_n \circ \varphi_n. \tag{2.2.3}$$

Hagamos $s_n = \rho_{n+1} \circ \theta_n$. Así

$$\begin{aligned} d_n \circ s_n + s_{n-1} \circ d_{n-1} &= d_n \circ (\rho_{n+1} \circ \theta_n) + (\rho_n \circ \theta_{n-1}) \circ d_{n-1} \\ &= (d_n \circ \rho_{n+1}) \circ \theta_n + \rho_n \circ (\theta_{n-1} \circ d_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Pero $d_n \circ \rho_{n+1} = \varphi_{n+1} \circ \rho_{n+1}$ y por (2.2.1) $d_n \circ \rho_{n+1} = \psi_n$. Además por (2.2.2)

$$\begin{aligned} \theta_{n-1} \circ d_{n-1} &= \theta_{n-1} \circ \varphi_n \\ &= (\theta_{n-1} \circ \psi_{n-1}) \circ \varphi_n \\ &= \varphi_n \end{aligned}$$

y la afirmación sigue por (2.2.3) y (2.2.4).
(b ⇒ c) Fijado n, es evidente que $(\mathfrak{C}_n)$ es exacta. Veamos que j_{n-1} es retracción: como $(\mathfrak{C})$ es contráctil

$$\mathrm{Id}_{X_{n-1}} = d_{n-1} \circ s_{n-1} + s_{n-2} \circ d_{n-2}$$

para ciertos morfismos $X_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} X_n$ y $X_{n-2} \xrightarrow{s_{n-2}} X_{n-1}$. Luego $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}_{n-1}} = j_{n-1} \circ (s_{n-1}\ |_{\mathfrak{K}_{n-1}})$ y sigue la afirmación.
(c ⇒ d) Dado $n \in \mathbb{Z}$ sea $\mathfrak{K}_{n-1} \xrightarrow{l_n} X_n$ morfismo acotado tal que $j_{n-1} \circ l_n = \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}_{n-1}}$. Entonces $X_n = l_n(\mathfrak{K}_{n-1}) \oplus \mathfrak{K}_n$ y $l_n(\mathfrak{K}_{n-1})$ es cerrado en X_n. Escribiendo

$$\begin{aligned} &d'_n : \mathfrak{K}_n \oplus \mathfrak{K}_{n+1} \to \mathfrak{K}_{n-1} \oplus \mathfrak{K}_n, \\ &d'_n = (l_n\ |^{\mathrm{im}(l_n)} \oplus \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}_n})^{-1} \circ d_n \circ (l_{n+1} \oplus \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}_{n+1}}), \\ &d'_n(k_n, k_{n+1}) = (0_{\mathfrak{K}_{n-1}}, k_n), \end{aligned}$$

queda definido el complejo $(\mathfrak{D}) = \{\mathfrak{K}_{n-1} \oplus \mathfrak{K}_n, d'_n\}$ isomorfo a $(\mathfrak{C})$ y sigue enseguida (d).

(d $\Rightarrow$ a) Dado $n \in \mathbb{Z}$ es $d'_n(y_{n+1}, y_{n+2}) = (0_{Y_n}, y_{n+1})$ en todo caso. Por lo tanto $\mathrm{im}(d'_n) = (0_{Y_n}) \oplus Y_{n+1}$ y haciendo

$$\xi_n : (0_{Y_n}) \oplus Y_{n+1} \to Y_{n+1} \oplus Y_{n+2},$$
$$\xi_n(0_{Y_n}, y_{n+1}) = (y_{n+1}, 0_{Y_{n+2}}),$$

entonces ξ_n es morfismo acotado y $d'_n \circ \xi_n = \mathrm{Id}_{(0_{Y_n}) \oplus Y_{n+1}}$.

6. Dado $X \in A$-unmod sea $K(X) = \ker(\hat{\pi}_{A,X})$ en $A\hat{\otimes}X$. Dados además $Y \in A$-unmod y $\varphi \in_A \mathcal{B}(X, Y)$, como $\hat{\pi}_{A,Y} \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \varphi) = \varphi \circ \hat{\pi}_{A,X}$, queda inducido
$$K(\varphi) \in_A \mathcal{B}(K(X), K(Y)),\ K(\varphi) = [(\mathrm{Id}_A \otimes \varphi) \mid_{K(X)}] \mid^{K(Y)}.$$
Así K define un functor covariante de la categoría A-unmod en si misma.
7. Queda inducido
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{\hat{\pi}_{A,X}} & A\hat{\otimes}X & A\hat{\otimes}K(X) & & A\hat{\otimes}K(K(X)) & \\ & & \nwarrow & \downarrow \hat{\pi}_{A,K(X)} & \nwarrow & \downarrow \hat{\pi}_{A,K(K(X))} & \nwarrow \\ & & & K(X) & & K(K(X)) & & ... \end{array}$$
Sea $K_1(X) = K(X)$ y, si $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n(X) = K(K_{n-1}(X))$ si $n \geq 2$. Además
$$B_0(X) = A\hat{\otimes}X,$$
$$B_n(X) = A\hat{\otimes}K_n(X),$$
$$d_{-1} = \hat{\pi}_{A,X},$$
$$d_{n-1} = \iota_{K_n(X),B_{n-1}(X)} \circ \hat{\pi}_{A,K_n(X)}.$$
Puesto que
$$\mathrm{im}(d_n) \subseteq K_{n+1}(X) = \ker(\hat{\pi}_{A,K_n(X)})$$
sigue que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ en todo caso y obtenemos el complejo
$$B(X) : 0 \leftarrow B_0(X) \xleftarrow{d_0} B_1(X) \xleftarrow{d_1} ...$$
o *resolución barra-normalizada* de X, con $0 \leftarrow X \xleftarrow{d_{-1}} B(X)$.
8. Sea $\varphi \in_A \mathcal{B}(X, Y)$ en A-unmod. Si $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$K^n(\varphi) \in_A \mathcal{B}(K_n(X), K_n(Y)).$$
Haciendo $B_n(\varphi) = \mathrm{Id}_A \otimes K^n(\varphi)$ es $B_n(\varphi) \in_A \mathcal{B}(B_n(X), B_n(Y))$ y $d^Y_{n-1} \circ B_n(\varphi) = B_{n-1}(\varphi) \circ d^X_{n-1}$. Luego obtenemos el functor covariante $B : A$-unmod$\to A$-unmod, o *functor barra-normalizada*.
9. Sea A álgebra de Banach unitaria, con unidad e. Sean $\hat{A} = A/(\mathbb{C}e)$ y $\hat{\ } : A \to \hat{A}$ la proyección al cociente. Dado $X \in A$-unmod sean
$$B'_0(X) = A\hat{\otimes}X,$$
$$B'_1(X) = A\hat{\otimes}(\hat{A}\hat{\otimes}X),\ B'_2(X) = A\hat{\otimes}((\hat{A}\hat{\otimes}\hat{A})\hat{\otimes}X),\ ...$$

y si $n \in \mathbb{N}_0$ sea $d'_n : B'_{n+1}(X) \to B'_n(X)$ tal que

$$
\begin{aligned}
& d'_n(a \otimes (\hat{a}_1 \otimes ... \otimes \hat{a}_{n+1} \otimes x)) = (aa_1) \otimes (\hat{a}_2 \otimes ... \otimes \hat{a}_{n+1} \otimes x) \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a \otimes (\hat{a}_1 \otimes ... \otimes (a_i a_{i+1})\hat{} \otimes ... \otimes \hat{a}_{n+1}) \otimes x \\
& \quad + (-1)^{n+1} a \otimes (\hat{a}_1 \otimes ... \otimes \hat{a}_n \otimes (a_{n+1} x))
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

en tensores básicos. Por la propiedad universal del producto tensorial es fácil ver d'_n existe y define un morfismo acotado entre espacios de Banach. Más aún, $d'_{n-1} \circ d'_n = 0$ en todo caso.

10. (a) Sea $f_1 : \hat{A} \times X \to K(X)$ tal que $f_1(\hat{a}, x) = a \otimes x - e \otimes (ax)$. Si $a = \gamma e$ para cierto $\gamma \in \mathbb{C}$, como $(\gamma e) \otimes x = e \otimes (\gamma x)$ hay un único morfismo acotado $F_1 : \hat{A} \hat{\otimes} X \to K(X)$ tal que $F_1(\hat{a} \otimes x) = f_1(\hat{a}, x)$ en tensores básicos.
(b) Notar que F_1 es suryectivo: sea $u \in K(X)$, $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes x_n$, con $\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| \| x_n \| < \infty$. Entonces está definido $U = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \otimes x_n$ en $\hat{A} \hat{\otimes} X$ y
$$u = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \otimes x_n - e \otimes (a_n x_n)] = F_1(U).$$
Además F_1 es inyectivo: Sea $F_1(V) = 0_{K(X)}$, con $V = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \otimes y_n$ en $\hat{A} \hat{\otimes} X$, $\sum_{n=1}^{\infty} \| \xi_n \|_{\hat{A}} < \infty$ y $\| y_n \| = 1$ para todo n. En todo caso podemos escribir $\xi_n = \hat{a}_n$ con $\| a_n \| < \| \xi_n \|_{\hat{A}} (1 + 1/n)$. El elemento $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes y_n$ está definido en $A \hat{\otimes} X$ y
$$
\begin{aligned}
0_{K(X)} &= F(V) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \otimes y_n - e \otimes (a_n y_n)] \\
&= v - e \otimes \hat{\pi}_{A,X}(v).
\end{aligned}
$$
Luego
$$V = (\hat{\cdot} \otimes \mathrm{Id}_X)(v) = (\hat{\cdot} \otimes \mathrm{Id}_X)(e \otimes \hat{\pi}_{A,X}(v)) = 0_{\hat{A} \hat{\otimes} X}.$$
Por el teorema de la función abierta F_1 deviene isomorfismo de espacios de Banach y $\hat{A} \hat{\otimes} X \approx K(X)$.
(c) Sea $n > 1$ y supongamos hay un isomorfismo
$$F_{n-1} : (\hat{\otimes}_1^{n-1} \hat{A}) \hat{\otimes} X \to K_{n-1}(X).$$
Definimos
$$
\begin{aligned}
& f_n : \hat{A} \times ((\hat{\otimes}_1^{n-1} \hat{A}) \hat{\otimes} X) \to K_n(X), \\
& f_n(\hat{a}, w) = a \otimes F_{n-1}(w) - e \otimes (a F_{n-1}(w)).
\end{aligned}
$$
Entonces f_n es aplicación $\mathbb{C}$-bilineal acotada bien definida e induce un operador acotado $F_n^1 : \hat{A} \hat{\otimes} ((\hat{\otimes}_1^{n-1} \hat{A}) \hat{\otimes} X) \to K_n(X)$. Queda definido un único operador $F_n \in \mathcal{B}[(\hat{\otimes}_1^{n} \hat{A}) \hat{\otimes} X, K_n(X)]$ tal que
$$F_n((\hat{a}_0 \otimes \hat{a}_1 \otimes ... \otimes \hat{a}_{n-1}) \otimes x) = F_n^1(\hat{a}_0 \otimes ((\hat{a}_1 \otimes ... \otimes \hat{a}_{n-1}) \otimes x))$$

en tensores básicos.
(d) Veamos que F_n es biyectiva: sea $\eta \in K_n(X)$, $\eta = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \otimes k_{n-1}^l$, con $\| k_{n-1}^l \| = 1$ para todo l, $\sum_{l=1}^{\infty} \| a_l \| < \infty$ y $\{k_{n-1}^l\} \subseteq K_{n-1}(X)$. Como F_{n-1} es biyectiva para cada l existe $v_l \in (\hat{\otimes}_1^{n-1}\hat{A})\hat{\otimes}X$ tal que $k_{n-1}^l = F_{n-1}(v_l)$ y $\| v_l \|_\wedge \leq \| F_{n-1}^{-1} \|$. Podemos escribir

$$v_l = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_{l,j} \otimes x_{l,j},$$

con $\sum_{j=1}^{\infty} \| \mathfrak{a}_{l,j} \|_{\hat{\otimes}_1^{n-1}\hat{A}} \| x_{l,j} \| \leq \| F_{n-1}^{-1} \| (1+1/l)$ para cada l. Luego

$$\textstyle\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \| a_l \| \| \mathfrak{a}_{l,j} \|_{\hat{\otimes}_1^{n-1}\hat{A}} \| x_{l,j} \| \leq 2 \| F_{n-1}^{-1} \| \sum_{l=1}^{\infty} \| a_l \| < \infty$$

y está definido $N = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{a}_l \otimes \mathfrak{a}_{l,j}) \otimes x_{l,j}$ en $\hat{\otimes}_1^n \hat{A}\hat{\otimes}X$ y

$$\begin{aligned}
F_n(N) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} F_n((\hat{a}_l \otimes \mathfrak{a}_{l,j}) \otimes x_{l,j}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} [a_l \otimes F_{n-1}(\mathfrak{a}_{l,j} \otimes x_{l,j}) - e \otimes (a_l F_{n-1}(\mathfrak{a}_{l,j} \otimes x_{l,j})] \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} a_l \otimes F_{n-1}(v_l) - e \otimes \hat{\pi}_{A,K_{n-1}(X)}(v) \\
&= \eta.
\end{aligned}$$

Para establecer la inyectividad de F_n bastará ver que F_n^1 es inyectiva. Sea $F_n^1(M) = 0_{K_n(X)}$ para cierto $M \in \hat{A}\hat{\otimes}((\hat{\otimes}_1^{n-1}\hat{A})\hat{\otimes}X)$, digamos $M = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \otimes w_i$, con $\sum_{i=1}^{\infty} \| \lambda_i \|_{\hat{A}} < \infty$ y $\| w_i \|_{(\hat{\otimes}_1^{n-1}\hat{A})\hat{\otimes}X} = 1$ para todo i. Si $i \in \mathbb{N}$ y $k_{n-1,i} = F_{n-1}(w_i)$ es $\| k_{n-1,i} \|_{K(X)} \leq \| F_{n-1} \|$. Además existe $a_i \in A$ tal que $\hat{a}_i = \lambda_i$ y $\| a_i \| \leq (1+1/i) \| \lambda_i \|_{\hat{A}}$. En consecuencia

$$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \| \| k_{n-1,i} \|_{K(X)} \leq 2 \| F_{n-1} \| \sum_{i=1}^{\infty} \| \lambda_i \|_{\hat{A}} < \infty$$

y está definido $\chi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes k_{n-1,i}$ en $A\hat{\otimes}K_{n-1}(X)$. Más aún

$$\begin{aligned}
0_{K_n(X)} &= F_n^1(M) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} [a_i \otimes k_{n-1,i} - e \otimes a_i k_{n-1,i}] \\
&= \chi - e \otimes \hat{\pi}_{A,K_{n-1}(X)}(\chi).
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$M = (\hat{\cdot} \otimes F_{n-1}^{-1})(\chi) = 0_{\hat{A}\hat{\otimes}((\hat{\otimes}_1^{n-1}\hat{A})\hat{\otimes}X)}.$$

Por el teorema de la función abierta F_n es isomorfismo de espacios de Banach.

11. Por otra parte, con $\zeta_1 = (\hat{\cdot} \otimes \mathrm{Id}_X) |_{K_1(X)}$ tenemos

$$\zeta_1 : K_1(X) \hookrightarrow A\hat{\otimes}X \to \hat{A}\hat{\otimes}X$$

y queda definido un morfismo acotado $B_1(X) \xrightarrow{\chi_1 = \mathrm{Id}_A \hat{\otimes} \zeta_1} B_1'(X)$ tal que $d_0' \circ \chi_1 = d_0$. Hagamos $B_1'(X) \xrightarrow{G_1 = \mathrm{Id}_A \hat{\otimes} F_1} B_1(X)$.
Si $n > 1$ y suponemos definido $\zeta_{n-1} \in \mathcal{B}(K_{n-1}(X), (\hat{\otimes}_1^{n-1} \hat{A}) \hat{\otimes} X)$ tenemos

$$\begin{array}{llll} \zeta_n: & K_n(X) & \hookrightarrow & A\hat{\otimes} K_{n-1}(X) \\ & & & \downarrow \\ & & & \hat{A}\hat{\otimes} K_{n-1}(X) \\ & & & \downarrow \mathrm{Id}_{\hat{A}} \hat{\otimes} \zeta_{n-1} \\ & & & \hat{A}\hat{\otimes}(\hat{\otimes}_1^{n-1} \hat{A})\hat{\otimes} X) \quad \to \quad (\hat{\otimes}_1^{n} \hat{A})\hat{\otimes} X. \end{array}$$

Queda definido un morfismo acotado $B_n(X) \xrightarrow{\chi_n = \mathrm{Id}_A \hat{\otimes} \zeta_n} B_n'(X)$.

12. Si $n > 1$ y $\mathfrak{k}_n \in K_n(X)$ existen sucesiones $(k_{l_1, l_2, \ldots, l_i}) \subseteq K_{n-i}$, con $1 \leq i < n$ y

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_n &= \sum_{l_1=1}^{\infty} a_{l_1} \otimes k_{l_1} \\ &= \sum_{l_1=1}^{\infty} a_{l_1} \otimes \sum_{l_2=1}^{\infty} a_{l_1,l_2} \otimes k_{l_1,l_2} \\ &= \ldots \\ &= \sum_{l_1=1}^{\infty} a_{l_1} \otimes \ldots \otimes \sum_{l_{n-1}=1}^{\infty} a_{l_1,\ldots,l_{n-1}} \otimes k_{l_1,\ldots,l_{n-1}} \\ &= \sum_{l_1=1}^{\infty} a_{l_1} \otimes \ldots \otimes \sum_{l_{n-1}=1}^{\infty} a_{l_1,\ldots,l_{n-1}} \otimes \sum_{l_n=1}^{\infty} a_{l_1,\ldots,a_{l_n}} \otimes x_{l_1,\ldots,l_n}, \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{l_1=1}^{\infty} a_{l_1} k_{l_1} = 0_{B_{n-1}(X)}, \tag{2.2.6}$$

$$\sum_{l_2=1}^{\infty} a_{l_1,l_2} k_{l_1,l_2} = 0_{B_{n-2}(X)} \text{ para todo } l_1,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sum_{l_{n-1}=1}^{\infty} a_{l_1,\ldots,l_{n-1}} k_{l_1,\ldots,l_{n-1}} = 0_{B_1(X)} \text{ para todo } l_1, \ldots, l_{n-2},$$

$$\sum_{l_n=1}^{\infty} a_{l_1,\ldots,a_{l_n}} x_{l_1,\ldots,l_n} = 0_X \text{ para todo } l_1, \ldots, l_{n-1}. \tag{2.2.7}$$

En consecuencia

$$\zeta_n(\mathfrak{k}_n) = \sum_{l_1,\ldots,l_n=1}^{\infty} (\hat{a}_{l_1} \otimes \hat{a}_{l_1,l_2} \otimes \ldots \otimes \hat{a}_{l_1,\ldots,l_n}) \otimes x_{l_1,\ldots,l_n}.$$

Si además $a \in A$ tenemos

$$d'_{n-1}(\chi_n(a \otimes \mathfrak{k}_n)) = \sum_{l_1,...,l_n=1}^{\infty} d'_{n-1}[a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes \hat{a}_{l_1,l_2} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_n} \otimes x_{l_1,...,l_n}]$$

(2.2.8)

$$= \sum_{l_1,...,l_n=1}^{\infty} [(aa_{l_1}) \otimes \hat{a}_{l_1,l_2} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_n} \otimes x_{l_1,...,l_n}$$

(2.2.9)

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes ... \otimes (a_{l_1,...,l_i} a_{l_1,...,l_{i+1}})\hat{} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_n} \otimes x_{l_1,...,l_n}$$

(2.2.10)

$$+ (-1)^n a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_{n-1}} \otimes (a_{l_1,...,l_n} x_{l_1,...,l_n})].$$

Por (2.2.7) el sumando (2.2.10) es nulo. Además

$$\begin{aligned} \chi_{n-1}(d_{n-1}(a \otimes \mathfrak{k}_n)) &= \chi_{n-1}(a\mathfrak{k}_n) \\ &= \sum_{l_1=1}^{\infty} (aa_{l_1} \otimes \zeta_{n-1}(k_{l_1}) \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

y (2.2.11) es el primer sumando (2.2.8). Sea
$S_i = \sum_{l_1,...,l_n=1}^{\infty} a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes ... \otimes (a_{l_1,...,l_i} a_{l_1,...,l_{i+1}})\hat{} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_n} \otimes x_{l_1,...,l_n}$,
con $i = 1, ..., n-1$. Por la (n-1)-ésima igualdad en (2.2.6) resulta

$$\begin{aligned} S_{n-1} = & \sum_{l_1,...,l_{n-1}=1}^{\infty} a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_{n-2}} \otimes \sum_{l_n=1}^{\infty} (a_{l_1,...,l_{n-1}} a_{l_1,...,l_n})\hat{} \otimes x_{l_1,...,l_n} \\ = & \sum_{l_1,...,l_{n-2}=1}^{\infty} a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_{n-2}} \otimes \sum_{l_{n-1}=1}^{\infty} \hat{a}_{l_1,...,l_{n-1}} \sum_{l_n=1}^{\infty} \hat{a}_{l_1,...,l_n} \otimes x_{l_1,...,l_n} \\ = & \sum_{l_1,...,l_{n-2}=1}^{\infty} a \otimes \hat{a}_{l_1} \otimes ... \otimes \hat{a}_{l_1,...,l_{n-2}} \otimes (\hat{\cdot} \otimes \mathrm{Id}_X)[\sum_{l_{n-1}=1}^{\infty} a_{l_1,...,l_{n-1}} k_{l_1,...,l_{n-1}}] \\ = & \, 0_{B'_{n-1}(X)}. \end{aligned}$$

Asimismo $S_1 = ... = S_{n-2} = 0_{B'_{n-1}(X)}$. Inferimos que

$$d'_{n-1} \circ \chi_n = \chi_{n-1} \circ d_{n-1}$$

e inductivamente obtenemos un morfismo de cadenas $B(X) \xrightarrow{\chi} B'(X)$.
Más aún, notar que χ es isomorfismo en A-unmod, con

$$\chi_n^{-1} = (\mathrm{Id}_A \hat{\otimes} \zeta_n)^{-1} = \mathrm{Id}_A \otimes F_n$$

para cada n.

13. Reemplazando A por A_1, $(A_1)\check{} \approx A$ y dado $X \in A$-mod tenemos $X \in A_1$-unmod. Hagamos, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$B''_n(X) = A_1\hat{\otimes}(\hat{\otimes}_1^n A\hat{\otimes}X),$$
$$d''_n : B''_{n+1}(X) \to B''_n(X),$$

donde d''_n es como en (2.2.5) reemplazando coclases por elementos de A. Se extiende así las construcciones anteriores a módulos no unitarios.

14. Si A es álgebra de Banach unitaria, $X \in A$-unmod y $n \in \mathbb{N}_0$ sea

$$\beta_n(X) = (\hat{\otimes}_1^{n+1} A)\hat{\otimes}X,$$
$$d_{n,\beta} : \beta_{n+1}(X) \to \beta_n(X),$$
$$d_{n,\beta}(a_0 \otimes ...a_{n+1} \otimes x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0 \otimes ... \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes ... \otimes a_{n+1} \otimes x$$
$$+ (-1)^{n+1} a_0 \otimes ... \otimes a_n \otimes (a_{n+1}x).$$

La aplicación $A_1 \xrightarrow{\sigma} A$ tal que $\sigma(a+z) = a+ze$, donde e es la unidad de A, es un retracto. En todo caso $\sigma_n = \sigma \otimes \mathrm{Id}_{(\hat{\otimes}_1^n A)\hat{\otimes}X}$ define una retracción de $B''_n(X)$ en $\beta_n(X)$. Se dice que $\beta(X)$ es la *resolución barra no normalizada de* X.

2.3. Álgebras super-amenables o contractivas

1. Un álgebra asociativa A se dice *super-amenable* o *contractiva* si $\mathcal{H}^1(A, X) = (0)$ cualquiera sea el A-bimódulo X.
2. Dada un álgebras asociativa A son equivalentes:
(i) A es super-amenable.
(ii) A es unitaria y tiene una *diagonal*, , o sea un elemendo $\Delta \in A\hat{\otimes}A$ tal que $a\Delta = \Delta a$ para cada $a \in A$ y $\hat{\pi}(\Delta) = e$, donde e es la unidad de A, $\hat{\otimes}$ denota al *producto tensorial proyectivo*[1] y $\hat{\pi} : A\hat{\otimes}A \to A$ es tal que $\hat{\pi}(a \otimes b) = \pi(a, b) = ab$ si $a, b \in A$.
(iii) A es unitaria y $\hat{\pi}$ es una retracción.
(iv) A es semisimple (en el sentido de (4.14.13)) y finito dimensional.
► ((i)⇒(ii)): Sea $A \times A$ el A-bimódulo con suma coordenada a coordenada y además $a(b, c) = (ab, 0)$ y $(b, c)a = (0, ca)$ si $a, b, c \in A$. La aplicación $D : A \to A \times A$ tal que $D(a) = (a, a)$ si $a \in A$ es una

[1]Señalamos que el producto tensorial proyectivo $X\hat{\otimes}Y$ de dos espacios normados complejos X e Y es la completación de $X \otimes Y$ respecto a la norma

$$\| u \|_\wedge = \text{ínf}\{\textstyle\sum_{i=1}^n \| x_i \| \| y_i \| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\}, u \in X \otimes Y.$$

Dadas sendas álgebras de Banach A, B entonces $A\hat{\otimes}B$ admite una estructura de álgebra de Banach tal que $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$ cualesquiera sean $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$.

derivación ya que

$$\begin{aligned} aD(b) + D(a)b &= a(b,b) + (a,a)b \\ &= (ab,0) + (0,ab) \\ &= (ab,ab) \\ &= D(ab) \end{aligned}$$

cualesquiera sean $a, b \in A$. Entonces existe $(a_0, b_0) \in A \times A$ tal que $D = \mathrm{ad}_{(a_0,b_0)}$. Dado $c \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} (c,c) &= D(c) \\ &= c(a_0,b_0) - (a_0,b_0)c \\ &= (ca_0,0) - (0,b_0c) \\ &= (ca_0, -b_0c). \end{aligned}$$

Luego a_0 y $-b_0$ son unidades a derecha e izquierda de A respectivamente, e inferimos que A es unitaria con unidad e.
Puesto que $\hat{\pi}$ en morfismo de A-bimódulos $\ker(\hat{\pi})$ deviene un A-bimódulo. Sea ahora $D_1 : A \to \ker(\hat{\pi})$ tal que $D_1(a) = a \otimes e - e \otimes a$ si $a \in A$. Si $a, b \in A$ resulta

$$\begin{aligned} aD_1(b) + D_1(a)b &= a(b \otimes e - e \otimes b) + (a \otimes e - e \otimes a)b \\ &= (ab) \otimes e - a \otimes b + a \otimes b - e \otimes (ab) \\ &= D_1(ab). \end{aligned}$$

Como además D_1 es aditiva resulta derivación. Por hipótesis será $D_1 = \mathrm{ad}_v$ para cierto $v \in A\hat{\otimes}A$. Así dado $a \in A$ es

$$a \otimes e - e \otimes a = av - va,$$

i.e. $a(e \otimes e - v) = (e \otimes e - v)a$. Además $\hat{\pi}(e \otimes e - v) = 1$ y A tiene una diagonal.
((ii) $\Rightarrow$(iii)): Basta hacer $\rho : A \to A\hat{\otimes}A$ mediante $\rho(a) = a\Delta$, siendo Δ una diagonal de A. Se ve fácilmente que Δ es morfismo de A-bimódulos y $\hat{\pi} \circ \rho = \mathrm{Id}_A$.
((iii)$\Rightarrow$(ii)): Si $\hat{\pi} \circ \rho = \mathrm{Id}_A$ para cierto morfismo de A-bimódulos ρ basta hacer entonces $\rho(e)$ es diagonal de A.
((ii)$\Rightarrow$(i)): Sea $D : A \to X$ una derivación de A en algún A-bimódulo X. Indiquemos e y Δ a la unidad de A y a una diagonal de A, digamos $\Delta = \sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j$. Escribamos $x_0 = \sum_{j=1}^n a_j D(b_j)$. Hay una aplicación lineal $L_D : A\hat{\otimes}A \to X$ tal que $L_D(a \otimes b) = aD(b)$ para cada $a, b \in A$. Como $a\Delta = \Delta a$ será

$$\textstyle\sum_{j=1}^n aa_j D(b_j) = \sum_{j=1}^n a_j D(b_j a)$$

para cada $a \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} ax_0 - x_0 a &= \sum_{j=1}^{n} (a a_j D(b_j) - a_j D(b_j) a) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_j D(b_j a) - a_j D(b_j) a) \\ &= eD(a). \end{aligned}$$

Hagamos $\overline{D} = D - eD$. Ciertamente $\overline{D}$ es derivación. Si $a \in A$ obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{D}(a) &= \overline{D}(ea) \\ &= e\overline{D}(a) + \overline{D}(e)a \\ &= \overline{D}(e)a \end{aligned}$$

y $a\overline{D}(e) = 0$. Luego

$$D(a) = \overline{D}(a) + eD(a) = a(x_0 + \overline{D}(e)) - (x_0 + \overline{D}(e))a,$$

o sea $D = \mathrm{ad}_{x_0 + \overline{D}(e)}$.

((ii)⇒(iv)) Sean e y Δ como en ((ii)⇒(i)). Sean $P : A \to A$ un proyector de A sobre $\mathrm{cl}\{b_1, ..., b_n\}$ y $P_1 : A \to A$ de modo que $P_1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(b_i x)$. Entonces P_1 es operador lineal y existe un operador lineal $P_2 : A \hat{\otimes} A \to A$ tal que $P_2(a \otimes b) = aP(b)$ para cada $a, b \in A$. Fijado $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_2(\Delta x) \\ &= P_2(x\Delta) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x a_i) P(b_i) \\ &= x\hat{\pi}(\Delta) \\ &= x, \end{aligned}$$

i.e. $P_1 = \mathrm{Id}_A$. Así $A \approx \mathrm{cl}\{b_1, ..., b_n\}$ y A es finito dimensional.

Asimismo, sean ahora P la proyección de A sobre $\mathrm{J}(A)$ y P_1, P_2 como recién. Como el radical es ideal bilátero si $x \in A$ es

$$\begin{aligned} x &= P_1(x) \\ &= P_2(x\Delta) \\ &= xP_2(\Delta) \\ &= xP_1(e). \end{aligned}$$

En particular, $P_1(e) = P_1(e)^2$, i.e. $P_1(e) \in \mathrm{J}(A)$ es idempotente. Por (4.14.18) existe $c \in A$ tal que $cP_1(e) = c + P_1(e)$. Deducimos enseguida que $P_1(e) = 0_A$ y $P_1 = 0_{A,\mathrm{J}(A)}$, o sea A es semisimple.

((iv)⇒(i)) Por (4.15.6) existen $n, \nu_1, ..., \nu_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \approx \oplus_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{\nu_j}(\mathbb{C}).$$

Bastaría ver entonces que cada álgebra de matrices $\mathrm{M}_\nu(\mathbb{C})$ es superamenable. Como estas álgebras son unitarias basta ver que poseen alguna diagonal.

En efecto, sea $\mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C})$ el subgrupo de $\mathrm{gl}(\nu, \mathbb{C})$ de matrices cuyas solas entradas son $0, 1$ o -1. Hagamos

$$\Delta_\nu =\mid \mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C}) \mid^{-1} \sum_{m\in\mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C})} m \otimes m^{-1}$$

en $\mathrm{M}_\nu(\mathbb{C})\hat{\otimes}\mathrm{M}_\nu(\mathbb{C})$. Dado $m' \in \mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C})$ tenemos

$$\begin{aligned} m'\Delta_\nu &=\mid \mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C}) \mid^{-1} \sum_{m\in\mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C})} (m'm) \otimes m^{-1} \\ &=\mid \mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C}) \mid^{-1} \sum_{m\in\mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C})} (m'm) \otimes (m'm)^{-1}m' \\ &= \Delta_\nu m'. \end{aligned}$$

Como que $\mathrm{M}_\nu(\mathbb{C}) = \mathrm{cl}(\mathfrak{g}_\nu(\mathbb{C}))$ vemos que $m\Delta_\nu = \Delta_\nu m$ cualquiera sea $m \in \mathrm{M}_\nu(\mathbb{C})$. Finalmente, es inmediato que $\hat{\pi}_\nu(\Delta_\nu) = 1_{\mathrm{M}_\nu(\mathbb{C})}$, donde $\pi_\nu : \mathrm{M}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_\nu(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_\nu(\mathbb{C})$ es la multiplicación.

2.4. Álgebras y semigrupos amenables

1. Es conocido que la medida de Lebesgue λ en $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones, es σ-aditiva y finita sobre compactos, pero que hay subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}^n$. En 1914 F. Hausdorff planteó el problema acerca de la existencia de una medida, sobre partes de $\mathbb{R}^n$, que sea finitamente aditiva, invariante por traslaciones y finita sobre compactos [**76**], mostrando la no existencia cuando $n \geq 3$.
2. Sean S un semigrupo, $m \in \mathrm{l}^\infty(S)^*$, $\eta \in \mathrm{l}^\infty(S)$, $s \in S$. Indicaremos ${}_s\eta, \eta_s \in \mathrm{l}^\infty(S)$ a las funciones ${}_s\eta(s') = \eta(ss')$ y $\eta_s(s') = \eta(s's)$, $s' \in S$, respectivamente. Se dice que el funcional m es *invariante a izquierda* (resp. *a derecha*) si cualesquiera sean η, s se tiene
$$\langle {}_s\eta, m\rangle = \langle \eta, m\rangle \text{ (resp. } \langle \eta_s, m\rangle = \langle \eta, m\rangle).$$
3. Un funcional $m \in \mathrm{l}^\infty(S)^*$ es un *promedio de* S si $\parallel m \parallel = \langle 1, m\rangle = 1$.
4. [**121**][**40**] Un semigrupo S se dice *amenable a izquierda* o *derecha* si posee un promedio invariante a izquierda o derecha respectivamente. Decimos además que S es amenable si lo es tanto a derecha como a izquierda.
5. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X (V. 3.7.1). Decimos que un subconjunto Y de X es *G-paradojal* si existen $n, m \in \mathbb{N}$, $X_1, ..., X_{n+m}$ subconjuntos disjuntos de X y $g_1, ..., g_{n+m} \in G$ tales que
$$Y = \cup_{i=1}^{n} g_i X_i = \cup_{j=1}^{m} g_{n+j} X_{n+j}.$$
6. [**40**] Sea m un promedio invariante a izquierda de un grupo G. Definimos $\mu_m : \mathcal{P}(G) \to \mathbb{C}$ tal que $\mu_m(\sigma) = \langle \chi_\sigma, m\rangle$.

(i) En particular, $\mu_m(\emptyset) = 0$ y $\mu_m(G) = 1$.
(ii) Si σ_1, σ_2 son subconjuntos disjuntos de G,

$$\begin{aligned}\mu_m(\sigma_1 \cup \sigma_2) &= \langle \chi_{\sigma_1 \cup \chi_{\sigma_2}}, m\rangle \\ &= \langle \chi_{\sigma_1} + \chi_{\sigma_2}, m\rangle \\ &= \langle \chi_{\sigma_1}, m\rangle + \langle \chi_{\sigma_2}, m\rangle \\ &= \mu_m(\sigma_1) + \mu_m(\sigma_2),\end{aligned}$$

o sea μ_m es una medida finitamente aditiva.
(iii) μ_m es medida no negativa. Más aún, $\langle f, m\rangle \geq 0$ si $f \in \mathrm{l}^\infty(G)$ y $f \geq 0$. En efecto, dada tal f sea $\langle f, m\rangle = a + ib$ en $\mathbb{C}$. Dado $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned}(b+t)^2 &\leq \mid \langle f + it, m\rangle \mid^2 \\ &\leq \parallel f + it \parallel_\infty^2 \\ &= \sup_{a \in G} \mid f(a) + t \mid^2 \\ &= \sup_{a \in G} (f(a)^2 + t^2) \\ &= \parallel f \parallel_\infty^2 + t^2,\end{aligned}$$

i.e. $2bt + b^2 \leq \parallel f \parallel_\infty^2$ para todo t. En consecuencia $b = 0$ y $\langle f, m\rangle \in \mathbb{R}$. Podemos suponer sin perder generalidad que $0 \leq f \leq 1$. Haciendo $g = 2f - 1$, g será una función real acotada con valores en $[-1, 1]$. Entonces $\mid \langle g, m\rangle \mid \leq 1$ y $\langle g, m\rangle \mid \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\langle f, m\rangle = \langle \frac{g+1}{2}, m\rangle = \frac{\langle g, m\rangle + 1}{2} \geq 0.$$

(iv) Dados $g \in G$ y un subconjunto σ de G es

$$\mu_m(g\sigma) = \langle \chi_{g\sigma}, m\rangle = \langle_{g^{-1}}\chi_\sigma, m\rangle = \langle_{\chi_\sigma}, m\rangle = \mu_m(\sigma),$$

i.e. μ_m es medida G-invariante a izquierda.
(v) Sean G grupo paradojal y μ una medida no negativa finitamente aditiva sobre partes de G invariante a izquierda. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $g_1, ..., g_{n+m} \in G$ y $G_1, ..., G_{n+m}$ subconjuntos disjuntos de G tales que

$$G = \cup_{i=1}^n g_i G_i = \cup_{j=1}^m g_{n+j} G_{n+j}.$$

Entonces

$$\mu(G) \leq \textstyle\sum_{i=1}^n \mu(g_i G_i) = \sum_{i=1}^n \mu(G_i) \leq \mu(G).$$

O sea $\mu(G) = \sum_{i=1}^n \mu(G_i)$. Asimismo, $\mu(G) = \sum_{j=1}^m \mu(G_{n+j})$. Además

$$2\mu(G) = \textstyle\sum_{k=1}^{n+m} \mu(G_k) \leq \mu(G),$$

i.e. $\mu(G) \in \{0, \infty\}$. Por lo tanto, si G tuviere algún promedio invariante entonces será no-paradojal.

7. La afirmación recíproca, o sea: todo grupo no paradojal tiene algún promedio invariante, es el contenido de un célebre teorema de S. Banach y A. Tarski [**11**].

8. Los puntos anteriores implican, en materia de amenabilidad, la necesidad de contar con suficiente cantidad de medidas. Esto es posible en el marco de *grupos localmente compactos*, donde es posible la construcción de medidas de Haar [**75**]. Precisamente, sea G un grupo localmente compacto, de modo que cada punto tiene un entorno compacto. Hay entonces una medida m_G no negativa, no nula, regular[2], de Borel, única salvo múltiplos positivos de ella, invariante a izquierda, o sea $m_G(gB) = m_G(B)$ cualesquiera sean $g \in G$ y B subconjunto boreliano de G. La misma es positiva en abiertos no vacíos y finita sobre compactos.
9. Asociamos a grupos localmente compactos sendas álgebras de Banach, las *álgebras de grupo*: si G es grupo localmente compacto sea $\mathrm{L}^1(G)$ el conjunto de funciones Haar-medibles $\varphi : G \to \mathbb{C}$ tales que $(\| \varphi \|_1 =) \int_G | \varphi | \, dm_G < \infty$ [**139**]. En éstas, cada elemento queda determinado salvo conjuntos de medida nula. Dadas $\varphi, \eta \in \mathrm{L}^1(G)$, $c \in \mathbb{C}$ y $g \in G$ se hace
$$\begin{aligned} (c\varphi + \eta)(g) &= c\varphi(g) + \eta(g), \\ (\varphi * \eta)(g) &= \int_G \varphi(h)\eta(h^{-1}g)dm_G(h), \end{aligned}$$
resultando $c\varphi + \eta, \varphi * \eta \in \mathrm{L}^1(G)$.
10. Sea A un álgebra de Banach compleja. Se dice que A es *amenable* si toda derivación acotada $d : A \to X^*$ es interna cualquiera sea el A-bimódulo de Banach X.
11. Un grupo localmente compacto G es amenable si y solo si $\mathrm{L}^1(G)$ es amenable [**90**] (V. (2.7.11)). Este resultado, probado por B. E. Johnson en 1972, determina precisamente condiciones de no paradojalidad de grupos localmente compactos. Además permite generalizar la noción de amenabilidad a álgebras de Banach (cf. [**90**], p. 60).
12. La correspondencia $G \to \mathrm{L}^1(G)$ entre grupos localmente compactos y álgebras de Banach no es functorial, aunque hay un functor covariante entre la categoría de grupos localmente compactos y la de álgebras de Banach de medidas sobre grupos localmente compactos $\mathrm{M} : G \to \mathrm{M}(G)$. Ahora $\mathrm{M}(G)$ es el álgebra de medidas complejas de Borel finitas y regulares sobre G, o bien $\mathrm{M}(G) \approx \mathrm{C}_0(G)^*$, donde $\mathrm{C}_0(G)$ consta de las funciones continuas $x : G \to \mathbb{C}$ *nulas en el infinito*, i.e. $\{g \in G :| x(g) |\geq \epsilon\}$ es compacto cualquiera sea $\epsilon > 0$ [**126**].

[2] O sea si B es boreliano se tiene
$$\begin{aligned} m_G(B) &= \sup\{m_G(K) : K \subseteq B, K\text{-compacto}\} \\ &= \inf\{m_G(U) : B \subseteq U, U\text{-abierto}\}. \end{aligned}$$

Dados $\mu, \nu \in \mathrm{M}(G)$, $c \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathrm{C}_0(G)$ hacemos $\| \mu \| = | \mu | (G)$,

$$\langle x, c\mu + \nu \rangle = c\langle x, \mu \rangle + \langle x, \nu \rangle,$$

$$\langle x, \mu * \nu \rangle = \int_G x(gg')d\mu(g)d\nu(g').$$

Cabe señalar que $\mathrm{M}(G)$ se identifica, en cuanto espacio de Banach, con el subespacio de $\mathrm{C}_b(G)^*$ de funcionales $\mathrm{C}_0(G)$-*estrictamente continuos*.[3] Como todo abierto $\mathrm{C}_0(G)$-estricto es abierto en norma es $\mathrm{C}_b(G)^*_{st} \subseteq \mathrm{C}_b(G)^*$. Más aún, cada $\mu \in \mathrm{M}(G)$ determina un único $\overline{\mu} \in \mathrm{C}_b(G)^*_{st}$ tal que $\langle f, \overline{\mu} \rangle = \int_G f d\mu$ si $f \in \mathrm{C}_0(G)$ y $\mu \to \overline{\mu}$ define un isomorfismo de espacios de Banach $\mathrm{C}_b(G)^*_{st} \approx \mathrm{M}(G)$ [**31**]. Haciendo

$$\mathrm{M}(\mathfrak{h}) : \mathrm{M}(G) \to \mathrm{M}(H),$$

$$\langle y, \mathrm{M}(\mathfrak{h})(\mu) \rangle = \langle y \circ \mathfrak{h}, \overline{\mu} \rangle \text{ si } y \in \mathrm{C}_0(H),$$

es fácil ver que M es functor covariante.

13. En particular, si G es grupo localmente compacto $\mathrm{L}^\infty(G)$ es $\mathrm{M}(G)$-bimódulo de Banach haciendo, para $\mu \in \mathrm{M}(G)$, $F \in \mathrm{L}^\infty(G)$ y $g \in G$,

$$(\mu * F)(g) = \int_G F(h^{-1}g)d\mu(h),$$

$$(F * \mu)(g) = \int_G F(gh^{-1})d\mu(h),$$

14. Notar que un grupo localmente compacto G resulta amenable a izquierda si y solo si lo es a derecha.
► Sea m un promedio invariante a izquierda m de G.
Escribimos $i(m) : \mathrm{L}^\infty(G) \to \mathbb{C}$ tal que $\langle \phi, i(m) \rangle = \langle i(\phi), m \rangle$, con $i(\phi)(g) = \phi(g^{-1})$ si $g \in G$ y $\phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$. Así $i(\phi) \in \mathrm{L}^\infty(G)$ y

$$\begin{aligned}(\delta_g * i(\phi))(x) &= i(\phi)(g^{-1}x)\\ &= \phi(x^{-1}g)\\ &= (\phi * \delta_{g^{-1}})(x^{-1}),\end{aligned}$$

o sea $\delta_g * i(\phi) = i(\phi * \delta_{g^{-1}})$. Luego

$$\begin{aligned}\langle \phi * \delta_{g^{-1}}, i(\phi) \rangle &= \langle \delta_g * i(\phi), m \rangle\\ &= \langle i(\phi), m \rangle\\ &= \langle \phi, i(m) \rangle\end{aligned}$$

e $i(m)$ deviene promedio invariante a derecha. La afirmación recíproca sigue en forma análoga.

15. Fijado un grupo localmente compacto G, $\mathrm{M}(G)$ es amenable si y solo si G es discreto y amenable [**35**].

[3]Indicamos $\mathrm{C}_b(G)$ al espacio de funciones complejas continuas acotadas sobre G, con $\| x \| = \sup_{g \in G} | x(g) |$ si $x \in \mathrm{C}_b(G)$. Una red $\{x_a\}_{a \in A}$ converge $\mathrm{C}_0(G)$-estrictamente a x en $\mathrm{C}_b(G)$ si y solo si $\lim_{a \in A} \| y(x_a - x) \| = 0$ cualquiera sea $x \in \mathrm{C}_0(G)$.

16. Sean A-álgebra de Banach e I-ideal cerrado de A tal que tanto I como A/I son amenables. Entonces A es amenable.
Para ello, sean X-un A-bimódulo de Banach y $D \in \mathcal{Z}^1(A, X^*)$ una derivación acotada.
Puesto que X es I-bimódulo de Banach, $D \mid_I \in \mathcal{Z}^1(I, X^*)$ e I es amenable existe $x_1' \in X^*$ tal que $D \mid_I = \mathrm{ad}_{x_1'}$.
Escribiendo $D_1 = D - \mathrm{ad}_{x_1'}$ queda inducido $D_2 : A/I \to X^*$ tal que $\langle x, D_2(a+I)\rangle = \langle x, D_1(a)\rangle$ para cada $a \in A$ y $x \in X$. Sean

$$\begin{aligned} &\Phi = \{x_2' \in X^* : ax_2' = x_2'a = 0_{X^*} \text{ si } a \in I\},\\ &Y = \mathrm{ccl}(IX + XI). \end{aligned}$$

Para $a \in A$ y $x \in X$ y $x_2' \in \Phi$ definimos

$$\begin{aligned} (a+I)(x+Y) &= ax + Y,\\ (x+Y)(a+I) &= xa + Y,\\ (a+I)x_2' &= ax_2',\\ x_2'(a+I) &= x_2'a. \end{aligned}$$

Es fácil ver que así X/Y y Φ devienen A/I-bimódulos de Banach. Además $\Phi \approx (X/Y)^*$: para $x \in X$ y $x_2' \in \Phi$ definimos

$$\begin{aligned} &F : \Phi \to (X/Y)^*,\\ &\langle x+Y, F(x_2')\rangle = \langle x, x_2'\rangle \end{aligned}$$

Fijado $x_2' \in \Phi$ sea $x \in Y$, digamos

$$x = \lim_{k\to\infty} \textstyle\sum_{n=1}^{n_k} (a_{n,k}^1 x_{n,k}^1 + x_{n,k}^2 a_{n,k}^2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, x_2'\rangle &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n_k} \langle a_{n,k}^1 x_{n,k}^1 + x_{n,k}^2 a_{n,k}^2, x_2'\rangle\\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n_k} [\langle x_{n,k}^1, x_2' a_{n,k}^1\rangle + \langle x_{n,k}^2, a_{n,k}^2 x_2'\rangle]\\ &= 0 \end{aligned}$$

y $F(x_2')$ está bien definida. Claramente $F(x_2')$ es $\mathbb{C}$-lineal y

$$| \langle x+Y, F(x_2')\rangle | \leq \| x \| \| x_2' \|,$$

i.e. $F(x_2') \in (X/Y)^*$ y $\| F(x_2') \| \leq \| x_2' \|$. Así F está bien definida y es evidentemente $\mathbb{C}$-lineal y contractiva. Es fácil ver que F es morfismo de A/I-bimódulos. Más aún, es inmediato que F es inyectiva. Asimismo, dado $g \in (X/Y)^*$, si $\nu : X \to X/Y$ es la proyección al cociente, se ve que $g \circ \nu \in \Phi$ y que $F(g \circ \nu) = g$, o sea F es suryectiva. Pero resulta $D_2 \in \mathcal{Z}^1(A/I, \Phi)$, y como A/I es amenable existe

$x_2' \in \Phi$ tal que $D_2 = \mathrm{ad}_{x_2'}$. Finalmente, para $a \in A$ y $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle x, D(a) - \mathrm{ad}_{x_1'}(a)\rangle &= \langle x, D_1(a)\rangle \\ &= \langle x, D_2(a+I)\rangle \\ &= \langle x, \mathrm{ad}_{x_2'}(a+I)\rangle \\ &= \langle x, (a+I)x_2' - x_2'(a+I)\rangle \\ &= \langle x, ax_2' - x_2'a\rangle \\ &= \langle x, \mathrm{ad}_{x_2'}(a)\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $D = \mathrm{ad}_{x_1'+x_2'}$.

17. Por lo tanto, un álgebra de Banach A es amenable si y solo si A_1 lo es.
    La condición es suficiente por (2.4.16). Recíprocamente, dado un A-bimódulo de Banach X y una derivación acotada $D : A \to X^*$, extendemos D a una derivación acotada $D_1 : A_1 \to X^*$ haciendo $D_1(1) = 0_{X^*}$. Luego existirá $x' \in X^*$ tal que $D_1 = \mathrm{ad}_{x'}$ porque A_1 es amenable. Como $D = D_1 |_A$, D resulta derivación interna.
18. Toda álgebra de Banach amenable A posee *aproximación acotada de la identidad*[4].
    Para ello, sea A_i sea el A-bimódulo de Banach A, con $a \cdot b = ab$ y $b \cdot a = 0_A$ si $a, b \in A$. Dados $a, b \in A$ y $a' \in A_i^*$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle a', a\iota_A(b) + \iota_A(a)b\rangle &= \langle a'a, \iota_A(b)\rangle + \langle ba', \iota_A(a)\rangle \\ &= \langle b, a'a\rangle + \langle a, ba'\rangle \\ &= \langle ab, a'\rangle \\ &= \langle a', \iota_A(ab)\rangle,\end{aligned}$$

o sea $\iota_A \in \mathcal{Z}^1(A, A_i^{**})$. Como A es amenable existe $G \in A_i^{**}$ tal que $\iota_A = \mathrm{ad}_G$. Hay entonces una red acotada $\{g_i\}_{i \in I}$ en A tal que

[4]Un álgebra de Banach A tiene *aproximación acotada de la identidad a izquierda* (resp. *a derecha*), en cuyo caso escribimos $A \in \mathrm{BLAI}$ (resp. $A \in \mathrm{BRAI}$), si tiene alguna red acotada $\{e_j\}$ tal que $e_j a \to a$ (resp. $ae_j \to a$) para cada $a \in A$. Decimos que *A tiene aproximación acotada de la identidad* si $A \in \mathrm{BAI}$, donde $\mathrm{BAI} = \mathrm{BLAI} \cap \mathrm{BRAI}$.

$G = w^*\text{-lím}_{i\in I}\, \iota_A(g_i)$ [**64**]. Si $a \in A$ y $a' \in A^*$ obtenemos

$$\begin{aligned}\langle a, a'\rangle &= \langle a', \iota_A(a)\rangle \\ &= \langle a', \mathrm{ad}_G(a)\rangle \\ &= \langle a', aG - Ga\rangle \\ &= \langle a'a, G\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\langle g_i, a'a\rangle \\ &= \langle a'a, G\rangle \\ &= \lim_{i\in I}\langle ag_i, a'\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $a = w\text{-lím}_{i\in I}(ag_i)$. Así $a \in [a\mathrm{conv}(\{g_i\}_{i\in I})]^-$ y $\mathrm{conv}(\{g_i\}_{i\in I})$ es acotado. Por lo tanto $A \in$ BRAI (cf. [**1**]; [**17**], Prop. 2, p. 58). Asimismo se prueba que $A \in$ BLAI.

19. Un A-bimódulo de Banach X se llama *pseudounitario* si $X = AXA$.
20. Un álgebra de Banach A con aproximación acotada de la unidad es amenable si y solo si $\mathcal{H}^1(A, X^*) = (0)$ cualquiera sea el A-bimódulo pseudounitario X.
▶ (i) Evidentemente la condición es necesaria.
(ii) Por otra parte, sea X un A-bimódulo de Banach y $D \in \mathcal{Z}^1(A, X^*)$. Por el teorema de factorización de Cohen

$$X_0 \triangleq \mathrm{cl}(AXA) \text{ y } X_1 = \mathrm{cl}(AX)$$

son A-sub-bimódulos cerrados de X, $X_0 = AXA$ y $X_1 = AX$ (cf. [**25**]; [**17**], Th. 11.10).
(iii) Considerando al operador de restricción $\rho_1 : X^* \to X_1^*$, como $\rho_1 \in_A \mathcal{B}_A(X^*, X_1^*)$ resulta $\rho_1 \circ D \in \mathcal{H}^1(A, X_1^*)$.
(iv) Escribamos $D_1 = \rho_1 \circ D$ y sea $\rho_0 : X_1^* \to X_0^*$ el operador de restricción. Entonces $\rho_0 \circ D_1 \in \mathcal{Z}^1(A, X_0^*)$ pues $\rho_0 \in_A \mathcal{B}_A(X_1^*, X_0^*)$.
(v) Como X_0 es pseudounitario por hipótesis existe $x_0' \in X_0^*$ tal que $\rho_0 \circ D_1 = \mathrm{ad}_{x_0'}$.
(vi) Luego $D_1 - \mathrm{ad}_{x_0'} \in \mathcal{Z}^1(A, X_0^\perp)$. Más aún, hay un isomorfismo de A-bimódulos de Banach $X_0^\perp \approx (X_1/X_0)^*$.
(vii) Así $D_1 - \mathrm{ad}_{x_0'} \in \mathcal{Z}^1(A, (X_1/X_0)^*$.
(viii) Pero $(X_1/X_0)A = (0_{X_1/X_0})$. Dadas una aproximación acotada de la identidad $\{e_j\}_{j\in J}$ de A y $D_2 \in \mathcal{Z}^1(A, (X_1/X_0)^*)$, considerando eventualmente alguna subred podemos suponer existe

$$\xi = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, D_2(e_j)$$

en $(X_1/X_0)^*$. Entonces si $a \in A$ vemos que

$$\begin{aligned} D_2(a) &= w^* - \lim_{j\in J} D_2(e_j a) \\ &= w^* - \lim_{j\in J}(D(e_j)a + e_j D_2(a)) \\ &= \xi a \\ &= \mathrm{ad}_\xi(a). \end{aligned}$$

(ix) En particular, D_1 será derivación interna, digamos $D_1 = \mathrm{ad}_{x_1'}$ para cierto $x_1' \in X_1^*$. Luego $D - \mathrm{ad}_{x_1'} \in \mathcal{Z}(A, X_1^\perp)$ y nuevamente $\mathcal{Z}^1(A, X_1^*) \approx (X/X_1)^*$. Como $A(X/X_1) = (0_{X/X_1})$, razonando como antes concluímos que D deberá ser derivación interna.

2.5. Caracterización de álgebras amenables

1. Sea A un álgebra de Banach compleja. Llamamos *diagonal virtual* a todo elemento $V \in (A\hat{\otimes}A)^{**}$ tal que $a\hat{\pi}_A^{**}(V) = \iota_A(a)$ y $aV = Va$ para cada $a \in A$, donde $\iota_A : A \hookrightarrow A^{**}$ es la inmersión isométrica natural de A en A^{**}.
2. Llamamos además *diagonal aproximada de* A a toda red $\{v_j\}_{j\in J}$ de elementos de $A\hat{\otimes}A$ tal que
$$av_j - v_j a \xrightarrow{w} 0_{A\hat{\otimes}A} \text{ y } a\hat{\pi}_A(v_j) \xrightarrow{w} a.$$
para cada $a \in A$.
3. [**91**], [**33**] Son equivalentes[5]:
(a) A es álgebra de Banach amenable.
(b) A posee alguna diagonal virtual.
(c) A posee alguna diagonal aproximada acotada.
(a $\Rightarrow$ b) Sea $\{e_j\}_{j\in B}$ una aproximación acotada de la identidad de A. Considerando eventualmente una subred, podemos asumir que existe $V_1 = w^*\text{-}\lim_{j\in J} \iota_{A\hat{\otimes}A}(e_j \otimes e_j)$ en $(A\hat{\otimes}A)^{**}$. Dados $a \in A$ tenemos
$$\begin{aligned} \hat{\pi}_A^{**}(\mathrm{ad}_{V_1}(a)) &= \hat{\pi}_A^{**}(aV_1 - V_1 a) \\ &= w^*\text{-}\lim_{j\in J} \hat{\pi}^{**}(\iota_{A\hat{\otimes}A}((ae_j)\otimes e_j - e_j \otimes (e_j a))) \\ &= w^*\text{-}\lim_{j\in J} \iota_A(ae_j^2 - e_j^2 a) \\ &= 0_{A^{**}}, \end{aligned}$$
porque además, si $C > 0$ es tal que $\| e_j \| \leq C$ si $j \in J$, en todo caso tenemos

$$\begin{aligned} \| ae_j^2 - e_j^2 a \| &\leq \| (ae_j - a)e_j \| + \| ae_j - e_j a \| + \| e_j(a - e_j a) \| \\ &\leq \| ae_j - a \| \| e_j \| + \| ae_j - e_j a \| + \| e_j \| \| a - e_j a \| \\ &\leq C(\| ae_j - a \| + \| a - e_j a \|) + \| ae_j - e_j a \|, \end{aligned}$$

[5] V. (2.7.6) y (2.7.10)

de donde $\lim_{j\in J}(ae_j^2 - e_j^2 a) = 0$.
Así $\mathrm{ad}_{V_1}(A) \subseteq \ker(\hat{\pi}_A^{**})$. Veamos que

$$\ker(\hat{\pi}_A^{**}) = j^{**}(\ker(\hat{\pi}_A)^{**}), \tag{2.5.1}$$

donde $j : \ker(\hat{\pi}) \hookrightarrow A\hat{\otimes}A$ es la inclusión, y que j^{**} es monomorfismo de espacios de Banach.
Por un lado, dados $S \in \ker(\hat{\pi}_A)^{**}$ y $F \in (A\hat{\otimes}A)^*$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle F, \hat{\pi}_A^{**}(j^{**}(S))\rangle &= \langle(\hat{\pi}_A \circ j)^*(F), S\rangle \\ &= \langle F \circ \hat{\pi}_A \circ |_{\ker(\hat{\pi}_A)}, S\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

y resulta la inclusión $\supseteq$. Sea ahora $W \in \ker(\hat{\pi}_A^{**})$ y veamos existe $m \in \ker(\hat{\pi}_A)^{**}$ tal que $j^{**}(m) = W$. Puesto que, por el teorema de Hahn-Banach,

$$j^* : (A\hat{\otimes}A)^{**} \to \ker(\hat{\pi}_A)^*$$

es suryectiva, dado $x \in \ker(\hat{\pi}_A)^*$ tomemos $G \in (A\hat{\otimes}A)^*$ tal que $x = j^*(G)$. Escribamos entonces $m(x) = W(G)$. Veamos que m está bien definida ya que $\ker(j^*) \subseteq \ker(W)$.
En efecto, sea $H \in (A\hat{\otimes}A)^*$ tal que $H\,|_{\ker(\hat{\pi}_A)} \equiv 0$. Como $W \circ \hat{\pi}_A^* = 0$ bastará ver que existe $a' \in A^*$ tal que $H = \hat{\pi}_A^*(a')$. Sea entonces $a'(\hat{\pi}_A(u)) = H(u)$, $u \in A\hat{\otimes}A$. En particular, si $u \in \ker(\hat{\pi}_A)$ entonces $H(u) = 0$, de modo que a' está bien definida sobre $\mathrm{Im}(\hat{\pi}_A)$. Pero $A \in \mathrm{BAI}$ porque es amenable. Por el teorema de factorización de Cohen todo elemento $a \in A$ es del tipo $a = bc$ para ciertos $b, c \in A$ (cf. [**25**]; [**17**], Th. 11.10). Luego $a = \hat{\pi}_A(b \otimes c)$ y $\hat{\pi}_A$ es suryectiva y $a' : A \to \mathbb{C}$. Es fácil ver que a' es $\mathbb{C}$-lineal.
Además, por el teorema de la función abierta existe $\eta > 0$ tal que $(A)_\eta \subseteq \hat{\pi}_A((A\hat{\otimes}A)_1)$. Dado $v \in A\hat{\otimes}A - \ker(\hat{\pi}_A)$ existe $w \in (A\hat{\otimes}A)_1$ y tal que

$$\frac{\eta}{2}\frac{\hat{\pi}_A(v)}{\|\hat{\pi}_A(v)\|} = \hat{\pi}_A(w).$$

En consecuencia existe $z \in \ker(\hat{\pi}_A)$ tal que

$$v = \frac{2}{\eta} \parallel \hat{\pi}_A(v) \parallel w + z.$$

Notemos que la identidad anterior también es cierta si $v \in \ker(\hat{\pi}_A)$. En todo caso,

$$\begin{aligned} | \, a'(\hat{\pi}_A(v)) \, | &= \frac{2}{\eta} \parallel \hat{\pi}_A(v) \parallel | \, a'(\hat{\pi}_A(w)) \, | \\ &= \frac{2}{\eta} \parallel \hat{\pi}_A(v) \parallel | \, H(w) \, | \\ &\leq \frac{2}{\eta} \parallel \hat{\pi}_A(v) \parallel \parallel H \parallel \parallel w \parallel_\wedge \\ &\leq \frac{2}{\eta} \parallel \hat{\pi}_A(v) \parallel \parallel H \parallel, \end{aligned}$$

o sea $a' \in A^*$, por construcción $H = \hat{\pi}_A^*(a')$ y sigue (2.5.1).
Puesto que j^* es epimorfismo j^{**} deviene monomorfismo. Por el teorema de la función abierta $j^{**} \mid^{\ker(\hat{\pi}_A^{**})}$ es isomorfismo de espacios de Banach, más aún, de A-bimódulos de Banach.
Así $(j^{**})^{-1} \circ \mathrm{ad}_{V_1} : A \to \ker(\hat{\pi}_A)^{**}$ deviene derivación acotada y, por la amenabilidad de A, existe $T \in \ker(\hat{\pi_A})^{**}$ tal que

$$(j^{**})^{-1} \circ \mathrm{ad}_{V_1} = \mathrm{ad}_T.$$

Escribiendo $V_2 = j^{**}(T)$ es $\mathrm{ad}_{V_1} = \mathrm{ad}_{V_2}$. Haciendo $V = V_1 - V_2$ en $(A \hat{\otimes} A)^{**}$ tenemos $aV = Va$ para cada $a \in A$. Finalmente, sean $b \in A$ y $b' \in A^*$. Como para cada j es

$$\begin{aligned} \parallel e_j^2 b - b \parallel &\leq \parallel e_j^2 b - e_j b \parallel + \parallel e_j b - b \parallel \\ &\leq \parallel e_j \parallel \parallel e_j b - b \parallel + \parallel e_j b - b \parallel \\ &\leq (C+1) \parallel e_j b - b \parallel \end{aligned}$$

sigue que $e_j^2 b \to b$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle b', \hat{\pi}_A^{**}(V) b \rangle &= \langle bb', \hat{\pi}_A^{**}(V_1) \rangle \\ &= \langle \hat{\pi}_A^*(bb'), V_1 \rangle \\ &= \lim_{j \in J} \langle e_j \otimes e_j, \hat{\pi}_A^*(bb') \rangle \\ &= \lim_{j \in J} \langle e_j^2 b, b' \rangle \\ &= \langle b, b' \rangle \end{aligned}$$

y V es diagonal virtual de A.
(b $\Rightarrow$ c) Dada una diagonal virtual V de A, por el teorema de Goldstine, hay una red acotada $\{v_j\}_{j \in J}$ tal que $V = w^*\text{-}\lim_{j \in J} \iota_{A \hat{\otimes} A}(v_j)$. Si $a \in A$, $a' \in A^*$ y $F \in (A \hat{\otimes} A)^*$ tenemos

$$0 = \langle F, aV - Va \rangle = \langle Fa - aF, V \rangle = \lim_{j \in J} \langle av_j - v_j a, F \rangle$$

y además

$$\begin{aligned}\langle a, a'\rangle &= \langle a', \hat{\pi}_A^{**}(V)a\rangle\\ &= \langle \hat{\pi}_A^{*}(aa'), V\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\langle v_j, \hat{\pi}_A^{*}(aa')\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\langle \hat{\pi}_A(v_j)a, a'\rangle,\end{aligned}$$

de modo que $\{v_j\}_{j\in J}$ es diagonal aproximada de A.
(c $\Rightarrow$ a) Sean $\{v_j\}_{j\in J}$ diagonal aproximada de A, X un A-bimódulo de Banach y $D \in \mathcal{Z}^1(A, X^*)$. Por (2.4.20) vamos a asumir que X es pseudounitario.
Existe $\hat{D} \in \mathcal{B}(A\hat{\otimes}A, X^*)$ único tal que $\hat{D}(a\otimes b) = aD(b)$ para cada $a, b \in A$.
Sea $v_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \otimes b_{n,j}$, con $\sum_{n=1}^{\infty} \| a_{n,j} \| \| b_{n,j} \| < \infty$ para cada j. Entonces $\{\hat{D}(v_j)\}_{j\in J}$ será acotado en X^* y por el teorema de Banach-Alaoglu, pasando eventualmente a una subred, existirá $x' \in X^*$ tal que $x' = w^*\text{-}\lim_{j\in J} \hat{D}(v_j)$.
Dados $a \in A$ y $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle x, ax'\rangle &= \langle xa, a'\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\langle xa, \hat{D}(v_j)\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}\langle xa, a_{n,j}D(b_{n,j})\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, aa_{n,j}D(b_{n,j})\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\langle x, \hat{D}(av_j)\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\langle x, \hat{D}(v_ja)\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, a_{n,j}D(b_{n,j}a)\rangle\\ &= \lim_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, a_{n,j}b_{n,j}D(a) + a_{n,j}D(b_{n,j})a\rangle\\ &= \lim_{j\in J}[\langle x\hat{\pi}_A(v_j), D(a)\rangle + \langle x, \hat{D}(v_j)a\rangle] \text{ (por la pseudounitaridad de } X)\\ &= \langle x, D(a)\rangle + \langle x, x'a\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $D = \mathrm{ad}_{x'}$.

2.6. Módulos libres, colibres, proyectivos, inyectivos, playos

1. Fijada un álgebra de Banach A y un espacio de Banach E llamamos *libre* y *colibre* a todo A módulo a izquierda del tipo $A_1\hat{\otimes}E$ y $\mathcal{B}(A_1, E)$ respectivamente.
   Notar que $\mathcal{B}(A_1, E)$ resulta A-módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha) si $(aT)(b_1) = T(b_1 a)$ (resp. $(Ta)(b_1) = T(ab_1)$) para cada $a \in A$, $b_1 \in A_1$, $T \in \mathcal{B}(A_1, E)$.
2. Sean M, N dos A-módulos de Banach y $T \in \mathcal{B}(M, N)$ un morfismo de A-módulos de Banach. Se dice que T es *admisible* si $\mathrm{im}(T)$ es cerrado y tanto $\ker(T)$ como $\mathrm{im}(T)$ son complementables en M y N respectivamente.
3. [**80**] Un A-módulo a izquierda (resp. a derecha) de Banach P se dice *proyectivo* si dados A-módulos de Banach a izquierda (resp. a derecha) M, N, un morfismo de A-módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha) $U : P \to N$ y un epimorfismo admisible de A-módulos de Banach a izquierda (resp. a derecha) $S : M \to N$ existe un morfismo de A-módulos de Banach a izquierda (resp. a derecha) $T : P \to M$ tal que $U = S \circ T$.
4. Un A-módulo a izquierda (resp. a derecha) de Banach I se dice *inyectivo* si dados A-módulos de Banach a izquierda (resp. a derecha) M, N, un morfismo de A-módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha) $U : M \to I$ y un monomorfismo admisible de A-módulos de Banach a izquierda (resp. a derecha) $T : M \to N$ existe un morfismo de A-módulos de Banach a izquierda (resp. a derecha) $S : N \to I$ tal que $U = S \circ T$.
5. Sean A_1 la unitización de un álgebra de Banach A y P un A-módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha). Sea $\pi_{A,P} : A \times P \to P$ (resp. $\pi_{P,A} : P \times A \to P$) la correspondiente acción a izquierda (resp. a derecha) de A en P. También escribiremos $\hat{\pi}_{A,P} : A\hat{\otimes}P \to P$ (resp. $\hat{\pi}_{P,A} : P\hat{\otimes}A \to P$) a los correspondientes operadores sobre los productos proyectivos inducidos.
6. Sea P un A-módulo de Banach a izquierda. Son equivalentes:
   (i) P es proyectivo.
   (ii) $\hat{\pi}_{A_1,P}$ es una *retracción*, i.e. existe $\rho \in_A \mathcal{B}(P, A_1\hat{\otimes}P)$ tal que $\hat{\pi}_{A_1,P} \circ \rho = \mathrm{Id}_P$.
   (iii) La sucesión exacta corta
   $$0 \to \ker(\hat{\pi}_{A_1,P}) \xrightarrow{\iota} A_1\hat{\otimes}P \xrightarrow{\hat{\pi}_{A_1,P}} P \to 0$$
   es escindida.
   (iv) Hay algún A-módulo a izquierda Q tal que $P \oplus Q$ es libre.
   ((i)⇔(ii)) Precisamente,

(2.6.1)
$$A_1\hat{\otimes}P = A\hat{\otimes}P \oplus 1\hat{\otimes}P.$$

En efecto, sea $u \in A_1\hat{\otimes}P$, digamos $u = \sum(a_n + \alpha_n) \otimes p_n$, con $\sum \| a_n + \alpha_n \|\| p_n \|< \infty$. En consecuencia $\sum \| a_n \|\| p_n \|< \infty$ y

$\sum \mid \alpha_n \mid\parallel p_n \parallel < \infty$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} u &= \sum (a_n + \alpha_n) \otimes p_n \\ &= \sum a_n \otimes p_n + \sum \alpha_n \otimes p_n \\ &= \sum a_n \otimes p_n + 1 \otimes \sum (\alpha_n p_n). \end{aligned}$$

Además, si $v \in A\hat{\otimes}P \cap 1\hat{\otimes}P$ entonces $0_{\mathbb{C}\hat{\otimes}P} = (h_\infty \otimes \mathrm{Id}_P)(v) = v$, donde $h_\infty : A_1 \to \mathbb{C}$ es el homomorfismo $h_\infty(a, \alpha) = \alpha$ para cada (a, α). Así sigue (2.6.1).

Con la notación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} u &= \sum (a_n + \alpha_n) \otimes p_n \\ &= \sum (a_n \otimes p_n - 1 \otimes (a_n p_n)) + 1 \otimes \sum (a_n p_n + \alpha_n p_n). \end{aligned}$$

Supongamos existe $w \in \ker(\hat{\pi}_{A_1,P}) \cap (1\hat{\otimes}P)$, $w = w_1 + 1 \otimes p$ con $w_1 \in A\hat{\otimes}P$ y $p \in P$. Por (2.6.1) debe ser $w_1 = 0_{A\hat{\otimes}P}$, y por lo tanto $p = 0_P$ porque $w \in \ker(\hat{\pi}_{A_1,P})$. Así $A_1\hat{\otimes}P = \ker(\hat{\pi}_{A_1,P}) \oplus (1\hat{\otimes}P)$ y como $\hat{\pi}_{A_1,P}$ es epimorfismo resulta admisible. Asumiendo que P es proyectivo la condición resulta ahora necesaria.

Recíprocamente, sean dados M, N dos A-módulos de Banach a izquierda, $U \in_A \mathcal{B}(P, N)$ y un epimorfismo admisible $S \in_A \mathcal{B}(M, N)$. Sea $M = \ker(S) \oplus M_1$ para cierto subespacio cerrado M_1 de M. Sea $V : A_1 \times P \to M$ tal que $V(a + \alpha, p) = m_1$ si $m_1 \in M_1$ y

$$S(m_1) = (U \circ \hat{\pi}_{A_1,P})((a + \alpha) \otimes p).$$

Entonces V resulta funcional biaditiva acotada e induce un operador $V^o \in \mathcal{B}(A_1\hat{\otimes}P, M)$ tal que en todo caso $V^o((a+\alpha)\otimes p) = V(a+\alpha, p)$. Más aún, V^o deviene homomorfismo de A-módulos a izquierda. Sea ahora $\rho \in_A \mathcal{B}(P, A_1\hat{\oplus}P)$ tal que $\hat{\pi}_{A_1,P} \circ \rho = \mathrm{Id}_P$. Haciendo $T = V^o \circ \rho$ se tiene $T \in_A \mathcal{B}(P, M)$ y

$$\begin{aligned} S \circ T &= S \circ (V^o \circ \rho) \\ &= (S \circ V^o) \circ \rho \\ &= (U \circ \hat{\pi}_{A_1,P}) \circ \rho \\ &= U \circ (\hat{\pi}_{A_1,P} \circ \rho) \\ &= U \circ \mathrm{Id}_P \\ &= U. \end{aligned}$$

((ii)$\Leftrightarrow$(iii)) Es inmediato.

((ii)$\Rightarrow$(iv)) Es inmediato.

((iv)$\rightarrow$(i)) Sean M, N dos A-módulos a izquierda, $U \in_A \mathcal{B}(P, N)$ y $S \in_A \mathcal{B}(M, N)$ epimorfismo admisible. Consideremos $P \oplus Q = A_1\hat{\otimes}E$ para ciertos espacios de Banach Q y E.

Entonces $S \oplus \mathrm{Id}_Q \in_A \mathcal{B}(M \oplus Q, N \oplus Q)$ es epimorfismo y

$$U \oplus \mathrm{Id}_Q \in_A \mathcal{B}(P \oplus Q, N \oplus Q).$$

Suponiendo exista $\Lambda \in_A \mathcal{B}(P \oplus Q, M \oplus Q)$ tal que

$$(S \oplus \mathrm{Id}_Q) \circ \Lambda = U \oplus \mathrm{Id}_Q$$

será $U = S \circ (\pi_M \circ \Lambda \circ \iota_P)$. Podemos suponer entonces que $P = A_1 \hat{\otimes} E$. Sea $T \in \mathcal{B}(N, M)$ tal que $S \circ T = \mathrm{Id}_N$. Haciendo $R = T \circ U$, $R \in \mathcal{B}(P, M)$. Existe $\hat{R} \in \mathcal{B}(A_1 \hat{\otimes} P, M)$ único tal que $\hat{R}(1 \otimes p) = R(p)$ si $p \in P$. Haciendo $T = \hat{R} \circ j$, con $j : P \hookrightarrow A_1 \hat{\otimes} P$ resultará $S \circ T = U$.

7. Sea I un A-módulo de Banach a izquierda. Son equivalentes:
(i) El homomorfismo canónico $\Delta^{A_1, I} : I \to_A \mathcal{B}(A_1, I)$ admite un inverso a izquierda en ${}_A\mathcal{B}(\mathcal{B}(A_1, I), I)$.
(ii) Hay algún A-módulo a izquierda G tal que I es sumando directo de $\mathcal{B}(A_1, G)$.
(iii) I es inyectivo.
(iv) Cada sucesión exacta corta $0 \to I \to E \to E/I \to 0$ de A-módulos de Banach es escindida.
► ((i)⇒(ii)) Sea $\rho \in_A \mathcal{B}(\mathcal{B}(A_1, I), I)$ tal que $\rho \circ \Delta^{A_1, I} = \mathrm{Id}_I$. Entonces

$$\mathcal{B}(A_1, I) = \ker(\rho) \oplus \mathrm{im}(\Delta^{A_1, I}).$$

Puesto que $\Delta^{A_1, I}$ es inyectivo basta tomar $G = I$.
((ii)⇒(iii)) Podemos asumir que I es colibre, digamos $I = \mathcal{B}(A_1, G)$ para cierto A-módulo de Banach G. Consideremos el diagrama de morfismos y A-módulos de Banach a izquierda.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to E & \xrightarrow{\alpha} & F = \alpha(E) \oplus F_1 \\ & \beta \downarrow & & \\ & \mathcal{B}(A_1, G) & & \end{array}$$

Hay un isomorfismo de A-módulos

$$\Delta_{F,G} :_A \mathcal{B}(F, G) \to_A \mathcal{B}(F, \mathcal{B}(A_1, G)),$$
$$\Delta_{F,G}(T) = \Delta^{A_1, G} \circ T.$$

Entonces $\Delta_{F,G}$ está bien definido pues $\Delta^{A_1, G} \in_A \mathcal{B}(G, \mathcal{B}(A_1, G))$. Es fácil ver que $\Delta^{-1}_{F,G}(\theta)(f) = \theta(f)(1)$ para cada $\theta \in_A \mathcal{B}(F, \mathcal{B}(A_1, G))$ y $f \in F$. Dado entonces $\gamma \in_A \mathcal{B}(F, E)$ tal que $\gamma \circ \alpha = \mathrm{Id}_E$ es $\beta \circ \gamma \in_A \mathcal{B}(F, \mathcal{B}(A_1, G))$. Sea $\delta = \Gamma^{-1}_{F,G}(\beta \circ \gamma)$ en $\mathcal{B}(F, G)$. Como $\beta \circ \gamma = \Delta_{F,G}(\delta)$ es $\beta = \Delta_{F,G}(\delta) \circ \alpha$, i.e. $\beta = (\Delta^{A_1, G} \circ \delta) \circ \alpha$, con $\Delta^{A_1, G} \circ \delta \in_A \mathcal{B}(F, \mathcal{B}(A_1, G))$.
((iii)⇒(iv)) Es evidente.
((iv)⇒(i)) Puesto que $\Delta^{A_1, I}$ es inyectiva basta considerar la sucesión exacta corta

$$0 \to I \xrightarrow{\Delta^{A_1, I}}_A \mathcal{B}(A_1, I) \to \frac{{}_A\mathcal{B}(A_1, I)}{\mathrm{im}(\Delta^{A_1, I})} \to 0.$$

8. Sean A un álgebra de Banach y $F \in A$-Mod (resp. $F \in$ Mod-A). Decimos que F es *playo* si el functor $? \hat{\otimes}_A F$:Mod-$A \to$ Ban (resp. el

functor $F_A\hat{\otimes}? : A\text{-Mod}\to\text{Ban}$) transforma sucesiones exactas cortas *admisibles*[6] en sucesiones exactas cortas.

9. Un A-módulo de Banach a izquierda (derecha) F es playo si y solo si F^* es A-módulo de Banach a derecha (izquierda) inyectivo.

(⇒) Consideremos el diagrama de módulos

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & L & \xrightarrow{\xi} & N \\ & & \eta\downarrow & & \\ & & F^* & & \end{array}$$

de A-módulos a derecha y morfismos, en particular ξ-admisible. Entonces

$$0 \to L \xrightarrow{\xi} N \to N/\xi(L) \to 0$$

es sucesión exacta corta admisible en Mod-A. Por la playicidad de F,

$$0 \to L\hat{\otimes}_A F \xrightarrow{\xi\otimes\mathrm{Id}_F} N\hat{\otimes}_A F \to \tfrac{N}{\xi(L)}\hat{\otimes}_A F \to 0$$

es sucesión exacta corta, como asimismo la sucesión

$$0 \leftarrow (L\hat{\otimes}_A F)^* \xleftarrow{(\xi\otimes\mathrm{Id}_F)^*} (N\hat{\otimes}_A F)^* \leftarrow (\tfrac{N}{\xi(L)}\hat{\otimes}_A F)^* \leftarrow 0.$$

Como $\eta \in \mathcal{B}_A(L, F^*)$ existe $\hat{\eta} \in (L\hat{\otimes}_A F)^*$ único tal que

$$\hat{\eta}(l \otimes f) = \eta(l)(f)$$

en tensores básicos. Por lo tanto existe $\Theta \in (N\hat{\otimes}_A F)^*$ tal que

$$\hat{\eta} = (\xi \otimes \mathrm{Id}_F)^*(\Theta).$$

Queda inducido $\theta \in \mathcal{B}_A(N, F^*)$ tal que $\theta(n)(f) = \Theta(n \otimes f)$ para cada $n \in N$ y $f \in F$. Dados entonces $l \in L$ y $f \in F$ tenemos

$$\begin{aligned}(\theta\circ\xi)(l)(f) &= \theta(\xi(l))(f)\\ &= \Theta(\xi(l)\otimes f)\\ &= (\Theta\circ(\xi\otimes\mathrm{Id}_F))(l\otimes f)\\ &= \hat{\eta}(l\otimes f)\\ &= \eta(l)(f),\end{aligned}$$

o bien $\theta \circ \xi = \eta$ y F^* resulta inyectivo.

(⇐) Supongamos F^* inyectivo y consideremos una sucesión exacta corta admisible

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\phi} O \to 0$$

en Mod-A.

(i) Veamos que $M\hat{\otimes}_A F \xrightarrow{\varphi\otimes\mathrm{Id}_F} N\hat{\otimes}_A F$ es inyectiva. Para ello bastará probar que $(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)^*$ es suryectiva. Consideremos entonces $\Lambda \in (M\hat{\otimes}_A F)^*$ y sea $\lambda \in \mathcal{B}_A(M, F^*)$ tal que $\lambda(m)(f) = \Lambda(m \otimes f)$ cualesquiera sean $m \in M$ y $f \in F$. Puesto que F^* es inyectivo existe

[6] Una sucesión exactas corta de A-módulos $0 \to F \to E \xrightarrow{\pi} E/F \to 0$ es *admisible* si π es una retracción.

$\alpha \in \mathcal{B}_A(N, F^*)$ tal que $\lambda = \alpha \circ \varphi$. Existe además $\mathrm{A} \in (N \hat{\otimes}_A F)$ único tal que $\mathrm{A}(n \otimes f) = \alpha(n)(f)$ en tensores básicos. Así

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)^*(\mathrm{A})(m \otimes f) &= \mathrm{A}(\varphi(m) \otimes f)\\ &= \alpha(\varphi(m))(f)\\ &= \lambda(m)(f)\\ &= \Lambda(m \otimes f)\end{aligned}$$

en tensores básicos, de donde $(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)^*(\mathrm{A}) = \Lambda$.

(ii) $N \hat{\otimes}_A F \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{Id}_F} O \hat{\otimes}_A F$ es suryectiva: Sea $u \in O \hat{\otimes}_A F$, digamos $u = \sum_{k=1}^{\infty} o_k \otimes f_k$, con $\sum_{k=1}^{\infty} \parallel o_k \parallel \parallel f_k \parallel < \infty$. Como ϕ es operador lineal acotado suryectivo entre espacios de Banach existe $\epsilon > 0$ tal que $(O)_\epsilon \subseteq \phi((N)_1)$. Existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (N)_1$ tal que

$$\begin{aligned}u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{2} \frac{o_k}{\parallel o_k \parallel}\right) \otimes \left(\frac{2}{\epsilon} \parallel o_k \parallel f_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi(n_k) \otimes \left(\frac{2}{\epsilon} \parallel o_k \parallel f_k\right).\end{aligned}$$

Como

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \parallel n_k \parallel \parallel \frac{2}{\epsilon} \parallel o_k \parallel f_k \parallel \leq \frac{2}{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \parallel o_k \parallel \parallel f_k \parallel < \infty$$

está definido $\sum_{k=1}^{\infty} n_k \otimes (\frac{2}{\epsilon} \parallel o_k \parallel f_k)$ en $N \hat{\otimes}_A F$ y

$$u = (\phi \otimes \mathrm{Id}_F)(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} n_k \otimes (\frac{2}{\epsilon} \parallel o_k \parallel f_k)).$$

(iii) Finalmente $\mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F) = \ker(\phi \otimes \mathrm{Id}_F)$. La inclusión $\subseteq$ es inmediata. Puesto que φ es admisible existe $\varphi_1 \in \mathcal{B}_A(N, M)$ tal que $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{Id}_M$. Por ello sigue enseguida que $\mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)$ es cerrado. Sea

$$\mathrm{B} : \tfrac{N \hat{\otimes}_A F}{\mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)} \to O \hat{\otimes}_A F$$

tal que $\mathrm{B}(u + \mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)) = (\phi \otimes \mathrm{Id}_F)(u)$. Notamos que B está bien definido. Además, como ϕ es admisible existe $\phi_1 \in \mathcal{B}_A(O, N)$ tal que $\phi \circ \mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)\phi_1 = \mathrm{Id}_O$. Podemos definir

$$\mathrm{B}_1 : O \hat{\otimes}_A F \to \tfrac{N \hat{\otimes}_A F}{\mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)}$$

tal que $\mathrm{B}_1(o \otimes f) = \phi_1(o) \otimes f + \mathrm{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)$ en tensores básicos. Es fácil ver que los operadores B y B_1 son recíprocos, de modo que B es isomorfismo de espacios de Banach y sigue la inclusión $\supseteq$.

2.7. Biproyectividad y biplayicidad

1. Un álgebra de Banach A se dice *biproyectiva* si es proyectiva en cuanto A-bimódulo de Banach.
2. Son equivalentes:
   (i) A es biproyectiva.
   (ii) ${}_1\hat{\pi}_1 : A_1 \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A_1 \to A$ es una retracción.

(iii) $\hat{\pi}$ es una retracción.

► (i ⇒ ii) Si $\rho_1 \in_A \mathcal{B}_A(A, A_1\hat{\otimes}A)$, $\rho_2 \in_A \mathcal{B}_A(A, A\hat{\otimes}A_1)$ son inversos a derecha de ${}_1\hat{\pi}$ y $\hat{\pi}_1$ sea $\rho = (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2) \circ \rho_1$. Dados $a, b \in A$ sean

$$\rho_1(b) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \otimes b_n, \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \| \| b_n \| < \infty,$$
$$\rho_1(a) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes a_n, \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty} \| v_n \| \| a_n \| < \infty, .$$

Tendremos

$$\begin{aligned}\rho(ab) &= (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2)(a\rho_1(b)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (au_n) \otimes \rho_2(b_n) \\ &= a(\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2)(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \otimes b_n) \\ &= a\rho(b).\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}\rho(a)b &= (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2)(\rho_1(a))b \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes \rho_2(a_n)b \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes \rho_2(a_n b) \\ &= (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes (a_n b)) \\ &= (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2)(\rho_1(a)b) \\ &= (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2)(\rho_1(ab)) \\ &= \rho(ab).\end{aligned}$$

Así $\rho \in_A \mathcal{B}_A(A, A_1\hat{\otimes}(A\hat{\otimes}A_1))$ y

$$\begin{aligned}{}_1\hat{\pi} \circ (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \hat{\pi}_1) \circ (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \rho_2) \circ \rho_1 &=_1 \hat{\pi} \circ (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes (\hat{\pi}_1 \circ \rho_2)) \circ \rho_1 \\ &=_1 \hat{\pi} \circ (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \rho_1 \\ &=_1 \hat{\pi} \circ \rho_1 \\ &= \mathrm{Id}_A.\end{aligned}$$

(ii ⇒ iii) Sea $\rho \in_A \mathcal{B}_A(A, A_1\hat{\otimes}A\hat{\otimes}A_1)$ tal que ${}_1\hat{\pi}_1 \circ \rho = \mathrm{Id}_A$. Consideremos es isomorfismo natural $U : (A_1\hat{\otimes}A)\hat{\otimes}A_1 \to A_1\hat{\otimes}(A\hat{\otimes}A_1)$ y sea $\overline{\rho} = (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \hat{\pi}_1) \circ U \circ \rho$ en ${}_A\mathcal{B}_A(A, A_1\hat{\otimes}A)$. Entonces

$${}_1\hat{\pi} \circ \overline{\rho} = [{}_1\hat{\pi} \circ (\mathrm{Id}_{A_1} \otimes \hat{\pi}_1) \circ U] \circ \rho =_1 \hat{\pi}_1 \circ \rho = \mathrm{Id}_A.$$

Claramente $\overline{\rho}(A^2) \subseteq A\hat{\otimes}A$. Bastará ver entonces que $\mathrm{cl}(A^2)$ es denso en A. Para ello, dado $a \in A$ podemos escribir

$$\overline{\rho}(a) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \alpha_n 1) \otimes b_n,$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} \parallel a_n + \alpha_n 1 \parallel\parallel b_n \parallel < \infty$. Evidentemente $\sum_{n=1}^{\infty} \parallel a_n \parallel\parallel b_n \parallel$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \parallel \alpha_n b_n \parallel$ son series convergentes y podemos escribir

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \otimes b_n + 1 \otimes \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n \\ &= \xi + 1 \otimes c,\end{aligned}$$

con $c \in A$ y $\xi \in A\hat{\otimes}A$. Entonces $a =_1 \hat{\pi}(\xi) + c$, i.e.

$$\overline{\rho}(a) = \xi + 1 \otimes (a -_1 \hat{\pi}(\xi)).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(a^2) &= a\overline{\rho}(a) = a\xi + a \otimes a - a \otimes_1 \hat{\pi}(\xi) \\ &= \overline{\rho}(a)a = \xi a + 1 \otimes a^2 - 1 \otimes \hat{\pi}(\xi)a.\end{aligned}$$

Sea $\theta \in \mathrm{cl}(A^2)^{\perp}$ y extendamos θ a $\theta_1 \in A_1^*$ de modo que $\theta_1(1) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \overline{\rho}(a^2), \theta_1 \otimes \theta \rangle &= \langle a, \theta \rangle^2 \\ &= \langle a^2, \theta \rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

i.e. $\langle a, \theta \rangle = 0$. Puesto que $a \in A$ es arbitrario $\theta = 0$ y $\mathrm{cl}(A^2)$ deviene denso en A.
(iii $\Rightarrow$ i) Sea $\rho \in_A \mathcal{B}_A(A\hat{\otimes}A)$ tal que $\hat{\pi} \circ \rho = \mathrm{Id}_A$. Si $h : A \hookrightarrow A_1$ es la inmersión natural de A en A_1 sea $\zeta = (h \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \rho \in_A \mathcal{B}_A(A, A_1\hat{\otimes}A)$. Entonces ${}_1\hat{\pi} \circ \zeta = \hat{\pi} \circ \rho = \mathrm{Id}_A$ y A es proyectivo en cuanto A-módulo a izquierda. Análogamente se da el caso a derecha.

3. Un álgebra de Banach A se dice *biplaya* si es biplaya en cuanto A-bimódulo de Banach.
4. Toda álgebra de Banach biplaya A es esencial.
   ► (i) Como $\hat{\pi}_{A_1,A}$ es epimorfismo $\hat{\pi}^*_{A_1,A} : A^* \to (A_1\hat{\otimes}A)^*$ es monomorfismo. Por (2.6.9) A^* es inyectivo y existe $\eta \in_A \mathcal{B}_A((A_1\hat{\otimes}A)^*, A^*)$ tal que $\eta \circ \hat{\pi}^*_{A_1,A} = \mathrm{Id}_{A^*}$.
   (ii) Si A no fuere esencial sean $a \in A$ y $a' \in A^*$ tal que $\langle a, a' \rangle = 1$ y $a' \mid_{A^2} \equiv 0$.
   (iii) Sea $f \in (A_1\hat{\otimes}A)^*$ único tal que $\langle (b + \beta) \otimes c, f \rangle = \langle b, a' \rangle \langle c, a' \rangle$ en tensores básicos y escribamos $b' = \eta(f)$.
   (iv) Como $Af = \{0_{(A_1\hat{\otimes}A)^*}\}$ entonces $Ab' = \{0_{A^*}\}$, o sea $b' \mid_{A^2} \equiv 0$.

(v) Además

$$\begin{aligned}(fa)((b+\beta)\otimes c) &= f((ab+\beta a)\otimes c)\\ &= \beta\langle a,a'\rangle\langle c,a'\rangle\\ &= \beta\langle c,a'\rangle\\ &= \langle \beta c+bc,a'\rangle\\ &= \langle (b+\beta)\otimes c),\hat{\pi}^*_{A_1,A}(a')\rangle\end{aligned}$$

en tensores básicos, i.e. $fa=\hat{\pi}^*_{A_1,A}(a')$.
(vi) Entonces

$$a'=\eta(fa)=b'a.$$

Luego

$$1=\langle a,a'\rangle=\langle a^2,b'\rangle=0,$$

lo que es absurdo.

5. Sea A un álgebra de Banach. Son equivalentes:
(i) A es biplaya.
(ii) $\hat{\pi}^*_A$ es una co-retracción.
(iii) Existe $\sigma\in_A\mathcal{B}_A[A,(A\hat{\otimes}A)^{**}]$ tal que $\hat{\pi}^{**}_A\circ\sigma=\iota_A$.
▶ (i ⇒ ii) Si A es biplaya existe $\nu\in_A\mathcal{B}_A[(A_1\hat{\otimes}A)^*,A^*]$ de manera que $\mathrm{Id}_{A^*}=\nu\circ\hat{\pi}^*_{A_1,A}$. Con $\iota:A\hat{\otimes}A\hookrightarrow A_1\hat{\otimes}A$ tenemos la siguiente composición de morfismos de A-bimódulos

$$\begin{array}{ccccc} (A_1\hat{\otimes}A)^* & \xrightarrow{\iota^*} & (A\hat{\otimes}A)^* & \to & 0 \\ \hat{\pi}^*_{A_1,A}\nwarrow\searrow\nu & & \uparrow\hat{\pi}^*_A & & \\ & & A^* & & \end{array}$$

Sea $f\in(A\hat{\otimes}A)^*$, digamos $f=\iota^*(F)$ para cierto $F\in(A_1\hat{\otimes}A)^*$. Hagamos $\eta(f)=\nu(F)$. Si $\iota^*(F)=0_{(A\hat{\otimes}A)^*}$ entonces $F\in(A\hat{\otimes}A)^{\perp}$. Luego dado $a\in A$ es $Fa=0_{(A_1\hat{\otimes}A)^*}$, y también $\nu(F)a=0_{A^*}$. Como a es arbitrario $\nu(F)\in(A^2)^{\perp}$. Como A es esencial $\nu(F)=0_{A^*}$ y η está bien definida.
Es claro ahora que η es morfismo acotado de A-bimódulos y

$$\eta\circ\hat{\pi}^*_A=\eta\circ(\iota^*\circ\hat{\pi}^*_{A_1,A})=(\eta\circ\iota^*)\circ\hat{\pi}^*_{A_1,A}=\nu\circ\hat{\pi}^*_{A_1,A}=\mathrm{Id}_{A^*}.$$

(ii ⇒ iii) Sea $\eta\in_A\mathcal{B}_A[(A\hat{\otimes}A)^*,A^*]$ tal que $\eta\circ\hat{\pi}^*_A=\mathrm{Id}_{A^*}$. Es fácil ver que $\eta^*\circ\iota_A\in_A$ es morfismo de A-bimódulos y

$$\iota_A=\mathrm{Id}_{A^{**}}\circ\iota_A=(\eta\circ\hat{\pi}^*_A)^*\circ\iota_A=\hat{\pi}^{**}_A\circ(\eta^*\circ\iota_A).$$

(iii ⇒ ii) Sea $\sigma\in_A\mathcal{B}_A[A,(A\hat{\otimes}A)^{**}]$ tal que $\hat{\pi}^{**}_A\circ\sigma=\iota_A$. Definimos $\zeta:(A\hat{\otimes}A)^*\to A^*$ tal que $\zeta(g)(a)=\langle g,\sigma(a)\rangle$ para cada a,g. Es inmediato que se trata de un homomorfismo acotado de A-bimódulos de Banach y

$$\begin{aligned}\zeta(\hat{\pi}_A^*(a'))(a) &= \langle \hat{\pi}_A^*(a'), \sigma(a)\rangle \\ &= \langle a', \hat{\pi}_A^*(\sigma(a))\rangle \\ &= \langle a', \iota_A(a)\rangle \\ &= \langle a, a'\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\zeta \circ \hat{\pi}_A^* = \mathrm{Id}_{A^*}$.
(ii $\Rightarrow$ i)(a) Veamos, aplicando (2.6.7), que $(A_1\hat{\otimes}A)^*$ es A-módulo de Banach a izquierda inyectivo. En efecto, sea

$$\begin{aligned}&\mathrm{S} :_A \mathcal{B}[A_1, (A_1\hat{\otimes}A)^*] \to (A_1\hat{\otimes}A)^*, \\ &\mathrm{S}(\varphi) = \varphi(1).\end{aligned}$$

Se trata de un operador acotado bien definido y dados $a \in A$ y $\varphi \in_A \mathcal{B}[A_1, (A_1\hat{\otimes}A)^*]$ tenemos

$$\mathrm{S}(a\varphi) = (a\varphi)(1) = \varphi(a) = a\varphi(1) = a\mathrm{S}(\varphi).$$

Si $F \in (A_1\hat{\otimes}A)^*$ tenemos también

$$(\mathrm{S} \circ \Delta^{A_1,(A_1\hat{\otimes}A)^*})(F) = \Delta^{A_1,(A_1\hat{\otimes}A)^*}(F)(1) = 1F = F.$$

(ii $\Rightarrow$ i)(b) Sea $\eta \circ \hat{\pi}_A^* = \mathrm{Id}_{A^*}$ para cierta $\eta \in_A \mathcal{B}_A[(A\hat{\otimes}A)^*, A^*]$. Haciendo $\eta_1 = \eta \circ \iota^*$ resulta $\eta_1 \circ \hat{\pi}_{A_1,A}^* = \mathrm{Id}_{A^*}$.
(ii $\Rightarrow$ i)(c) Sean $M, N \in A$-Mod, $x \in_A \mathcal{B}(M, N)$ monomorfismo admisible, $y \in_A \mathcal{B}(M, A^*)$. Por la inyectividad de $(A_1\hat{\otimes}A)^*$ existe $z \in_A \mathcal{B}[N, (A_1\hat{\otimes}A)^*]$ tal que $\hat{\pi}_{A_1,A}^* \circ y = z \circ x$. Escribiendo $z_1 = \eta_1 \circ z$ resulta $z_1 \in_A \mathcal{B}(N, A^*)$ y

$$z_1 \circ x = (\eta_1 \circ z)\circ x = \eta_1 \circ (z \circ x) = \eta_1 \circ (\hat{\pi}_{A_1,A}^* \circ y) = (\eta_1 \circ \hat{\pi}_{A_1,A}^*)\circ y = y,$$

o sea A^* resulta A-módulo de Banach inyectivo a izquierda.
(ii $\Rightarrow$ i)(d) Análogamente $(A_1\hat{\otimes}A)^*$ es A-módulo de Banach a derecha inyectivo, como sigue observando que el operador S es también homomorfismo de módulos de Banach a derecha. Con ligeras modificaciones de argumento se ve que A^* es asimismo A-módulo de Banach inyectivo a derecha. La conclusión sigue de (2.6.9).

6. Sea A un álgebra de Banach. Entonces (i $\Rightarrow$ ii $\Rightarrow$ iii), donde
(i) A es amenable.
(ii) $A \in$ BAI y $\hat{\pi}_A^*$ es una co-retracción.
(iii) $A \in$ BAI y $\hat{\pi}_{es}^* : (A^*)_{es} \to [(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}$ es co-retracción de A-bimódulos, con $\hat{\pi}_{es}^* = \hat{\pi}_A^* \mid_{(A^*)_{es}}$. [7]
▶ (i $\Rightarrow$ ii) Sean A amenable y $V \in (A_1\hat{\otimes}A_1)^{**}$ una diagonal virtual de A. En particular, sabemos que $A \in$ BAI. Dados $f \in (A\hat{\otimes}A)^*$ y $a \in A$ sea $\langle a, \lambda(f)\rangle = \langle af, V\rangle$. Claramente $\lambda(f) \in A^*$. Dados

[7] Si X es A-módulo de Banach a izquierda (o derecha) escribimos X_{es} al *A-submódulo a izquierda (o a derecha) esencial de X*, o sea $X_{es} = \mathrm{clc}(AX)^-$ (o $X_{es} = \mathrm{clc}(XA)^-$).

$a, b, c \in A,\ f \in (A\hat{\otimes}A)^*$ resulta

$$\begin{aligned}\langle a, \lambda(bfc)\rangle &= \langle a(bfc), V\rangle) \\ &= \langle f, c(Va)b\rangle \\ &= \langle f, (cab)V\rangle \\ &= \langle f(cab), V\rangle \\ &= \langle cab, \lambda(f)\rangle \\ &= \langle a, b\lambda(f)c\rangle,\end{aligned}$$

o sea λ es morfismo acotado de A-bimódulos. Si además $a' \in A^*$ es

$$\begin{aligned}\langle a, (\lambda \circ \hat{\pi}_A^*(a')\rangle &= \langle \hat{\pi}_A^*(a')a, V\rangle \\ &= \langle a', \hat{\pi}_A^{**}(aV)\rangle \\ &= \langle a', a\hat{\pi}_A^{**}(V)\rangle \\ &= \langle a, a'\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\lambda \circ \hat{\pi}_A^* = \mathrm{Id}_{A^*}$.
(ii $\Rightarrow$ iii) Sea $\lambda \in_A \mathcal{B}_{\mathcal{A}}[(A\hat{\otimes}A)^*, A^*]$ inverso a izquierda de $\hat{\pi}_A^*$. Como $\hat{\pi}_A^*$ es morfismo de A-bimódulos de Banach

$$\hat{\pi}_A^*(AA^*A) \subseteq A(A\hat{\otimes}A)^*A \subseteq [(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}.$$

Como además $\hat{\pi}_A^*$ es acotado $\hat{\pi}_A^*((A^*)_{es}) \subseteq [(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}$. Análogamente $\lambda([(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}) \subseteq (A^*)_{es}$. Así $\lambda\mid_{[(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}} \in_A \mathcal{B}_A([(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}, (A^*)_{es})$ y $\lambda\mid_{[(A\hat{\otimes}A)^*]_{es}} \circ \hat{\pi}_{es}^* = \mathrm{Id}_{(A^*)_{es}}$.

7. Sean A-álgebra de Banach, $X \in$ Mod-A e I-ideal a izquierda de A tal que $I \in$ BRAI. Entonces $X\hat{\otimes}_A I \approx \mathrm{ccl}(XI)$.
► Si $\{e_j\}_{j\in J} \in \mathrm{BRAI}(I)$, es fácil ver que $\{e_j\}_{j\in J} \in \mathrm{BRAI}(\mathrm{ccl}(XI))$. Por el teorema de Cohen será $\mathrm{ccl}(XI) = XI$. Luego la aplicación $\hat{\pi}_{X,I}\mid^{\mathrm{ccl}(XI)}: X\hat{\otimes}_A I \to \mathrm{ccl}(XI)$ es suryectiva.
Sea $u \in X\hat{\otimes}_A I$, con $u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|\| a_k \| < \infty$. Sea $K > 0$ tal que $\| e_j \| \leq K$ para todo $j \in J$. Dado $\epsilon > 0$ sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>n} \| x_k \|\| a_k \| < \epsilon/(1+K)$. Si $j \in J$ estimamos

$$\begin{aligned}\| u - \hat{\pi}_{X,I}(u) \otimes e_j \|_\wedge &= \| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes a_k - (\sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k) \otimes e_j \|_\wedge \\ &= \| [\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k>n}] x_k \otimes (a_k - a_k e_j) \|_\wedge \\ &\leq \| \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes (a_k - a_k e_j) \|_\wedge + \epsilon.\end{aligned}$$

Luego $\overline{\lim}_{j\in J} \| u - \hat{\pi}_{X,I}(u) \otimes e_j \|_\wedge \leq \epsilon$, i.e. $u = \lim_{j\in J}(\hat{\pi}_{X,I}(u) \otimes e_j)$. Así $\hat{\pi}_{X,I}$ resulta inyectiva y la afirmación sigue del teorema de la función abierta.

8. Sean X, Y A-módulos de Banach a derecha e izquierda respectivamente. Dado $\varphi \in \mathcal{B}_A[X\hat{\otimes}_A A, Y^*]$ (resp. $\psi \in \mathcal{B}_A[X, (A\hat{\otimes}_A Y)^*]$) existe un único morfismo ψ (resp. φ) tal que el siguiente diagrama de A-módulos y morfismos conmuta

$$\begin{array}{ccc} X\hat{\otimes}_A A & \xrightarrow{\varphi} & Y^* \\ \hat{\pi}_{X,A} \downarrow & & \downarrow \hat{\pi}^*_{A,Y} \\ X & \xrightarrow{\psi} & (A\hat{\otimes}_A Y)^* \end{array}$$

Precisamente, basta observar la existencia de isomorfismos f, g, h tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_A[X\hat{\otimes}_A A, Y^*] &\xrightarrow{f} [(X\hat{\otimes}_A A)\hat{\otimes}_A Y]^* \\ &\xrightarrow{g^*} [X\hat{\otimes}_A (A\hat{\otimes}_A Y)]^* \xrightarrow{h} \mathcal{B}_A[X, (A\hat{\otimes}_A Y)^*]. \end{aligned}$$

Haciendo $\Lambda = h \circ g^* \circ f$ y $\psi = \Lambda(\varphi)$, en tensores básicos resulta

$$\begin{aligned} \langle b \otimes y, (\psi \circ \hat{\pi}_{X,A})(x \otimes a)\rangle &= \langle b \otimes y, h((g^* \circ f)(\varphi))(xa)\rangle \\ &= \langle xa \otimes (b \otimes y), f(\varphi) \circ g\rangle \\ &= \langle ((xa) \otimes b) \otimes y, f(\varphi)\rangle \\ &= \langle y, \varphi((xa) \otimes b)\rangle \\ &= \langle y, \varphi(x \otimes (ab))\rangle \\ &= \langle y, \varphi(x \otimes a)b\rangle \\ &= \langle by, \varphi(x \otimes a)\rangle \\ &= \langle b \otimes y, (\hat{\pi}^*_{A,Y} \circ \varphi)(x \otimes a)\rangle \end{aligned}$$

y sigue la afirmación.

9. Sean $A \in \mathrm{BAI}$ y X, Y A-módulos de Banach a derecha e izquierda respectivamente. Si Y es esencial cada morfismo de A-módulos a derecha de X_{es} en Y^*¨se extiende unívocamente un morfismo de A-módulos a derecha de X en Y^*.
   Basta notar que en (2.7.8) $\hat{\pi}_{A,Y}$ es isomorfismo y asimismo resulta $X\hat{\otimes}_A A \approx X_{es}$.
10. Las afirmaciones en (2.7.6) son equivalentes.
   ► Falta ver (iii ⇒ ii) y (ii ⇒ i):
   (iii ⇒ ii): Sigue de (2.7.9), ya que A resulta esencial por el teorema de Cohen.
   (ii ⇒ i): Sean $\lambda \in_A \mathcal{B}_A[(A\hat{\otimes}A)^*, A^*]$ inverso a izquierda de $\hat{\pi}^*_A$ y $\{e_j\}_{j\in J} \in \mathrm{BAI}(A)$. Considerando eventualmente alguna subred existe $E = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_A(e_j)$. Hagamos $V = \lambda^*(E)$. Si $a \in A$ y $a' \in A^*$

tenemos

$$\begin{aligned}
\langle a', \hat{\pi}_A^{**}(V)a\rangle &= \langle a', (\hat{\pi}_A^{**} \circ \lambda^*)(E)a\rangle \\
&= \langle aa', (\lambda \circ \hat{\pi}_A^*)^*(E)\rangle \\
&= \langle aa', \mathrm{Id}_{A^*}^*(E)\rangle \\
&= \langle aa', \mathrm{Id}_{A^{**}}(E)\rangle \\
&= \langle aa', E\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\langle e_j, aa'\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\langle e_j a, a'\rangle \\
&= \langle a, a'\rangle
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\langle a', aE - Ea\rangle &= \langle a'a - aa', E\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\langle e_j, a'a - aa'\rangle \\
&= \lim_{j\in J}\langle ae_j - e_j a, a'\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego $\hat{\pi}_A^{**}(V)a = \iota_A(a)$ y $aE - Ea = 0_{A^{**}}$ para todo $a \in A$. Luego

$$\begin{aligned}
aV - Va &= a\lambda^*(E) - \lambda^*(E)a \\
&= \lambda^*(aE - Ea) \\
&= \lambda^*(0_{A^{**}}) \\
&= 0_{(A\hat{\otimes}A)^{**}}
\end{aligned}$$

y sigue la afirmación.

11. Si G es grupo amenable separable entonces $\mathrm{L}^1(G)$ es amenable.

► Aplicaremos (2.7.10) definiendo $((\mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G))^*)_{es} \xrightarrow{\xi} \mathrm{UC}(G)$ morfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos de Banach tal que $\xi \circ \hat{\pi}_{es}^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{UC}(G)}$.
(i) Por (2.10.4) resulta $(\mathrm{L}^1(G)^*)_{es} = \mathrm{UC}(G)$.
(ii) Además sabemos, por (2.10.8), que hay un isomorfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos de Banach

$$\Lambda : \mathrm{L}^1(G \times G) \to \mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G)$$

tal que $\Lambda(x \times y) = x \otimes y$ para cualesquiera $x, y \in \mathrm{L}^1(G)$, donde $(x \times y)(s,t) = x(s)y(t)$ para cada $s, t \in G$. En consecuencia

$$(\Lambda^*)_{es} : ((\mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G))^*)_{es} \to \mathrm{UC}(G \times G),$$

donde $(\Lambda^*)_{es} = \Lambda^* \mid_{((\mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G))^*)_{es}}$.
(iii) Tenemos así

$$\mathrm{UC}(G) \xrightarrow{\hat{\pi}_{es}^*} ((\mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G))^*)_{es} \xrightarrow{(\Lambda^*)_{es}} \mathrm{UC}(G \times G).$$

(iv) Sean M-promedio invariante a izquierda de G y $U \in \mathrm{UC}(G\times G)$. Para $s, t \in G$

$$L(U)(s)(t) = U(st, t^{-1}),$$
$$R(U)(s)(t) = U(t, t^{-1}s).$$

Así $L(U)(s), R(U)(s) \in \mathrm{C}_b(G)$ si $s \in G$.
(v) Más aún, $L(U) \in \mathrm{C}(G, \mathrm{L}^\infty(G))$: por un lado $\mathrm{C}_b(G) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(G)$. Sea $\{s_j\}_{j\in J}$ una red convergente a cierto s en G y fijemos $\epsilon > 0$. Como $U \in \mathrm{LUC}(G\times G)$ hay algún entorno $\mathcal{V}$ de (e, e) en $G\times G$ tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{-1}$ y $\mid U(\psi) - U(\eta) \mid < \epsilon$ si $\psi\eta^{-1} \in \mathcal{V}$. Claramente la función $f : G \to G \times G$ tal que $f(t) = (t, e)$ si $t \in G$ es continua. Luego existe un entorno N de e en G tal que $N \subseteq f^{-1}(\mathcal{V})$. Observamos que $N = N^{-1}$ y Ns es entorno de s en G. Sea $j_0 \in J$ tal que $s_j \in Ns$ si $j \geq j_0$ en J. Con $j \leq j_0$ y $t \in G$ será

$$(s_j t, t^{-1})(st, t^{-1})^{-1} = (s_j s^{-1}, e),$$

o sea $\mid U(s_j t, t^{-1}) - U(st, t^{-1}) \mid < \epsilon$ y

$$\| L(U)(s_j) - L(U)(s) \|_\infty \leq \epsilon.$$

Asimismo resulta $R(U) \in \mathrm{C}(G, \mathrm{L}^\infty(G))$.
(vi) Definimos $\mathfrak{l}, \mathfrak{r} : G \to \mathbb{C}$ mediante

$$\mathfrak{l}(s) = \langle L(U)(s), M\rangle,$$
$$\mathfrak{r}(s) = \langle R(U)(s), M\rangle.$$

Puesto que $M \in \mathrm{L}^\infty(G)^*$ podemos concluir ahora que $\mathfrak{l} \in \mathrm{LUC}(G)$ y $\mathfrak{r} \in \mathrm{RUC}(G)$.
(vii) Dados $s, t, t' \in G$ se tiene

$$\begin{aligned} {}_{t'}L(U)(s)(t) &= L(U)(s)(t't) \\ &= U(st't, t^{-1}t'^{-1}) \\ &= U(st't, t^{-1}t'^{-1}s^{-1}s) \\ &= R(U)(s)(st't) \\ &=_{st'} R(U)(s)(t), \end{aligned}$$

i.e. ${}_tL(U)(s) =_{st} R(U)(s)$. Por la invariancia a izquierda de M obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}(s) &= \langle L(U)(s), M\rangle \\ &= \langle {}_tL(U)(s), M\rangle \\ &= \langle {}_{st}R(U)(s), M\rangle \\ &= \langle R(U)(s), M\rangle \\ &= \mathfrak{r}(s), \end{aligned}$$

i.e. $\mathfrak{l} = \mathfrak{r}$, función que indicaremos $\zeta(U)$ en UC(G). Veamos que basta hacer $\xi = \zeta \circ (\Lambda^*)_{es}$.
(viii) Evidentemente $\zeta \in \mathcal{B}[\mathrm{UC}(G \times G), \mathrm{UC}(G)]$ y $\| \zeta \| \leq 1$.

(ix) Sea $u = f * \phi * g$ en $\mathrm{UC}(G)$, donde $f, g \in \mathrm{L}^1(G)$ y $\phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$. Hagamos $U = (\Lambda^*)_{es}[\hat{\pi}^*_{es}(u)]$ en $\mathrm{UC}(G \times G)$. Si $s \in G$ tenemos

$$u(s) = \int_G \int_G \phi(t_1^{-1} s t_2^{-1}) f(t_1) g(t_2) dt_1 dt_2.$$

Dados $x, y \in \mathrm{L}^1(G)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle x \times y, U \rangle &= \langle x * y, u \rangle \\
&= \int_G u(s) \int_G x(t) y(t^{-1}s) dt ds \\
&= \int_G [\int_G \int_G \phi(t_1^{-1} s t_2^{-1}) f(t_1) g(t_2) dt_1 dt_2] \int_G x(t) y(t^{-1}s) dt ds \\
&= \int_G x(t) \int_G f(t_1) \int_G g(t_2) \int_G y(t^{-1}s) \phi(t_1^{-1} s t_2^{-1}) ds dt_2 dt_1 dt \\
&= \int_G x(t) \int_G f(t_1) \int_G g(t_2) \int_G y(v) \phi(t_1^{-1} t v t_2^{-1}) dv dt_2 dt_1 dt \\
&= \int_G \int_G (x \times y)(t, v) u(tv) dt dv
\end{aligned}$$

y podemos concluir que $U(s, t) = u(st)$ para cada $s, t \in G$. Entonces

$$L(U)(s)(t) = U(st^{-1}, t) = u(s)$$

para cada $s, t \in G$, o sea $L(U)(s) = u(s)1$ y $\zeta(U) = u$ porque $\langle 1, M \rangle = 1$. Así ξ deviene inverso a izquierda de $\hat{\pi}^*_{es}$.
(x) $\zeta \in_{\mathrm{L}^1(G)} \mathcal{B}_{\mathrm{L}^1(G)}[\mathrm{UC}(G \times G), \mathrm{UC}(G)]$, con lo cual ξ resulta morfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos de Banach:
(x)(a) Sean $f \in \mathrm{L}^1(G)$, $U \in \mathrm{UC}(G \times G)$, $s \in G$ y $\{f_j\}_{j \in J}$ red en $[\mathrm{L}^1(G)]_1$ tal que $M = w^*\text{-lím}_{j \in J} f_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
\zeta(fU)(s) &= \langle L(fU)(s), M \rangle \\
&= \lim_{j \in J} \int_G f_j(t) L(fU)(s)(t) dt \\
&= \lim_{j \in J} \int_G f_j(t) (fU)(st, t^{-1}) dt \\
&= \lim_{j \in J} \int_G f_j(t) \int_G f(tr) U(st, r) dr dt \\
&= \lim_{j \in J} \int_G f_j(t) \int_G f(u) U(st, t^{-1}u) du dt \qquad (2.7.1)
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
(f\zeta(U))(s) &= \int_G f(s^{-1}v)\langle L(U)(v), M\rangle dv \\
&= \int_G f(s^{-1}v)\langle R(U)(v), M\rangle dv \\
&= \int_G f(s^{-1}v)\langle {}_sR(U)(v), M\rangle dv \\
&= \int_G f(s^{-1}v) \lim_{j\in J} \int_G f_j(t) R(U)(v)(st) dt dv \\
&= \int_G f(s^{-1}v) \lim_{j\in J} \int_G f_j(t) U(st, t^{-1}s^{-1}v) dt dv \\
&= \int_G f(u) \lim_{j\in J} \int_G f_j(t) U(st, t^{-1}u) dt du \qquad (2.7.2)
\end{aligned}$$

(x)(b) Sea $\psi_s(u)(t) = U(st, t^{-1}u)$, $t, u \in G$. Es $\psi_s \in \mathrm{C}(G, \mathrm{L}^\infty(G))$ y la identidad de (2.7.1) y (2.7.2) equivale a

$$\langle \int_G f(u)\psi_s(u) du, M\rangle = \int_G f(u)\langle \psi_s(u), M\rangle du. \qquad (2.7.3)$$

La integral del miembro izquierdo en (2.7.3) es integral de Bochner de una función $\mathrm{L}^\infty(G)$-valuada.. Evidentemente $\| f\psi_s \|_\infty \in \mathrm{L}^1(G)$ y además $f\psi_s$ es *fuertemente medible*[8], luego existe dicha integral [**16**].

(x)(c) La fuerte medibilidad se ψ_s debe a que es *débilmente medible*[9] y tiene imágen *a.e.-λ separable* [**123**] [10]. Precisamente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\psi_s) &= \{{}_sR(U)(st) : t \in G\} \\
&=_s R(U)(sG) \\
&=_s R(U)(G) \\
&=_s \mathrm{im}(R(U)).
\end{aligned}$$

Además dados $t_1, t_2 \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}
{}_sR(U)(t_1)(t_2) &= R(U)(t_1)(st_2) \\
&= U(st_2, t_2^{-1}s^{-1}t_1) \\
&= (st_2, (st_2)^{-1})(e, t_1) \\
&= \mathfrak{q}(st_2)(e, t_1) \\
&= [{}_s\mathfrak{q}(\circ)(e, t_1)](t_2),
\end{aligned}$$

[8] O sea hay una sucesión de funciones simples $\{\mathfrak{s}_n\}$ de G en $\mathrm{L}^\infty(G)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{s}_n = f\psi_s$ a.e. λ.

[9] O sea $\Theta \circ \psi_s$ es continua sobre G cualquiera sea $\Theta \in \mathrm{L}^\infty(G)^*$, lo que es evidente por la continuidad de ψ_s.

[10] O sea existe un subconjunto N de G de λ-medida nula tal que $\psi_s(G - N)$ es separable.

con $\mathfrak{q} : G \to G \times G$ tal que $\mathfrak{q}(t) = (t, t^{-1})$ si $t \in G$. En consecuencia $\mathrm{im}(\psi_s) =_s \mathfrak{q}(\circ) \cdot (\{e\} \times G)$ resulta separable ya que G lo es.
(x)(d) Si $f \in \mathrm{L}^1(G)^+$ hay una sucesión ascendente $\{\mathfrak{s}_n^1\}$ de funciones simples de G en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que en todo caso $\mathfrak{s}_n^1 \leq f$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \mathfrak{s}_n^1 = f$ a.e. λ (cf. [**149**], Th. 4.13). Sea además $\{\mathfrak{s}_n^2\}$ sucesión de funciones simples de G en $\mathrm{L}^\infty(G)$ tal que $\psi_s = \text{lím}_{n\to\infty} s_n^2$ a.e. λ. Haciendo $\mathfrak{s}_n = \mathfrak{s}_n^1 \mathfrak{s}_n^2$ para cada n resulta una sucesión $\{\mathfrak{s}_n\}$ de funciones simples de G en $\mathrm{L}^\infty(G)$ y $f\psi_s = \text{lím}_{n\to\infty} \mathfrak{s}_n$, lo que establece que $f\psi_s$ es fuertemente medible.
(x)(e) Como $\| \psi_s(u) \|_\infty \leq \| U \|_\infty$ para $u \in G$, cualquiera sea n se tiene $\| \mathfrak{s}_n^2 \|_\infty \leq 2 \| U \|_\infty$ a.e. λ. Luego

$$\mathfrak{s}_n^1 \mid \langle \mathfrak{s}_n^2, M \rangle \mid \leq 2f \| U \|_\infty$$

y por el teorema de convergencia mayorada

$$\begin{aligned}\int_G f\langle \psi_s, M\rangle\lambda &= \text{lím}_{n\to\infty} \int_G \mathfrak{s}_n^1 \langle \mathfrak{s}_n^2, M\rangle d\lambda \\ &= \text{lím}_{n\to\infty} \int_G \langle \mathfrak{s}_n, M\rangle d\lambda \\ &= \int_G f\langle \psi_s, M\rangle d\lambda\end{aligned}$$

y sigue (2.7.3).
(x)(f) El resultado sigue enseguida para el caso general de f. Análogamente se prueba que ζ es morfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-módulos a derecha.

2.8. Connes-amenabilidad

1. Sea A-álgebra de Banach. Decimos que A es *álgebra de Banach dual* si hay algún submódulo de Banach A_* de A^* tal que $A \approx (A_*)^*$. En ese caso, se dice que A_* es un *predual de* A, no necesariamente único. Asumiremos implícitamente dada una terna (A, A_*, α), donde $\alpha : A \to (A_*)^*$ es isomorfismo de A-bimódulos de Banach. P. ej., si $A = l^1(\mathbb{N})$ con el producto punto a punto se tiene $(l^1(\mathbb{N})_0)_* = c_0(\mathbb{N})$ y $\alpha(x) = \iota_{l^1(\mathbb{N})} \mid_{c_0(\mathbb{N})}$ para cada $x \in l^1(\mathbb{N})$.
2. (i) Si A es álgebra de Banach dual $\alpha \circ \pi_A : A \times A \to A$ es separadamente w^*-continua.
(ii) Si A es álgebra de Banach, $A = X^*$ para cierto espacio de Banach X y si el producto de A es separadamente w^*-continuo entonces A es álgebra de Banach dual.
► (i) Sea $a_j \to 0$ en A. Dados $b \in A$ y $a_* \in A_*$ tenemos

$$\langle a_*, \alpha(a_j b)\rangle\rangle = \langle a_*, \alpha(a_j)b\rangle = \langle ba_*, \alpha(a_j)\rangle \xrightarrow{(j)} 0$$

y, análogamente, $\langle a_*, \alpha(ba_j)\rangle \to 0$.
($\Leftarrow$) Si $A = X^*$, $A^* = X^{**}$ y $\iota_X(X)$ es A-submódulo cerrado de A^*. En efecto, sean dados $x \in X$, $a \in A$ y $\{a_j\}_{j\in J}$ red en A tal que $a_j \xrightarrow{w^*} 0_A$. Luego

$$\langle a_j, a\iota_X(x)\rangle = \langle a_j a, \iota_X(x)\rangle = \langle x, a_j a\rangle \to 0,$$

y asimismo $\langle a_j, \iota_X(x)a\rangle \to 0$. Así $a\iota_X(x), \iota_X(x)a \in \iota_X(X)$. Además $\iota_X(X) \xrightarrow{(\iota_X|^{\iota_X(X)})^{-1}} X$ es isomorfismo de espacios de Banach. Hagamos $A_* = \iota_X(X)$ y $\alpha = (\iota_X \mid^{\iota_X(X)})^{-1})^*$ en $\mathcal{B}(\mathcal{A}, (\mathcal{A}_*)^*)$. Más aún, si $a, b \in A$ y $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle \iota_X(x), \alpha(ab)\rangle &= \langle x, ab\rangle \\ &= \langle ab, \iota_X(x)\rangle \\ &= \langle a, b\iota_X(x)\rangle \\ &= \langle (\iota_X \mid^{\iota_X(X)})^{-1}(b\iota_X(x)), a\rangle \\ &= \langle b\iota_X(x), \alpha(a)\rangle \\ &= \langle \iota_X(x), \alpha(a)b\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\alpha(ab) = \alpha(a)b$. Análogamente resulta $\alpha(ab) = a\alpha(b)$ y α es isomorfismo de A-bimódulos de Banach.

3. Un álgebra de Banach dual A es unitaria si y solo si tiene aproximación acotada de la unidad.
   ► La necesidad es evidente. Recíprocamente, sea $\{e_j\}_{j\in J} \in \mathrm{BAI}(A)$. por el teorema de Banach-Alaoglu, como $\{\alpha(e_j)\}_{j\in J}$ es acotado en $(A_*)^*$, pasando eventualmente a alguna subred podemos suponer existe $F = w^*\text{-lím}_{j\in J}\,\alpha(e_j)$. Dados $e = \alpha^{-1}(F)$ y $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}\alpha(xe) &= x\alpha(e) \\ &= xF \\ &= w^*\text{-}\lim_{j\in J} x\alpha(e_j) \\ &= w^*\text{-}\lim_{j\in J} \alpha(xe_j) \\ &= \alpha(x),\end{aligned}$$

   i.e. $xe = x$. Análogamente $ex = x$ y sigue la afirmación.
4. Sean A un álgebra de Banach dual y X un A-bimódulo de Banach. Decimos que X es *w^*-bimódulo de Banach* si para cada $x' \in X^*$ las aplicaciones $a \to ax'$ y $a \to x'a$ de A en X^* son w^*-continuas. Indicamos $\mathcal{Z}^1_{w^*}(A, X^*)$ a las derivaciones w^*-continuas de A en X^*. Si $\mathcal{N}^1(A, X^*)$ es la clase de derivaciones internas de A en X^* entonces $\mathcal{N}^1(A, X^*) \subseteq \mathcal{Z}^1_{w^*}(A, X^*)$ y haremos

$$\mathcal{H}^1_{w^*}(A, X^*) = \frac{\mathcal{Z}^1_{w^*}(A, X^*)}{\mathcal{N}^1(A, X^*)}.$$

   Un álgebra de Banach dual A se denomina *Connes-amenable* si $\mathcal{H}^1_{w^*}(A, X^*) = (0)$ si X es w^*-A-bimódulo de Banach [**27**].
5. Toda álgebra de Banach A Connes-amenable es unitaria.
   En efecto, consideremos el A-bimódulo de Banach A munido del producto $a * x = ax$ y $x * a = 0_A$, con $a, x \in A$. Sea $\alpha : A \to (A_*)^*$ el

isomorfismo de A-bimódulos de Banach asociado a A. Dados $a, b \in A$ y $a_* \in A_*$ resulta

$$\begin{aligned}\langle a_*, a\alpha(b) + \alpha(a)b\rangle &= \langle a_*a, \alpha(b)\rangle + \langle ba_*, \alpha(a)\rangle \\ &= \langle a_*a, \alpha(b)\rangle \\ &= \langle a_*, \alpha(ab)\rangle.\end{aligned}$$

Sigue entonces que $\alpha \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(A, (A_*)^*)$. Por la Connes-amenabilidad de A existe $e_1 \in A$ tal que $\alpha = \mathrm{ad}_{\alpha(e_1)}$. O sea

$$\alpha(a) = a\alpha(e_1) - \alpha(e_1)a = -\alpha(e_1a),$$

o $a = -e_1a$ para cada $a \in A$. Así $-e_1$ es unidad a izquierda de A. Análogamente se ve que A tiene alguna unidad a derecha, resultando a la postre unitaria.

6. Sean A-álgebra de Banach, B-álgebra de Banach dual, $\mathfrak{h} : A \to B$ homomorfismo continuo de álgebras tal que $\mathfrak{h}(A)^{-w^*} = B$.
(i) Si A es amenable entonces B es Connes-amenable.
(ii) Si A es álgebra de Banach dual Connes-amenable y $\mathfrak{h}$ es w^*-continuo entonces B es Connes-amenable.
► (i) Sean X un B-w^*-bimódulo de Banach y $d \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(B, X^*)$. Haciendo $a * x = \mathfrak{h}(a)x$ y $x * a = x\mathfrak{h}(a)$ para $a \in A$ y $x \in X$ entonces X deviene A-bimódulo de Banach. La aplicación $D = d \circ \mathfrak{h}$ de A en X^* es $\mathbb{C}$-lineal y dados $a_1, a_2 \in A$ y $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle x, D(a_1a_2)\rangle &= \langle x, d(\mathfrak{h}(a_1a_2))\rangle \\ &= \langle x, d(\mathfrak{h}(a_1)\mathfrak{h}(a_2))\rangle \\ &= \langle x, d(\mathfrak{h}(a_1))\mathfrak{h}(a_2) + \mathfrak{h}(a_1)d(\mathfrak{h}(a_2))\rangle \\ &= \langle \mathfrak{h}(a_2)x, D(a_1)\rangle + \langle x\mathfrak{h}(a_1), D(a_2)\rangle \\ &= \langle a_2 * x, D(a_1)\rangle + \langle x * a_1, D(a_2)\rangle \\ &= \langle x, D(a_1) * a_2 + a_1 * D(a_2)\rangle,\end{aligned}$$

i.e. D es una derivación. Veamos que D es acotada: Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(a_n, D(a_n)) \to (a, x')$ en $A \oplus_1 X^*$ para ciertos $a \in A$ y $x' \in X^*$. Entonces $a_n \to a$ y $\mathfrak{h}(a_n) \to \mathfrak{h}(a)$ pues $\mathfrak{h}$ es continuo. Luego $\mathfrak{h}(a_n) \xrightarrow{w^*} \mathfrak{h}(a)$ y, como d es w^*-continuo, $D(a_n) \xrightarrow{w^*} D(a)$. Así, si $x \in X$ tenemos

$$\langle x, D(a)\rangle = \mathrm{lím}_{n\to\infty}\langle x, D(a_n)\rangle = \langle x, x'\rangle,$$

o bien $x' = D(a)$. Por el teorema del gráfico cerrado D resulta acotada.
Luego $D \in \mathcal{Z}^1(A, X^*)$. Como A es amenable existe $x'_0 \in X^*$ tal que $D = \mathrm{ad}_{x'_0}$. Dado $b \in B$ sea $\{a_j\}_{j\in J}$ una red en A de modo que $b = w^*\text{-lím}_{j\in J}\,\mathfrak{h}(a_j)$. Como X es w^*-B-bimódulo de Banach dado

$x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle x, d(b)\rangle &= \lim_{j\in J}\langle x, d(\mathfrak{h}(a_j))\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x, D(a_j)\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x, a_j * x_0' - x_0' * a_j\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x * a_j - a_j * x, x_0'\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x\mathfrak{h}(a_j) - \mathfrak{h}(a_j)x, x_0'\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x, \mathfrak{h}(a_j)x_0' - x_0'\mathfrak{h}(a_j)\rangle \\ &= \langle x, \mathrm{ad}_{x_0'}(b)\rangle,\end{aligned}$$

o sea $d = \mathrm{ad}_{x_0'}$ y B es Connes-amenable.

(ii) Sean ahora X un w^*-B-bimódulo de Banach y $d \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(B, X^*)$. Mediando $\mathfrak{h}$ sabemos que X deviene A-bimódulo de Banach. Más aún, si $\mathfrak{h}$ es w^*-continua entonces X es w^*-A-bimódulo de Banach. Asimismo $D = d \circ \mathfrak{h}$ es derivación w^*-continua de A en X^*, de modo que si A es Connes-amenable $D = \mathrm{ad}_{x_1'}$ para cierto $x_1' \in X^*$. Razonando como en (i) sigue la tesis.

7. Sea A álgebra de Banach *Arens regular*[11]. Si A es amenable entonces A^{**} es Connes-amenable [**3**] [**4**].
   ► Sean $a'' \in A^{**}$ y $\{a_j''\}_{j\in J}$ red an A^{**} tal que w^*-$\lim_{j\in J} a_j'' = 0_{A^{**}}$.

---

[11]Para $a, b \in A$, $a' \in A^*$, $a'', b'' \in A^{**}$ se definen sendas operaciones $\Box$, $\triangle$ en A^{**}, mediante

$$\begin{aligned}\langle a', a''\Box b''\rangle &= \langle b''a', a''\rangle, \\ \langle a', a'' \triangle b''\rangle &= \langle a'a'', b''\rangle,\end{aligned}$$

con $b''a', a'a'' \in A^*$ a saber:

$$\begin{aligned}\langle a, b''a'\rangle &= \langle a'a, b''\rangle, \\ \langle a, a'a''\rangle &= \langle aa', a''\rangle,\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\langle b, a'a\rangle &= \langle ab, a'\rangle, \\ \langle b, aa'\rangle &= \langle ba, a'\rangle.\end{aligned}$$

Con estas operaciones A^{**} deviene álgebra de Banach, siendo A regular cuando $\Box = \triangle$. En particular, $A \xrightarrow{\iota_A} A^{**}$ deviene homomorfismo isométrico de álgebras de Banach con ambos productos y en todo caso se verifícan las identidades

$$\begin{aligned}a''\Box\iota_A(a) &= a'' \triangle \iota_A(a) = a''a, \\ \iota_A(a)\Box a'' &= \iota_A(a) \triangle a'' = aa''.\end{aligned}$$

Si $a' \in A^*$ vemos que

$$\langle a', a''_j \Box a'' \rangle = \langle a''a', a''_j \rangle \to 0,$$
$$\langle a', a'' \bigtriangleup a''_j \rangle = \langle a'a'', a''_j \rangle \to 0,$$

y como A es regular entonces el producto en A^{**} es separadamente continuo. Por (2.8)(2)(ii) A^{**} es álgebra de Banach dual. Por (2.8)(6)(i), con $B = A$ y $\mathfrak{h} = \mathrm{Id}_A$, sigue que A es Connes-amenable.

8. Sea A álgebra de Banach Arens regular *que es ideal en* A^{**}. Son equivalentes: (i) A es amenable. (ii) A^{**} es Connes-amenable (cf. [**134**], Th. 4.4).
▶ ($\Rightarrow$) Sigue de (2.8)(7).
($\Leftarrow$) (a) Sean A^{**} Connes-amenable y $D \in \mathcal{Z}^1(A, X^*)$, para cierto A-bimódulo de Banach X. Veremos que D es derivación interna.
(b) Puesto que A^{**} es Connes-amenable, resulta unitaria. Sea E la unidad de A^*. Por el teorema de Goldstine existe alguna red acotada $\{e_j\}_{j\in J}$ en A tal que $E = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \iota_A(e_j)$. Dados $F \in A^{**}$ y $a' \in A^*$ es

$$\langle a', F \rangle = \langle a', E \bigtriangleup F \rangle = \langle a'E, F \rangle,$$

o bien $a' = a'E$. Entonces si $a \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle a, a' \rangle &= \langle a, a'E \rangle \\ &= \langle aa', E \rangle \\ &= \lim_{j\in J} \langle e_j, aa' \rangle \\ &= \lim_{j\in J} \langle e_j a, a' \rangle,\end{aligned}$$

i.e. $e_j a \xrightarrow{w} a$. Así $a \in [\mathrm{conv}(\{e_j\}_{j\in J})a]^-$ y $\mathrm{conv}(\{e_j\}_{j\in J})$ es acotado. Por lo tanto $A \in$ BLAI (cf. [**1**]; [**17**], Prop. 2, p. 58). Asimismo en todo caso

$$\langle a', F \rangle = \langle a'.F \Box E \rangle = \langle Ea', F \rangle$$

y también $\langle a, a' \rangle = \text{lím}_{j\in J} \langle ae_j, a' \rangle$. Dado $a \in A$ es $ae_j \xrightarrow{w^*} a$ y, análogamente, $A \in$ BRAI. En consecuencia, $A \in$ BAI.
(c) Para establecer la amenabilidad de A podemos asumir que X es A-bimódulo de Banach pseudounitario (V. (2.4)(19).
(d) Si X es pseudounitario deviene A^{**}-bimódulo de Banach. Para ello, sean $x \in X$, $a'', b'' \in A^{**}$. Podemos escribir $x = ax_1 = x_2 b$ para ciertos $x_1, x_2 \in X$ y $a, b \in A$. Puesto que A es ideal en A^{**} definimos $a'' * x = \iota_A^{-1}(a''a)x_1$ y $x * b'' = x_2 \iota_A^{-1}(bb'')$.

Si además $x = cx_3$, con $c \in A$ y $x_3 \in X$, tenemos

$$\begin{aligned}
\iota_A^{-1}(a''a)x_1 &= \lim_{j\in J} \iota_A^{-1}(a''e_ja)x_1 \\
&= \lim_{j\in J}[\iota_A^{-1}(a''e_j)\iota_A^{-1}(\iota_A(a))]x_1 \\
&= \lim_{j\in J} \iota_A^{-1}(a''e_j)(ax_1) \\
&= \lim_{j\in J} \iota_A^{-1}(a''e_j)(cx_3) \\
&= \lim_{j\in J}[\iota_A^{-1}(a''e_j)\iota_A^{-1}(\iota_A(c))]x_3 \\
&= \lim_{j\in J} \iota_A^{-1}(a''e_jc)x_3 \\
&= \iota_A^{-1}(a''c)x_3.
\end{aligned}$$

Así la acción a izquierda, y análogamente la acción a derecha de A^{**} en X, están bien definidas. Es fácil ver que ambas verifican las condiciones requeridas.
(e) Notemos que las acciones a derecha e izquierda de A^{**} en X restringidas a A coinciden con la acción a derecha e izquierda de A en X. Sean $x \in X$, $x' \in X^*$ y $\{a''_j\}_{j\in J}$ red en A^{**} tal que $a''_j \xrightarrow{w^*} 0_{A^{**}}$. Entonces

$$\langle x, a''_j x'\rangle = \langle x'x, a^{**}_j\rangle \to 0,$$

o sea $a''_j x' \xrightarrow{w^*} 0_{X^*}$. Por otra parte, notemos que $a\iota_X(x) = \iota_A(a)\iota_X(x)$ para todo $a \in A$ y $x \in X$. Con $x = ax_1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle x, x'a''_j\rangle &= \langle a''_j x, x'\rangle \\
&= \langle \iota_A^{-1}(a''_j a)x_1, x'\rangle \\
&= \langle x_1, x'\iota_A^{-1}(a''_j a)\rangle \\
&= \langle x'\iota_A^{-1}(a''_j a), \iota_X(x_1)\rangle \\
&= \langle x', \iota_A^{-1}(a''_j a)\iota_X(x_1)\rangle \\
&= \langle x', (a''_j a)\iota_X(x_1)\rangle \\
&= \langle \iota_X(x_1)x', a''_j a\rangle \\
&= \langle a\iota_X(x_1)x', a''_j\rangle \\
&\xrightarrow{(j)} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto X es A^{**}-w^*-bimódulo de Banach.
(f) Hagamos ahora $\acute{D} : A^{**} \to X^*$, con

$$\acute{D}(a'') = w^*\text{-}\lim_{j\in J}[D(a''e_j) - a''D(e_j)]. \tag{2.8.1}$$

Sea $x \in X$, $x = ax_1 = x_2b$ para ciertos $a, b \in A$ y $x_1, x_2 \in X$. Aplicando (2.8.1) tenemos

$$\begin{aligned} \langle ax_1, D(a''e_j) - a''D(e_j)\rangle &= \langle x_1, D(a''e_j)a - a''D(e_j)a\rangle \\ &= \langle x_1, D(a''e_ja) - a''D(e_ja)\rangle \\ &\xrightarrow{(j)} \langle x_1, D(a''a) - a''D(a)\rangle. \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Asimismo

$$\begin{aligned} \langle x_2b, D(a''e_j) - a''D(e_j)\rangle &= \langle x_2, bD(a''e_j) - ba''D(e_j)\rangle \\ &= \langle x_2, bD(a''e_j) - ba''D(e_j)\rangle \\ &\xrightarrow{(j)} \langle x_2, D(ba'') - D(b)a''\rangle. \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \langle x_2, D(ba'') - D(b)a''\rangle &= \lim_{j\in J}\langle x_2, D(be_ja'') - D(be_j)a''\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x_2, bD(e_ja'') - bD(e_j)a''\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle ax_1, D(e_ja'') - D(e_j)a''\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x_1, D(e_ja'')a - D(e_j)a''a\rangle \\ &= \lim_{j\in J}\langle x_1, e_jD(a''a) - e_ja''D(a)\rangle \\ &= \langle x_1, D(a''a) - a''D(a)\rangle. \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Por (2.8.1), (2.8.2), (2.8.3) y (2.8.4) vemos que $\acute{D}$ está bien definida.
(g) Es claro ahora que $\acute{D}$ es $\mathbb{C}$-lineal. Con la notación de (f), si además $b'' \in A^{**}$,

$$\begin{aligned} \langle x, \acute{D}(a''b'')\rangle &= \langle x_1, D(a''b''a) - a''b''D(a)\rangle \text{ (por (2.8.2))} \\ &= \langle x_1, [D(a''(b''a)) - a''D(b''a)] + [a''(D(b''a) - b''D(a))]\rangle \\ &= \langle b''x, \acute{D}(a'')\rangle + \langle xa'', \acute{D}(b'')\rangle \text{ (por (2.8.2))} \\ &= \langle x, \acute{D}(a'')b'' + a''\acute{D}(b'')\rangle. \end{aligned}$$

Luego $\acute{D}$ es una derivación.
(h) Sean $\{a''_i\}_{i\in I}$ red en A^{**} tal que w^*-$\mathrm{lím}_{i\in I} = 0_{A^{**}}$ y $x \in X$, $x = ax$ como antes. Como X es A^{**}-w^*-bimódulo de Banach tenemos

$$\begin{aligned} \langle x, \acute{D}(a''_i)\rangle &= \langle x_1, D(a''_ia) - a''_iD(a)\rangle \\ &= \langle D(\iota_A^{-1}(a''_ia)), \iota_X(x_1)\rangle - \langle x_1, a''_iD(a)\rangle \\ &= \langle aD^*(\iota_X(x_1)), a''_i\rangle - \langle x_1, a''_iD(a)\rangle \\ &\xrightarrow{(i)} 0, \end{aligned}$$

es decir $\acute{D} \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(A^{**}, X^*)$.
(i) Como A^{**} es Connes-amenable existe $x'_0 \in X^*$ tal que $\acute{D} = \mathrm{ad}_{x'_0}$.
(j) Dados $x \in X$ y $a \in A$ vemos que

$$\begin{aligned}\langle x, \acute{D}(\iota_A(a)) &= \lim_{j\in J}\langle x, D(ae_j) - \iota_A(a)D(e_j)\rangle \\ &= \lim_{j\in J}[\langle x, D(ae_j)\rangle - \langle xa, D(e_j)\rangle] \\ &= \lim_{j\in J}\langle x, D(a)e_j\rangle \\ &= \langle x, D(a)\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\acute{D}(\iota_A(a)) = D(a)$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\langle x, D(a)\rangle &= \langle x, \acute{D}(\iota_A(a))\rangle \\ &= \langle x, \iota_A(a)x'_0 - x'_0\iota_A(a)\rangle \\ &= \langle x\iota_A(a) - \iota_A(a)x, x'_0\rangle \\ &= \langle xa - ax, x'_0\rangle \\ &= \langle x, \mathrm{ad}_{x'_0}(a)\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $D = \mathrm{ad}_{x'_0}$ y D es derivación interna.

9. [**18**] Sean A y B un álgebra de Banach y un álgebra de Banach dual respectivamente, y sea $\theta : A \to B$ un morfismo de álgebras de Banach. Si A es amenable, o bien si A es Connes-amenable y θ es (w^*, w^*)-continua, hay una *cuasi-expectación* $\mathcal{Q} : B \to \mathrm{Z}_B(\theta(A))$.[12]
►(i) Sean $E = B\hat{\otimes}B_*$ y $\beta \in_B \mathcal{B}_B(B, (B_*)^*)$ isomorfismo. Entonces E es A-bimódulo de Banach de modo que

$$\begin{aligned}a(b \otimes b_*) &= b \otimes (\theta(a)b_*), \\ (b \otimes b_*)a &= b \otimes (b_*\theta(a)),\end{aligned}$$

en tensores básicos.
(ii) Hay una aplicación $F : E^* \to \mathcal{B}(B)$, a saber: fijado $e' \in E^*$, para cada $b \in B$ existe $F(e')(b) \in B$ único tal que $\beta[F(e')(b)] = \langle b\otimes(\circ), e'\rangle$ en $(B_*)^*$. Es fácil ver que F está bien definido y es operador lineal acotado cuya norma no excede $\| \beta^{-1} \|$. Más aún, es isomorfismo de espacios de Banach y $F^{-1}(T)(b \otimes b_*) = \langle b_*, \beta(T(b))\rangle$ para cada $b \in B$ y $b_* \in B_*$.
(iii) Queda inducida en $\mathcal{B}(B)$ la estructura de A-bimódulo en la que $(aT)(b) = \theta(a)T(b)$ y $(Ta)(b) = T(b)\theta(a)$ para $a \in A$, $b \in B$ y $T \in \mathcal{B}(B)$. Además F-deviene isomorfismo de A-bimódulos de Banach.
(iv) Supongamos que A es álgebra de Banach dual y θ es (w^*, w^*)-continua. Veamos que E es w^*-bimódulo de Banach. Para ello sea

[12] Dadas un álgebra de Banach A y una subálgebra de Banach B se llama cuasi-expectación a todo proyector $q : A \to B$ tal que $q(b_1xb_2) = b_1q(x)b_2$ cuando $b_1, b_2 \in B$ y $x \in A$.

$e' \in E^*$ y $\{a_j\}_{j\in J}$ red en A tal que $a_j \xrightarrow{w^*} 0_A$. Si $b_* \in B_*$ y $b \in B$ para cada j tenemos

$$\begin{aligned}\langle b\otimes b_*, a_j e'\rangle &= \langle b\otimes(b_*\theta(a_j)), e'\rangle\\ &= \langle b_*\theta(a_j), \beta(F(e')(b))\rangle\\ &= \langle b_*, \beta(\theta(a_j)F(e')(b))\rangle\\ &= \langle b_*, \beta(\theta(a_j))F(e')(b)\rangle\\ &= \langle F(e')(b)b_*, \beta(\theta(a_j))\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\text{lím}_{j\in J}\langle b\otimes b_*, a_j e'\rangle = 0$. Es fácil ver ahora que

$$w^*\text{-lím}_{j\in J}(a_j e') = 0_{E^*}.$$

Análogamente es $w^*\text{-lím}_{j\in J}(e'a_j) = 0_{E^*}$.

(v) Sea S en subespacio complejo de E generado por elementos de la forma $(zb)\otimes b_* - b\otimes(b_*z)$, $(bz)\otimes b_* - b\otimes(zb_*)$ y $z\otimes b_*$, con $b\in B$, $b_*\in B_*$ y $z \in \mathrm{Z}_B(\theta(A))$. Veamos que $S^\perp$ es w^*-A-bimódulo de Banach. Si $e' \in S^\perp$ es

$$\begin{aligned}\langle (zb)\otimes b_* - b\otimes(b_*z), ae'\rangle &= \langle (zb)\otimes(b_*\theta(a)) - b\otimes(b_*z\theta(a)), e'\rangle\\ &= \langle (zb)\otimes(b_*\theta(a)) - b\otimes(b_*\theta(a)z), e'\rangle\\ &= 0,\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\langle (bz)\otimes b_* - b\otimes(zb_*), ae'\rangle &= \langle (bz)\otimes(b_*\theta(a)) - b\otimes(zb_*\theta(a)), e'\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Además

$$\langle z\otimes b_*, ae'\rangle = \langle z\otimes(b_*\theta(a), e'\rangle = 0,$$

o sea $ae' \in S^\perp$. Análogamente $e'a \in S^\perp$.

(vi) Haciendo $\Sigma = S^\perp$, Σ es w^*-cerrado en E^* y $\Sigma = p^*((\frac{E}{^\perp\Sigma})^*)$, donde p es la proyección al cociente y p^* es isomorfismo de espacios de Banach. Notamos que $^\perp\Sigma$ deviene A-bimódulo de Banach, por lo que $\frac{E}{^\perp\Sigma}$ es A-bimódulo de Banach y p es homomorfismo de A-bimódulos de Banach. Más aún, si A es álgebra de Banach dual claramente Σ es w^*-A-bimódulo de Banach.

(vii) Sea $D : A \to \mathcal{B}(B)$, $D = \mathrm{ad}_{\mathrm{Id}_B}$. Si $a\in A$, $b\in B$ y $b_* \in B_*$ se tiene

$$\begin{aligned}F^{-1}(D(a))(b\otimes b_*) &= \langle b_*, \beta(D(a)(b))\rangle\\ &= \langle b_*, \beta(\theta(a)b - b\theta(a))\rangle\\ &= \langle b_*, \beta(\theta(a))b - b\beta(\theta(a))\rangle \quad (2.8.5)\\ &= \langle bb_* - b_*b, \beta(\theta(a))\rangle.\end{aligned}$$

En consecuencia, si A es álgebra de Banach dual deducimos que $F^{-1}\circ D$ es (w^*, w^*)-continua.

(viii) Observando que F^- es morfismo acotado de A-bimódulos de

Banach vemos que $F^{-1} \circ D$ es derivación acotada. Es fácil ver que $\operatorname{im}(F^{-1} \circ D) \subseteq \Sigma$.
(ix) Si A es álgebra de Banach dual $F^{-1} \circ D \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(A, \Sigma)$, mientras que se A es amenable $(p^*)^{-1} \circ F^{-1} \circ D \in \mathcal{Z}^1(A, (\frac{E}{\perp\Sigma})^*)$, ya que $(p^*)^{-1}$ es morfismo de A-bimódulos de Banach.
(x) Si A es Connes-amenable sea $\mathfrak{p} \in \Sigma$ tal que $F^{-1} \circ D = \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}$, o bien $D = \operatorname{ad}_{F(\mathfrak{p})}$. Hagamos $\mathcal{Q} = \operatorname{Id}_B - F(\mathfrak{p})$. Con la notación de (2.8.5) obtenemos en todo caso

$$\begin{aligned}\langle b_*, \beta(\theta(a)b - b\theta(a))\rangle &= \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}(a)(b \otimes b_*)\\ &= \langle b \otimes b_*, a\mathfrak{p} - \mathfrak{p}a\rangle\\ &= \langle b \otimes b_*\theta(a) - b \otimes \theta(a)b_*, \mathfrak{p}\rangle\\ &= \langle b_*, \beta[\theta(a)F(\mathfrak{p})(b) - F(\mathfrak{p})(b)\theta(a)]\rangle.\end{aligned}$$

Así $\theta(a)b - b\theta(a) = \theta(a)F(\mathfrak{p})(b) - F(\mathfrak{p})(b)\theta(a)$, o $\mathcal{Q}(b)\theta(a) = \theta(a)\mathcal{Q}(b)$ para cada $a \in A$ y $b \in B$. O sea $\mathcal{Q} \in \mathcal{B}(B, \mathrm{Z}_B(\theta(A))$.
Por otra parte, en todo caso es

$$\langle b_*, \beta(F(\mathfrak{p})(\mathcal{Q}(b))\rangle = \langle \mathcal{Q}(b) \otimes b_*, \mathfrak{p}\rangle = 0,$$

i.e. $F(\mathfrak{p}) \circ \mathcal{Q} = 0_{\mathcal{B}(B)}$. Luego $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}$ es proyector.
Dados $z_1, z_2 \in \mathrm{Z}_B(\theta(A))$, $b \in B$ y $b_* \in B_*$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle b_*, \beta(F(\mathfrak{p})(z_1 b z_2))\rangle &= \langle z_1 b z_2 \otimes b_*, \mathfrak{p}\rangle\\ &= \langle b z_2 \otimes b_* z_1, \mathfrak{p}\rangle\\ &= \langle b \otimes z_2 b_* z_1, \mathfrak{p}\rangle\\ &= \langle z_2 b_* z_1, \beta(F(\mathfrak{p})(b))\rangle\\ &= \langle b_*, \beta(z_1 F(\mathfrak{p})(b) z_2)\rangle,\end{aligned}$$

de donde $F(\mathfrak{p})(z_1 b z_2) = z_1 F(\mathfrak{p})(b) z_2$. Concluímos entonces que $\mathcal{Q}$ es una cuasi-expectación.
(xi) Análogamente, si A es amenable existirá $\mathfrak{q} \in (\frac{E}{\perp\Sigma})^*$ tal que $(p^*)^{-1} \circ F^{-1} \circ D = \operatorname{ad}_{\mathfrak{q}}$, o bien $D = \operatorname{ad}_{F(p^*(\mathfrak{q}))}$. Se ve entonces que $\mathcal{R} = \operatorname{Id}_B - F(p^*(\mathfrak{q}))$ es una cuasi-expectación.

2.9. Amenabilidad de C^*-álgebras

1. Sean A_1, A_2 sendas C*-álgebras. El producto tensorial $A_1 \otimes A_2$ deviene naturalmente álgebra involutiva, de modo que

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2),$$
$$(a_1 \otimes a_2)^* = (a_1^* \otimes a_2^*)$$

en tensores básicos.
2. Llamamos *norma* C* sobre $A_1 \otimes A_2$ a toda norma submultiplicativa α tal que $\alpha(u)^2 = \alpha(u^* u)$ para todo $u \in A_1 \otimes A_2$. La correspondiente completación $A_1 \otimes_\alpha A_2$ es una C*-álgebra.

3. (i) Sean $\mathrm{S}_1(A)$ y $\mathrm{S}_2(A)$ los *espacios de estado* de A_1 y A_2 [13]. Dado $u \in A_1 \otimes A_2$ escribamos

$$\| u \|_{\text{mín}} = \sup_{v \in A_1 \otimes A_2, (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{S}_1(A_1) \times \mathrm{S}_2(A_2)} \left[\frac{(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v^* u^* u v)}{(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v^* v)} \right]^{1/2}, \tag{2.9.1}$$

donde en todo caso el correspondiente denominador es no nulo.
(ii) Si A_1, A_2 son unitarias, por la construcción de Gélfand-Naimark-Segal (cf. [**59**] [**140**]; [**29**], Ch. VIII, §5), fijados φ_1, φ_2 para $i = 1, 2$ tenemos *representaciones de álgebras involutivas* [14] $\pi_{\varphi_i} : A_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\varphi_i})$ en espacios de Hilbert $\mathcal{H}_{\varphi_i}$ determinados[15] , de modo que

$$\varphi_i(a_i) = \langle \pi_{\varphi_i}(a_i)(\xi_i), \xi_i \rangle_{\varphi_i},$$

cualquiera sea $a_i \in A_i$, y ciertos *vectores cíclicos*[16] $\xi_i \in \mathcal{H}_{\varphi_i}$.
(iii) Ahora

$$\pi_{\varphi_1} \otimes \pi_{\varphi_2} : A_1 \otimes A_2 \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\varphi_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\varphi_2}) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\varphi_1} \otimes \mathcal{H}_{\varphi_2})$$

es *-representación de $A_1 \otimes A_2$.
(iv) Dado $u \in A_1 \otimes A_2$ es

$$\| (\pi_{\varphi_1} \otimes \pi_{\varphi_2})(u) \|^2 = \sup_{\|x\|=1} \| (\pi_{\varphi_1} \otimes \pi_{\varphi_2})(u)(x) \|^2 .$$

---

[13]Se llama estado de una C*-álgebra A a todo funcional positivo A, i.e. a toda formal lineal compleja $f \in [A^*]_1$ tal que $f(x^*x) \geq 0$ para todo $x \in A$. Si A es unitaria y f es un estado tal que $f(1) = 1$ decimos que f es un *estado normalizado*.

[14]Dados una *-álgebra $\mathcal{U}$ y un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, llamamos representación involutiva de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{H}$ a todo homomorfismo de *-álgebras de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

[15]El conjunto $L_i = \{a_i \in A_i : \varphi(a_i^* a_i) = 0\}$ es ideal a izquierda cerrado de A_i. Se considera A_i/L_i en cuanto espacio vectorial complejo, munido del producto interno $\langle a_i + L_i, b_i + L_i \rangle_{\varphi_i} = \varphi_i(b_i^* a_i)$. Así $\mathcal{H}_{\varphi_i}$ será el espacio de Hilbert que resulta al completar al espacio prehilbertiano A_i/L_i.

[16]Si $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación de un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se llama vector cíclico a todo $v \in \mathcal{H}$ tal que $\pi(\mathcal{U})v$ es denso en $\mathcal{H}$.

Con $u=\sum_{i=1}^n a_{1,i}\otimes a_{2,i}$ y $x=\sum_{j=1}^m (b_{1,j}+L_1)\otimes(b_{2,j}+L_2)$ es

$$\begin{aligned}
\| (\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u)(x)\|^2 &= \langle(\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u)(x),(\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u)(x)\rangle\\
&= \langle x,(\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u)^*(\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u)(x)\rangle\\
&= \langle x,(\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u^*u)(x)\rangle\\
&= \langle x,(\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(\sum_{i,l=1}^n a_{1,i}^*a_{1,l}\otimes a_{2,i}^*a_{2,l})(x)\rangle\\
&= \sum_{j,k=1}^m\sum_{i,l=1}^n \langle b_{1,k}+L_1, a_{1,i}^*a_{1,l}b_{1,j}+L_1\rangle_{\varphi_1}\\
&\quad \langle b_{2,k}+L_2,a_{2,i}^*a_{2,l}b_{2,j}+L_2\rangle_{\varphi_2}\\
&= \sum_{j,k=1}^m\sum_{i,l=1}^n \varphi_1(b_{1,j}^*a_{1,l}^*a_{1,i}b_{1,k})\varphi_2(b_{2,j}^*a_{2,l}^*a_{2,i}b_{2,k})\\
&= (\varphi_1\otimes\varphi_2)(\overline{x}^*u^*u\overline{x}), \qquad (2.9.2)
\end{aligned}$$

donde $\overline{x}=\sum_{j=1}^m b_{1,j}\otimes b_{2,j}$ en $A_1\otimes A_2$. Además

$$\begin{aligned}
\| x\|^2 &= \langle x,x\rangle_{\mathcal{H}_{\varphi_1}\otimes\mathcal{H}_{\varphi_2}}\\
&= \sum_{j,k=1}^m \langle (b_{1,j}+L_1)\otimes(b_{2,j}+L_2),(b_{1,k}+L_1)\otimes(b_{2,k}+L_2)\rangle_{\mathcal{H}_{\varphi_1}\otimes\mathcal{H}_{\varphi_2}}\\
&= \sum_{j,k=1}^m \varphi_1(b_{1,k}^*b_{1,j})\varphi_2(b_{2,k}^*b_{2,j})\\
&= (\varphi_1\otimes\varphi_2)(\overline{x}). \qquad (2.9.3)
\end{aligned}$$

(v) Por (2.9.1), (2.9.2) y (2.9.3) vemos que

$$\| u\|_{\text{mín}}=\sup_{(\varphi_1,\varphi_2)\in \mathrm{S}_1(A)\times\mathrm{S}_2(A)} \| (\pi_{\varphi_1}\otimes\pi_{\varphi_2})(u)\| .$$

(vi) Sea $u=\sum_{i=1}^n a_{1,i}\otimes a_{2,j}$ no nulo en $A_1\otimes A_2$ y veamos que $\alpha_0(u)>0$.

(vi-a) Si $n=1$ existen $\psi_1\in\mathrm{S}(A_1)$ y $\psi_2\in\mathrm{S}(A_2)$ tales que

$$\psi_1(a_{1,1}^*a_{1,1})=\| a_{1,1}^*a_{1,1}\| \text{ y } \psi_2(a_{2,1}^*a_{2,1})=\| a_{2,1}^*a_{2,1}\|$$

(cf. [**13**], Th. 61.10). Luego

$$\begin{aligned}
\alpha_0(u) &\geq \| \pi_{\psi_1}\otimes\pi_{\psi_2})(u)\|\\
&= \langle a_{1,1}+L_{\psi_1},a_{1,1}+L_{\psi_1}\rangle_{\psi_1}^{1/2}\langle a_{2,1}+L_{\psi_2},a_{2,1}+L_{\psi_2}\rangle_{\psi_2}^{1/2}\\
&= \psi_1(a_{1,1}^*a_{1,1})^{1/2}\psi_2(a_{2,1}^*a_{2,1})^{1/2}\\
&= \| a_{1,1}\|\| a_{2,1}\|\\
&> 0.
\end{aligned}$$

(vi-b) Podemos suponer $n>1$ y $\{a_{1,1},...,a_{1,n}\}$ linealmente independiente. Sea $\psi\in\mathrm{S}(A_2)$ tal que $\psi(a_{2,1}^*a_{2,1})>0$. Sea además

$\{b_1 + L_\psi, ..., b_d + L_\psi\}$ base de $\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}(\{a_{2,1} + L_\psi, ..., a_{2,n} + L_\psi\})$ para cierto $d \leq n$, donde $b_1 = a_{2,1}$. Si $1 \leq i \leq n$ podemos escribir $a_{2,i} + L_\psi = \sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(b_j + L_\psi)$ para únicos escalares $c_{i,j}$'s.
(vi-c) En particular, $c_{1,1} = 1$ y el elemento

$$\mathfrak{a} = a_{1,1} + c_{2,1}a_{1,2} + ... + c_{n,1}a_{1,n}$$

es no nulo en A_1 por la independencia lineal de $\{a_{1,1}, ..., a_{1,n}\}$.
(vi-d) Sea $\varphi \in \mathrm{S}(A_1)$ tal que $\varphi(\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}) > 0$.
(vi-e) Con $\xi = \sum_{i=1}^{n}(a_{1,i} + L_\varphi) \otimes (a_{2,i} + L_\psi)$ en $\mathcal{H}_\varphi \otimes \mathcal{H}_\psi$ tenemos

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{n}(a_{1,i} + L_\varphi) \otimes \sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(b_j + L_\psi) \\ &= \sum_{j=1}^{d} \mathfrak{a}_j \otimes (b_j + L_\psi),\end{aligned}$$

con $\mathfrak{a}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}(a_{1,i} + L_\varphi)$ para cada j. Como $\{b_j + L_\psi\}_{1 \leq j \leq d}$ es linealmente independiente y $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ es no nulo, ψ es no nulo (cf. [**135**], Lemma 1.1; v. (4.17.81)).
(vi-f) Por lo tanto

$$\begin{aligned}\alpha_0(u) &\geq \| (\pi_\varphi \otimes \pi_\psi)(u)(e_{A_1} + L_\varphi, e_{A_2} + \psi) \| \\ &= \| \sum_{i=1}^{n}(a_{1,i} + L_\varphi) \otimes (a_{2,i} + L_\psi) \| \\ &= \| \xi \| \\ &> 0.\end{aligned}$$

(vii) Es fácil ver ahora que $\| \circ \|_{\text{mín}}$ es norma C*, la C*-*norma minimal* o *espacial* [**146**]. Se trata de la menor norma C* [**144**]. Indicaremos $A_1 \otimes_{\text{mín}} A_2$ al correspondiente espacio completado respecto a la norma minimal.

4. Desde luego $\| \circ \|_{\text{mín}}) \leq \| \circ \|_{\wedge}$. Hagamos
$$\| u \|_{\text{máx}} = \sup\{\alpha(u) : \alpha \text{ es } \mathrm{C}^* - \text{norma de } A_1 \otimes A_2\}.$$
Entonces $\| \circ \|_{\text{máx}}$ es otra C*-norma, la C*-*norma maximal* [**71**]. Indicaremos $A_1 \otimes_{\text{máx}} A_2$ al correspondiente espacio completado respecto a la norma maximal.
5. Una C*-álgebra A se llama *nuclear* si para toda C^*-álgebra B hay una única norma C* en $A \otimes B$ [**103**].
6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ es C*-álgebra nuclear.
► (i) Sean B una C*-álgebra no unitaria y $\rho : B_1 \to \mathcal{B}(H)$ una *-representación isométrica en un espacio de Hilbert H (cf. [**13**], Th. 62.1).
(ii) Hay un único isomorfismo de grupos abelianos
$$F : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes B \to \mathrm{M}_n(B)$$

tal que $F(z \otimes b) = (z_{i,j}b)_{1 \leq i,j \leq n}$ en tensores básicos.
(iii) Con la estructura natural de álgebra compleja, hay inducida una representación

$$\rho_n : \mathrm{M}_n(B) \to \mathcal{B}(H^n),$$
$$\rho_n(b)(h) = (\sum_{j=1}^{n} \rho(b_{i,j})(h_j))_{1 \leq i \leq n}.$$

Si $b \in \mathrm{M}_n(B)$ sea $b^* \in \mathrm{M}_n(B)$ tal que $(b^*)_{i,j} = b^*_{j,i}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y hagamos $\| b \| \triangleq \| \rho_n(b) \|$.
(iv) Así $\mathrm{M}_n(B)$, y por lo tanto $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes B$, devienen C*-álgebras.
(v) Además observamos que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_n(B_1) &\approx \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes B_1 \\ &= \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes (B \oplus \mathbb{C}) \\ &\approx (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes B) \oplus (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}) \\ &\approx \mathrm{M}_n(B) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

(vi) Hay una única estructura C* en $\mathrm{M}_n(B_1)$ (cf. [**110**], Prop. 2.1.10). Dicha estructura induce una única estructura C* en $\mathrm{M}_n(B)$.
(vii) Si B es C* álgebra unitaria hay asimismo una única estructura C* en $\mathrm{M}_n(B)$.
(viii) En todo caso sigue la afirmación.

2.10. Ejemplos

2.10.1. Paradojalidad de $\mathbb{N}$ respecto a biyecciones de $\mathbb{Z}$. Consideremos la acción del grupo $\mathrm{Bi}(\mathbb{Z})$ de biyecciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ tal que $fm = f(m)$ para $f \in \mathrm{Bi}(\mathbb{Z})$ y $m \in \mathbb{Z}$. Sean P y I las clases de enteros pares e impares impares respectivamente. Escribiremos

$$\mathbb{N} = f_0R_0 \cup f_1R_1 = f_2R_2 \cup f_3R_3,$$

donde $R_i = \{4m + i : m \in \mathbb{Z}\}$, $i = 0, 1, 2, 3$, y $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Bi}(\mathbb{Z})$ distintos. Notemos que $R_0, ..., R_3$ son disjuntos. Si P e I son los subconjuntos de números naturales pares e impares claramente se puede definir $f_0, ..., f_3$ tales que

$$\begin{aligned} &f_0(R_0) = f_2(R_2) = \mathrm{P}, \\ &f_1(R_1) = f_3(R_3) = \mathrm{I}, \\ &f_0(\mathbb{Z} - R_0) = f_2(\mathbb{Z} - R_2) = \mathbb{Z} - \mathrm{P} \\ &f_1(\mathbb{Z} - R_1) = f_3(\mathbb{Z} - R_3) = \mathbb{Z} - \mathrm{I}. \end{aligned}$$

2.10.2. Promedios topológicos y amenabilidad.

1. En esta sección G designará un grupo localmente compacto Hausdorff. Además $\mathrm{LUC}(G)$ y $\mathrm{RUC}(G)$ serán las subclases de $\mathrm{C}_b(G)$ de

funciones uniformemente continuas respectivamente.[17] Es fácil ver que se trata de subespacios de Banach de $\mathrm{C}_b(G)$. Indicaremos también $\mathrm{UC}(G)$ $=\mathrm{LUC}(G)\cap\mathrm{RUC}(G)$ a la clase de *funciones uniformemente continuas sobre* G.

2. Notar que $\mathrm{L}^\infty(G)$ es $\mathrm{M}(G)$-bimódulo de Banach si para $v \in \mathrm{L}^\infty(G)$, $\mu \in \mathrm{M}(G)$ y $x \in G$ hacemos
$$(\mu * v)(x) = \int_G v(y^{-1}x)d\mu(y),$$
$$(v * \mu)(x) = \int_G v(xy^{-1})d\mu(y).$$
En particular, $\delta_x * v =_{x^{-1}} v$ y $v * \delta_x = v_{x^{-1}}$. Por otra parte, si λ designa la medidad de Haar a izquierda de G y $f \in \mathrm{L}^1(G)$ entonces $fv = (fd\lambda) * v$ en cuanto consideramos $\mathrm{L}^\infty(G) \in L^1(G)$-Mod, mientras que $(vf)(x) = (\check{v} * (fd\lambda))(x^{-1})$ en cuanto $\mathrm{L}^\infty(G) \in$ Mod-$L^1(G)$, donde $\check{v}(x) = v(x^{-1})$.
3. Se verifican las siguientes relaciones:

$$\mathrm{C}_0(G) \subseteq \mathrm{UC}(G), \tag{2.10.1}$$
$$\mathrm{LUC}(G) = \mathrm{L}^1(G) * \mathrm{L}^\infty(G) = \mathrm{L}^1(G) * \mathrm{LUC}(G), \tag{2.10.2}$$
$$\mathrm{RU}(G) = \mathrm{RUC}(G) * \mathrm{L}^1(G) = \mathrm{L}^\infty(G) * \mathrm{L}^1(G), \tag{2.10.3}$$
$$\mathrm{UC}(G) = \mathrm{L}^1(G) * \mathrm{L}^\infty(G) * \mathrm{L}^1(G) = \mathrm{L}^1(G) * \mathrm{UC}(G) * \mathrm{L}^1(G). \tag{2.10.4}$$

Luego $\mathrm{LUC}(G)$ es $\mathrm{L}^1(G)$-módulo de Banach a izquierda, $\mathrm{RUC}(G)$ es $\mathrm{L}^1(G)$-módulo de Banach a derecha y $\mathrm{UC}(G)$ es $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulo de Banach.
4. Consideremos
$$\mathrm{P}(G) = \{f \in \mathrm{L}^1(G)^+ :\parallel f \parallel_1 = 1\}.$$
Entonces $\mathcal{P}(G) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)$ y $\mathcal{P}(G)^{-w^*} = \mathcal{M}(G)$. Para ello:
(i) De no ser así existe $m_0 \in \mathcal{M}(G) - \mathcal{P}(G)^{-w^*}$. Por el teorema de Hahn-Banach existirán $\epsilon > 0$ y $\Lambda : \mathrm{L}^\infty(G)^* \to \mathbb{C}$ aplicación lineal w^*-continua tal que $\mathrm{Re}(\Lambda)(n) \leq \mathrm{Re}(\Lambda)(m_0) - \epsilon$ para cada $n \in \mathcal{P}(G)$.
(ii) Existe $F \in \mathrm{L}^\infty(G)$ tal que $\Lambda(m) = \langle F, m\rangle$ si $m \in \mathrm{L}^\infty(G)^*$. Razonando como en (2.4.6)(iii) se puede suponer que F es $\mathbb{R}$-valuada a.e. λ y si $f \in \mathcal{P}(G)$ es
$$\int_G fFd\lambda < \langle F, m_0\rangle - \epsilon. \tag{2.10.5}$$
(iii) Sea $t > 0$ tal que $\parallel F \parallel_\infty -\epsilon/2 < t$ y $\lambda(\{\mid F \mid > t\}) > 0$. Existirá un subconjunto compacto C con medida de Haar positiva de $\{\mid F \mid > t\}$. Hagamos $f = \chi_C/\lambda(C)$.
(iv) Observar que (2.10.5) es válida si reemplazamos F por $F + r$,

[17] O sea, $f \in \mathrm{LUC}(G)$ si y solo si $a \to_{a^{-1}} f$ (resp. $a \to f_{a^{-1}}$) es función continua de G en $\mathrm{C}_b(G)$, lo que equivale a que para cada $\epsilon > 0$ hay un entorno simétrico U de e en G tal que $\mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon$ si $xy^{-1} \in U$ (resp. si $x^{-1}y \in U$).

cualquiera sea $r \in \mathbb{R}$. Podemos suponer entonces $F \geq 0$ a.e. λ.
(v) Por lo tanto

$$\| F \|_\infty + \tfrac{\epsilon}{2} < \langle F, m_0 \rangle \leq \| F \|_\infty,$$

de donde sigue la tesis.

5. [**47**], [**114**] Sean G un grupo localmente compacto. Un promedio M de G se dice *invariante por conjugación* si $M(\tau_x^*(f)) = M(f)$ para todo $f \in \mathrm{L}^\infty(G)$ y $x \in G$, con $\tau_x \in \mathcal{B}(L^1(G))$ tal que

$$\tau_x(u)(y) = u(x^{-1}yx)\Delta_G(x)$$

si $u \in \mathrm{L}^1(G)$ e $y \in G$. Decimos que G es *internamente amenable* si posee algún promedio invariante por conjugación. Son equivalentes:
(a) A es internamente amenable.
(b) Hay una red $\{u_k\}_{k\in K}$ en $\mathcal{P}(G)$ tal que $\lim_{k\in K} \| \tau_x(u_k) - u_k \|_1 = 0$ para todo $x \in G$.
► (a ⇒ b) Sea $M \in \mathcal{M}(G)$ un promedio invariante por conjugación. Por (2.10.2).(4) podemos considerar alguna red $\{u_k\}_{k\in K}$ en $\mathcal{P}(G)$ tal que $M = w^*\text{-}\lim_{k\in K} u_k$. Si $f \in \mathrm{L}^\infty(G)$ y $x \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k\in K} \langle u_k, f\rangle &= M(f) \\ &= M(\tau_x^*(f)) \\ &= \lim_{k\in K} \langle u_k, \tau_x^*(f)\rangle \\ &= \lim_{k\in K} \langle \tau_x(u_k), f\rangle, \end{aligned}$$

i.e. $0_{\mathrm{L}^1(G)} = w\text{-}\lim_{k\in K}(\tau_x(u_k) - u_k)$ para todo $x \in G$. Luego

$$0_{\mathrm{L}^1(G)} \in \mathrm{co}(\{\tau_x(u_k) - u_k : k \in K\})^-.$$

Si $\mathcal{K}(G)$ es la familia de subconjuntos compactos con interior no vacío de G, dados $C \in \mathcal{K}(G)$ y $\xi > 0$ sea $v_{C,\xi} \in \mathrm{L}^1(G)$ tal que existe $x \in C$ de modo que $\| \tau_x(v_{C,\xi}) - v_{C,\xi} \|_1 < \xi$. Bastará considerar la red $\{v_{(C,\xi)} : (C,\xi) \in \mathcal{K}(G) \times \mathbb{R}^+\}$, en la que $(C,\xi) \leq (D,\eta)$ si y solo si $D \subseteq C$ y $\eta \leq \xi$.
(b ⇒ a) Como es fácil de verificar, por el teorema de Alaoglu bastará considerar algún punto de acumulación M de la red $\{u_k\}_{k\in K}$.

6. Sea E subespacio de Banach de $\mathrm{L}^\infty(G)$ tal que $\mathrm{P}(G) * E \subseteq E$, p. ej. $\mathrm{C}_b(G)$, $\mathrm{LUC}(G)$, $\mathrm{RUC}(G)$ o $\mathrm{UC}(G)$. Si $m \in E^*$, decimos que m es *promedio topológico invariante a izquierda de* E si $\| m \| = \langle 1, m\rangle = 1$ y $\langle f * \varphi, m\rangle = \langle \varphi, m\rangle$ cualesquiera sean $f \in \mathrm{P}(G)$ y $\varphi \in E$. Indicaremos $\mathrm{LIM}(E)$ y $\mathrm{TLIM}(E)$ a las clases de promedios invariantes a izquierda y promedios topológicos invariantes a izquierda de E respectivamente [**87**].
7. Cada promedio topológico invariante a izquierda de $\mathrm{L}^\infty(G)$, $\mathrm{C}_b(G)$, $\mathrm{LUC}(G)$, $\mathrm{RUC}(G)$ o $\mathrm{UC}(G)$ es promedio invariante a izquierda.
► Sean m promedio topológico a izquierda de E, $a \in G$, $f \in \mathrm{P}(G)$

y $\varphi \in E$. Entonces $\delta_a * f \in \mathrm{P}(G)$ y

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \varphi, m\rangle &= \langle f * (\delta_a * \varphi), m\rangle \\ &= \langle (f * \delta_a) * \varphi, m\rangle \\ &= \langle \varphi, m\rangle.\end{aligned}$$

8. Todo promedio invariante a izquierda m de $\mathrm{UC}(G)$ es promedio topológico invariante a izquierda.

   ► Por (2.10.4) dados $a \in G$, $u \in \mathrm{UC}(G)$ y $f \in \mathrm{L}^1(G)$ resulta

$$\langle f * u, m\rangle = \langle \delta_a * (f * u), m\rangle. \tag{2.10.6}$$

   Escribiendo $T_u(f) = \langle f * u, m\rangle$ sigue que $T_u \in \mathrm{L}^1(G)^*$. Entonces existe $u' \in \mathrm{L}^\infty(G)$ único tal que $\langle f * u, m\rangle = \int_G f u' d\lambda$ para cada f. Por (2.10.6) vemos que

$$\begin{aligned}\int_G f u' d\lambda &= \langle (\delta_a * f) * u, m\rangle \\ &= \int_G ({}_{a^{-1}}f) u' d\lambda \\ &= \int_G f ({}_a u') d\lambda.\end{aligned}$$

   Por lo tanto $u' =_a u'$ para todo $a \in G$, i.e. $u' = c(u)$ en $\mathrm{L}^\infty(G)$ para cierta $c(u) \in \mathbb{C}$. Así $\langle f * u, m\rangle = c(u)$ cualquiera sea $f \in \mathrm{P}(G)$.
   Sea $\{e_s\}_{s\in\sigma} \in \mathrm{BLAI}(\mathrm{L}^1(G))$. Por (2.10.4) la misma es aproximación acotada de la identidad a izquierda de $\mathrm{UC}(G)$ y si $f \in \mathrm{P}(G)$ es

$$\begin{aligned}\langle f * u, m\rangle &= \lim_{s\in\sigma} \langle e_s * (f * u), m\rangle \\ &= \lim_{s\in\sigma} \langle (e_s * f) * u, m\rangle \\ &= c(u) \\ &= \lim_{s\in\sigma} \langle e_s * u, m\rangle \\ &= \langle u, m\rangle.\end{aligned}$$

9. Son equivalentes
   (i) G es amenable.
   (ii) $\mathrm{LIM}(\mathrm{C}_b(G)) \neq \emptyset$.
   (iii) $\mathrm{LIM}(\mathrm{LUC}(G)) \neq \emptyset$.
   (iv) $\mathrm{LIM}(\mathrm{RUC}(G)) \neq \emptyset$.
   (v) $\mathrm{LIM}(\mathrm{UC}(G)) \neq \emptyset$.
   ► (i $\Rightarrow$ ii) Sean $j_1 : \mathrm{C}_b(G) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(G)$ la inclusión y $m \in \mathrm{LIM}(\mathrm{L}^\infty(G))$. Claramente

$$\emptyset \neq j_1^*(\mathrm{LIM}(\mathrm{L}^\infty(G)) \subseteq \mathrm{LIM}(\mathrm{C}_b(G)).$$

   (ii $\Rightarrow$ iii) Ídem al punto anterior.
   (ii $\Rightarrow$ iv) Ídem.
   (iii $\Rightarrow$ v) Ídem.

(iv $\Rightarrow$ v) Ídem.
(v $\Rightarrow$ i) Sean $m \in \mathrm{TLIM}(\mathrm{UC}(G))$ y $\{e_s\}_{s\in S} \in \mathrm{BAI}(\mathrm{L}^1(G))$ en $\mathrm{P}(G)$. Sea Σ un ultrafiltro que domina el orden de S y consideremos

$$\begin{aligned}&\hat{m} : \mathrm{L}^\infty(G) \to \mathbb{C},\\ &\langle \phi, \hat{m}\rangle = \lim_{s\in\Sigma} \langle e_s * \phi * e_s, m\rangle.\end{aligned}$$

Por (2.10.4) $\hat{m}$ está bien definida y es fácil ver que se trata de un promedio. Más aún, si $f \in P(\mathrm{G})$, $\phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$ y $s \in \Sigma$ tenemos

$$e_s * f * \phi * e_s - f * e_s * \phi * e_s = (e_s * f - f) * \phi * e_s + (f - f * e_s) * \phi * e_s.$$

Luego $\lim_{s\in\Sigma}(e_s * f * \phi * e_s - f * e_s * \phi * e_s) = 0_{\mathrm{L}^\infty(G)}$ y

$$\begin{aligned}\langle f * \phi, \hat{m}\rangle &= \lim_{s\in\Sigma}\langle e_s * f * \phi * e_s, m\rangle\\ &= \lim_{s\in\Sigma}\langle f * e_s * \phi * e_s, m\rangle\\ &= \lim_{s\in\Sigma}\langle e_s * \phi * e_s, m\rangle\\ &= \langle \phi, \hat{m}\rangle\end{aligned}$$

y sigue la tesis.

2.10.3. Amenabilidad de productos tensoriales. Si A, B, son álgebras de Banach amenables entonces $A\hat{\otimes}B$ es álgebra de Banach amenable. En efecto, sean $C = (A\hat{\otimes}A)\hat{\otimes}(B\hat{\otimes}B)$ y $D = (A\hat{\otimes}B)\hat{\otimes}(A\hat{\otimes}B)$.
(i) C es $A\hat{\otimes}B$-bimódulo de Banach y

$$\begin{aligned}(a\otimes b)\cdot(\alpha\otimes\beta) &= (a\alpha)\otimes(b\beta),\\ (\alpha\otimes\beta)\cdot(a\otimes b) &= (\alpha a)\otimes(\beta b)\end{aligned}$$

en tensores básicos. Para ello, fijados $a \in A$ y $b \in B$ sea

$$\begin{aligned}&f_{a,b} : (A\hat{\otimes}A)\times(B\hat{\otimes}B) \to C,\\ &f_{a,b}(\alpha,\beta) = (a\alpha)\otimes(b\beta).\end{aligned}$$

Como $f_{a,b}$ es biaditivo y acotado existe $f^1_{a,b} \in \mathcal{B}(C)$ tal que

$$f^1_{a,b}(\alpha\otimes\beta) = (a\alpha)\otimes(b\beta)$$

en tensores básicos. Asimismo $f^1 : A\times B \to \mathcal{B}(C)$ es biaditivo y acotado y existe $f^2 \in \mathcal{B}(A\hat{\otimes}B, \mathcal{B}(C))$ tal que $f^2(a\otimes b) = f^1_{a,b}$ en tensores básicos. Hacemos entonces $u\cdot\xi \triangleq f^2(u)(\xi)$, $u \in A\hat{\otimes}B$, $\xi \in C$. Es fácil ver que así $C \in (A\hat{\otimes}B)$-Mod. Análogamente resulta $C \in$ Mod-$(A\hat{\otimes}B)$.
(ii) Existe $\Lambda \in \mathcal{B}(C, D)$ homomorfismo de $(A\hat{\otimes}B)$-bimódulos tal que

$$\Lambda((a_1\otimes a_2)\otimes(b_1\otimes b_2)) = (a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)$$

para cada $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Para ello, fijados $a_1, a_2 \in A$ sea

$$\begin{aligned}&g_{a_1,a_2} : B\times B \to D,\\ &g_{a_1,a_2}(b_1,b_2) = (a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2).\end{aligned}$$

Por la universalidad del producto tensorial existe $g^1_{a_1,a_2} \in \mathcal{B}(B\hat{\otimes}B, D)$ tal que

$$g^1_{a_1,a_2}(b_1 \otimes b_2) = (a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)$$

en tensores básicos. Asimismo, $g^1 : A \times A \to \mathcal{B}(B\hat{\otimes}B, D)$ es biaditiva acotada y nuevamente por la universalidad del producto tensorial existe $g^2 \in \mathcal{B}(A\hat{\otimes}A, \mathcal{B}(B\hat{\otimes}B, D))$ tal que $g^2(a_1 \otimes a_2) = g^1_{a_1,a_2}$ en tensores básicos. Hacemos ahora

$$\begin{aligned} &\lambda : (A\hat{\otimes}A) \times (B\hat{\otimes}B) \to D, \\ &\lambda(\alpha, \beta) = g^2(\alpha)(\beta). \end{aligned}$$

Por la universalidad del producto tensorial existe $\Lambda \in \mathcal{B}(C, D)$ de modo que $\Lambda(\alpha \otimes \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$ en tensores básicos. Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda((a_1 \otimes a_2) \otimes (b_1 \otimes b_2)) &= \lambda(a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2) \\ &= g^2(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) \\ &= g^1_{a_1,a_2}(b_1 \otimes b_2) \\ &= (a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2) \end{aligned}$$

para cualesquiera a_1, a_2, b_1, b_2. Como

$$\begin{aligned} &\Lambda(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes a_3) \otimes (b_2 \otimes b_3)(a_4 \otimes b_4) = \Lambda(a_1a_2 \otimes a_3a_4) \otimes (b_1b_2 \otimes b_3b_4) \\ &= (a_1a_2 \otimes b_1b_2) \otimes (a_3a_4 \otimes b_3b_4) \\ &= (a_1 \otimes b_1)\Lambda((a_2 \otimes a_3) \otimes (b_2 \otimes b_3))(a_4 \otimes b_4) \end{aligned}$$

en tensores básicos sigue la afirmación.
(iii) Sean $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, $\{\beta_j\}_{j\in J}$ diagonales aproximadas de A y B respectivamente, con

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,i} \otimes a'_{n,i}, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \| a_{n,i} \| \| a'_{n,i} \| < \infty, \\ \beta_j &= \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,j} \otimes b'_{m,j}, \;\; \sum_{m=1}^{\infty} \| b_{m,j} \| \| b'_{m,j} \| < \infty \end{aligned}$$

en cada caso. Escribamos $\gamma_{i,j} = \Lambda(\alpha_i \otimes \beta_j)$ para cada i, j y consideremos la red -acotada- $\{\gamma_{i,j}\}_{(i,j)\in I\times J}$ con el orden parcial natural. Veremos que ésta es diagonal aproximada de $A\hat{\otimes}B$.
(iv) Sea $u \in A\hat{\otimes}B$, digamos $u = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \otimes b_l$, con $\sum_{l=1}^{\infty} \| a_l \| \| b_l \| < \infty$. Sea $r > 0$ tal que $\| \alpha_i \|_\wedge \leq r$ y $\| \beta_j \|_\wedge \leq r$ cualesquiera sean i, j. Dado $\epsilon > 0$ sea $L \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{l>L} \| a_l \| \| b_l \| < \epsilon/(2r^2 \| \Lambda \|)$.

Dados i, j tenemos

$$\| u\gamma_{i,j} - \gamma_{i,j}u \|_\wedge \leq \| \Lambda \| \| u(\alpha_i \otimes \beta_j) - (\alpha_i \otimes \beta_j)u \|_\wedge$$

$$\leq \| \Lambda \| [\sum_{l=1}^{L} \| a_l\alpha_i \otimes b_l\beta_j - \alpha_i a_l \otimes \beta_j b_l \|_\wedge +2 \sum_{l=L+1}^{\infty} \| a_l \| \| b_l \| \| \alpha_i \|_\wedge \| \beta_j \|_\wedge]$$

$$\leq \| \Lambda \| \sum_{l=1}^{L} \| a_l\alpha_i \otimes b_l\beta_j - \alpha_i a_l \otimes \beta_j b_l \|_\wedge +\epsilon$$

$$= \| \Lambda \| \sum_{l=1}^{L} \| (a_l\alpha_i - \alpha_i a_l) \otimes b_l\beta_j + \alpha_i a_l \otimes (b_l\beta_j - \beta_j b_l) \|_\wedge +\epsilon.$$

Luego $\overline{\text{lím}}_{(i,j)\in I\times J} \| u\gamma_{i,j} - \gamma_{i,j}u \|_\wedge \leq \epsilon$, i.e. $u\gamma_{i,j} - \gamma_{i,j}u \to 0_D$.
(iv) Dado $\psi > 0$ sea $L' \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{l>L'} \| a_l \| \| b_l \| < \psi/(1+r^2)$. Fijados i, j resulta

$$\| \hat{\pi}_{A\hat{\otimes}B}(\gamma_{i,j})u - u \|_\wedge = \| \sum_{l=1}^{\infty} [\hat{\pi}_A(\alpha_i)a_l \otimes \hat{\pi}_B(\beta_j)b_l) - a_l \otimes b_l] \|_\wedge$$

$$= \| \sum_{l=1}^{L'} [\hat{\pi}_A(\alpha_i)a_l \otimes \hat{\pi}_B(\beta_j)b_l) - a_l \otimes b_l] \|_\wedge +\psi$$

$$= \sum_{l=1}^{L'} [(\hat{\pi}_A(\alpha_i)a_l - a_l) \otimes \hat{\pi}_B(\beta_j)b_l + a_l \otimes (\hat{\pi}_B(\beta_j)b_l - b_l)] + \psi.$$

Luego $\overline{\text{lím}}_{(i,j)\in I\times J} \| \hat{\pi}_{A\hat{\otimes}B}(\gamma_{i,j})u - u \|_\wedge \leq \psi$, y siendo ψ arbitrario sigue la tesis.

2.10.4. Diagonal virtual de grupos amenables discretos.

1. Construyamos una diagonal virtual de un grupo amenable discreto (V. (2.11.21)). Definimos $\theta : \mathrm{l}^1(G) \to \mathrm{l}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{l}^1(G)$ tal que
$$\theta(f) = \textstyle\sum_{a\in G} f(a)\delta_a \otimes \delta_{a^{-1}}.$$
Evidentemente θ es operador lineal bien definido y acotado.
2. Dado $m \in \mathrm{l}^1(G)^{**}$ promedio invariante de G sea $V = \theta^{**}(m)$ en $(\mathrm{l}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{l}^1(G))^{**}$. Si $a, b \in G$ y $\mathfrak{N} \in (\mathrm{l}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{l}^1(G))^*$ tenemos
$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{N}, \delta_a V\rangle &= \langle \mathfrak{N}\delta_a, \theta^{**}(m)\rangle \\ &= \langle \theta^*(\mathfrak{N}\delta_a), m\rangle.\end{aligned}$$
Además
$$\begin{aligned}\langle \delta_b, \theta^*(\mathfrak{N}\delta_a)\rangle &= \langle \delta_a\theta(\delta_b), \mathfrak{N}\rangle \\ &= \langle \delta_{ab} \otimes \delta_{b^{-1}}, \mathfrak{N}\rangle \\ &= \langle \theta(\delta_{ab}), \delta_a\mathfrak{N}\rangle \\ &= \langle \delta_b, \theta^*(\delta_a\mathfrak{N})\delta_a\rangle.\end{aligned}$$

Luego $\theta^*(\mathfrak{N}\delta_a) = \theta^*(\delta_a\mathfrak{N})\delta_a$ para cada a. Por la invariancia de m resulta

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{N}, \delta_a V\rangle &= \langle \theta^*(\delta_a\mathfrak{N})\delta_a, m\rangle \\ &= \langle \theta^*(\delta_a\mathfrak{N}), m\rangle \\ &= \langle \mathfrak{N}, \theta^{**}(m)\delta_a\rangle \\ &= \langle \mathfrak{N}, V\delta_a\rangle\end{aligned}$$

y concluímos que $\delta_a V = V\delta_a$, más aún $fV = Vf$ cualquiera sea $f \in \mathrm{l}^1(G)$.

3. Dados ahora $x \in \mathrm{l}^\infty(G)$ y $f \in \mathrm{l}^1(G)$ escribimos

$$\begin{aligned}\langle x, \hat{\pi}^{**}_{\mathrm{l}^1(G)}(V)f\rangle &= \langle fx, (\pi\theta)^{**}(m)\rangle \\ &= \langle (\pi\theta)^*(fx), m\rangle.\end{aligned}$$

Si además $g \in \mathrm{l}^1(G)$ es

$$\begin{aligned}\langle g, (\pi\theta)^*(fx)\rangle &= \sum_{a\in G} g(a)\langle \delta_e, fx\rangle \\ &= \langle g, 1\rangle\langle f, x\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $(\pi\theta)^*(fx) = \langle f, x\rangle 1$. Luego $\langle x, \hat{\pi}^{**}_{\mathrm{l}^1(G)}(V)f\rangle = \langle f, x\rangle$ y sigue la tesis.

2.10.5. Productos tensoriales e independencia lineal. Sean E-espacio normado sobre un cuerpo K, $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in E$. Entonces $\{x_i\}_{i=1}^n$ es linealmente dependiente si y solo si

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{P}_n} (-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)} = 0_{E\otimes...\otimes E}. \tag{2.10.7}$$

► Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ linealmente independiente con base dual $\{x'_j\}_{j=1}^n$. Por el teorema de Hahn-Banach podemos suponer $\{x'_j\}_{j=1}^n \subseteq E^*$. Le condición resulta suficiente porque

$$\langle \textstyle\sum_{\sigma\in\mathrm{P}_n} (-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)}, x'_1 \otimes ... \otimes x'_n\rangle = 1.$$

Recíprocamente, podemos asumir $n > 1$ y que $x_n = k_1x_1 + ... + k_{n-1}x_{n-1}$ para ciertos $k_1, ..., k_{n-1} \in K$. Indicando T_n al primer miembro en (2.10.7) es

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma:\sigma(i)=n} (-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(i-1)} \otimes \sum_{j=1}^{n-1} k_j x_j \otimes x_{\sigma(i+1)} ... \otimes x_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} k_j \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma:\sigma(i)=n} (-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(i-1)} \otimes x_j \otimes x_{\sigma(i+1)} ... \otimes x_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Hagamos

$\Psi_{n,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma:\sigma(i)=n} (-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(i-1)} \otimes x_j \otimes x_{\sigma(i+1)} ... \otimes x_{\sigma(n)}$.

En todo sumando de $\Psi_{n,j}$ cada término x_j aparece solo dos veces en cada tensor, pues si $\sigma(i) = n$ entonces $\sigma(\{1, ..., n\} - \{i\}) = \{1, ..., n-1\}$. Escribiendo $F_i = \{\sigma \in \mathrm{P}_n : \sigma(i) = n\}$, con $1 \leq i \leq n$, claramente $\{F_1, ..., F_n\}$ es partición disjunta de P_n, en la que cada miembro tiene $(n-1)!$ elementos. Además, si $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, resulta $F_i(ij) = F_j$. Cada permutación de F_i está entonces en correspondencia con una permutación de F_j de signo contrario, por lo que cada $\Psi_{n,j}$ es nulo y sigue la afirmación.

2.10.6. Amenabilidad de $\mathcal{A}(X)$.

1. Sean X espacio de Banach complejo, $\mathcal{A}(X)$ el álgebra de Banach de *operadores aproximables* de X, o sea $\mathcal{A}(X) = \mathcal{F}(X)^-$ en $\mathcal{B}(X)$, donde $\mathcal{F}(X)$ es la clase de *operadores acotados de rango finito*. Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$, $x'_1, ..., x'_n \in X^*$ un *sistema finito bi-ortogonal*, o sea $\langle x_i, x'_j \rangle = \delta_{i,j}$ si $1 \leq i, j \leq n$. Queda inducida un homomorfismo de álgebras de Banach
$$E : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(X),$$
$$E(a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i \odot x'_j.$$
2. Decimos que X tiene la *propiedad* $(\mathbb{A})$ si hay una red de sistemas biortogonales $\{S_l\}_{l \in \Lambda}$, con $S_l = \{x_{i,l}, x'_{j,l} : 1 \leq i, j \leq n_l\}$ y homomorfismos asociados $E_l : \mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(X)$. Además, escribiendo $A_l = E_l(1_{\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})})$ para cada l se verifican las siguientes propiedades:
(a) $\mathrm{Id}_X = \text{s-lím}_{l \in \Lambda} A_l$.
(b) $\mathrm{Id}_{X^*} = \text{s-lím}_{l \in \Lambda} A_l^*$.
(c) Para cada $l \in \Lambda$ hay un subgrupo irreducible $\mathcal{G}_l$ de $\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})$ (V. (2.11).(2)) tal que
$$\kappa \triangleq \sup\{\| E_l(g) \| : g \in \mathcal{G}_l, l \in \Lambda\} < \infty.$$
3. (a) Supongamos que X tiene la propiedad $(\mathbb{A})$ y sea $C \subseteq X$ compacto no vacío. Veamos que $\mathrm{Id}_X |_C = \text{u-lím}_{l \in \Lambda} A_l$.
En efecto, por (2.10.6).(2) $x = \text{lím}_{l \in \Lambda} A_l(x)$ para cada $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$ cada x determina algún $l(x) \in \Lambda$ tal que $\| x - A_l(x) \| < \epsilon$ si $l \geq l(x)$. Por la compacidad de C existen $\nu \in \mathbb{N}$ e $y_1, ..., y_\nu \in C$ tales que $C \subseteq \cup_{j=1}^{\nu} \mathrm{B}_\epsilon(y_j)$. Sea $l_0 \in \Lambda$ tal que $l_0 \geq l(y_j)$ si $1 \leq j \leq \nu$. Dados $l \geq l_0$ y $x \in C$, si $\| x - y_j \| < \epsilon$, tendremos
$$\begin{aligned} \| x - A_l(x) \| &\leq \| x - y_j \| + \| y_j - A_l(y_j) \| + \| A_l(y_j - x) \| \\ &\leq \epsilon(2 + \| A_l \|) \\ &\leq \epsilon(2 + \kappa), \end{aligned}$$
y como ϵ es arbitrario sigue la afirmación.
(b) Luego $\mathcal{A}(X) \in \mathrm{BLAI}$.
Precisamente, sea $A \in \mathcal{A}(X)$. Si $l \in \Lambda$ y $x \in [X]_1$, puesto que $A([X]_1)^-$ es compacto, tenemos

$$\| (A_l A)(x) - A(x) \| \leq \sup_{y \in T([X]_1)^-} \| A_l(y) - y \| .$$

Luego

$$\overline{\text{lím}}_{l\in\Lambda} \| A_l A - A \| \leq \text{lím}_{l\in\Lambda} \sup_{y\in T([X]_1)^-} \| A_l(y) - y \| = 0.$$

(c) Asimismo $\mathcal{A}(X) \in$ BRAI, pues si $x \in [X]_1$ tenemos

$$\begin{aligned}\| (AA_l)(x) - A(x) \| &= \sup_{\|x'\|=1} | \langle (AA_l - A)(x), x' \rangle | \\ &= \sup_{\|x'\|=1} | \langle x, A_l^*(A^*(x')) - A^*(x') \rangle | .\end{aligned}$$

Luego

$$\| AA_l - A \| \leq \sup_{y' \in A^*([X^*]_{\|A^*\|})^-} \| A_l^*(y') - y' \| .$$

Razonando como antes sigue que

$$\overline{\text{lím}}_{l\in\Lambda} \| AA_l - A \| \leq \text{lím}_{l\in\Lambda} \sup_{y'\in A^*([X^*]_{\|A^*\|})^-} \| A_l^*(y') - y' \| = 0.$$

4. Si X tiene la propiedad ($\mathbb{A}$) es amenable (cf. [**70**], Th. 4.2).
► Si $l \in \Lambda$, $d_l = \frac{1}{|\mathcal{G}_l|} \sum_{g\in\mathcal{G}_l} g \hat{\otimes} g^{-1}$ es diagonal de $\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})$. Escribiremos $D_l = (E_l \hat{\otimes} E_l)(d_l)$ en $\mathcal{A}(X) \hat{\otimes} \mathcal{A}(X)$.
Ya sabemos que $\{A_l\}_{l\in\Lambda} \in \text{BLAI}(\mathcal{A}(X))$. Por otra parte si $A \in \mathcal{A}(X)$ resulta

$$\begin{aligned}AD_l - D_l A &= (A - A_l A A_l) D_l \\ &\quad + (A_l A A_l) D_l - D_l (A_l A A_l) \\ &\quad + D_l (A_l A A_l - A).\end{aligned}$$

Fijados $x \in X$ y $x' \in X^*$ tenemos

$$\begin{aligned}A_l(x \odot x') A_l &= A_l(x) \odot A_l^*(x') \\ &= \sum_{i=1}^{n_l} \langle x, x'_{i,l} \rangle x_{i,l} \odot \sum_{j=1}^{n_l} \langle x_{j,l}, x' \rangle x'_{j,l} \\ &= E_l(m_l(x, x')),\end{aligned}$$

con $m_l(x, x') = [\langle x, x'_{i,l} \rangle \langle x_{j,l}, x' \rangle]$ en $\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned}(A_l(x \odot x') A_l) D_l &= E_l(m(x, x'))(E_l \hat{\otimes} E_l)(d_l) \\ &= (E_l \hat{\otimes} E_l)(m(x, x') d_l) \\ &= (E_l \hat{\otimes} E_l)(d_l m(x, x')) \\ &= (E_l \hat{\otimes} E_l)(d_l) E_l(m(x, x')) \\ &= D_l(A_l(x \odot x') A_l)\end{aligned}$$

y podemos inferir que $(A_l A A_l) D_l = D_l (A_l A A_l)$ si $A \in \mathcal{A}(X)$. Como $\{A_l\}_{l\in\Lambda} \in \text{BAI}(\mathcal{A}(X))$ es

$$A - A_l A A_l = A - A_l(AA_l - A) - A_l A \xrightarrow{l\in\Lambda} 0_{\mathcal{A}(X)}$$

y podemos concluir que $AD_l - D_l A \xrightarrow{l\in\Lambda} 0_{\mathcal{A}(X)\hat{\otimes}\mathcal{A}(X)}$.

5. Sean (X,Σ,μ) espacio de medida positiva, $1 < p < \infty$. Entonces $\mathcal{A}(\mathrm{L}^p(X,\Sigma,\mu))$ es amenable.
   ► (i) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $X_1, ..., X_n \in \Sigma$ disjuntos de μ-medida finita positiva se tiene un sistema biortogonal

$$\{X_1, ..., X_n\} : \mu(X_i)^{-1/p}\chi_{X_i},\ \mu(X_j)^{-1/q}\chi_{X_j},$$

   con $1 \le i, j \le n$ y $1/p + 1/q = 1$. Si S es el conjunto de dichos sistemas y $s_1, s_2 \in S$ escribiremos $s_1 \le s_2$ si cada elemento de s_1 es la unión de algunos elementos de s_2. Fijado $s \in S$ escribiremos $n_s = \mid s \mid$.
   (ii) Dado $s = \{X_1, ..., X_{n_s}\} \in S$ tenemos

$$\begin{aligned} &E_s : \mathrm{M}_{n_s}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathrm{L}^p(X,\Sigma,\mu)), \\ &E_s(a)(f) = \sum_{i,j=1}^{n_s} \frac{a_{i.j}}{\mu(X_j)^{1/q}} \int_{X_j} f d\mu \frac{\chi_{X_i}}{\mu(X_i)^{1/p}}. \end{aligned}$$

   Sean $Y \in \Sigma$ de medida finita positiva y $s = \{X_1, ..., X_{n_s}\} \in S$ tal que $\{Y\} \le s$. Existirán $t \in \mathbb{N}$ y $1 \le n_1 < n_2 < ... < n_t \le n_s$ tales que $Y = \cup_{j=1}^t X_{n_j}$ y, con $A_s = E_s(1_{\mathrm{M}_{n_s}(\mathbb{C})})$,

$$\begin{aligned} A_s(\chi_Y) &= \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{\mu(X_{n_j})^{1/q}} \int_{X_{n_j}} \chi_Y d\mu \frac{\chi_{X_{n_j}}}{\mu(X_{n_j})^{1/p}} \\ &= \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{\mu(X_{n_j})} \mu(X_{n_j})\chi_{X_{n_j}} \\ &= \sum_{j=1}^{t} \chi_{X_{n_j}} \\ &= \chi_Y. \end{aligned}$$

   En consecuencia $\lim_{s\in S} A_s(f) = f$ toda vez que f sea función simple.
   (iii) Sean $s \in S$ y $\mathcal{G}_s$ subgrupo irreducible de $\mathcal{M}_{n_s}(\mathbb{C})$ como en

(2.11.3). Dados $f \in \mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, $D_\epsilon A_\sigma \in \mathcal{G}_s$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| E_s(D_\epsilon A_\sigma)(f) \|_p^p &= \| E_s(\sum_{i=1}^{n_s} \epsilon_i e_{i,i} \sum_{j,k=1}^{n_s} \delta_{\sigma(j),k} e_{j,k})(f) \|_p^p \\
&= \| E_s(\sum_{j,k=1}^{n_s} \epsilon_j \delta_{\sigma(j),k} e_{j,k})(f) \|_p^p \\
&= \sum_{j,k=1}^{n_s} \epsilon_j \delta_{\sigma(j),k} (\frac{\chi_{A_j}}{\mu(A_j)^{1/p}} \odot \frac{\chi_{A_k}}{\mu(A_k)^{1/q}})(f) \|_p^p \\
&= \| \sum_{j=1}^{n_s} \frac{\epsilon_j}{\mu(A_{\sigma(j)})^{1/q}} \int_{A_{\sigma(j)}} f d\mu \frac{\chi_{A_j}}{\mu(A_j)^{1/p}} \|_p^p \\
&= \sum_{l=1}^{n_s} | \frac{1}{\mu(A_l)^{1/q}} \int_{A_l} f d\mu |^p \\
&\leq \sum_{l=1}^{n_s} \frac{1}{\mu(A_l)^{p/q}} \| f |_{A_l} \|_p^p \, \mu(A_l)^{p/q} \\
&= \| f \|_p^p .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sup_{s \in S} \sup_{g_s \in \mathcal{G}_s} \| E_s(g_s) \|_p \leq 1$. Dados $f \in \mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ y $\epsilon > 0$ sea $\| f - g \|_p < \epsilon/2$ para cierta función simple $g \in \mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\| A_s(f) - f \|_p &\leq \| A_s(f-g) \|_p + \| A_s(g) - f \|_p \\
&\leq \| f - g \|_p + \| A_s(g) - f \|_p \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \| A_s(g) - f \|_p .
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{s \in S}} \| A_s(f) - f \|_p &\leq \frac{\epsilon}{2} + \| f - g \|_p \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

y así $\mathrm{Id}_{\mathrm{L}^p(X,\Sigma,\mu)} = \text{s-lím}_{s \in S} A_s$.

6. Sea (X, σ, μ) espacio de medida finita positiva. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $X_1, ..., X_n \in \Sigma$ disjuntos el arreglo
$$\{X_1, ..., X_n\} : \tfrac{\chi_{X_i}}{\mu(X_i)}, \chi_{X_j},$$
con $1 \leq i, j \leq n$ es sistema biortogonal de $\mathrm{L}^1(X, \Sigma, \mu)$. Razonando como en (2.10.6).(5) vemos que $\mathrm{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ tiene la propiedad ($\mathbb{A}$). Más aún, claramente esta propiedad también es válida si (X, Σ, μ) es espacio de medida σ-finita.
7. Sea X espacio de Banach cuyo dual tiene la propiedad ($\mathbb{A}$). Entonces X tiene la propiedad ($\mathbb{A}$).
   ► (i) Sea $S = \{S_l\}_{l \in \Lambda}$ alguna red de sistemas biortogonales de X^*,

digamos $S_l = \{x'_{i,l}, x''_{j,l} : 1 \leq i,j \leq n_l\}$, en las condiciones de la propiedad ($\mathbb{A}$). Si $l \in \Lambda$ sean $E_l : \mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(X^*)$ el correspondiente homomorfismo de álgebras y $A_l = E_l(1_{\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})})$. Por el *principio de reflexividad local* [**114**][**116**], dados $F \in \mathcal{P}_f(X)$, $F' \in \mathcal{P}_f(X^*)$ y $l \in \Lambda$ existe un operador lineal

$$T_{l,F,F'} : \mathrm{cl}(\{x''_{1,l}, ..., x''_{n_l,l}\} \cup F) \to X$$

tal que $\| T_{l,F,F'} \| \leq 2$, $T_{l,F,F'} |_F = \mathrm{Id}_F$ y $\langle T_{l,F,F'}(x''_{j,l}), x'\rangle = \langle x', x''_{j,l}\rangle$ para cada $x' \in \mathrm{cl}(F' \cup \{x'_{1,l}, ..., x'_{n_l,l}\})$ y $j = 1, ..., n_l$.[18]

(ii) Queda definida una red de sistemas biortogonales finitos de X, $U = \{U_{l,F,F'}\}_{(l,F,F')\in\Lambda\times\mathcal{P}_f(X)\times\mathcal{P}_f(X^*)}$, con

$$U_{l,F,F'} = \{T_{l,F,F'}(x''_{i,l}), x'_{j,l} : 1 \leq i, j, \leq n_l\}.$$

(iii) Dados l, F, F', x notar que $T_{l,F,F'}(A_l^*(\iota_X(x))) = A_{l,F,F'}(x)$, donde ahora

$$A_{l,F,F'} = \textstyle\sum_{j=1}^{n_l} T_{l,F,F'}(x''_{j,l}) \odot x'_{j,l}.$$

Precisamente,

$$\begin{aligned} A_l^*(\iota_X(x)) &= \sum_{j=1}^{n_l} \langle \iota_X(x), x''_{j,l} \odot \iota_{X^*}(x'_{j,l})\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n_l} \langle x, x'_{j,l}\rangle x''_{j,l}, \end{aligned}$$

de donce

$$\begin{aligned} T_{l,F,F'}[A_l^*(\iota_X(x))] &= \sum_{j=1}^{n_l} \langle x, x'_{j,l}\rangle T_{l,F,F'}(x''_{j,l}) \\ &= A_{l,F,F'}(x). \end{aligned}$$

Sabemos que $\lim_{l\in\Lambda} A_l^*(\iota_X(x)) = \iota_X(x)$ y si $\{\iota_X(x)\} \leq F$ se tiene además que $T_{l,F,F'}(\iota_X(x)) = x$. Entonces

$$\begin{aligned} A_{l,F,F'}(x) &= T_{l,F,F'}(A_l^*(\iota_X(x))) \\ &= T_{l,F,F'}(A_l^*(\iota_X(x)) - \iota_X(x)) + x \end{aligned}$$

y, como $\| T_{l,F,F'} \| \leq 2$ en todo caso, $\mathrm{Id}_X = \text{s-lím}_{l,F,F'} A_{l,F,F'}$.

(iv) Usando (2.10.6).(7) vemos que $A_l |_{F'} = A^*_{l,F,F'}$ cualesquiera sean l, F, de donde $\mathrm{Id}_{X^*} = \text{s-lím}_{l,F,F'} A^*_{l,F,F'}$.

8. Dado un espacio localmente compacto separado X, $\mathrm{C}_0(X)^* \approx \mathrm{M}(X)$. Además $\mathrm{M}(X)$ es *espacio* (AL)[19]. Suponiendo que $\mathrm{M}(X)$ tiene una

---

[18] Sea Z espacio de Banach. El principio de reflexividad establece que si $\epsilon > 0$ y S_1 y S_2 son subespacios finito dimensionales de Z^* y Z^{**} respectivamente, hay una ϵ-*isometría* lineal $T : S_2 \to Z$ (i.e. $1 - \epsilon \leq \| T(z'') \|_Z \leq 1 + \epsilon$ si $\| z'' \|_{Z^{**}} = 1$) de modo que $T |_{S_2\cap Z} = \mathrm{Id}_{S_2\cap Z}$ y $\langle T(z''), z'\rangle = \langle z', z''\rangle$ cuando $z' \in S_1$ y $z'' \in S_2$.

[19] Se llama espacio (AL), o L-espacio, a todo espacio de Banach reticular E en el que la norma es aditiva sobre el cono de elementos positivos de E.

F-unidad[20] existirán un espacio compacto totalmente desconexo Ω_X y cierta medida de Borel completamente aditiva μ_X sobre Ω_X tal que $\mathrm{M}(X) \approx \mathrm{L}^1(\Omega_X, \mu_X)$ [**94**]. En estas condiciones $\mathrm{M}(X) \in (\mathbb{A})$, y por lo tanto también $\mathrm{C}_0(X) \in (\mathbb{A})$, de modo que $\mathcal{A}(\mathrm{C}_0(X))$ y $\mathcal{A}(\mathrm{M}(X))$ son álgebras amenables.

2.10.7. Amenabilidad y la propiedad de Radon-Nykodým.

1. Un espacio de Banach E tiene la *propiedad de Radon-Nikodým*, en cuyo caso escribiremos $E \in \mathrm{RNP}$, si dados cualquier espacio de medida finita (X, Σ, μ) y cualquier operador $T \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^1(X, \Sigma, \mu), E)$ existe $F \in \mathrm{L}^\infty_\mu(X, E)$ tal que $T(f) = \int_E fF d\mu$ si $f \in \mathrm{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ (cf. [**41**], p. 61). P. ej., $\mathbb{C} \in \mathrm{RNP}$.
2. Sean X, Y espacios de Banach, alguno de cuyos duales tiene la propiedad de Radon-Nykodym y alguno de cuyos duales tiene la propiedad de aproximación. Entonces $(X \check{\otimes} Y)^* \approx X^* \hat{\otimes} Y^*$ (cf. [**36**], Corollary 3.19).
3. Sean X, Y, espacios de Banach munidos de la propiedad $(\mathbb{A})$ tales que $(X \check{\otimes} Y)^* \approx X^* \hat{\otimes} Y^*$. Entonces $X \check{\otimes} Y$ tiene la propiedad $(\mathbb{A})$.
   ► (i) Sean $S = \{S_l\}_{l \in L}$, $T = \{T_m\}_{m \in M}$ redes de sistemas biortogonales finitos de X e Y, digamos
   $$S_l = \{x_{i,l}, x'_{j,l} : 1 \le i, j \le n_l\},$$
   $$T_m = \{y_{k,m}, y'_{h,m} : 1 \le k, h \le p_m\}$$
   para cada l, m. Sean $E_l : \mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(X)$ y $F_m : \mathrm{M}_{p_m}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(Y)$ los correspondientes homomorfismos de álgebras e indiquemos también $A_l = E_l(1_{\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})})$ y $B_m = F_m(1_{\mathrm{M}_{p_m}(\mathbb{C})})$. Sean $\mathcal{G}_l$ y $\mathcal{H}_m$ subgrupos irreducibles de $\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C})$ y $\mathrm{M}_{p_m}(\mathbb{C})$ tales que

$$| E | \triangleq \sup_{l \in L} \sup_{g_l \in \mathcal{G}_l} \| E_l(g_l) \| < \infty, \tag{2.10.8}$$

$$| F | \triangleq \sup_{m \in M} \sup_{h_m \in \mathcal{H}_m} \| F_m(h_m) \| < \infty. \tag{2.10.9}$$

(ii) Escribiremos

$$ST = \{S_l T_m : (l, m) \in L \times M\},$$
$$S_l T_m = \{x_{i,l} \otimes y_{k,m}, x'_{j,l} \otimes y'_{h,m} : 1 \le i, j \le n_l, 1 \le k, h \le p_m\}.$$

(iii) Fijados $n, m \in \mathbb{N}$ hay sendas aplicaciones lineales

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \hat{\otimes} \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\alpha_{n,m}} \mathrm{M}_n[\mathrm{M}_m(\mathbb{C})] \xrightarrow{\beta_{n,m}} \mathrm{M}_{nm}(\mathbb{C}),$$

donde $\alpha_{n,m}$ es único de modo que $\alpha_{n,m}(a \otimes u) = (a_{i,j} u)_{1 \le i, j \le n}$ en tensores básicos y

[20] Se llama *F-unidad* de un espacio de Banach reticular E a todo elemento $\mathbf{1} \in E$ tal que para cada $x \in E$ positivo resulta $x \wedge \mathbf{1} > 0$ [**56**]. Por ejemplo, bastaría la existencia de algún elemento $\mathbf{1} \in \mathrm{M}(\mathbf{X})^+$ tal que $\| \mathbf{1} \| = 1$, y $x \le \mathbf{1}$ toda vez que $\| x \| \le 1$.

$$\beta_{n,m}(U) = [U_{i,j}(k,h)]_{1\leq i,j\leq n, 1\leq k,h\leq m}.$$

(a) Como $\mathrm{M}_n[\mathrm{M}_m(\mathbb{C})]$ es álgebra compleja en todo caso resulta

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,m}((a\otimes u)(b\otimes v)) &= \alpha_{n,m}((ab)\otimes(uv)) \\
&= (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}uv)_{1\leq i,j\leq n} \\
&= (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}ub_{k,j}v)_{1\leq i,j\leq n} \\
&= \alpha_{n,m}(a\otimes u)\alpha_{n,m}(b\otimes v)
\end{aligned}$$

y $\alpha_{n,m}$ deviene homomorfismo de álgebras complejas. Indiquemos $e^n_{i,j}$ y $e^m_{k,h}$ a las matrices canónicas de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ y $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ respectivamente. Es fácil ver que $\{e^m_{k,h}e^n_{i,j} : 1 \leq i,j \leq n, 1 \leq k,h \leq m\}$ es base de $\mathrm{M}_n(\mathrm{M}_m(\mathbb{C}))$ en cuanto espacio vectorial complejo. Puesto que $\alpha_{n,m}(e^n_{i,j}\otimes e^m_{k,h}) = (\delta^{i',j'}_{i,j}e^m_{k,h})_{1\leq i',j'\leq n}$ entonces $\alpha_{n,m}$ es epimorfismo y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\hat{\otimes}\mathrm{M}_m(\mathbb{C})) \geq nm$.
Por otra parte, claramente $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\hat{\otimes}\mathrm{M}_m(\mathbb{C})) \leq nm$, i.e. $\alpha_{n,m}$ es isomorfismo de álgebras complejas.

(b) Ahora $\beta_{n,m}$ es suryectivo: Dada una biyección $\mathrm{I}_n\times\mathrm{I}_m \overset{\zeta}{\to} \mathrm{I}_{nm}$ hay únicos $(i,k),(j,h)\in\mathrm{I}_n\times\mathrm{I}_m$ tales que $\zeta(i,k)=p$ y $\zeta(j,h)=q$. Sea $U\in\mathrm{M}_n(\mathrm{M}_m(\mathbb{C}))$ tal que $U_{i',j'}=0_{\mathrm{M}_m(\mathbb{C})}$ si $i'\neq i$ o $j'\neq j$ y $U_{i,j}=e^m_{k,h}$. Así $\beta(U)=e^{nm}_{p,q}$, de donde sigue enseguida la afirmación. Por razones de dimensión $\beta_{n,m}$ deviene isomorfismo de espacios vectoriales complejos.
Notemos que si $U,V\in\mathrm{M}_n(\mathrm{M}_m(\mathbb{C}))$ entonces

$$(UV)_{i,j}(k,h) = \textstyle\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} U_{i,s}(k,t)V_{s,j}(t,h)$$

para cada $i,j\in\{1,...,n\}$, $k,h\in\{1,...,m\}$. Dadas $\mu,\nu\in\mathrm{M}_{nm}(\mathbb{C})$ hagamos

$$(\mu*\nu)(i,j,k,h) = \textstyle\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} \mu(i,s,k,t)\nu(s,j,t,h).$$

Entonces $(\mathrm{M}_{nm}(\mathbb{C}),+,*)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa y

$$\begin{aligned}
\beta_{n,m}(UV)(i,j,k,h) &= (UV)_{i,j}(k,h) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} U_{i,s}(k,t)V_{s,j}(t,h) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} \beta_{n,m}(U)(i,s,k,t)\beta_{n,m}(V)(s,j,t,h) \\
&= (\beta_{n,m}(U)*\beta_{n,m}(V))(i,j,k,h),
\end{aligned}$$

i.e. $\beta_{n,m}$ es isomorfismo de álgebras complejas.
(c) Dados $(l,m) \in L \times M$ sean

$$\begin{aligned}
&G_{l,m} : \mathrm{M}_{n_l p_m}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(X \check{\otimes} Y),\\
&G_{l,m}(U) = \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{k,h=1}^{p_m} U_{i,j}(k,h)(x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{j,l} \otimes y'_{h,m}).
\end{aligned}$$

y $C_{l,m} = G_{l,m}(1_{\mathrm{M}_{n_l p_m}(\mathbb{C})}(\mathbb{C}))$.
Dados $U, V \in \mathrm{M}_{n_l p_m}(\mathbb{C})$ escribimos

$$\begin{aligned}
G_{l,m}(U * V) &= \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{k,h=1}^{p_m} (U * V)_{i,j}(k,h)(x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{j,l} \otimes y'_{h,m})\\
&= \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{k,h=1}^{p_m} \sum_{s=1}^{n_l} \sum_{t=1}^{p_m} U_{i,s,k,t} V_{s,j,t,h}(x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{j,l} \otimes y'_{h,m})\\
&= \sum_{i,s=1}^{n_l} \sum_{k,t=1}^{p_m} \sum_{j=1}^{n_l} \sum_{h=1}^{p_m} U_{i,s,k,t} V_{s,j,t,h}(x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{j,l} \otimes y'_{h,m})\\
&= \sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{k,h=1}^{p_m} \sum_{s=1}^{n_l} \sum_{t=1}^{p_m} U_{i,j,k,h} V_{j,s,h,t}(x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{s,l} \otimes y'_{m,m})\\
&= [\sum_{i,j=1}^{n_l} \sum_{k,h=1}^{p_m} U_{i,j,k,h}(x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{j,l} \otimes y'_{h,m})]\\
&\quad [\sum_{i',j'=1}^{n_l} \sum_{k',h'=1}^{p_m} V_{i',j',k',h'}(x_{i',l} \otimes y_{k',m}) \odot (x'_{j',l} \otimes y'_{h',m})]\\
&= G_{l,m}(U) \circ G_{l,m}(V),
\end{aligned}$$

o sea $G_{l,m}$ es homomorfismo de álgebras complejas entre $(\mathrm{M}_{n_l p_m}(\mathbb{C}), *)$ y $\mathcal{A}(X \check{\otimes} Y)$.
(d) Si $(l,m) \in L \times M$ claramente $\mathrm{cl}(\mathcal{G}_l \hat{\otimes} \mathcal{H}_m) = \mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C}) \hat{\otimes} \mathrm{M}_{p_m}(\mathbb{C})$. Escribamos

$$\mathcal{K}_{l,m} = \{(\beta_{n_l,p_m} \circ \alpha_{n_l,p_m})(g_l \otimes h_m) : (g_l, h_m) \in \mathcal{G}_l \times \mathcal{H}_m\}.$$

Así

$$\mathcal{K}_{l,m} = \{\underline{g}_l \underline{h}_m \triangleq (g^l_{i,i'} h^m_{k,k'})_{i,i',k,k'} : (g_l, h_m) \in \mathcal{G}_l \times \mathcal{H}_m\}.$$

Notar que $\mathcal{K}_{l,m}$ deviene semigrupo irreducible de $gl(n_l p_m, \mathbb{C})$ dado que $\beta_{n_l,p_m} \circ \alpha_{n_l,p_m}$ define un isomorfismo lineal entre $\mathrm{M}_{n_l}(\mathbb{C}) \hat{\otimes} \mathrm{M}_{p_m}(\mathbb{C})$

y $\mathrm{M}_{n_l p_m}(\mathbb{C})$. En tensores básicos $u = x \otimes y$ tenemos

$$\begin{aligned} G_{l,m}(\underline{g}_l \underline{h}_m)(u) &= \sum_{i,i'=1}^{n_l} \sum_{k,k'=1}^{p_m} g^l_{i,i'} h^m_{k,k'}((x_{i,l} \otimes y_{k,m}) \odot (x'_{i',l} \otimes y'_{k',m}))(u) \\ &= \sum_{i,i'=1}^{n_l} \sum_{k,k'=1}^{p_m} g^l_{i,i'} h^m_{k,k'} \langle x, x'_{i',l}\rangle \langle y, y'_{k',m}\rangle x_{i,l} \otimes y_{k,m} \\ &= E_l(g_l)(x) \otimes F_m(h_m)(y), \end{aligned}$$

o sea $G_{l,m}(\underline{g}_l \underline{h}_m) = E_l(g_l) \otimes F_m(h_m)$. Por (2.10.8) y (2.10.9) obtenemos que

$$\sup_{(l,m)\in L\times M} \sup_{\kappa_{l,m}\in \mathcal{K}_{l,m}} \| G_{l,m}(\kappa_{l,m}) \| \leq | E || F | < \infty.$$

(e) Es fácil ver que $C_{l,m} = A_l \check{\otimes} B_m$ para cada l, m, de donde

$$\mathrm{Id}_{X\check{\otimes}Y} = \text{ s-lím}_{(l,m)\in L\times M}\, C_{l,m} \mid_{X\check{\otimes}Y}.$$

(f) Asimismo, en todo caso $C^*_{l,m} \mid_{X^*\otimes Y^*} = A^*_l \otimes B^*_m$. Como suponemos $(X\check{\otimes}Y)^* \approx X^*\hat{\otimes}Y^*$ sigue que $X^*\check{\otimes}Y^*$ será denso en $(X\check{\otimes}Y)^*$. Luego, como $\mathrm{Id}_{X^*} = \text{s-lím}_{l\in L}\, A^*_l$ e $\mathrm{Id}_{Y^*} = \text{s-lím}_{m\in M}\, B^*_m$, inferimos que

$$\mathrm{Id}_{(X\check{\otimes}Y)^*} = \text{ s-lím}_{(l,m)\in L\times M}\, C^*_{l,m} \mid_{(X\check{\otimes}Y)^*}.$$

En definitiva, vía la familia ST de sistemas biortogonales finitos $X\check{\otimes}Y$ tiene la propiedad $(\mathbb{A})$.

4. Sea X espacio de Hausdorff localmente compacto con $\mathrm{M}(X)$ munido de alguna F-unidad. Sea además E un espacio de Banach tal que $E \in (\mathbb{A})$ y $E^* \in \mathrm{RN}$. Como $\mathrm{C}_0(X, E) \approx \mathrm{C}_0(X)\check{\otimes}E$, por (2.10.7).(2) y (2.10.7).(3) sigue que $\mathrm{C}_0(X, E) \in (\mathbb{A})$ y $\mathcal{A}(\mathrm{C}_0(X, E))$ es amenable.
5. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \notin$ AP [**143**]. Luego $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \notin$ BAP, es decir, no tiene la *propiedad de aproximación acotada*, o bien no hay una red acotada en $\mathcal{F}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ convergente uniformemente sobre compactos a $\mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
Como $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \approx (\mathcal{H}\hat{\otimes}\mathcal{H})^*$, $\mathcal{A}(\mathcal{H}\hat{\otimes}\mathcal{H}) \notin$ BAI (cf. [**133**], Corollary 3.1.5).
Por ello $\mathcal{A}(\mathcal{H}\hat{\otimes}\mathcal{H})$ no es amenable y $\mathcal{H}\hat{\otimes}\mathcal{H} \notin (\mathbb{A})$.
Sin embargo $\mathcal{H} \in (\mathbb{A})$ y $\mathcal{H}^* \in$ AP. Además $\mathcal{H} \in$ RNP [**124**].
Por (2.10.7).(2) es $(\mathcal{H}\check{\otimes}\mathcal{H})^* \approx \mathcal{H}\hat{\otimes}\mathcal{H}$.
Por (2.10.7).(3) $\mathcal{H}\check{\otimes}\mathcal{H} \in (\mathbb{A})$. Notar que la afirmación recíproca de (2.10.6)(7) es en general falsa, pues $\mathcal{H}\check{\otimes}\mathcal{H} \in (\mathbb{A})$ pero $(\mathcal{H}\check{\otimes}\mathcal{H})^* \notin (\mathbb{A})$.

2.10.8. Sobre la biproyectividad de $\mathbf{L}^1(G)$. [**78**] Sea G grupo localmente compacto con medida de Haar invariante a izquierda λ. Son equivalentes:
(i) $\mathrm{L}^1(G)$ es biproyectiva.
(ii) $\mathbb{C} \in \mathrm{L}^1(G)$-Mod es proyectivo, donde $x \cdot c = c \int_G x d\lambda$ para $c \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathrm{L}^1(G)$.
(iii) G es compacto.
► (i $\Rightarrow$ ii) Veamos que $\hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G),\mathbb{C}} : \mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es isomorfismo de espacios

de Banach. Por un lado. esta aplicación es suryectiva pues $\mathrm{L}^1(G) \in$ LBAI y, por el teorema de Cohen, cada $c \in \mathbb{C}$ es del tipo $c = x \cdot d$ para ciertos $d \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathrm{L}^1(G)$. Luego $c = \hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G),\mathbb{C}}(x \otimes d)$. Supongamos $\hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G),\mathbb{C}}(u) = 0$ con $u = \sum_{n=1}^\infty x_n \otimes c_n$. Entonces

$$u = \textstyle\sum_{n=1}^\infty x_n c_n \otimes 1 = \hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G),\mathbb{C}}(u) \otimes 1 = 0_A \otimes 1 = 0_{\mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathbb{C}}.$$

Finalmente basta invocar el teorema de la función abierta. (ii $\Rightarrow$ iii) La aplicación $\sigma : \mathrm{L}^1(G) \to \mathbb{C}$, $\sigma(x) = \int_G x d\lambda$ es epimorfismo admisible de $\mathrm{L}^1(G)$-módulos a izquierda. Puesto que $\mathbb{C}$ es proyectivo sea $\rho \in_{\mathrm{L}^1(G)} \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathrm{L}^1(G))$ tal que $\sigma \circ \rho = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Indicando $x_0 = \rho(1)$, si $x \in \mathrm{L}^1(G)$ resulta

$$x * x_0 = x * \rho(1) = \rho(x \cdot 1) = \rho(\sigma(x)1) = \sigma(x)x_0.$$

Entonces dados $g, h \in G$ tendremos

$$\begin{aligned}(x *_g x_0(h) &= \int_G x(k)_g x_0(k^{-1}h)dk \\ &= \int_G x(k)x_0(gk^{-1}h)dk \\ &= \Delta(g)(x_g * x_0)(h) \\ &= \Delta(g)\sigma(x_g)x_0(h) \\ &= \sigma(x)x_0(h),\end{aligned}$$

o bien $x *_g x_0 = \sigma(x)x_0$ cualesquiera sean $x \in \mathrm{L}^1(G)$ y $g \in G$. Podemos considerar una aproximación de la unidad $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en $\mathrm{L}^1(G)$ en la que $e_\alpha \geq 0$ a.e. λ y $\sigma(e_\alpha) = 1$ para cada $\alpha \in A$. Luego $x_0 =_g x_0$ a.e. λ para todo g, y

$$1 = \sigma(\rho(1)) = \sigma(x_0) = \textstyle\int_G x_0(g)d\lambda(g) = \int_G {}_g x_0(1)d\lambda(g) = x_0(1)\lambda(G).$$

Siendo $\lambda(G)$-finito G debe ser compacto (cf. [**82**], Th. 15.9).
(iii $\Rightarrow$ i) Por (2.7.2) bastará ver que $\hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G)}$ es una retracción. Para ello:
(a) Hay un único isomorfismo de espacios de Banach

$$\Im : \mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G) \to \mathrm{L}^1(G, \mathrm{L}^1(G)) \tag{2.10.10}$$

tal que $\Im(x \otimes y)(g_1)(g_2) = x_1(g_1)x_2(g_2)$ para cada x_1, x_2, g_1, g_2.
(b) Si H es otro grupo localmente compacto, $\mathrm{L}^1(G\times H) \in \mathrm{L}^1(G)$-Mod-$\mathrm{L}^1(H)$ si para $\gamma \in \mathrm{L}^1(G)$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{L}^1(H)$, $\mathrm{A} \in \mathrm{L}^1(G \times H)$, $g \in G$ y $h \in H$ hacemos

$$\begin{aligned}(\gamma \cdot \mathrm{A})(g, h) &= (\gamma * \mathrm{A}(\circ, h))(g), \\ (\mathrm{A} \cdot \mathfrak{h})(g, h) &= (\mathrm{A}(g, \circ) * \mathfrak{h})(h).\end{aligned}$$

(c) Asimismo $\mathrm{L}^1(G, \mathrm{L}^1(H)) \in \mathrm{L}^1(G)$-Mod-$\mathrm{L}^1(H)$ haciendo, para $\gamma \in \mathrm{L}^1(G)$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{L}^1(H)$, $\Phi \in \mathrm{L}^1(G, \mathrm{L}^1(H))$, $g \in G$ y $h \in H$,

$$\begin{aligned}(\gamma \cdot \Phi)(g)(h) &= \int_G \gamma(g_1)\Phi(g_1^{-1}g)(h)dg_1, \\ (\Phi \cdot \mathfrak{h})(g)(h) &= \int_H \Phi(g)(h_1)\mathfrak{h}(h_1^{-1}h)dh_1.\end{aligned}$$

(d) Hay un isomorfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos de Banach

(2.10.11) $$\beth_{G,H} : \mathrm{L}^1(G, \mathrm{L}^1(H)) \to \mathrm{L}^1(G \times H)$$

tal que $\beth_{G,H}(\Phi)(g,h) = \Phi(g)(h)$ para cada Φ, g, h.
(e) Por (2.10.10) y (2.10.11) hay un isomorfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos de Banach

(2.10.12) $$\mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G) \approx \mathrm{L}^1(G \times G).$$

(f) Definimos $\rho : \mathrm{L}^1(G) \to \mathrm{L}^1(G \times G)$ tal que $\rho(x)(g_1, g_2) = x(g_1 g_2)$ para cada $x \in \mathrm{L}^1(G)$ y $g_1, g_2 \in G$. Puesto que
$\int_{G\times G} \mid x(g_1 g_2) \mid d(g_1 \times g_2) = \int_G \int_G \mid x(g_1 g_2) \mid dg_2 dg_1 = \parallel x \parallel_{\mathrm{L}^1(G)} \lambda(G) < \infty$
ρ está bien definida y claramente es operador lineal acotado. Más aún, se trata de un morfismo de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos.
(g) Sea $p : \mathrm{L}^1(G \times G) \to \mathrm{L}^1(G)$, $p(\mathrm{A})(g) = \int_G \mathrm{A}(g_1, g_1^{-1} g) dg_1$. Entonces p es morfismo acotado de $\mathrm{L}^1(G)$-bimódulos de Banach.
(h) Dados $x_1, x_2 \in \mathrm{L}^1(G)$, resulta

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G)}(x_1 \otimes x_2)(g) &= \int_G x_1(g_1) x_2(g_1^{-1} g) dg \\ &= \int_G (x_1 \times x_2)(g_1, g_1^{-1} g) dg_1, \end{aligned}$$

donde $x_1 \times x_2 \in \mathrm{L}^1(G \times G)$ es tal que $\Im(x_1 \otimes x_2) = \beth_{G,G}^{-1}(x_1 \times x_2)$ y $\hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G)}(x_1 \otimes x_2) = p(x_1 \times x_2)$.
(i) En consecuencia $\hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G)} = p \circ \beth_{G,G} \circ \Im$ y

$$(\beth_{G,G}\Im)^{-1} \circ \rho \in_{\mathrm{L}^1(G)} \mathcal{B}_{\mathrm{L}^1(G)}(\mathrm{L}^1(G), \mathrm{L}^1(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^1(G))$$

es inverso a derecha de $\hat{\pi}_{\mathrm{L}^1(G)}$.

2.10.9. Biproyectividad de álgebras amenables compactas. Toda álgebra de Banach amenable *compacta* [21] A es biproyectiva [**115**].
► (i) Sean I ideal cerrado de A y $\{d_l\}_{l\in L}$ diagonal aproximada de A, digamos $d_l = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l \otimes b_n^l$ para cada $l \in L$. Sea Λ un *ultrafiltro*[22] de L que

[21] Un álgebra de Banach A es *compacta* a izquierda (derecha) si cada operador de multiplicación a izquierda (derecha) es compacto. Decimos que A es compacta si lo es a izquierda y derecha.

[22] Sea X un conjunto no vacío. Llamamos *filtro de* X a cada subfamilia no vacía $\mathfrak{F}$ de partes de X tal que cada uno de sus miembros es no vacío y, dados $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$, existe $\gamma \in \mathfrak{F}$ tal que $\gamma \subseteq \alpha \cap \beta$.
Si X es espacio topológico, $x \in X$ y $\mathfrak{F}$ es un filtro de X, escribimos $\mathfrak{F} \to x$ si para cada $U \in \mathcal{U}_x$ existe $\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $\alpha \subseteq U$.
Si $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ son filtros de X escribimos $\mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{G}$ si para cada $g \in \mathfrak{G}$ existe $f \in \mathfrak{F}$ tal que $f \subseteq g$. Decimos que $\mathfrak{F}$ *está subordinado a* $\mathfrak{G}$. En particular, si $\mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{G}$ y $\mathfrak{G} \to x$ entonces $\mathfrak{F} \to x$.
Por ejemplo, sean A espacio topológico y $x : \mathbb{N} \to X$ una sucesión. Entonces

$$\mathfrak{F}_x = \{\varphi_n(x) = \{x_n, x_{n+1}, ...\} : n \in \mathbb{N}\}$$

es un filtro de X. Sea además $x' : \mathbb{N} \to X$ una subsucesión de x, digamos $x' = \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\mathfrak{F}_{x'} \hookrightarrow \mathfrak{F}_n$, pues $\varphi_{k_n}(x') \subseteq \varphi_n(x)$ para cada n.

domina el orden de L. Veremos que existe $\eta \in_A \mathcal{B}_A(A/I, A\hat{\otimes}(A/I))$ inverso a derecha de $\hat{\pi}_{A,A/I}$. El resultado seguirá después considerando $I = (0_A)$.
(ii) Sea $\eta(a + I) = \text{lím}_{l\in\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l \otimes (b_n^l a + I)$. Veamos que η está bien definida. Evidentemente $\eta(a+I)$ es independiente de a, mas debemos ver la existencia del límite.
(iii) Por la amenabilidad A tiene aproximación acotada de la identidad. Dado $a \in A$, por el teorema de factorización de Cohen existen $a, b \in A$ tales que $a = bc$. Si $p_I : A \to A/I$ es la proyección al cociente, fijado $l \in \Lambda$ escribimos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l \otimes (b_n^l a + I) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l \otimes (b_n^l b + I)(c + I)\\ &= (\text{Id}_A \otimes ((R_{c+I} \circ p_I))(d_l b)\\ &= (\text{Id}_A \otimes (p_I \circ R_c))(d_l b)\\ &= (\text{Id}_A \otimes (p_I \circ R_c))(d_l b - b d_l) + (L_b \otimes (p_I \circ R_c))(d_l).\end{aligned}$$

Pero $\text{lím}_{l\in\Lambda}(d_l b - b d_l) = 0_{A\hat{\otimes}A}$ y $L_b \otimes (p_I \circ R_c) \in \mathcal{K}(A\hat{\otimes}A)$ porque L_b y $(p_I \circ R_c)$ son operadores compactos (cf. [**85**], Th. 3; v. (2.11.19)). Sigue entonces la buena definición de η.
(iv) Claramente η es es homomorfismo de A-bimódulos de Banach a derecha.
(v) Dado $d \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}d\eta(a + I) &= \lim_{l\in\Lambda}(\text{Id}_A \otimes (R_{a+I} \circ p_I))(d d_l)\\ &= \lim_{l\in\Lambda}(\text{Id}_A \otimes (R_{a+I} \circ p_I))(d_l d)\\ &= \lim_{l\in\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l \otimes (b_n^l d a + I)\\ &= \eta(da + I),\end{aligned}$$

o sea η es también homomorfismo de A-módulos de Banach a izquierda.
(vi) Finalmente para cada $a \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}(\hat{\pi}_{A,A/I} \circ \eta)(a + I) &= \lim_{l\in\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^l b_n^l a + I)\\ &= \lim_{l\in\Lambda}(\hat{\pi}_A(d_l)a + I).\\ &= a + I.\end{aligned}$$

2.10.10. Biproyectividad de álgebras de Banach abelianas.

1. Sea A álgebra de Banach compleja. Se llama *espectro de*A al conjunto de homomorfismos complejos no nulos sobre A, que indicamos $\sigma(A)$. Es fácil ver que $\sigma(A) \subseteq [A^*]_1$ y, cuando I es unitaria, $\sigma(A) \subseteq \partial[A^*]_1$.

Un filtro $\mathfrak{M}$ de X se llama *ultrafiltro* si dado cualquier filtro $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{M}$ resulta $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.
Dado cualquier filtro $\mathfrak{F}$ hay un ultrafiltro $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ (cf. [**43**], Th. 7.3). Se observa entonces que $\mathfrak{F} \to x$ si y solo si $\mathfrak{M} \to x$.

2. Sea A un álgebra de Banach compleja abeliana e I ideal cerrado de A. Hay un w^*-homeomorfismo $\sigma(I) \approx \sigma(A) - I^\perp$.
3. Sea A un álgebra de Banach compleja abeliana e I ideal cerrado de A. Sea Γ_1 el único operador acotado tal que
$$A_+\hat{\otimes} I \xrightarrow{\Gamma_1} \mathrm{C}(\sigma(A_+) \times \sigma(A_+)),$$
$$\Gamma_1(a_+ \otimes b)(\alpha, \beta) = \alpha(a_+)\beta(b)$$
en tensores básicos y cualesquiera α, β.
Hay en $\mathrm{C}(\sigma(A_+) \times \sigma(A_+))$ una estructura de A-bimódulo de Banach haciendo $(aF)(s,t) = s(a)F(s,t)$ y $(Fb)(s,t) = F(s,t)t(b)$ para cualesquiera $a, b \in A$, $s, t \in \sigma(A_+)$ y $F \in C(\sigma(A_+) \times \sigma(A_+))$. De esta manera Γ_1 deviene morfismo de A-bimódulos de Banach.
4. Dados $\rho \in_A \mathcal{B}_A(I, A_+\hat{\otimes} I)$, $(s,t) \in \sigma(I) \times \sigma(A_+)$ y $a, b \in I$ tales que $s(a) = s(b) = 1$. En particular, existe $s_1 \in \sigma(A) - I^\perp$ único tal que $s_1 \mid_I = s$ (cf. [**60**], [**61**]; [**96**], Lemma 2.2.15) y resulta
$$\begin{aligned}(\Gamma_1 \circ \rho)(a)(s_1, t) &= s(b)\Gamma_1(\rho(a))(s_1, t)\\ &= (b\Gamma_1(\rho(a))(s_1, t)\\ &= (\Gamma_1 \circ \rho)(ab)(s_1, t)\\ &= (a\Gamma_1(\rho(b))(s_1, t)\\ &= s(a)\Gamma_1(\rho(b))(s, t)\\ &= (\Gamma_1 \circ \rho)(b)(s_1, t).\end{aligned}$$
Podemos definir
$$\mathcal{E}_\rho : \sigma(I) \times \sigma(A_+) \to \mathbb{C},$$
$$\mathcal{E}_\rho(s,t) = (\Gamma_1 \circ \rho)(a)(s_1, t),$$
el *esqueleto de* ρ.
5. Fijemos $(s,t) \in \sigma(I) \times \sigma(A_+)$. Sean $s_1 \in \sigma(A_+) - I^\perp$ único tal que $s_1 \mid_I = s$ y $a \in I$ tal que $s(a) = 1$. Indiquemos
$$U = \{u \in \sigma(I) :\mid 1 - u(a) \mid < 1\}.$$
Entonces U es w^*-entorno de s y $u(a) \neq 0$ si $u \in U$. Más aún,
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(u,t) &= (\Gamma_1 \circ \rho)(\frac{a}{u(a)})(u,t)\\ &= \frac{(\Gamma_1 \circ \rho)(a)(u,t)}{u(a)}\end{aligned}$$
si $u \in U$. Luego $\mathcal{E}_\rho$ deviene continua en (s,t). Como (s,t) es arbitrario, $\mathcal{E}_\rho$ resulta continua.
6. Consideremos el diagrama conmutativo
$$\begin{array}{ccccc} A_+\hat{\otimes} I & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{A_+}\otimes\iota} & A_+\hat{\otimes} A_+ & \xrightarrow{\Gamma_2} & \mathrm{C}(\sigma(A_+) \times \sigma(A_+)) \\ \hat{\pi}_{A_+,I}\downarrow & & \downarrow \hat{\pi}_{A_+} & & \downarrow \Delta \\ I & \xrightarrow{\iota} & A_+ & \xrightarrow{\Gamma_{A_+}} & \mathrm{C}(\sigma(A_+)) \end{array}$$

en el que $\Delta(F)(\psi) = F(\psi, \psi)$ si $F \in \mathrm{C}(\sigma(A_+) \times \sigma(A_+))$ y $\psi \in \sigma(A_+)$. Notamos que $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ (\mathrm{Id}_{A_+} \otimes \iota)$. Dado $(s,t) \in \sigma(I) \times (\sigma(A) \cap I^{\perp})$, con $s_1 \in \sigma(A) - I^{\perp}$ tal que $s_1 \mid_I = s$ y $a \in I$ tal que $s(a) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(s,t) &= \Gamma_1(\rho(a))(s_1,t)\\ &= \Gamma_2(\rho(a))(s_1,t)\\ &= \hat{\pi}_{\mathbb{C}}(s_1 \otimes t)(\rho(a))\\ &= 0.\end{aligned}$$

7. Supongamos que I es ideal proyectivo y sea $\rho \in_A \mathcal{B}(I, A_+ \hat{\otimes} I)$ tal que $\hat{\pi}_{A_+,I} \circ \rho = \mathrm{Id}_I$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(s,s_1) &= \Gamma_1(\rho(a))(s_1,s_1)\\ &= \Delta(\Gamma_1(\rho(a))(s_1)\\ &= \Gamma_{A_+}(\hat{\pi}_{A_+,I}(\rho(a)))(s_1)\\ &= s(a)\\ &= 1.\end{aligned}$$

8. (a) Si un álgebra de Banach abeliana A es biproyectiva su espectro es discreto. (b) En particular, si Ω es discreto, $\mathrm{C}_0(\Omega)$ es biproyectiva.
► (a) Sean $\rho \in_A \mathcal{B}_A(A, A\hat{\otimes}A)$ retracto de $\hat{\pi}_A$ y $\mathcal{E}_\rho$ su función esqueleto. Dados $s,t \in \sigma(A)$ distintos existe $a \in A$ tal que $s(a) = 1$ y $t(a) = 0$. Sean $s_1, t_1 \in \sigma(A_+)$ únicos tales que $s_1 \mid_A = s$ y $t_1 \mid_{A_+} = t$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(s,t_1) &= (\Gamma_1 \circ \rho)(a^2)(s_1,t_1)\\ &= (\Gamma_1(\rho(a))a)(s_1,t_1)\\ &= \Gamma_1(\rho(a))(s_1,t_1)t(a)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego $\mathcal{E}_\rho(s,t_1) = \chi_{\{(s_1,t_1)\}}$ y por la continuidad de la función esqueleto $\sigma(A)$ deviene discreto.
►(b)(i) Sea Ω espacio discreto. Evidentemente Ω es localmente compacto y *paracompacto*.[23]
(b)(ii) Hay entonces una *2-partición de la unidad* $\{f_\mu\}_{\mu\in M}$ de Ω. O sea, $\{f_\mu\}_{\mu\in M} \subseteq \mathrm{C}_{00}(\Omega, [0,1])$, para cada $w \in \Omega$ es

$$\mid \{\mu \in M : f_\mu(w) > 0\} \mid \leq 2,$$

y dado $K \subseteq \Omega$ compacto existen $n \in \mathbb{N}$ y $\mu_1, ..., \mu_n \in M$ tales que $\sum_{j=1}^n f_{\mu_j} = 1$ sobre K (cf. [**80**], Appendix A).
(b)(iii) Hagamos $g_\mu = f_\mu^{1/2}$ para cada μ.
(b)(iv) Dado $F \in \mathcal{P}_f(M)$ sea $u_F = \sum_{\mu\in F} g_\mu \otimes g_\mu$ y consideremos

[23] Un espacio topológico de Hausdorff T es *paracompacto* si cada cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in A}$ de T admite un subrecubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_b\}_{b\in B}$ localmente finito de T. O sea para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $V_b \subseteq U_a$ y además, para todo $t \in T$ hay algún entorno abierto W de t tal que $W \cap V_b \neq \emptyset$ solo para finitos b's en B.

$\mathcal{P}_f(M)$ ordenado parcialmente por inclusión.
(b)(v) Sea $h \in \mathrm{C}_0(\Omega)$ y veamos que $\{hu_F\}_{F\in\mathcal{P}_f(M)}$ es red de Cauchy. Para ello, dado $\epsilon > 0$ sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mu_1, ..., \mu_n \in M$ tales que $\sum_{j=1}^n f_{\mu_j} = 1$ sobre el compacto $\{| h |\geq \epsilon\}$. Sean $F_0 = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{P}_f(M)$ tales que $F_0 \leq F_1$ y $F_0 \leq F_2$. Podemos escribir

$$hu_{F_1} - hu_{F_2} = \sum_{\mu\in F_1-F_0} hg_\mu \otimes g_\mu - \sum_{\mu\in F_2-F_0} hg_\mu \otimes g_\mu.$$

Sean $r_i =| F_i - F_0 |$ y ζ_1, ζ_2 raíces r_i-unitarias de la identidad, $i = 1, 2$.
(b)(vi) En general, sean X, Y espacios normados complejos y sea $u \in X\hat{\otimes}Y$ del tipo $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Dada una raíz n-ésima de la unidad ζ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\sum_{l=1}^n \zeta^{lk}x_l) \otimes (\sum_{m=1}^n \zeta^{-mk}y_m) &= \sum_{l,m=1}^n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \zeta^{(l-m)k}x_l \otimes y_m\\ &= \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\\ &= u.\end{aligned}$$

Decimos que u es *elemento C-diagonal* si hay una constante $C > 0$ tal que para cada raíz n-ésima de la unidad ζ se tiene

$$\| \textstyle\sum_{l=1}^n \zeta^l x_l \|\| \sum_{m=1}^n \zeta^{-m}y_m \|\leq C.$$

Entonces resulta $\| u \|_\wedge\leq C$.
(b)(vii) Sea $F_i - F_0 = \{\mu_{i,j}\}_{1\leq j\leq r_i}$, $i = 1, 2$. Notemos que

$$\cup_{j=1}^{r_i}\{g_{\mu_{i,j}} > 0\} \subseteq \Omega - \{| h |\geq \epsilon\}$$

y resulta

$$\| h \textstyle\sum_{j=1}^{r_i} \zeta_i^j g_{\mu_{i,j}} \|\| \sum_{j=1}^{r_i} \zeta_i^{-j}g_{\mu_{i,j}} \|\leq 4\epsilon$$

En consecuencia $hu_{F_1} - hu_{F_2} \|_\wedge\leq 4\epsilon$.
(b)(viii) Definimos entonces $\rho : \mathrm{C}_0(\Omega) \to \mathrm{C}_0(\Omega)\hat{\otimes}\mathrm{C}_0(\Omega)$ de modo que $\rho(h) = \mathrm{lím}_{F\in\mathcal{P}_f(M)}(hu_F)$. Claramente ρ es morfismo acotado de $\mathrm{C}_0(\Omega)$-módulos a izquierda y para cada h tenemos

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{\mathrm{C}_0(\Omega)}(\rho(h)) &= \lim_{F\in\mathcal{P}_f(M)} h\sum_{\mu\in F} g_\mu^2\\ &= \lim_{F\in\mathcal{P}_f(M)} h\sum_{\mu\in F} f_\mu\\ &= h.\end{aligned}$$

Análogamente se muestra la proyectividad a derecha de $\mathrm{C}_0(\Omega)$ y sigue la afirmación.

2.10.11. Inyectividad de $\mathcal{B}(X,Y)$.

1. Dados A-álgebra de Banach y X, Y A-módulos de Banach a izquierda resulta $\mathcal{B}(X,Y) \in A$-Mod-A de modo que $(aT)(x) = aT(x)$ y $(Ta)(x) = T(ax)$ para cada a, x, T.
2. Sea $A^e = A_1 \hat{\otimes} A_1^{op}$ el *álgebra envolvente de* A . Hay una correspondencia biunívoca natural entre A-Mod-A y A^e-Mod.
3. En particular, $\mathcal{B}(X,Y)$ deviene A^e-módulo de Banach a izquierda[24], y por ello $\mathcal{B}(A^e, \mathcal{B}(X,Y))$ es A^e-bimódulo de Banach[25]. Asimismo, $\mathcal{B}(A_1, Y)$ resulta A^e-módulo de Banach a izquierda. Además $A_1 \hat{\otimes} X$ es A-bimódulo de Banach de modo que
$$a(b_1 \otimes x) = b_1 \otimes (ax) \text{ y } (a_1 \otimes x)b = (a_1 b) \otimes x$$
en tensores básicos. Luego $A_1 \hat{\otimes} X$ es A^e-módulo de Banach a izquierda. Luego $\mathcal{B}(A_1 \hat{\otimes} X, \mathcal{B}(A_1, Y))$ es A^e-bimódulo de Banach[26].
4. Hay un isomorfismo de A^e-bimódulos de Banach a izquierda
$$\Gamma : \mathcal{B}(A^e, \mathcal{B}(X,Y)) \to \mathcal{B}(A_1 \hat{\otimes} X, \mathcal{B}(A_1, Y)).$$
(a) Para esto, dado $\Upsilon \in \mathcal{B}(A^e, \mathcal{B}(X,Y))$ sea $\Upsilon_1 : A_1 \times X \to \mathcal{B}(A_1, Y)$ tal que $\Upsilon_1(a_1, x)(b_1) = \Upsilon(a_1 \otimes b_1)(x)$. Entonces Υ_1 está bien definido porque $b_1 \to \Upsilon(a_1 \otimes b_1)(x)$ es $\mathbb{C}$-lineal y
$$\begin{aligned} \| \Upsilon(a_1 \otimes b_1)(x) \| &\leq \| \Upsilon(a_1 \otimes b_1) \| \| x \| \\ &\leq \| \Upsilon \| \| a_1 \otimes b_1 \|_\wedge \| x \| \\ &= \| \Upsilon \| \| a_1 \| \| b_1 \| \| x \|, \end{aligned}$$
o sea $\| \Upsilon_1(a_1, x) \| \leq \| \Upsilon \| \| a_1 \| \| x \|$. Además Υ_1 es $\mathbb{C}$-bilineal, de modo que existe $\Gamma(\Upsilon) : A_1 \hat{\otimes} X \to \mathcal{B}(A_1, Y)$ lineal acotado único tal que $\Gamma(\Upsilon)(a_1 \otimes x) = \Upsilon_1(a_1, x)$ en tensores básicos. En particular, sea $u \in A_1 \otimes X$, digamos $u = \sum_{i=1}^\infty a_1^i \otimes x_i$. Entonces
$$\begin{aligned} \| \Gamma(\Upsilon)(u) \| &= \| \sum_{i=1}^\infty \Upsilon_1(a_1^i, x_i) \| \\ &\leq \| \Upsilon \| \sum_{i=1}^\infty \| a_1^i \| \| x_i \|, \end{aligned}$$

---

[24] Dados $a_1, b_1 \in A_1$ y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ será $(a_1 \otimes b_1)T = a_1 T b_1$ en $\mathcal{B}(X,Y)$.

[25] Dados $a_1, b_1, c_1, d_1 \in A_1$ y $\Upsilon \in \mathcal{B}(A^e, \mathcal{B}(X,Y))$ es
$$\begin{aligned} &[(a_1 \otimes b_1)\Upsilon](c_1 \otimes d_1) = a_1 \Upsilon(c_1 \otimes d_1) b_1, \\ &[\Upsilon(a_1 \otimes b_1)](c_1 \otimes d_1) = \Upsilon((a_1 c_1) \otimes (d_1 b_1)). \end{aligned}$$

[26] Dados $\chi \in \mathcal{B}(A_1 \hat{\otimes} X, \mathcal{B}(A_1, Y))$, $a_1, b_1, c_1 \in A_1$ y $x \in X$ es
$$\begin{aligned} &[(a_1 \otimes b_1)\chi](c_1 \otimes x) = a_1 \chi(c_1 \otimes x) b_1, \\ &[\chi(a_1 \otimes b_1)](c_1 \otimes x) = \chi((a_1 c_1 b_1) \otimes x). \end{aligned}$$

o sea $\| \Gamma(\Upsilon)(u) \| \leq \| \Upsilon \| \| u \|_\wedge$. Así Γ resulta bien definido, lineal y contractivo.
(b) Dado $\mathcal{Q} \in \mathcal{B}(A_1 \hat{\otimes} X, \mathcal{B}(A_1, Y))$ sea $\mathcal{Q}_1 : A_1 \times A_1^{op} \to \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\mathcal{Q}_1(a_1, b_1)(x) = \mathcal{Q}(a_1 \otimes x)(b_1)$. Es fácil ver que $\mathcal{Q}_1$ es forma bilineal acotada bien definida y determina $\Theta(\mathcal{Q}) \in \mathcal{B}(A^e, \mathcal{B}(X,Y))$ único tal que $\Theta(\mathcal{Q})(a_1 \otimes b_1) = \mathcal{Q}_1(a_1, b_1)$ en tensores básicos. Más aún, Θ es operador lineal acotado y Γ y Θ son operadores recíprocos.
(c) Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\Gamma((a_1 \otimes b_1)\Upsilon)(c_1 \otimes x)(d_1) &= ((a_1 \otimes b_1)\Upsilon)_1(c_1, x)(d_1) \\
&= ((a_1 \otimes b_1)\Upsilon)(c_1 \otimes d_1)(x) \\
&= (a_1 \Upsilon(c_1 \otimes d_1) b_1)(x) \\
&= a_1 \Upsilon(c_1 \otimes d_1)(b_1 x) \\
&= a_1 \Gamma(\Upsilon)(c_1 \otimes (b_1 x))(d_1) \\
&= a_1 \Gamma(\Upsilon)(b_1 (c_1 \otimes x))(d_1) \\
&= (a_1 \Gamma(\Upsilon) b_1)(c_1 \otimes x)(d_1) \\
&= ((a_1 \otimes b_1)\Gamma(\Upsilon))(c_1 \otimes x)(d_1).
\end{aligned}$$

5. Sean X un A-módulo proyectivo de Banach a izquierda e Y un A-módulo de Banach inyectivo a izquierda. Entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ es A-bimódulo de Banach inyectivo.
► (i) Sean $\rho_X \in_A \mathcal{B}(X, A_1 \hat{\otimes} X)$ y $\rho_Y \in_A \mathcal{B}(\mathcal{B}(A_1, Y), Y)$ tales que $\hat{\pi}_{A_1, X} \circ \rho_X = \mathrm{Id}_X$ y $\rho_Y \circ \Delta^{A_1, Y} = \mathrm{Id}_Y$ (V. (2.6.7)). Debemos probar que existe
$$\rho_{\mathcal{B}(X,Y)} \in_A \mathcal{B}[\mathcal{B}(A_1, \mathcal{B}(X,Y)), \mathcal{B}(X,Y)]$$
tal que $\rho_{\mathcal{B}(X,Y)} \circ \Delta^{A_1, \mathcal{B}(X,Y)} = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(X,Y)}$.
(ii) Dada $h \in \mathcal{B}(A_1, \mathcal{B}(X,Y))$ sea $L(h) \in \mathcal{B}(A^e, \mathcal{B}(X,Y))$ único tal que $L(h)(a_1 \otimes b_1) = h(b_1) a_1$ en tensores básicos.
Definimos $\rho_{\mathcal{B}(X,Y)}(h) = \rho_Y \circ \Gamma(L(h)) \circ \rho_X$.
Dado $x \in X$ sea $\rho_X(x) = \sum_{n=1}^\infty a_1^n \otimes x_n$, con $x = \sum_{n=1}^\infty a_1^n x_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma(L(h))(\rho_X(x))(b_1) &= \sum_{n=1}^\infty \Gamma(L(h))(a_1^n \otimes x_n)(b_1) \\
&= \sum_{n=1}^\infty L(h)(a_1^n \otimes b_1)(x_n) \\
&= \sum_{n=1}^\infty (h(b_1) a_1^n)(x_n) \\
&= h(b_1)(x).
\end{aligned}$$

Si $l \in \mathcal{B}(X,Y)$, con $h = \Delta^{A_1,\mathcal{B}(X,Y)}(l)$, es $h(b_1) = b_1 l$. O sea

$$\begin{aligned}\Gamma(L(h))(\rho_X(x))(b_1) &= (b_1 l)(x)\\ &= b_1 l(x)\\ &= \Delta^{A_1,Y}(l(x))(b_1).\end{aligned}$$

Luego $\Gamma(L(h))\circ\rho_X = \Delta^{A_1,Y}\circ l$, de donde $\rho_{\mathcal{B}(X,Y)}(\Delta^{A_1,\mathcal{B}(X,Y)}(l)) = l$.
(iii) Notar que $\mathcal{B}(A^e,\mathcal{B}(X,Y)) \in A$-Mod mediante $a\Upsilon = (a\otimes 1)\Upsilon$ para $a \in A$ y $\Upsilon \in \mathcal{B}(A^e,\mathcal{B}(X,Y))$.
Entonces $\mathcal{B}(A_1,\mathcal{B}(X,Y)) \in A$-Mod y si $h \in \mathcal{B}(A_1,\mathcal{B}(X,Y))$, $a \in A$ y $a_1, b_1 \in A_1$ tenemos

$$\begin{aligned}L(ah)(a_1\otimes b_1) &= (ah)(b_1)a_1\\ &= ah(b_1)a_1\\ &= aL(h)(a_1\otimes b_1)\\ &= (aL(h))(a_1\otimes b_1),\end{aligned}$$

o sea L es morfismo de A-módulos a izquierda. Finalmente usando (2.10.11)(4)(c) tenemos

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{B}(X,Y)}(ah) &= \rho_Y\circ\Gamma(L(ah))\circ\rho_X\\ &= \rho_Y\circ\Gamma[(a\otimes 1)L(h)]\circ\rho_X\\ &= \rho_Y\circ(a\otimes 1)\Gamma(L(h))\circ\rho_X\\ &= \rho_Y\circ a\Gamma(L(h))\circ\rho_X\\ &= a\rho_{\mathcal{B}(X,Y)}(h).\end{aligned}$$

2.10.12. Playicidad de $F\hat{\otimes}G$.

1. Sea F un A-módulo de Banach playo a izquierda. Por (2.6.9) F^* es A-módulo de Banach inyectivo a derecha.
2. Luego $\hat{\pi}^*_{A_+,F}$ deviene *coretracción*, o sea existe $\alpha \in \mathcal{B}_A((A_+\hat{\otimes}F)^*, F^*)$ tal que $\alpha\circ\hat{\pi}^*_{A_+,F} = \mathrm{Id}_{F^*}$.
3. Dado $G \in$ Mod-A consideremos el functor
$$\mathcal{B}(G,?) : \text{Mod-}A \to A\text{-Mod-}A.$$
Así se obtiene la coretracción
$$\mathcal{B}(G,F^*) \xrightarrow{u=\mathcal{B}(G,\hat{\pi}^*_{A_+,F})} \mathcal{B}(G,(A_+\hat{\otimes}F)^*),\ U \to \hat{\pi}^*_{A_+,F}\circ U.$$
Haciendo $v = \mathcal{B}(G,\alpha)$ será $v\circ u = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(G,F^*)}$.
4. Por otra parte hay un único isomorfismo de espacios de Banach
$$L : \mathcal{B}(G,(A_+\hat{\otimes}F)^*) \to \mathcal{B}(A_+\hat{\otimes}F, G^*)$$
tal que $L(\Theta)(a_+\otimes f)(g) = \Theta(g)(a_+\otimes f)$ cualesquiera sean $a_+ \in A_+$, $f \in F$, $g \in G$.
5. Por (2.10.11)(5), $\mathcal{B}(A_+\hat{\otimes}F, G^*)$ es A-bimódulo de Banach inyectivo.
6. $\mathcal{B}(G,F^*) \in A$-Mod-A si $(aT)(g) = T(ga)$ y $(Ta)(g) = T(g)a$ para $a \in A$, $g \in G$ y $T \in \mathcal{B}(G,F^*)$.

7. $\mathcal{B}(G, F^*)$ resulta inyectivo: sean dados A-bimódulos de Banach M, N, un monomorfismo $s \in_A \mathcal{B}_A(M, N)$ y $t \in_A \mathcal{B}_A(M, \mathcal{B}(G, F^*))$. Entonces $L \circ u \circ t \in_A \mathcal{B}_A(M, \mathcal{B}(G, \mathcal{B}(A_+ \hat{\otimes} F, G^*)))$. Por lo tanto existe $\eta \in_A \mathcal{B}_A(N, \mathcal{B}(G, \mathcal{B}(A_+ \hat{\otimes} F, G^*)))$ tal que $\eta \circ s = L \circ u \circ t$. En consecuencia $t = (v \circ L^{-1} \circ \eta) \circ s$.
8. En las condiciones anteriores $(F \hat{\otimes} G)^* \approx \mathcal{B}(G, F^*)$ resulta inyectivo, o bien $F \hat{\otimes} G$ es A-bimódulo playo.

2.10.13. Super-amenabilidad de álgebras de Banach duales amenables. Sea A un álgebra de Banach dual, amenable, con las propiedades de aproximación y de Radon-Nikodým, munida de una familia $\{I_l\}_{l \in L}$ de ideales w^*-cerrados de codimensión finita tal que $\cap_{l \in L} I_l = (0_A)$. Entonces A es super-amenable (cf. [**134**], Th. 3.1).
► (i) Sea A_* un predual de A y $\alpha : A \to (A_*)^*$ isomorfismo de A-bimódulos de Banach. Por (2.10.7).(2) $A \hat{\otimes} A \approx (A_* \check{\otimes} A_*)^*$.
(ii) Sea $\{m_j\}_{j \in J}$ diagonal aproximada de A. Hay inducida una w^*-topología en $A \hat{\otimes} A$, de modo que considerando eventualmente alguna subred podemos suponer existe $m \in A \hat{\otimes} A$ tal que $m = w^*\text{-lím}_{j \in J}\, m_j$.
(iii) Por la amenabilidad A tiene aproximación acotada de la unidad, y por (2.8).(3) deviene unitaria, con unidad e.
(iv) Por (2.3).(2) bastará ver que $am = ma$ para todo $a \in A$ y $\hat{\pi}_A(m) = e$.
(v) Dado $a \in A$ es

$$am - ma = w^*\text{- lím}_{j \in J}(am_j - m_j a) = 0_{A \hat{\otimes} A}.$$

(vi) Fijado $l \in L$ sea $\iota_l : {}^\perp \alpha(I_l) \hookrightarrow A_*$ la inclusión. Definimos

$$\begin{aligned} &F_l : \frac{A}{I_l} \to ({}^\perp \alpha(I_l))^*, \\ &F_l(a + I_l)(a_*) = \langle a_*, \alpha(a) \rangle \text{ si } a_* \in {}^\perp \alpha(I_l). \end{aligned}$$

Claramente F_l está bien definida y es operador acotado entre espacios de Banach, con $\| F_l \| \leq \| \alpha \|$.
Dado $a + I_l \in \ker(F_l)$ es $\alpha(a) \in ({}^\perp \alpha(I_l))^\perp$, o bien $\alpha(a) \in \alpha(I_l)^{-w^*}$. Como I_l es w^*-cerrado $\alpha(a) \in \alpha(I_l)$, y como α es inyectiva $a \in I_l$, o sea $a + I_l = 0_{A/I_l}$.
Sea $g \in ({}^\perp \alpha(I_l))^*$. Por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\overline{g} \in (A_*)^*$ de g. Además existe $b \in A$ tal que $\alpha(b) = \overline{g}$. Dado $a_* \in {}^\perp \alpha(I_l)$ tenemos

$$\begin{aligned} F_l(b + I_l)(a_*) &= \langle a_*, \alpha(b) \rangle \\ &= \langle a_*, \overline{g} \rangle \\ &= \langle a_*, g \rangle, \end{aligned}$$

i.e. $F_l(b + I_l) = g$. Por el teorema de la función abierta F_l es isomorfismo de espacios de Banach.
(vii) Como I_l tiene codimensión finita A/I_l es finito-dimensional, de modo que tiene las propiedades de aproximación y de Radón-Nikodým. Además ${}^\perp \alpha(I_l) = (A/I_l)_*$ y

$$\tfrac{A}{I_l}\hat{\otimes}\tfrac{A}{I_l} \approx ({}^{\perp}\alpha(I_l)\check{\otimes}{}^{\perp}\alpha(I_l))^*.$$

(viii) Notar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A\hat{\otimes}A & \xrightarrow{\alpha\otimes\alpha} & (A_*\check{\otimes}A_*)^* \\ p_l\otimes p_l\downarrow & & \downarrow(\iota_l\otimes\iota_l)^* \\ \tfrac{A}{I_l}\hat{\otimes}\tfrac{A}{I_l} & \xrightarrow{F_l\otimes F_l} & ({}^{\perp}\alpha(I_l)\check{\otimes}{}^{\perp}\alpha(I_l))^* \end{array}$$

es conmutativo. Luego $p_l\otimes p_l$ es w^*-continuo: Sea $n_i \xrightarrow{w^*} 0_{A\hat{\otimes}A}$. Dados $a_*, b_* \in^{\perp} \alpha(I_l)$ resulta

$$\begin{aligned} \langle a_*\otimes b_*, (F_l\otimes F_l)((p_l\otimes p_l)(n_i))\rangle &= \langle a_*\otimes b_*, (\iota_l\otimes\iota_l)^*((\alpha\otimes\alpha)(n_i))\rangle \\ &= \langle a_*\otimes b_*, (\alpha\otimes\alpha)(n_i)\rangle \\ &\to 0, \end{aligned}$$

o sea $(p_l\otimes p_l)(n_i) \xrightarrow{w^*} 0_{\frac{A}{I_l}\hat{\otimes}\frac{A}{I_l}}$.

(ix) Así $(p_l\otimes p_l)(m) = w^*\text{-lím}_{j\in J}(p_l\otimes p_l)(m_j)$. Como $\frac{A}{I_l}\hat{\otimes}\frac{A}{I_l}$ es finito-dimensional el límite anterior es límite fuerte y

$$\begin{aligned} p_l(\hat{\pi}_A(m)) &= \hat{\pi}_{A/I_l}((p_l\otimes p_l)(m)) \\ &= \lim_{j\in J}\hat{\pi}_{A/I_l}((p_l\otimes p_l)(m_j)) \\ &= \lim_{j\in J} p_l(\hat{\pi}_A(m_j)) \\ &= p_l(e). \end{aligned}$$

Como $l\in L$ es arbitrario deducimos, por la hipótesis, que $\hat{\pi}_A(m) = e$.

2.10.14. Amenabilidad, Connes-amenabilidad y amenabilidad interna de grupos localmente compactos.

1. (Cf. [**133**], Th. 4.4.13) Si G es grupo localmente compacto amenable entonces $\mathrm{M}(G)$ es Connes-amenable.
   ► (i) Por (2.8.6)(i) bastará ver que $\mathrm{L}^1(G)^{-w^*} = \mathrm{M}(G)$.
   (ii) Supongamos existe $\mu\in\mathrm{M}(G)-\mathrm{L}^1(G)^{-w^*}$. Debe ser $\mu\neq 0_{\mathrm{M}(G)}$.
   (iii) Por el teorema de Hahn-Banach existe un operador lineal w^*-continuo $\Theta:\mathrm{M}(G)\to\mathbb{C}$ tal que $\Theta(\mu)=1$ y $\Theta\mid_{\mathrm{L}^1(G)}\equiv 0$.
   (iv) Por la w^*-continuidad existe $\mathfrak{f}\in\mathrm{C}_0(G)$ tal que $\Theta(\zeta)=\int_G \mathfrak{f}d\zeta$ para cada $\zeta\in\mathrm{M}(G)$.
   (v) En particular $\int_G \mathfrak{f}xd\lambda = 0$ para cada $x\in\mathrm{L}^1(G)$, donde λ denota la medida de Haar invariante a izquierda de G.
   (vi) Como $\int_G \mathfrak{f}d\mu = 1$ existe $g_0\in G$ tal que $\mathfrak{f}(g_0)\neq 0$.
   (vii) Como G es localmente compacto existe un entorno compacto K_1 de g_0. Sea además U entorno abierto de g_0 tal que $U\subseteq K_1$ y $\mathfrak{f}(g)\neq 0$ si $g\in U$.
   (viii) Sea K_2 subconjunto compacto de U tal que $g_0\in\mathrm{int}(K_2)$ (cf. [**132**], Th. 2.7).
   (ix) Por el lema de Urysohn existe $\mathfrak{g}:G\to[0,1]$ función continua

nula al exterior de U tal que $\mathfrak{g}\mid_{K_2}\equiv 1$. Observar que $\mathfrak{g}\in \mathrm{C}_{00}(G)$.
(x) Sea $x=\bar{\mathfrak{f}}\mathfrak{g}$. Entonces $x\in \mathrm{C}_{00}(G)$, por lo que $x\in \mathrm{L}^1(G)$. Además

$$\begin{aligned}\int_G fx d\lambda &= \int_G \mid \mathfrak{f}\mid^2 \mathfrak{g} d\lambda\\ &\geq \int_{K_2} \mid \mathfrak{f}\mid^2 d\lambda\\ &\geq \min_{K_2} \mid \mathfrak{f}\mid^2 \lambda(\mathrm{int}(K_2))>0,\end{aligned}$$

en contradicción con (v). Luego sigue la tesis.

2. Si $\mathrm{M}(G)$ es Connes-amenable y $1<p<\infty$ entonces $\mathrm{PM}_p(G)$ es Connes-amenable.
Basta notar que la representación $\Lambda_p:\mathrm{M}(G)\to\mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G))$ es (w^*,w^*)-continua, de modo que $\mathrm{im}(\Lambda_p)\subseteq \mathrm{PM}_p(G)$. Además es claro que $\mathrm{im}(\Lambda_p)$ es denso en $\mathrm{PM}_p(G)$. Además $\mathrm{PM}_p(G)$ es álgebra de Banach dual y, siendo $\mathrm{M}(G)$ Connes-amenable basta aplicar (2.8.6)(ii) (V. (2.11.25) y (2.11.26)).
3. Si $\mathrm{PM}_p(G)$ es Connes-amenable si $1<p<\infty$ entonces $\mathrm{VN}(G)$ es Connes-amenable.
La afirmación es trivial, porque $\mathrm{VN}(G)=\mathrm{P}_2(G)$ es el *álgebra de von Neumann* del grupo G.
4. Si $\mathrm{VN}(G)$ es Connes-amenable entonces $\mathrm{PM}_p(G)$ es Connes-amenable para algún $p\in(1,\infty)$.
5. Si G es internamente amenable y $\mathrm{PM}_p(G)$ es Connes-amenable para algún $p\in(1,\infty)$ entonces G es amenable.
► (i) Por (2.10.2).(5) hay alguna red $\{f_j\}_{j\in J}$ en $\mathcal{P}(G)$ tal que

$$\text{lím}_{j\in J}\parallel \tau_x(f_j)-f_j\parallel_1=0$$

cualquiera sea $x\in G$.
(ii) Si $s,t\in[0,+\infty)$ y $1\leq p<\infty$ se tiene

$$\mid s-t\mid^p\leq\mid t^p-s^p\mid\leq p\mid t-s\mid(s+t)^{p-1}. \tag{2.10.13}$$

Claramente podemos soponer $p>1$. Para la desigualdad izquierda, por homogeneidad bastará ver que la función $f(u)=1-u^p-(1-u)^p$ es no negativa si $0\leq u\leq 1$. Si $0\leq u<1$ tenemos

$$f'(u)=p(1-u)^{p-1}(1-(\tfrac{u}{1-u})^{p-1}).$$

La derivada de f es no negativa en $[0,1/2]$ y no positiva en $[1/2,1)$. En particular, $f(0)=f(1)=0$ y $f(1/2)=1-2^{-(p-1)}$. Como f es creciente en $[0,1/2]$ y decreciente en $[1/2,1]$ vemos que resulta no negativa.
Asimismo, por homogeneidad para la desigualdad de la derecha en (2.10.13) bastaría ver que la función

$$g(u)=p(1-u)(1+u)^{p-1}+u^p-1$$

es no negativa si si $0 \leq u \leq 1$. Precisamente, por el teorema del valor medio para cada $u \in (0,1)$ existe $\xi \in (0,u)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{g(u)}{1-u} &= p(1+u)^{p-1} - \frac{1-u^p}{1-u} \\ &= p[(1+u)^{p-1} - \xi^{p-1}] \\ &> 0,\end{aligned}$$

$g(0) = p-1$ y $g(1) = 0$.
(iii) Para $1 \leq p < \infty$ indiquemos

$$\lambda_p : G \to \mathcal{B}(\mathrm{L}^p), \lambda_p(x)(f)(y) = f(x^{-1}y),$$
$$\rho_p : G \to \mathcal{B}(\mathrm{L}^p), \rho_p(x)(f)(y) = f(yx)\Delta_G(x)^{1/p}.$$

Se trata de representaciones y antirepresentaciones isométricas de G en $\mathrm{L}^p(G)$ respectivamente. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{j\in J} \| \tau_x(f_j) - f_j \|_1 \\ &= \lim_{j\in J} \int_G | f_j(x^{-1}yx)\Delta_G(x) - f_j(y) | \, d\lambda(y) \\ &= \lim_{j\in J} \int_G | \lambda_1(x)(f_j)(yx)\Delta_G(x) - f_j(y) | \, d\lambda(y) \\ &= \lim_{j\in J} \int_G | \rho_1(x)(\lambda_1(x)(f_j))(y) - f_j(y) | \, d\lambda(y) \\ &= \lim_{j\in J} \| \rho_1(x)(\lambda_1(x)(f_j)) - f_j \|_1 \\ &= \lim_{j\in J} \| \lambda_1(x)(f_j) - \rho_1(x^{-1})(f_j) \|_1 \; . \end{aligned} \tag{2.10.14}$$

(iv) Con $1/p + 1/q = 1$ y $j \in J$ sean $\xi_j = f_j^{1/p}$ y $\eta_j = f_j^{1/q}$. Por (2.10.13) y (2.10.14) tenemos

$$\begin{aligned}0 &\leq \overline{\lim}_{j\in J} \| \lambda_p(x^{-1})(\xi_j) - \rho_p(x)(\xi_j) \|_p^p \\ &= \overline{\lim}_{j\in J} \int_G | \xi_j(xt) - \xi(tx)\Delta_G(x)^{1/p} |^p \, d\lambda(p) \\ &\leq \overline{\lim}_{j\in J} \leq \int_G | f_j(xt) - f_j(tx)\Delta_G(t) | \, d\lambda(t) \\ &= \overline{\lim}_{j\in J} \| \lambda_1(x^{-1})(f_j) - \rho_1(x)(f_j) \|_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Análogamente $\lim_{j\in J} \| \lambda_q(x^{-1})(\eta_j) - \rho_q(x)(\eta_j) \|_q = 0$.
(v) Si $\mathrm{PM}_p(G)$ es Connes amenable sea $\theta : \mathrm{PM}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G))$ la inclusión. Entonces θ resulta (w^*, w^*)-continua. En efecto, sea $0_{\mathrm{PM}_p(G)} = w^*\text{-}\lim_{i\in I} \mathfrak{p}_i$, i.e. $0_{A_q(G)^*} = w^*\text{-}\lim_{i\in I} F_q(\mathfrak{p}_i)$ (V. (2.11.26)).
Sea $u \in \mathrm{L}^p(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^q(G)$, $u = \sum_{n=1}^\infty f_n \otimes g_n$, con

$$\textstyle\sum_{n=1}^\infty \| f_n \|_p \| g_n \|_q < \infty \; .$$

El elemento $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} g_n * \check{f}_n$ pertenece a $\mathrm{A}_q(G)$ y tenemos

$$\operatorname{lím}_{i\in I}\langle u, \theta(\mathfrak{p}_i)\rangle = \operatorname{lím}_{i\in I}\langle \zeta, F_q(\mathfrak{p}_i)\rangle = 0.$$

Por (2.8.9) hay alguna cuasi-expectación $\mathcal{Q} : \mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G)) \to \mathrm{PM}_p(G)'$.

(vi) Dado $\phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$ sea $M_\phi \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G))$ tal que $M_\phi(f) = \phi f$ para cada f. Definimos $\langle \phi, m_j\rangle = \langle \mathcal{Q}(M_\phi)(f_j), g_j\rangle$ para cada $j \in J$. Sea además $\mathcal{J}$ un ultrafiltro tal que $\mathcal{J} \hookrightarrow J$ y sea

$$\langle \phi, m\rangle \triangleq \operatorname{lím}_{j\in\mathcal{J}}\langle \mathcal{Q}(M_\phi)(f_j), g_j\rangle.$$

(vii) Evidentemente $m \in \mathrm{L}^\infty(G)^*$. Sean ahora $a, b \in G$, $\phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$, $x \in \mathrm{L}^1(G)$ y $f \in \mathrm{L}^p(G)$. Tenemos

$$\rho_p(a^{-1}) \circ M_\phi \circ \rho_p(a) = M_{\phi*\delta_a}. \tag{2.10.15}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\Lambda_p(xd\lambda)(\rho_p(a)(f))(b) &= (x * (\rho_p(a)(f)))(b)\\
&= \int_G x(c) f(c^{-1}ba)\Delta_G(a)^{1/p} dc\\
&= \int_G x(c^{-1}) f(cba))\Delta_G(a)^{1/p}\Delta_G(c^{-1}) dc\\
&= \int_G f(e) x(bae^{-1})\Delta_G(a)^{1/p}\Delta_G(e^{-1}) de\\
&= \Delta_G(a)^{1/p}\int_G f(e^{-1}) x(bae) de\\
&= \Delta_G(a)^{1/p}\int_G x(c) f(c^{-1}ba) dc\\
&= (x * f)(ba)\Delta_G(a)^{1/p}\\
&= \rho_p(a)(x * f)(b)\\
&= \rho_p(a)(\Delta_p(xd\lambda)(f))(b),
\end{aligned}$$

o sea $\rho_p(G) \subseteq \mathrm{PM}_p(G)'$.

(viii) Por (2.10.15) y la observación anterior resulta

$$\begin{aligned}
\langle \phi * \delta_a, m\rangle &= \operatorname*{lím}_{j\in\mathcal{J}}\langle \mathcal{Q}(M_{\phi*\delta_a})(f_j), g_j\rangle\\
&= \operatorname*{lím}_{j\in\mathcal{J}}\langle (\rho_p(a^{-1}) \circ \mathcal{Q}(M_\phi) \circ \rho_p(a))(f_j), g_j\rangle\\
&= \operatorname*{lím}_{j\in\mathcal{J}}\langle \mathcal{Q}(M_\phi)(\rho_p(a)(f_j)), \rho_q(a)(g_j)\rangle\\
&= \operatorname*{lím}_{j\in\mathcal{J}}\langle \mathcal{Q}(M_\phi)(f_j), g_j\rangle\\
&= \langle \phi, m\rangle
\end{aligned}$$

(ix) Como $\mathcal{Q}$ es un proyector y $\mathrm{Id}_{\mathrm{L}^1(G)} \in \mathrm{PM}_p(G)'$ necesariamente $\mathcal{Q}(\mathrm{Id}_{\mathrm{L}^p(G)}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}^p(G)}$. En consecuencia $\langle 1, m\rangle = 1$.

(ix-a) Sean $K = \sigma(\mathrm{L}^\infty(G))$ y $\mathrm{L}^\infty(G) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{C}(K)$ la transformada de

Gélfand de $\mathrm{L}^\infty(G)$. Entonces γ es isomorfismo isométrico de C*-álgebras y K es compacto. Por el teorema de Riesz $\mathrm{M}(K) \xrightarrow{\gamma^*} \mathrm{L}^\infty(G)^*$ es isomorfismo de espacios de Banach y existe $\mu \in \mathrm{M}(K)$ único tal que $m = \mu \circ \gamma$, i.e.

$$\langle \phi, m\rangle = \int_K k(\phi) d\mu(k)$$

para cada $k \in K$.
(ix-b) Tendremos $\mu = \mathfrak{h} \mid \mu \mid$ para cierta función compleja $\mathfrak{h}$ sobre K (cf. [**132**], Th. 6.12).
(ix-c) Fijado $a \in G$ sea $R_a \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^\infty(G))$ tal que $R_a(\phi) = \phi_a$. Entonces R_a induce un (w^*, w^*)-isomorfismo $\overline{R}_a : K \to K$ tal que $\overline{R}_a(k) = k \circ R_a$ para cada $k \in K$.
(ix-d) Con la notación anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle \gamma(\phi_a), \mid \mu \mid\rangle &= \langle \phi_a, \gamma^*(\mid \mu \mid)\rangle \\ &= \int_K k(\phi_a) d \mid \mu \mid (k) \\ &= \int_K k(\phi) d \mid \mu \mid (k) \\ &= \langle \gamma(\phi), \mid \mu \mid\rangle,\end{aligned}$$

o sea $\mid \mu \mid$ es G-invariante a derecha.
(ix-e) Sean $\nu = \frac{|\mu|}{\|\mu\|}$ y $n = \gamma^*(\nu)$ en $\mathrm{L}^\infty(G)^*$. Entonces

$$\langle 1_{\mathrm{L}^\infty(G)}, n\rangle = \langle 1_{\mathrm{C}(K)}, \nu\rangle = 1 = \| n \| .$$

Además

$$\begin{aligned}\langle \phi_a, n\rangle &= \langle \gamma(\phi_a), \nu\rangle \\ &= \langle \gamma(\phi), \nu\rangle \\ &= \langle \phi, n\rangle,\end{aligned}$$

de donde sigue la amenabilidad de G.

2.10.15. Sobre fuerte Connes-amenabilidad.

1. Sea A un álgebra de Banach dual, X un A-bimódulo de Banach, $x' \in X^*$. Decimos que x es *elemento* w^* de A si las aplicaciones $a \to ax'$ y $a \to x'a$ de A en X^* son w^*-continuas.
2. Un álgebra de Banach dual unitaria A es *fuertemente Connes-amenable* si toda derivación w^*-continua, con valores en el dual de un bimódulo de Banach unitario X y cuya imágen consta de elementos w^*, es necesariamente interna.
3. Sean A álgebra de Banach dual y $\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ el espacio de formas bilineales separadamente w^*-continuas. Entonces $\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{B}^2(A;\mathbb{C})$. En efecto, fijados $f \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ y $a \in A$ sea ${}_af : A \to \mathbb{C}$ tal que ${}_af(b) = f(a,b)$. Evidentemente ${}_af$ es $\mathbb{C}$-lineal y, por el teorema del gráfico cerrado, ${}_af \in A^*$. Análogamente, si $f_b(a) = f(a,b)$ para cada $a, b \in A$ se tiene $f_b \in A^*$. Por el teorema de acotación uniforme

tendremos o $\sup_{\|a\|=1} \mid f(a,b) \mid= +\infty$ para algún $b \in B$. Como la segunda posibilidad no puede darse $\sup_{\|a\|=\|b\|=1} \mid f(a,b) \mid< +\infty$, de donde la afirmación.

4. $\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ es cerrado en $\mathcal{B}^2(A;\mathbb{C})$.
▶ Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ y $f_n \to f$ en $\mathcal{B}^2(A;\mathbb{C})$. Sean $a \in A$ y $\{b_j\}_{j\in J}$ red en A tal que $b_j \xrightarrow{w^*} 0_A$. Por el teorema de acotación uniforme existe $\kappa > 0$ tal que $\| b_j \|\leq \kappa$ para todo j. Dados n, j tenemos
$$\begin{aligned} \mid f(a,b_j) \mid &\leq\mid f(a,b_j) - f_n(a,b_j) \mid + \mid f_n(a,b_j) \mid \\ &\leq\| f - f_n \|\| a \| \kappa + \mid f_n(a,b_j) \mid . \end{aligned}$$
Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| f - f_{n_0} \|\| a \| \kappa < \epsilon$. Luego $\overline{\lim}_{j\in J} \mid f(a,b_j) \mid\leq \epsilon$ y f es w^*-continua en la segunda variable. Análogamente se ve que f es w^*-continua en la primer variable.
5. $\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ es A-subbimódulo de $\mathcal{B}^2(A;\mathbb{C})$.
Dados $f \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ y $a, x, y \in A$ hagamos $(af)(x,y) = f(x,ya)$ y $(fa)(x,y) = f(ax,y)$. Es fácil ver que $af, fa \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ y sigue enseguida la afirmación. En particular, con estas acciones F deviene homomorfismo de A-bimódulos de Banach.
6. Sea $F : \mathcal{B}^2(A;\mathbb{C}) \to (A\hat{\otimes}A)^*$ el isomorfismo tal que para cualesquiera f, a, b es $F(f)(a \otimes b) = f(a,b)$. Entonces
$$F^{-1}((\alpha \circ \hat{\pi}_A)^*(\iota_{A_*}(A_*))) \subseteq \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C}).$$
En efecto, sea $f = F^{-1}((\alpha\circ\hat{\pi}_A)^*(\iota_{A_*}(a_*))$ para cierto $a_* \in A_*$. Luego
$$f(a,b) = F^{-1}(F(f))(a,b) = F(f)(a \otimes b) = \langle a_*, \alpha(ab)\rangle.$$
Como el producto de A es w^*-separadamente contínuo $f \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$.
7. Sea $U = F^{-1} \circ (\alpha \circ \hat{\pi}_A)^* \circ \iota_{A_*}$ en ${}_A\mathcal{B}_A[A_*, \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})]$ y hagamos $\Delta_{w^*} = \alpha^{-1} \circ U^*$. Obtenemos un homomorfismo de A-bimódulos de Banach $\Delta_{w^*} : \mathcal{B}^2_{w^*}(A,\mathbb{C})^* \to A$.
8. Sea A un álgebra de Banach dual unitaria. Llamamos *diagonal virtual normal de* A a todo $W \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A,\mathbb{C})^*$ tal que $aW = Wa$ y $a\Delta_{w^*}(W) = a$ para cada $a \in A$.
9. Toda álgebra de Banach dual A con alguna diagonal virtual normal W es fuertemente Connes-amenable (cf. [**134**], Th. 4.7).
▶ (i) Sean X un A bimódulo de Banach unitario y $D \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(A, X^*)$ derivación cuya imágen consta de w^*-elementos. Veremos que D es derivación interna.
(ii) Dado $f \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ escribiremos
$$\langle f, W\rangle = \int\int_{A\times A} f(a,b)dW(a,b)).$$
(iii) Sea ahora $x'_D \in X^*$ tal que
$$\langle x, x'_D\rangle = \int\int_{A\times A}\langle x, aD(b)\rangle dW(a,b)$$
para cada $x \in X$. Notemos que x'_D está bien definida para cada x porque $D(b)$ es siempre elemento w^*, el producto de A es w^*-separadamente continuo y D es w^*-continuo.

(iv) Dado $c \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle x, cx'_D\rangle &= \langle xc, x'_D\rangle \\
&= \int\int_{A\times A} \langle x, caD(b)\rangle dW(a,b) \\
&= \int\int_{A\times A} \langle x, aD(bc)\rangle dW(a,b) \text{ (pues } cW = Wc) \\
&= \int\int_{A\times A} \langle x, aD(b)c + abD(c)\rangle dW(a,b) \\
&= \langle x, x'_D c\rangle + \int\int_{A\times A} \langle x, abD(c)\rangle dW(a,b). \qquad (2.10.16)
\end{aligned}$$

(v) Dados $x \in X$ y $x' \in X^*$ un w^*-elemento sea $f_{x,x'}(a,b) = \langle x, abx'\rangle$ para $a, b \in A$. Evidentemente $f_{x,x'} \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$.
(vi) Sea $\eta : X \to \mathbb{C}$ tal que $\eta(x) = \langle f_{x,x'}, W\rangle$ para cada $x \in X$. Evidentemente η es $\mathbb{C}$-lineal y $\| \eta \|\leq\| x' \|\| W \|$, i.e. $\eta \in X^*$.
(vii) Veamos que $\eta = x'$. En efecto, podemos suponer $x' \neq 0_{X^*}$. Sea $x_1 \in X$ tal que $\langle x_1, x'\rangle = 1$. Entonces $X = \ker(x') \oplus \mathbb{C}x_1$. Dado $x \in X$ existe $x_0 \in \ker(x')$ único tal que $x = x_0 + \langle x, x'\rangle x_1$.
(viii) Podemos escribir $x'x_0 = \alpha^*(a''_{*0})$ para cierto $a''_{*0} \in (A_*)^{**}$ único. Sea $\{a_j\}_{j\in J}$ red de A tal que $0_A = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, a_j$, o equivalentemente $0_{(A_*)^*} = w^*\text{-lím}_{j\in J}\, \alpha(a_j)$. En todo caso

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(a_j), a''_{*0}\rangle &= \langle a_j, x'x_0\rangle \\
&= \langle x_0 a_j, x'\rangle \\
&= f_{x_0,x'}(a_j, e),
\end{aligned}$$

i.e. $\text{lím}_{j\in J}\langle \alpha(a_j), a''_{*0}\rangle = 0$. Por lo tanto $a''_{*0} = \iota_{A_*}(a_{*0})$ para $a_{*0} \in A_*$ único.
(ix) Así $f_{x_0,x'} = U(a_{*0})$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\eta(x_0) &= \langle f_{x_0,x'}, W\rangle \\
&= \langle U(a_{*0}), W\rangle \\
&= \langle a_*, U^*(W)\rangle \\
&= \langle U^*(W), a''_{*0}\rangle \\
&= \langle U^*(W), (\alpha^{-1})^*(x'x_0)\rangle \\
&= \langle \Delta_{w^*}(W), x'x_0\rangle \\
&= \langle e, x'x_0\rangle \\
&= \langle x_0, x'\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(x) Análogamente se razona reemplazando x_0 por x_1 para concluir que $\eta(x_1) = 1$ e, inmediatamente, que $\eta = x'$.

(xi) Por (2.10.16) tenemos ahora

$$\begin{aligned}\langle x, cx'_D\rangle &= \langle x, x'_D c\rangle + \langle f_{x,D(c)}, W\rangle \\ &= \langle x, x'_D c\rangle + \langle x, D(c)\rangle,\end{aligned}$$

o sea $D = \mathrm{ad}_{x'_D}$ y sigue la tesis.

10. Sean A un álgebra de Banach fuertemente Connes-amenable y sea $J : \ker(\Delta_{w^*}) \hookrightarrow \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*$ la inclusión canónica.
Sea $\delta : A \to \mathcal{B}^2_{w^*}(A,\mathbb{C})^*$ tal que $\delta(a)(f) = f(a,e) - f(e,a)$ para cada $a \in A$ y $f \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$.
Si J es débilmente compacto e $\mathrm{im}(\delta^*) \subseteq \alpha^*(\iota_{A_*}(A_*))$ entonces A posee alguna diagonal virtual normal.
► (i) Claramente $\delta \in \mathcal{Z}^1_{w^*}[A, \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*]$.
(ii) Sea $\hat{\delta} : A \to \mathcal{B}^2_{w^*}(A,\mathbb{C})^{***}$ el operador $\hat{\delta} = \iota_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*} \circ \delta$. Entonces $\hat{\delta} \in \mathcal{Z}^1[A, \mathcal{B}^2_{w^*}(A,\mathbb{C})^{***}]$.
(iii) Además $\hat{\delta} \in \mathcal{Z}^1_{w^*}[A, \mathcal{B}^2_{w^*}(A,\mathbb{C})^{***}]$ si y solo si

$$\mathrm{im}(\delta^*) \subseteq \alpha^*(\iota_{A_*}(A_*)).$$

(iv) Dados $a \in A$ y $a' \in A^*$ resulta

$$\begin{aligned}\langle a', \Delta^{**}_{w^*}(\hat{\delta}(a))\rangle &= \langle \Delta^*_{w^*}(a'), \hat{\delta}(a)\rangle \\ &= \langle \delta(a), \Delta^*_{w^*}(a')\rangle \\ &= \langle \Delta_{w^*}(\delta(a)), a'\rangle \\ &= \langle \alpha^{-1}(U^*(\delta(a))), a'\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

porque dado $a_* \in A_*$ es

$$\begin{aligned}\langle a_*, U^*(\delta(a))\rangle &= \langle U(a_*), \delta(a)\rangle \\ &= U(a_*)(a,e) - U(a_*)(e,a) \\ &= (\iota_{A_*}(a_*) \circ \alpha)(\hat{\pi}_A(a \otimes e - e \otimes a)) \\ &= \langle a_*, 0_{(A_*)^*}\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia $\hat{\delta}(A) \subseteq \ker(\Delta^{**}_{w^*})$.
(v) $J^{**}[\ker(\Delta_{w^*})^{**}] = \ker(\Delta^{**}_{w^*})$, siendo además J^{**} inyectiva.
(v-a) Dado $\Gamma \in \ker(\Delta^{**}_{w^*})$ tenemos

$$0_{A^{**}} = \Delta^{**}_{w^*}(\Gamma) = \Gamma \circ \Delta^*_{w^*} = \Gamma \circ U^{**} \circ (\alpha^{-1})^*,$$

o sea $\Gamma \circ U^{**} = 0_{A^{***}_*}$.
(v-b) Si $u \in \ker(\Delta_{w^*})^*$, por el teorema de Hahn-Banach, hay algún funcional $\mu \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^{**}$ tal que $\mu \mid_{\ker(\Delta_{w^*})} = u$ y $\| \mu \| \leq \| u \|$. Escribamos $\gamma(u) = \langle \mu, \Gamma\rangle$. Si hubiere además $\mu_1 \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^{**}$ tal que $\mu_1 \mid_{\ker(\Delta_{w^*})} = u$ entonces $\mu - \mu_1 \in \ker(J^*)$. Veremos que $\mu - \mu_1 = U^{**}(\mathfrak{a})$ para cierto $\mathfrak{a} \in A^{**}_*$, pues entonces γ estará bien definida.

(v-c) Sea $\mathfrak{a}_0(U^*(s)) = (\mu - \mu_1)(s)$, con $s \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*$.
Como $\ker(U^*) \subseteq \ker(\Delta_{w^*})$ y $\mu - \mu_1 \in \ker(\Delta_{w^*})^{\perp}$ entonces $\mathfrak{a}_0$ está bien definida y es claramente $\mathbb{C}$-lineal.
(v-d) Δ_{w^*} es epimorfismo. En efecto, dado $a \in A$ sea $\lambda_a \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*$ tal que $\lambda_a(f) = f(a,e)$ para cada f. Si $a_* \in A_*$ y $x, y \in A$ es

$$\begin{aligned} U(a_*)(x,y) &= ((\alpha \circ \hat{\pi}_A)^*(\iota_{A_*}(a_*)))(x \otimes y) \\ &= \langle a_*, \alpha(xy) \rangle. \end{aligned}$$

Así $\lambda_a(U(a_*)) = \langle a_*, \alpha(a) \rangle$ para cada a_*, i.e. $\Delta_{w^*}(\lambda_a) = a$.
(v-e) En consecuencia $U^* : \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^* \to A_*^*$ es operador lineal, acotado y suryectivo. Por el teorema de la función abierta de Banach existe $\epsilon > 0$ tal que $(A_*^*)_\epsilon \subseteq U^*((\mathcal{B}^2_{w^*}(A,;\mathbb{C})^*)_1)$.
(v-f) Dado $s \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A,;\mathbb{C})^* - \ker(U^*)$ sea $t \in (\mathcal{B}^2_{w^*}(A,;\mathbb{C})^*)_1$ tal que

$$\tfrac{\epsilon}{2} \tfrac{U^*(s)}{\|U^*(s)\|} = U^*(t),$$

desigüaldad válida también si $s \in \ker(U^*)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \mid \mathfrak{a}_0(U^*(s)) \mid &= \mid (\mu - \mu_1)(s) \mid \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} \parallel U^*(s) \parallel \mid (\mu - \mu_1)(t) \mid \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} \parallel \mu - \mu_1 \parallel \parallel U^*(s) \parallel . \end{aligned}$$

(v-g) Por el teorema de Hahn-Banach hay un funcional $\mathfrak{a} \in A_*^{**}$ tal que $\mathfrak{a} \mid_{\mathrm{im}(U^*)} = \mathfrak{a}_0$. Así si $s \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A,;\mathbb{C})^*$ resulta

$$(\mu - \mu_1)(s) = \mathfrak{a}_0(U^*(s)) = \mathfrak{a}(U^*(s)) = U^{**}(\mathfrak{a})(s),$$

i.e. sigue (iv-b).
(vi) Claramente γ es $\mathbb{C}$-lineal y $\parallel \gamma \parallel \leq \parallel \Gamma \parallel$, o sea $\gamma \in \ker(\Delta_{w^*})^{**}$.
Además dado $x \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^{**}$ es

$$(\gamma \circ J^*)(x) = \gamma(J^*(x)) = \langle x, \Gamma \rangle,$$

de donde $J^{**}(\gamma) = \Gamma$.
(vii) Sea $\gamma \in \ker(J^{**})$. Como J^* es epimorfismo $\gamma = 0_{\ker(\Delta_{w^*})^{**}}$, o sea J^{**} es inyectiva.
(viii) Dados $\beta \in \ker(\Delta_{w^*})^{**}$ y $a' \in A^*$ es

$$\langle a', \Delta^{**}_{w^*}(J^{**}(\beta)) \rangle = \langle (\Delta_{w^*} \mid_{\ker(\Delta_{w^*})})^*(a'), \beta \rangle = 0.$$

Por el teorema de la función abierta de Banach sigue (v).
(ix) Sean $\chi : \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{B}^2(A;\mathbb{C})$ la inclusión, $\Psi \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^{**}$, $a \in A$. Indiquemos $e \otimes e = u$ en $A \hat{\otimes} A$ y $G = F \mid_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})}$. Dada alguna red acotada $\{f_l\}_{l \in L}$ en $\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})$ tal que $\Psi = w^*\text{-lím}_{l \in L}\, \iota_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})}(f_l)$

tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, \hat{\delta}(a) \rangle &= \langle \delta(a), \Psi \rangle \\
&= \lim_{l \in L} \langle f_l, \delta(a) \rangle \\
&= \lim_{l \in L} (f_l(a,e) - f_l(e,a)) \\
&= \lim_{l \in L} G(f_l)(\mathrm{ad}_u(a)) \\
&= \langle f_l, \mathrm{ad}_{G^*(\iota_{A\hat{\otimes}A}(u))}(a) \rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}_{G^*(\iota_{A\hat{\otimes}A}(u))}(a), \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi, \mathrm{ad}_{\overline{u}}(a) \rangle,
\end{aligned}$$

con $\overline{u} = \iota_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*}(G^*(\iota_{A\hat{\otimes}A}(u)))$. Así $\hat{\delta} = \mathrm{ad}_{\overline{u}}$.
(x) Sabemos que cada $a \in A$ determina un único $\delta_0(a) \in \ker(\Delta_{w^*})^{**}$ tal que $\hat{\delta}(a) = J^{**}(\delta_0(a))$. Es fácil ver que δ_0 es derivación de A en $\ker(\Delta_{w^*})^{**}$.
Además, por el teorema de Hahn-Banach cada $\theta \in \ker(\Delta_{w^*})^*$ admite alguna extensión $\theta_0 \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^{**}$ cuya norma no supera la de θ. Luego

$$\begin{aligned}
\| \delta_0(a) \| &= \sup_{\|\theta\|_{\ker(\Delta_{w^*})}=1} | \langle \theta, \delta_0(a) \rangle | \\
&= \sup_{\|\theta\|_{\ker(\Delta_{w^*})}=1} | \langle J^*(\theta_0), \delta_0(a) \rangle | \\
&= \sup_{\|\theta\|_{\ker(\Delta_{w^*})}=1} | \langle \theta_0, \hat{\delta}(a) \rangle | \\
&\leq \| \hat{\delta}(a) \|_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^{***}} \\
&= \| \hat{\delta} \| \| a \|,
\end{aligned}$$

o sea $\delta_0 \in \mathcal{Z}^1(A, \ker(\Delta_{w^*})^{**})$.
(xi) Más aún, $\delta_0 \in \mathcal{Z}^1_{w^*}(A, \ker(\Delta_{w^*})^{**})$ si $\mathrm{im}(\delta^*) \subseteq \alpha^*(\iota_{A_*}(A_*))$. En efecto, con la notación anterior sean $a_j \xrightarrow{w^*} 0_A$ y $\theta \in \ker(\Delta_{w^*})^*$. Entonces

$$0 = \lim_j \langle \theta_0, \hat{\delta}(a_j) \rangle = \lim_j \langle J^*(\theta_0), \delta_0(a_j) \rangle = \lim_j \langle \theta, \delta_0(a_j) \rangle.$$

Si además $b \in A$ resultan

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_j \langle \theta, \delta_0(a_j b) - \delta_0(a_j) b \rangle = \lim_j \langle \theta, a_j \delta_0(b) \rangle, \\
0 &= \lim_j \langle \theta, \delta_0(b a_j) - b\delta_0(a_j) \rangle = \lim_j \langle \theta, \delta_0(b) a_j \rangle,
\end{aligned}$$

o sea $\mathrm{im}(\delta_0)$ consta de w^*-elementos.
(xii) En las condiciones anteriores, por la fuerte Connes-amenabilidad de A existe $v \in \ker(\Delta_{w^*})^{**}$ tal que $\delta_0 = \mathrm{ad}_v$. Haciendo $\overline{v} = J^{**}(v)$,

con la notación de (ix) tenemos

$$\begin{aligned}\langle \Psi, \mathrm{ad}_{\overline{u}}(a)\rangle &= \langle \Psi, \hat{\delta}(a)\rangle \\ &= \langle \Psi, J^{**}(\delta_0(a))\rangle \\ &= \langle J^{*}(\Psi), \mathrm{ad}_v(a)\rangle \\ &= \langle J^{*}(\Psi)a - aJ^{*}(\Psi), v\rangle \\ &= \langle J^{*}(\Psi a - a\Psi), v\rangle \\ &= \langle \Psi a - a\Psi, J^{**}(v)\rangle \\ &= \langle \Psi, \mathrm{ad}_{\overline{v}}(a)\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{ad}_{\overline{u}} = \mathrm{ad}_{\overline{v}}$.
(xiii) Como J es operador débilmente compacto existe $\mathfrak{v} \in \mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*$ tal que $\overline{v} = \iota_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*}(\mathfrak{v})$ [**57**]. Sea además $\mathfrak{u} = G^*(\iota_{A\hat{\otimes}A}(u))$ en $\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*$. Dado $a \in A$ sabemos que $a(\overline{u} - \overline{v}) = (\overline{u} - \overline{v})a$ y como $\iota_{\mathcal{B}^2_{w^*}(A;\mathbb{C})^*}$ es monomorfismo de A-bimódulos de Banach resulta $a(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}) = (\mathfrak{u} - \mathfrak{v})a$. Si además $a' \in A^*$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle \Delta_{w^*}(\mathfrak{v}), a'\rangle &= \langle \mathfrak{v}, \Delta^*_{w^*}(a')\rangle \\ &= \langle \Delta^*_{w^*}(a'), \overline{v}\rangle \\ &= \langle a', \Delta^{**}_{w^*}(J^{**}(v))\rangle \\ &= \langle a', (\Delta_{w^*}\mid_{\ker(\Delta_{w^*})})^{**}(v)\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

o sea $\Delta_{w^*}(\mathfrak{v}) = 0_A$. Por otra parte, dado $a_* \in A_*$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle a_*, \alpha(\Delta_{w^*}(\mathfrak{u}))\rangle &= \langle \iota_{A_*}(a_*) \circ (\alpha \circ \hat{\pi}_A), \iota_{A\hat{\otimes}A}(u)\rangle \\ &= \langle a_*, \alpha(e)\rangle,\end{aligned}$$

y como α es inyectiva $\Delta_{w^*}(\mathfrak{u}) = e$. En definitiva, $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ es diagonal virtual normal de A.

2.11. Problemas

1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ y $\Delta = \dfrac{1}{n}\sum_{j,k=1}^n e_{j,k} \otimes e_{k,j}$.
(i) Mostrar que Δ es diagonal virtual de A.
(ii) Si δ es diagonal virtual de A y de A^{op} entonces $\delta = \Delta$.
2. Sea G subgrupo finito *irreducible* de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$, i.e. $\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}(G) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces $\Delta = \dfrac{1}{\mid G\mid}\sum_{\sigma\in G} e_\sigma \otimes e_{\sigma^{-1}}$ es diagonal virtual de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$, donde $e_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j}))_{1\le i,j\le n}$ para cada σ.
3. $\mathrm{L}(\mathbb{C}^n, \|\circ\|_p)$ es amenable si $n \in \mathbb{N}$ y $1 \le p \le \infty$. Para ello:
(i) Dada $\sigma \in \mathrm{P}_n$ sea $A_\sigma = \sum_{i,j=1}^n \delta_{\sigma(i),j} e_{i,j}$ en $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Dado además $\epsilon \in \{-1,1\}^n$ sea $D_\epsilon = \sum_{i=1}^n \epsilon_i e_{i,i}$.
(i) $G = \{D_\epsilon A_\sigma : \sigma \in \mathrm{P}_n, \epsilon \in \{-1,1\}^n\}$ es subgrupo irreducible de

$\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ y cada elemento de G define una isometría de $\mathrm{L}(\mathbb{C}^n, \| \circ \|_p)$.
(ii) Inferir el resultado.

4. (i) Indiquemos $S_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ con la estructura de grupo definida por la operación
$$(b,a)(b',a') = (ab'+b, aa').$$
Se trata de un grupo localmente compacto, con medida de Haar $d\lambda(b,a) = a^{-2}dbda$.
(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ escribimos
$$A_n = \{(b,a) \in S_2(\mathbb{R}) : 1 \leq \mid b \mid \leq n^2, \frac{\mid b \mid}{n} \leq a \leq n \text{ o } \mid b \mid \leq 1, \frac{1}{n} \leq a \leq n\}$$
y $f_n = \frac{1}{\lambda(A_n)}\chi_{A_n}$. Si $\phi \in \mathrm{L}^\infty(S_2(\mathbb{R}))$ y $(b,a) \in S_2(\mathbb{R})$ se tiene
$$\mid \langle f_n, \delta_{(b,a)} * \phi - \phi \rangle \mid \leq \frac{\lambda([(b,a)A_n] \triangle A_n)}{\lambda(A_n)} \parallel \phi \parallel_\infty .$$
(iii) Probar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda([(b,a)A_n] \triangle A_n)}{\lambda(A_n)} = 0$, por lo que $S_2(\mathbb{R})$ es amenable [**122**].

5. Dado $C \geq 1$, un álgebra de Banach A se dice C-*amenable* si tiene alguna diagonal aproximada en $[A\hat{\otimes}A]_C$, o equivalentemente, si posee alguna diagonal virtual en $[(A\hat{\otimes}A)^{**}]_C$.
(i) Si G es grupo amenable discreto entonces $l^1(G)$ es 1-amenable.
(ii) Toda C*-álgebra abeliana unitaria es 1-amenable.
(iii) Sea $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia dirigida de C-subálgebras amenables de un álgebra de Banach A cuya unión es densa en A. Entonces A es C-amenable.
(iv) $\mathcal{K}(c_0(\mathbb{N}))$ y $\mathcal{K}(l^p(\mathbb{N}))$, $1 \leq p < \infty$, son 1-amenables. Para ello:
(iv)(a) Si $E = c_0(\mathbb{N})$ o $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, dado $n \in \mathbb{N}$ sea $P_n \in \mathcal{B}(E)$ la proyección a las primeras n coordenadas. Si $K \in \mathcal{K}(E)$ y $x \in E$ resulta

(2.11.1)
$$(P_n\mathcal{K}(E)P_n)(x) = P_n[K(x_1,...,x_n,0,0,...)] \text{ y}$$
(2.11.2)
$$(K - P_nKP_n)(x) = (K - P_nK)(x) + (P_nK)(0,...,0,x_{n+1},x_{n+2},...).$$

(iv)(b) Por (2.11.2) $\{P_n\mathcal{K}(E)P_n\}_{n=1}^\infty$ es sucesión de subálgebras de Banach de $\mathcal{K}(E)$ y $(\cup_{n=1}^\infty P_n\mathcal{K}(E)P_n)^- = \mathcal{K}(E)$.
(iv)(c) Por (2.11.1), para $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$ se tienen los isomorfismos de espacios de Banach
$$P_n\mathcal{K}(l^p(\mathbb{N}))P_n \approx \mathrm{L}(\mathbb{C}^n, \| \circ \|_p),$$
$$P_n\mathcal{K}(c_0(\mathbb{N}))P_n \approx \mathrm{L}(\mathbb{C}^n, \| \circ \|_\infty).$$
(iv)(d) Concluir la tesis.

6. Dada una familia de álgebras de Banach C-amenables $\{A_j\}_{j\in J}$ se tiene que c_0-$\oplus_{j\in J}A_j$ es C-amenable. Para ello:

(a) Dadas álgebras de Banach C-amenables A_1, A_2 entonces $A_1 \oplus A_2$ es C-amenable.
(b) Si $F \in \mathcal{P}_f(J)$ sea

$$A_F = \{x \in c_0\text{-}\oplus_{j\in J} : x_j = 0_{A_j} \text{ si } j \notin F\}.$$

Probar que cada A_F es álgebra de Banach C-amenable y $\cup_{F\in\mathcal{P}_f(J)} A_F$ es denso en $c_0\text{-}\oplus_{j\in J} A_j$.

7. Probar (2.10.2).(3).
8. Probar las afirmaciones de (2.10.10)(1).
9. Ídem con (2.10.10)(2).
10. Sea X espacio localmente compacto. Indicamos κ, β y σ a las topologías en $\mathrm{C}_b(X)$ de *convergencia uniforme sobre compactos*, la $\mathrm{C}_0(X)$-*topología estricta* y la *topología métrica*, respectivamente. En particular, κ es la topología generada por la familia de seminormas $\{p_K : K \subseteq X, K \text{ compacto}\}$, con $p_K(f) = \sup_{x\in K} \mid f(x) \mid$ para cada K, mientras que β es la generada por la familia de seminormas $\{q_g : g \in \mathrm{C}_0(X)\}$, con $q_g(f) = \parallel fg \parallel_\infty$ para cada g.
(i) $\kappa \leq \beta \leq \sigma$.
(ii) Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es β-convergente si y solo si es σ-acotada y κ-convergente.
(iii) El espacio $\mathrm{C}_{00}(X)$ de funciones complejas sobre X continuas con soporte compacto es β-denso en $\mathrm{C}_b(X)$.
(iv) Dada $\mu \in \mathrm{M}^+(X)$ sea $L_\mu(f) = \int_X f d\mu$, $f \in \mathrm{C}_{00}(X)$. Entonces L_μ es lineal y continuo. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{C}_{00}(X)$ tal que $\parallel f_n \parallel_\infty = 1$ para cada n y $L_\mu(f_n) \to \parallel L_\mu \parallel$. Hagamos $S_\mu = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sop}(f_n)$.
(v) Sea $g \in \mathrm{C}_{00}(X)$ nulo sobre S_μ. Podemos suponer $\parallel g \parallel_\infty < 1$ y $L_\mu(g) \in \mathbb{R}$. Para cada n es $L_\mu(f_n \pm g) \leq \parallel L_\mu \parallel$, de donde $L_\mu(g) = 0$. Luego $L_\mu(f) = \int_{S_\mu} f d\mu$ para cada $f \in \mathrm{C}_{00}(X)$.
(vi) Probar que $\parallel L_\mu \parallel = \mu(S_\mu) = \parallel \mu \parallel$.
(vii) Sea $L \in \mathrm{C}_b(X)^*_\beta$ *no negativo*, i.e. $L(f) \geq 0$ si $f : X \to [0, +\infty)$ es continuo y acotado. Puesto que $\beta \leq \sigma$, $L \in \mathrm{C}_b(X)^*$. En consecuencia L resulta lineal continuo sobre $\mathrm{C}_{00}(X)$ y existe $\mu \in \mathrm{M}^+(X)$ única tal que $L(f) = \int_X f d\mu$ si $f \in \mathrm{C}_{00}(X)$.
(viii) La identidad anterior es válida en $\mathrm{C}_b(X)$. Para ello, bastaría ver que $L_1 : f \to \int_X f d\mu$ es β-continuo sobre $\mathrm{C}_b(X)$. Para ello:
(viii)(a) Dada una sucesión de números positivos $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a cero hay una sucesión de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $K_n \subseteq K^o_{n+1}$ y $\mu(X - K_n) < \epsilon_n$ para cada n. [27]
(viii)(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in \mathrm{C}_{00}(X)$ tal que $0 \leq \phi_n \leq 1$, $\phi(K_n) = \{1\}$ y $\phi_n(X - K^o_{n+1}) = \{0\}$.
(viii)(c) Con la notación anterior,

$$\parallel \mu \parallel = \mu(K_1) + \textstyle\sum_{n=2}^\infty \mu(K^o_n - K_{n-1}).$$

[27] Existe $K_1 \subseteq X$ compacto tal que $\mu(X) - \epsilon_1 < \mu(K_1)$. Observar además que X es localmente compacto.

Sean $a_1 = \mu(K_1)$ y $a_n = \mu(K_n^o - K_{n-1})$ para cada $n \geq 2$, y sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números positivos, convergente a cero, tal que

$$\mu(K_1) + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n/b_n \leq 2 \parallel \mu \parallel,$$

donde en particular $b_1 = 1$.
(viii)(d) Con $c_n = b_n - b_{n+1}$, $n \geq 1$, resulta $b_n = c_n + c_{n+1} + ...$ para cada n.
(viii)(e) Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{C}_{00}(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ es

$$K_{n-1} \preceq \psi_{n-1} \preceq K_n^0,$$

o sea $0 \leq \psi_{n-1} \leq 1$, $\psi_{n-1}(K_{n-1}) = \{1\}$ y $\psi_{n-1}(X - K_n^o) = \{0\}$. Escribiremos $\psi : X \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$. Mostrar que ψ está bien definida.
(viii)(f) Probar que para cada $x \in S_\mu$ es $\psi(x) = 1$ o existe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mínimo tal que $x \in K_n^o$ y $\psi(x) = c_{n-1}\psi_{n-1}(x) + b_n$. Deducir que $\psi \in \mathrm{C}_0(X)$ y $\{\psi \neq 0\} \subseteq S_\mu$.
(viii)(g) Notando que para cada $n \geq 2$ es $\psi \mid_{K_n^o} \geq b_n$ inferir que $\psi^{-1} \in \mathrm{L}^1(\mu)$.
(viii)(h) Probar que

$$\{f \in \mathrm{C}_b(X) : \parallel f\psi \parallel < \parallel \psi^{-1} \parallel_{\mathrm{L}^1(\mu)}\} \subseteq L_1^{-1}(\mathrm{D}(0,1)),$$

i.e. $L_1 \in \mathrm{C}_b(X)^*_\beta$.

11. Sean A, B álgebras de Banach, A-amenable, y $h : A \to B$ un homomorfismo continuo de álgebras con rango denso. Probar que B es amenable.
12. Si A es álgebra de Banach amenable e I es ideal cerrado entonces A/I es álgebra de Banach amenable.
13. Sean A un álgebra de Banach amenable e I ideal cerrado de A. Entonces I es amenable si y solo si $I \in \mathrm{BAI}$. Para ello:
(i) La condición es necesaria.
(ii) Para la afirmación recíproca sea $\{e_s\}_{s\in\sigma}$ aproximación acotada de la unidad de I. Considerar cualquier I-módulo de Banach pseudounitario X y $D \in \mathcal{Z}^1(I, X^*)$. Probar que X admíte una estructura de A-bimódulo de Banach.
(iii) Sea $D_1 : A \to X^*$ tal que $D_1(a) = w^*\text{-lím}_{s\in\sigma} D(ae_s) - aD(e_s)$. Mostrar que $D_1 \in \mathcal{B}(A, X^*)$.
(iv) Probar que $D_1 \mid_I = D$ y D es continuo respecto a la I-topología estricta de A y la w^*-topología de X^*.
(v) Concluir que $D_1 \in \mathcal{Z}^1(A, X^*)$.
(vi) D deviene derivación interna.
14. Sea A un algebra de Banach amenable, I un ideal a izquierda cerrado de A. Entonces $I \in \mathrm{BRAI}$ si y solo si I es *débilmente complementable*, i.e. si $I^\perp$ es complementable en A^*. Para ello:
(i) Sean $I \in \mathrm{BRAI}$ y $\{e_s\}_{s\in\sigma}$ una aproximación acotada de la unidad a derecha de I. Sea $P : A^* \to A^*$ tal que $P(a') = w^*\text{-lím}_{s\in\sigma}(a' - e_s a')$. Probar que $P \in \mathcal{B}(A^*)$ y P es proyector de A^* sobre $I^\perp$.

Recíprocamente, sea ahora P un proyector de A^* sobre $I^\perp$ y hagamos $Q = \mathrm{Id}_{A^{**}} - P^*$ en $\mathcal{B}(A^{**})$. Entonces:
(ii) Q es proyector de A^{**} sobre $I^{\perp\perp}$ e $I^{\perp\perp} \approx I^{**}$.
(iii) Sea $\{u_j\}_{j\in J}$ diagonal virtual de A, digamos

$u_j = \sum_{n=1}^\infty a_{n,j} \otimes b_{n,j}$, con $\sum_{n=1}^\infty \| a_{n,j} \| \| b_{n,j} \| < \infty$ para cada j.

Hagamos $a''_j = \Theta(u_j)$ si $j \in J$, con $\Theta = \hat{\pi}_{A^{**}} \circ (\mathrm{Id}_{A^{**}} \hat{\otimes} Q) \circ (\iota_A \otimes \iota_A)$ en $\mathcal{B}(A\hat{\otimes}A, I^{**})$. Probar que $\lim_{j\in J}(aa''_j) = \iota_A(a)$ si $a \in I$.
(iv) Considerando eventualmente una subred, podemos suponer que existe $a'' = w^*\text{-}\lim_{j\in J} a''_j$ en I^{**}. Luego $aa'' = a$ si $a \in I$, de donde $I \in$ BRAI.

15. Completar (2.10.8)(a) ... (i).
16. Sean A-álgebra de Banach compleja, P un A-*módulo de Banach a izquierda esencial* , o sea la çápsula lineal compleja de AP es densa en P. Probar que P es proyectivo si y solo si $\hat{\pi}_{A,P} : A\hat{\otimes}P \to P$ tiene un inverso a derecha en ${}_A\mathcal{B}(P, A\hat{\otimes}P)$.
17. Sean A-álgebra de Banach compleja, P un A-módulo de Banach a izquierda. Entonces P es A- módulo de Banach proyectivo si y solo si es A_1-módulo de Banach proyectivo.
18. Sea A un álgebra de Banach biproyectiva. Mostrar que $A\hat{\otimes}A$, $A_1\hat{\otimes}A$ y $A\hat{\otimes}A_1$ son biproyectivas.
19. Sean E_1, E_2, F_1, F_2 espacios normados, $T_i \in \mathcal{B}(E_i, F_i)$, $i = 1, 2$.
► (a) Si T_1 o T_2 es compacto entonces $T_1\hat{\otimes}T_2 \in \mathcal{K}(E_1\hat{\otimes}E_2, F_1\hat{\otimes}F_2)$.
(i) Sea $\mathrm{A} : \mathcal{B}(F_1, F_2^*) \to \mathcal{B}(E_1, E_2^*)$, $\mathrm{A}(\alpha) = T_2^* \circ \alpha \circ T_1$. Evidentemente A es operador compacto.
(ii) $(T_1\hat{\otimes}T_2)^* = \Lambda^{-1}_{E_1,E_2} \circ \mathrm{A} \circ \Lambda_{F_1,F_2}$, con

$\Lambda_{E_1,E_2} : (E_1\hat{\otimes}E_2)^* \to \mathcal{B}(E_2, E_2^*),\ \Lambda_{F_1,F_2} : (F_1\hat{\otimes}F_2)^* \to \mathcal{B}(F_2, F_2^*)$,

isomorfismos canónicos.
► (b) Si T_1 y T_2 son compactos entonces $T_1\check{\otimes}T_2 \in \mathcal{K}(E_1\check{\otimes}E_2, F_1\check{\otimes}F_2)$.
(iii) Hagamos $\iota_j \in \mathcal{B}(F_j, l^\infty([F_j^*]_1))$ tal que $\iota_j(f_j) = \{\langle f_j, f'_j\rangle\}_{\|f'_j\|=1}$, $j = 1, 2$. Si $S_j = \iota_j \circ T_j$, $S_j \in \mathcal{K}(E_j, l^\infty([F_j^*]_1))$ si $j = 1, 2$.
(iv) Dado un conjunto no vacío I, $l^\infty(I) \in$ AP, o sea tiene la *propiedad de aproximación* [28]. Para ello:
(iv-1) Puesto que $l^\infty(I)$ es C*-algebra abeliana unitaria basta probar que $\mathrm{C}(\Omega) \in$ AP, cualquiera sea el espacio compacto Hausdorff Ω.
(iv-2) Sean K subconjunto compacto de $\mathrm{C}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$. Por la equicontinuidad de K dado $w \in \Omega$ existe W_w entorno de w en Ω tal que $| f(w_1) - f(w) | < \epsilon$ si $w_1 \in W_w$ y $f \in K$ [**98**], 7.17) Como Ω es compacto existen $n \in \mathbb{N}$ y $w_1, ..., w_n \in \Omega$ tales que $\Omega = \cup_{i=1}^n W_{w_i}$.
(iv-3) Sea $\{f_i\}_{i=1}^n$ partición de la unidad de Ω subordinada al cubrimiento $\{W_{w_1}, ..., W_{w_n}\}$.

[28] Un espacio normado E tiene la *propiedad de aproximación*, en cuyo caso escribimos $E \in$ AP, si hay alguna red de operadores de rango finito sobre E que converge uniformemente sobre compactos a Id_E.

(iv-4) Sea $F(f)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega f d\delta_{w_i} f_i$, $f\in \mathrm{C}(\Omega)$. Entonces $F\in\mathcal{F}(\mathrm{C}(\Omega))$ y $\sup_{f\in K}\parallel F(f)-f\parallel\leq\epsilon$.
(v) Sean $\{F_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(l^\infty([F_j^*]_1))$, $j=1,2$, tales que

$$\mathrm{Id}_{l^\infty([F_j^*])}\mid_{S_j([E_j])^-}=\lim\ \mathrm{unif}_{n\to\infty}F_n^j\mid_{S_j([E_j])^-}.$$

Probar que $\lim_{n\to\infty}(F_n^1S_1)\check{\otimes}(F_n^2S_2)=S_1\check{\otimes}S_2$, resultando $S_1\check{\otimes}S_2$ operador compacto.
(vi) $S_1\check{\otimes}S_2=(\iota_1\check{\otimes}\iota_2)\circ(T_1\check{\otimes}T_2)$ e $\iota_1\check{\otimes}\iota_2$ es isométrico, de donde $T_1\check{\otimes}T_2$ deviene compacto.

20. Sea (E,F) un *par dual de espacios de Banach*, o sea E y F son espacios de Banach munidos de una forma bilineal acotada no degenerada $\langle\circ,\circ\rangle : E\times F\to\mathbb{C}$.
(i) Hay una inmersión natural $F\hookrightarrow E^*$.
(ii) Sea $\mathcal{B}_F(E)=\{T\in\mathcal{B}(E):T^*(F)\subseteq F\}$. Dado $T\in\mathcal{B}_F(E)$ resulta $T^*\mid_F\in\mathcal{B}(F)$.
(iii) Si $T\in\mathcal{B}_F(E)$ sea

$$\parallel T\parallel_{\mathcal{B}_F(E)}=\max\{\parallel T\parallel_{\mathcal{B}(E)},\parallel T^*\mid_{\mathcal{B}(F)}\parallel\}.$$

Probar que queda definida una norma con la que $\mathcal{B}_F(E)$ es álgebra de Banach.
(iv) Existe $\mathrm{A}\in\mathcal{B}(E\hat{\otimes}F,\mathcal{B}(E))$ único tal que $\mathrm{A}(e\otimes f)=e\odot f$ en tensores básicos, con $(e\odot f)(e_1)=\langle e_1,f\rangle e$ para $e,e_1\in E$ y $f\in F$. Además $\mathrm{im}(\mathrm{A})\subseteq\mathcal{B}_F(E)$.
(v) ► Si E o F tienen la propiedad de aproximación Λ es monomorfismo.
(v-1) Sea $u\in E\hat{\otimes}F$ no nulo, $u=\sum_{n=1}^\infty e_n\otimes f_n$, con

$$\sum_{n=1}^\infty\parallel e_n\parallel\parallel f_n\parallel<\infty.$$

Si $E\in$ AP puede suponerse $(e_n)\in\mathrm{c}_0(E)$ y $(f_n)\in\mathrm{l}^1(F)$, ya que para cada n se tiene

$$e_n\otimes f_n=k(\frac{e_n}{k}\otimes\frac{f_n}{k})$$

y se puede ajustar k convenientemente.
(v-2) Sea $S\in\mathcal{F}(E)$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\parallel S(e_n)-e_n\parallel<\dfrac{\parallel u\parallel_\wedge}{2\parallel f\parallel_1}$. Entonces

$$\parallel (S\otimes\mathrm{Id}_F)(u)-u\parallel_\wedge<\frac{\parallel u\parallel_\wedge}{2}$$

y $(S\otimes\mathrm{Id}_F)(u)\neq 0$.
(v-3) Deducir que existe $e'\in E^*$ tal que $\sum_{n=1}^\infty\langle e_n,e'\rangle f_n\neq 0_F$.
(v-4) Luego existe $e\in E$ tal que $\langle\mathrm{A}(u)(e),e'\rangle\neq 0$, i.e. $\mathrm{A}(u)\neq 0_{\mathcal{B}_F(E)}$.
(vi) Sea $\mathcal{N}_F(E)=\mathrm{im}(\mathrm{A})$ la clase de *operadores F-nucleares sobre E*, munido de la norma

$$\parallel T\parallel=\inf\{\parallel u\parallel_\wedge:\mathrm{A}(u)=T\}.$$

Entonces $\mathcal{N}_F(E)$ es álgebra de Banach. Si E o F tienen la propiedad de aproximación finita resulta $\mathcal{N}_F(E)\approx E\hat{\otimes}F$, o bien $\mathcal{N}_F(E)$ es

isomorfo a un cociente de $E\hat{\otimes}F$ en el caso general.
(vii) $\mathcal{N}_F(E)$ es ideal de $\mathcal{B}_F(E)$ y la inclusión $\mathcal{N}_F(E) \hookrightarrow \mathcal{B}_F(E)$ es una contracción.
(viii) $E\hat{\otimes}F$ es álgebra de Banach de modo que

$$(e_1 \otimes f_1)(e_2 \otimes f_2) = \langle e_2, f_1\rangle e_1 \otimes f_2$$

en tensores básicos. Mostrar que $E\hat{\otimes}F$ es biproyectiva.

21. Probar que cada grupo localmente compacto abeliano G es amenable. Para ello:
(i) El conjunto $\mathcal{M}(G)$ de conjunto de promedios de G es w^*-compacto y convexo (v. (2.4.3)).
(ii) Dados $g \in G$ y $\phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$ se tiene $\delta_g * \phi \in \mathrm{L}^\infty(G)$, con $\delta_g * \phi =_{g^{-1}} \phi$. Queda inducido además $T_g \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^\infty(G)^*)$ tal que $T_g(n)(\phi) = \langle \delta_g * \phi, n\rangle$ para cada n, ϕ. Probar que $\{T_g\}_{g\in G}$ es grupo abeliano de operadores acotados y $T_g(\mathcal{M}(G)) \subseteq \mathcal{M}(G)$ para cada $g \in G$.
(iii) Existe $m \in \mathcal{M}(G)$ tal que $T_g(m) = m$ si $g \in G$. Luego m será promedio invariante de G y G devendrá amenable. Para ello:
(a) Fijados $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}_0$ sea $T_g^{(n)} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n T_g^j$. Si $p \in \mathcal{M}(G)$ se tiene $\{T_g^{(n)}(p)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{M}(G)$.
(b) Por la compacidad de $\mathcal{M}(G)$ existen $q \in \mathcal{M}(G)$ y alguna subsucesión $(n_k)_k$ tal que $q = w^*\text{-lím}_{k\to\infty} T_g^{(n_k)}(p)$.
(c) Dado $k \in \mathbb{N}$ probar que

$$T_g(T_g^{(n_k)}(p)) = T_g^{(n_k)}(p) + \tfrac{1}{n_k+1}[T_g^{n_k+1}(p) - p].$$

(d) Sea $\Lambda : \mathrm{L}^\infty(G)^* \to \mathbb{C}$ forma lineal w^*-continua. Mostrar que $\Lambda(q) = \Lambda(T_g(q))$.
(e) Concluir que $T_g(q) = q$.
(f) Entonces cada T_g posee algún punto fijo. Se probará que hay algún punto fijo común a todo $g \in G$. Dado $F \in \mathcal{P}_f(G)$ sea

$$M_F = \{p \in \mathcal{M}(G) : T_g(p) = p \text{ si } g \in F\}.$$

La familia $\mathfrak{F} = \{M_F\}_{F\in\mathcal{P}_f(G)}$ consta de subconjuntos w^*-cerrados de $\mathcal{M}(G)$. Probar que $\cap\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita, por lo que $\cap\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

22. Sea $\theta : A \to B$ homomorfismo acotado de álgebras de Banach con rango denso. Si A es amenable entonces B es amenable.
23. Toda C*-álgebra compleja abeliana A es amenable. Para ello:
(i) Suponer primero que A es unitaria y considerar

$$G = \{\exp(if) : f \in \mathrm{C}(\sigma(A)) \text{ e } \mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Entonces G es subgrupo de $\mathrm{Inv}(C(\sigma(A))$.
(ii) Sea $\theta : l^1(G) \to \mathrm{C}(\sigma(A))$ tal que $\theta(\delta_g) = g$ si $g \in G$ y aplicar (2.11.22).
(iii) En el caso general aplicar (2.4.17).
24. Si un complejo $\mathfrak{C}$ es admisible entonces $K(\mathfrak{C})$ es admisible.

25. (i) Sea G un grupo localmente compacto separado y $p \in [1, \infty)$. Sea $\Lambda_p : \mathrm{M}(G) \to \mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G))$ tal que $\Lambda_p(\mu)(f) = \mu * f$ para $f \in \mathrm{L}^p(G)$ y $\mu \in \mathrm{M}(G)$. Probar que Λ_p es una representación acotada de $\mathrm{M}(G)$ en $\mathrm{L}^p(G)$.
(ii) Indiquemos $\mathrm{PM}_p(G) = \Lambda_p(G)^{-wot}$ al *espacio de p-pseudomedidas de G*. Probar que $\mathrm{PM}_p(G)$ es cerrado y además w^*-cerrado vía el isomorfismo $\mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G)) \approx (\mathrm{L}^p(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^q(G))^*$, con $p^{-1} + q^{-1} = 1$.
(iii) Probar que $\mathrm{PM}_p(G)$ es subálgebra compleja de $\mathcal{B}(\mathrm{L}^p(G))$, en definitiva, una subálgebra de Banach.
(iv) Probar que Λ_p es (w^*, w^*)-continuo.
(v) Usando (2.10.14.1)(i) concluir que $\mathrm{im}(\Lambda_p) \subseteq \mathrm{PM}_p(G)$.
26. Con $1 < p, q, < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$ se considera el *álgebra de Figà-Talamanca-Herz* $\mathrm{A}_p(G)$. En particular, $\mathrm{A}_2(G)$ es la llamada *álgebra de Fourier de G* [**51**]. $\mathrm{A}_p(G)$ consta de elementos $\zeta \in \mathrm{C}_0(G)$ del tipo $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n * \check{g}_n$, con $\{f_n\} \subseteq \mathrm{L}^p(G)$, $\{g_n\} \subseteq \mathrm{L}^q(G)$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_p \| g_n \|_q < \infty$. Con las operaciones naturales y la norma
$$\| \zeta \|_{\mathrm{A}_p(G)} = \mathrm{ínf}\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_p \| g_n \|_q : \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n * \check{g}_n\}$$
se obtiene un álgebra de Banach [**77**]. Evidentemente, $\mathrm{A}_p(G)$ es isomorfo a un cociente de $\mathrm{L}^p(G)\hat{\otimes}\mathrm{L}^q(G)$.
(i) Dados $x \in \mathrm{L}^1(G)$, $f \in \mathrm{L}^p(G)$, $g \in \mathrm{L}^q(G)$ es
$$\langle f, \Lambda_q(x)(g)\rangle = \langle x, f * \check{g}\rangle.$$
(ii) Queda inducida una aplicación lineal compleja
$$F_p(\Lambda_q(x)) : \mathrm{A}_p(G) \to \mathbb{C},$$
$$F_p(\Lambda_q(x))(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n * \check{g}_n\rangle$$
si $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n * \check{g}_n$, está bien definida y $F_p(\Lambda_q(x)) \in \mathrm{A}_p(G)^*$.
Hay un isomorfismo de espacios de Banach $F_p : \mathrm{PM}_q(G) \to A_p(G)^*$ tal que $F_p(T)(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, T(g_n)\rangle$ si $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n * \check{g}_n$ (cf. [**133**], Th. A.3.6).
(iii) Por (2.8.2) $\mathrm{PM}_q(G)$ es álgebra de Banach dual.

Capítulo 3

ANEXO 1: Grupos

3.1. Grupos, semigrupos, subgrupos. Grupo opuesto.

1. Llamamos *semigrupo* a todo par $(S, *)$, formado por un conjunto no vacío S y una *aplicación binaria* entre elementos de S, de modo que si $x, y \in S$ está definido de manera única $x * y \in S$. Además, esta aplicación es *asociativa*, o sea $(x * y) * z = x * (y * z)$ cualesquiera sean $x, y, z \in S$.
2. Sean $(S, *)$ semigrupo, $u \in S$. Decimos que u es *unidad a izquierda* (resp. *unidad a derecha*) si $ux = x$ (resp. $xu = x$) si $x \in S$. Se dice que u es *unidad* de S si lo es tanto a derecha como a izquierda. Es fácil ver que, en caso de tener S alguna unidad, la misma es única.
3. Sean $(S, *)$ un semigrupo con unidad u y $x \in S$. Decimos que x es *inversible a izquierda* (resp. *inversible a derecha*) si existe $y \in S$ tal que $y * x = u$ (resp. $x * y = u$).
   Se dice que x *es inversible* si lo es tanto a derecha como a izquierda. De ser así, sean $y, z \in S$ tales que $y * x = x * z = u$. Entonces
   $$y = y * u = y * (x * z) = (y * x) * z = u * z = z.$$
   Podemos indicar, sin lugar a confusión, x^{-1} al único elemento de S que es inverso tanto a derecha como a izquierda de x.
4. Llamamos *grupo* a todo semigrupo $(G, *)$ unitario en el que todo elemento es inversible.
5. Sea $(G, *)$ un grupo. Un subconjunto S de G se denomina *subgrupo* de G si contiene a la unidad de G y $(S, *)$ es grupo. En ese caso escribimos $S \leq G$.
6. (a) La clase $\mathcal{S}(G)$ de subgrupos de G[1] está parcialmente ordenada por la relación de inclusión, o sea si $S, T \in \mathcal{S}(G)$ hacemos $S \leq T$ si y solo si $S \subseteq T$.
   (b) Evidentemente, si $e \in G$ es la unidad de G, $\{e\} \leq S \leq G$ para cada $S \in \mathcal{S}(G)$.
   (c) Si $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{S}(G)$, $\bigcap_{i \in I} S_i \in \mathcal{S}(G)$ y $\bigcap_{i \in I} S_i = \inf\{S_i : i \in I\}$, o sea $\bigcap_{i \in I} S_i \leq S_j$ para cada $j \in I$ y $\bigcap_{i \in I} S_i$ contiene a todo subgrupo T de G tal que $T \leq S_i$ si $i \in I$.
   (d) Asimismo, existe $S \in \mathcal{S}(G)$ tal que $S_i \leq S$ para cada $i \in I$ y S está contenido en cada subgrupo U de G tal que $S_i \subseteq U$ si $i \in I$. En efecto, sea U el conjunto de elementos $x = x_{i_1} * ... * x_{i_n}$ en G, donde

[1] Abusamos de la notación identificando G con $(G, *)$

$n \in \mathbb{N}, i_1, ..., i_n \in I, x_{i_j} \in S_{i_j}, 1 \leq j \leq n$. Es fácil ver que U reune las condiciones necesarias. Indicamos $U = \sup\{S_i : i \in I\}$.
Por (a), (b), (c) y (d), $(\mathcal{S}(G), \leq)$ es un *retículo completo.*

7. Sean G grupo, S un subconjunto no vacío de G. Hay un subgrupo de G, que indicamos $\langle S \rangle$ y llamado *subgrupo generado por* S, el que es mínimo respecto de la inclusión y contiene a S. Precisamente, $\langle S \rangle = \bigcap\{H \in \mathcal{S}(G) : S \subseteq H\}$.
8. Dado un grupo $(G, *)$, se llama *grupo opuesto* $(G^{op}, *_{op})$ al que resulta con la operación $x *_{op} y \triangleq y * x$ si $x, y \in G$.

3.2. Grupos abelianos. Generadores. Centro y orden de un grupo y de un elemento. Grupos cíclicos.

1. Un grupo $(G, *)$ se dice *abeliano* o *conmutativo* si $x * y = y * x$ cualesquiera sean $x, y \in G$.
2. Dado un grupo $(G, *)$ introducimos el *centro de* G mediante
$$\mathrm{Z}(G) = \{x \in G : x * y = y * x \text{ si } x \in G\}$$
Claramente se trata de un subgrupo abeliano de G (V. Ej. §3.12(1)).
3. Si G es un grupo, se llama *generador de* G a todo subconjunto $\mathfrak{G}$ de G tal que todo elemento $x \in G$ es representable como $x = \prod_{j=1}^{n} x_j^{m_j}$, donde $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathfrak{G}$ y $\{m_1, ..., m_n\} \subseteq \mathbb{Z}$. En particular, G se dice *grupo cíclico* si admíte algún conjunto generador con un solo elemento.
4. Escribiremos $\mid G \mid \triangleq$ card (G), llamado *orden de* G.
5. Dado $x \in G$ escribimos $\mathrm{ord}(x) = \mid \langle x \rangle \mid$. Notar que
$$\mathrm{ord}(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x^n = e\}.$$

.

3.3. Homomorfismos de grupos

1. Sean $(G, *), (H, \circ)$ grupos y $h : G \to H$ una función. Decimos que h es un *homomorfismo*(o un *morfismo*) entre G y H si para cualesquiera $x, y \in G$ resulta $h(x * y) = h(x) \circ h(y)$.
2. Indicamos $\mathrm{Hom}(G; H)$ al conjunto de homomorfismos de G en H. En particular, si $G = H$ entonces $\mathrm{Hom}(G; G)$ es semigrupo idéntico con la composición.
3. Si e_G, e_H son las respectivas unidades de G y H y h es un homomorfismo tenemos
$$h(e_G) = h(e_G * e_G) = h(e_G) \circ h(e_G),$$
e inferimos que $h(e_G) = e_H$.
4. Sea h un morfismo de G en H.
Indicamos $\mathrm{Ker}(h) = \{x \in G : h(x) = e_H\}$ al *núcleo* de h.
Asimismo sea $\mathrm{Im}(h) = \{h(x) : x \in G\}$ la *imágen* de h.
Evidentemente Ker(h) $\leq G$ e $\mathrm{Im}(h) \leq H$.

5. Un morfismo $h : G \to H$ es *monomorfismo* si $\mathrm{Ker}(h) = \{e_G\}$ y es *epimorfismo* si $\mathrm{Im}(h) = H$. Es fácil ver que todo monomorfismo es inyectivo y todo epimorfismo es suryectivo. Se llama *isomorfismo* a todo morfismo biyectivo. Todo isomorfismo es biyectivo y su inversa es un morfismo. Indicamos $\mathrm{Aut}(G)$ al conjunto de isomorfismos de G en G, o *automorfismos* .
6. Si $h : G \to H$ es isomorfismo de grupos decimos que G y H son *grupos isomorfos*, lo que indicamos mediante $G \approx H$.
7. Si G, H son grupos indicamos $\mathrm{Hom}(G, H)$ a la clase de morfismos de grupos de G en H.
8. Si G es grupo cíclico existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $G \approx \mathbb{Z}_n$.

3.4. Productos directos, subgrupos normales y cocientes.

1. Dada $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos sea $G = \prod_{i\in I} G_i$ el *producto cartesiano* de la misma, o sea el conjunto de elementos $x = \{x_i\}_{i\in I}$ de modo que $x_i \in G_i$ para cada $i \in I$. Dados $x, y \in G$ hacemos $x \cdot y = \{x_i y_i\}$, donde $x_i y_i$ denota en G_i el producto de los elementos x_i e y_i para cada i. Así G es un grupo, denominado el *producto directo* de la familia de grupos dada.
2. Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Decimos que H es *subgrupo normal* de G, en cuyo caso escribimos $H \trianglelefteq G$, si $xHx^{-1} = H$ cualquiera sea $x \in G$.
3. Sea G grupo, H un subgrupo de G. Indicamos

$$N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}.$$

Claramente se trata de un subgrupo de G, llamado *subgrupo normalizador de H en G* .
4. Sean G grupo y H subgrupo normal de G. Elementos $x, y \in G$ se dirán *H-equivalentes módulo*, y escribiremos $x \sim y \bmod(H)$, si $x^{-1}y \in H$. La relación $\sim$ es *relación de equivalencia*, de modo que queda definido el espacio cociente, que indicamos G/H, de las correspondientes *clases de equivalencia*. Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección al cociente, o sea

$$\pi(x) = \{y \in G : x \sim y \bmod(H)\} = xH.$$

Introduciremos en G/H un producto que defina una estructura de grupo, a saber: sean $a, b \in G/H$, digamos $a = \pi(x), b = \pi(y)$. Definimos $a * b = \pi(xy)$. Ciertamente $a * b \in G/H$, pero debemos ver que es independiente de la elección de x e y. En efecto, supongamos que $a = \pi(x')$ y $b = \pi(y')$. Como $x \sim x' \bmod(H)$ y $y \sim y' \bmod(H)$

existen $z, z' \in H$ tales que $x = x'z$ e $y = y'z'$. Entonces

$$\begin{aligned}(x'y')^{-1}(xy) &= (y'^{-1}x'^{-1})(xy)\\ &= [(y'^{-1}x'^{-1})x]y\\ &= [y'^{-1}(x'^{-1}x)]y\\ &= (y'^{-1}z)y\\ &= (y'^{-1}z)(y'z')\\ &= (y'^{-1}zy')z',\end{aligned}$$

de donde $x'y' \sim xy$ mod(H) pues H es normal. Así el producto $*$ está bien definido y es fácil ver que $(G/H, *)$ es grupo y $\pi : G \to G/H$ es morfismo de grupos.
En particular, como para $x \in G$ es $xH = (xHx^{-1})x = Hx$ el cociente G/H es el mismo respecto a la relación $x \sim_1 y$ H si y solo si $xy^{-1} \in H$.

5. (i) Si $N \trianglelefteq G$, hay una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{S}(G/N)$ y la familia $\mathcal{S}_N(G) = \{H \in \mathcal{S}(G) : N \subseteq H\}$.
   Precisamente, basta hacer $F : \mathcal{S}(G/N) \to \mathcal{S}_N(G)$, $F(\Sigma) = \pi^{-1}(\Sigma)$, donde $\pi : G \to G/H$ es la proyección al cociente. Es fácil ver que F es biyectiva y $F^{-1}(H) = \pi(H)$ si $H \in \mathcal{S}_N(G)$. Podemos escribir, de manera precisa, $\pi(H) = H/N$ para cada $H \in \mathcal{S}_N(G)$.
   (ii) Además $T \leq S$ en $\mathcal{S}_N(G)$ sii $T/N \leq S/N$ en $\mathcal{S}(G/N)$ y entonces $[S : T] = [S/N, T/N]$ (v. §3.6(3)).
   (iii) Por otra parte, $T \trianglelefteq S$ en $\mathcal{S}_N(G)$ sii $T/N \trianglelefteq S/N$ en $\mathcal{S}(G/N)$, resultando entonces $S/T \approx \dfrac{S/N}{T/N}$.
6. Sea G grupo abeliano finitamente generado. Existen únicos $r, s \in \mathbb{N}_0$ y (si $s > 0$) enteros $n_1, ..., n_s \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tales que $n_j \mid n_{j+1}$ si $1 \leq j < s$ y $G \approx \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_s}$. (cf. [**129**], Th. 10.20).

3.5. Teoremas de isomorfismo

1. Sean G, H grupos, $f : G \to H$ un morfismo. Entonces $\mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq G$ y $G/\mathrm{Ker}(h) \approx \mathrm{Im}(f)$.
   ▶ Si $y \in \mathrm{Ker}(f)$ y $x \in G$,
   $$f(xyx^{-1}) = f(x)f(y)f(x^{-1}) = f(x)e_H f(x)^{-1} = e_H,$$
   o sea $x\mathrm{Ker}(f)x^{-1} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Asimismo $x^{-1}\mathrm{Ker}(f)x \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, de donde $\mathrm{Ker}(f) \subseteq x\mathrm{Ker}(f)x^{-1}$, i.e. $\mathrm{Ker}(f) = x\mathrm{Ker}(f)x^{-1}$. Definimos ahora
   $$F : G/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f),\ F(x\mathrm{Ker}(f)) = f(x).$$

Si $x\mathrm{Ker}(f) = y\mathrm{Ker}(f)$ resulta $f(x^{-1}y) = e_H$, o sea $f(x) = f(y)$ y F está bien definida. Además

$$\begin{aligned} F(x\mathrm{Ker}(f)y\mathrm{Ker}(f)) &= F((xy)\mathrm{Ker}(f)) \\ &= f(xy) \\ &= f(x)f(y) \\ &= F(x\mathrm{Ker}(f))F(y\mathrm{Ker}(f)) \end{aligned}$$

y F es morfismo de grupos. Es inmediato que se trata de un isomorfismo.

2. Sea, G grupo, $S, N \in \mathcal{S}(G)$, $N \trianglelefteq G$. Se tiene entonces
$$NS = SN = \sup\{N, S\},\ N \trianglelefteq SN,\ S \cap N \trianglelefteq S$$
y $\dfrac{SN}{N} \approx \dfrac{S}{S \cap N}$.
▶ Dados $s, s' \in S, n, n' \in N$, por ser el producto asociativo, resulta
$$(ns)(n's') = [n(sn's^{-1})](ss'). \tag{3.5.1}$$
Siendo N normal NS es semigrupo. Análogamente también lo es SN. Como $sn = (sns^{-1})s$ sigue que $SN \subseteq NS$. Asimismo $NS \subseteq SN$, o sea $SN = NS$. Luego $(ns)^{-1} = s^{-1}n^{-1} \in NS$.
Como S y N son subgrupos de SN entonces $\sup\{S, N\} \leq SN$. Además $SN \leq \sup\{S, N\}$ porque S y N son subgrupos de $\sup\{S, N\}$. Evidentemente $N \trianglelefteq SN$ y $S \cap N \trianglelefteq S$.
Sea $f : NS \to \dfrac{S}{S \cap N}$, $f(ns) = \pi(s)$, donde $\pi : S \to \dfrac{S}{S \cap N}$ es la proyección al cociente. Si $ns = n's'$ será
$$s^{-1}s' = s^{-1}n'^{-1}ns \in S \cap N,$$
o sea $\pi(s) = \pi(s')$ y f está bien definida.
Por (3.5.1),
$$f((ns)(n's')) = \pi(ss') = \pi(s)\pi(s') = f(ns)f(n's'),$$
así f es morfismo claramente suryectivo. Puesto que $\mathrm{Ker}(f) = S \cap N$ la tesis sigue por el Teo. 1.

3. Sean G un grupo y H, K subgrupos de G tales que $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$. Entonces hay un isomorfismo de grupos $\dfrac{G}{K} \approx \dfrac{G/H}{K/H}$.
▶ Vemos que $K/H \trianglelefteq G/H$ porque $K \trianglelefteq G$. Si $p_H : G \to G/H$ y $p_K : G \to G/K$ son las correspondientes proyecciones al cociente definimos
$$g : G/H \to G/K,\ g(p_H(x)) = p_K(x).$$
Si $p_H(x) = p_H(y)$, $x^{-1}y \in H$. Luego $x^{-1}y \in K$ y $p_K(x) = p_K(y)$, o sea g está bien definida y define claramente un morfismo de grupos. Como p_K es suryectiva sigue que g es suryectiva. Además, como p_H es suryectiva, vemos que $g(p_H(x)) = 0_{G/K}$ si y solo si $k \in K$, i.e. si $p_H(x) \in K/H$ (v. §3.4.(5)).

3.6. Teorema de Lagrange

1. Sean G grupo, $H \leq G$. Vía la relación de equivalencia $x \sim y \bmod(H)$ sii $x^{-1}y \in H$ sabemos que G puede representarse como unión disjunta de conjuntos del tipo xH, o de *coclases a izquierda de H en G*. Análoga situación se da con *coclases a derecha de H en G*. Hagamos $\mathcal{L}(H,G) = \{xH : x \in G\}$ y $\mathcal{R}(H,G) = \{Hy : y \in G\}$.
2. Veamos que hay una biyección $\phi : \mathcal{L}(H,G) \to \mathcal{R}(H,G)$. Para ello, sea $\phi(xH) = Hx^{-1}$. Si fuera $xH = yH$, dado $h \in H$ existirá $k \in H$ tal que
$$hx^{-1} = (xh^{-1})^{-1} = (yk)^{-1} = k^{-1}y^{-1} \in Hy^{-1},$$
o sea $Hx^{-1} \subseteq Hy^{-1}$. Análogamente, reemplazando x por y sigue la otra inclusión, i.e. $Hx^{-1} = Hy^{-1}$. Luego ϕ está bien definida.
Asimismo, si $Hx^{-1} = Hy^{-1}$ entonces $xH = yH$, o sea ϕ es inyectiva. Es evidente que ϕ es suryectiva. (V. Ej. §3.12(2)).
3. En las condiciones anteriores, indicamos $[G : H]$ el *índice de H en G*, mediante $[H : G] \triangleq \text{card } (\mathcal{L}(H,G))$.
4. [**101**] Si G es grupo de orden finito y H es subgrupo de G entonces $\mid G \mid = \mid H \mid [G : H]$.
► Dado $x \in G$ la aplicación $L_x : G \to G$ tal que $L_x(y) = xy$ si $y \in G$ es biyectiva, pues G es un grupo. Luego $\text{card}(xH) = \text{card}(H)$. El resultado es ahora inmediato.
5. Si G es grupo finito, el orden de cada elemento de G divide al orden de G (V. Ej. §3.12(1)).

3.7. Acciones y representaciones de grupos

1. Sean $(G, *)$ un grupo, X un conjunto no vacío. Decimos que una aplicación $\alpha : G \times X \to X$ es una *acción a izquierda de G en X* si $\alpha(1_G, x) = x$ y $\alpha(a, \eta(b,x)) = \alpha(ab, x)$ cualesquiera sean $a, b \in G$ y $x \in X$. Si escribimos $\alpha(a,x) = ax$ para cada a, x y entonces $1_G x = x$ y $(a * b)x = a(bx)$ para cada a, b, x.
Asimismo, se llama *acción a derecha de G en X* a toda acción a izquierda de G^{op} en X. Mientras no se especifique lo contrario, supondremos que las acciones que consideremos serán a izquierda (V. Ej. §3.12(3.12.3)).
2. Se llama *acción trivial* a aquella para la que $ax = x$ cualesquiera sean $a \in G$ y $x \in X$.
3. Si G es grupo se llama G-*grupo* a todo conjunto X sobre el que hay definida una acción de G.
4. Sea $F(X)$ el conjunto de funciones de X en X. Entonces $(F(X), \circ)$ es un semigrupo unitario, donde $\circ$ es la operación usual de composición de funciones. La acción a izquierda α induce una función
$$\rho_\alpha : G \to F(X),\ \rho_\alpha(a)(x) = \alpha(a,x) \text{ si } a \in G, x \in X.$$

Notamos que $\rho_\alpha(1_G) = Id_{F(X)}$ y ρ_α es homomorfismo de semigrupos. Decimos por ello que ρ_α es una *representación de G en X*.
Recíprocamente, si r es una representación de G en un conjunto X, haciendo

$$\alpha_r : G \times X \to X,\ \alpha_r(a, x) = r(a)(x) \text{ para cada } a, x,$$

queda definida una acción a izquierda de G en X. Es fácil ver que $\alpha_{\rho_\alpha} = \alpha$ y $\rho_{\alpha_r} = r$, de modo que hay una identificación entre acciones de un grupo sobre un conjunto dado y representaciones del grupo sobre dicho conjunto.

5. Con la notación anterior, observamos que $\rho_\alpha(G) \subseteq \mathrm{U}(F(X))$ cualquiera sea la acción de G en X, y $\rho_\alpha(a)^{-1} = \rho_\alpha(a^{-1})$ para todo $a \in G$.
6. Si G actúa sobre X y $x \in X$ escribiremos
$$O_x = \{ax : a \in G\},\ E_x = \{a \in G : ax = x\},$$
la *órbita* y el *estabilizador* de x respectivamente.
Fijados $a, b \in G$ y $x \in X$ vemos que
$$b \in E_{ax} \Leftrightarrow b(ax) = ax \Leftrightarrow (a^{-1}ba)x = x \Leftrightarrow a^{-1}ba \in E_x,$$
o sea $E_{ax} = aE_x a^{-1}$.
7. Decimos que la acción es *transitiva* si exíste $x \in X$ tal que $X = O_x$.
8. La acción es *fiel* si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes: (i) La representación asociada es inyectiva. (ii) Si $a, b \in G$ y $ax = bx$ si $x \in X$ resulta $a = b$. (iii) $\cap_{x\in X} E_x = \{1_G\}$.
9. La acción es *libre* si $E_x = \{1_G\}$ cualquiera sea $x \in X$.
10. Sean X, Y dos G-grupos. Una función $f : X \to Y$ se dice *morfismo de G-grupos* si dados $a \in G$ y $x \in X$ se tiene $f(ax) = af(x)$. El mismo se dice *monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo de G-grupos* si es morfismo de G-grupos inyectivo, suryectivo o biyectivo respectivamente.
11. Sea X un G-grupo, $x \in X$. Hay entonces un isomorfismo de G-grupos $O_x \approx G/E_x$, de modo que si G es grupo de orden finito $\mid O_x \mid = \mid G : E_x \mid$.
Precisamente, es claro que O_x es G-grupo.
Por otra parte, sea $\nu : G \to G/E_x$ la proyección al cociente. Si $a, b \in G$ sea $a\nu(b) \triangleq \nu(ab)$. Si fuera $\nu(b_1) = \nu(b_2)$, puesto que $(ab_1)^{-1}(ab_2) = b_1^{-1}b_2 \in E_x$, tenemos $\nu(ab_1) = \nu(ab_2)$. Sigue enseguida que G/E_x es G-grupo.
Hagamos $f : G/E_x \to O_x$ tal que $f(\nu(a)) \triangleq ax$. Si $\nu(a_1) = \nu(a_2)$, como $a_1^{-1}a_2 \in E_x$, $a_1x = a_2x$. Luego f está bien definida. Como
$$f(a\nu(b)) = f(\nu(ab)) = (ab)x = a(bx) = af(\nu(b))$$
es f morfismo de G-grupos, y es simple ver que es biyectivo.
12. Sean X un G-grupo,
$$E_X(G) \triangleq \{x \in X : ax = x \text{ para todo } a \in G\}$$

el conjunto de puntos fijos por la acción de G en X. Entonces E_X contiene a los puntos cuyas órbitas constan de un solo punto. Si la acción es no trivial y X es finito existirá $n \in \mathbb{N}$ único, elementos $x_1, ..., x_n \in X$ distintos y subgrupos $S_1, ..., S_n$ de G tales que

$$X = \cup_{x \in E_X} \{x\} \bigcup \cup_{i=1}^{n} O_{x_i} \text{ y} \tag{3.7.1}$$

$$| X | = | E_X(G) | + \sum_{i=1}^{n} [G : S_i]. \tag{3.7.2}$$

Así (3.7.1) indica la partición de X mediante órbitas disjuntas y (3.7.2) es la llamada *ecuación de clases*.

13. (cf. [**19**]) Sea X un G-*grupo finito* , o sea tanto X como G son finitos.
(i) Si N es el número de G-orbitas resulta

$$N = \frac{1}{| G |} \sum_{g \in G} | F_g |, \tag{3.7.3}$$

donde $F_g \triangleq \{x \in X : gx = x\}$.
En efecto, cada $x \in X$ es contado $| E_x |$ veces en la suma de (3.7.3).
Si además $O_x = O_y$, resulta $| E_x | = | E_y |$.
Así, en cada orbita, la suma en (3.7.3) aporta $| E_x || O_x | = | G |$.
Como X es la unión disjunta de todas las G-orbitas sigue (3.7.3).
(ii) Si X es G-grupo finito transitivo y $| X | > 1$ exíste $g \in G$ sin puntos fijos.
Precisamente, $| G | = \sum_{g \in G} | F_g |$ pues la acción se supone transitiva y $F(1_G) > 1$ pues $| X | > 1$. Esta condición indica que X es un G-grupo no trivial.
Si fuera $| F_g | > 1$ para cada $g \in G$,

$$| G | = \sum_{g \in G} | F_g | > \sum_{g \in G} 1 = | G |,$$

lo que es obviamente absurdo.

3.8. Automorfismos interiores

1. Sea G un grupo, $\mathrm{ad}_a : G \to G$, $\mathrm{ad}_a(x) = axa^{-1}$ si $x \in G$. Entonces $ad : G \to \mathrm{Aut}(G)$ es morfismo de grupos y $\ker(\mathrm{ad}) = \mathrm{Z}(G)$. Escribiremos $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Im}(\mathrm{ad})$, y llamaremos *automorfismos interiores* a sus elementos.
2. Notamos que $E_G(\mathrm{Inn}(G)) = \mathrm{Z}(G)$ la ecuación de clases (3.7.2) toma la forma

$$| G | = | \mathrm{Z}(G) | + \sum_{i=1}^{n} [G : \{x_i^c\}] \tag{3.8.1}$$

para ciertos subgrupos $x_1, ..., x_n \in G$ de G, con

$$\{x_i\}^c = E_{x_i} = \{a \in G : ax_i = x_ia\} \text{ si } 1 \leq i \leq n.$$

3.9. Teorema de Cauchy

[A. Cauchy; [**22**]; [**30**], Lema 1.7.16; [**129**], Th. 4.2] Si G es grupo finito, $p \in \mathbb{N}$ es primo y $\mid G \mid$ es múltiplo de p entonces G contiene algún elemento de orden p.

► (1) Supongamos en principio que G es abeliano.
(1)(i) Sea $\mid G \mid = p^r m$, con $r \in \mathbb{N}$ y $(m : p) = 1$. Dado $x \in G$ cuyo orden es múltiplo de p es fácil ver que $x^{|x|/p}$ tiene orden p.
(1) (ii) Sea $y \in G - \{e\}$ cuyo orden sea coprimo con p. Por el teorema de Lagrange m debe ser múltiplo de $\mid \langle y \rangle \mid$.
(1)(iii) Además, siendo G abeliano $\langle y \rangle \trianglelefteq G$ y $\mid \dfrac{G}{\langle y \rangle} \mid = p^r \dfrac{m}{\mid \langle y \rangle \mid}$.
(1)(iv) Como $\dfrac{m}{\mid \langle y \rangle \mid} < m$, inductivamente podemos suponer que existe un elemento $\xi \in \dfrac{G}{\langle y \rangle}$ de orden p.
(1)(v) Sean $\pi : G \to \dfrac{G}{\langle y \rangle}$ la proyección al cociente y $z \in G$ tal que $\pi(z) = \xi$.
(1)(vi) Luego $\xi^{|z|} = 1_{G/\langle y \rangle}$ y $\mid z \mid$ debe ser múltiplo de p. Podemos concluir entonces que habrá en G algún elemento de orden p.
(2) Consideremos el caso general. Claramente el resultado vale si $m = 1$. Por inducción, podemos asumir el resultado cierto para grupos finitos de orden menor que el de G, y que G es no abeliano.
(2)(i) En (3.8.1), $[G : E_{x_i}] = \mid O_{x_i} \mid > 1$, o sea $\mid E_{x_i} \mid < \mid G \mid$ si $1 \leq i \leq n$. Si el orden de algún subgrupo E_{x_i} es divisible por p sigue la tesis por hipótesis inductiva.
(2)(ii) Para cada i podemos suponer $p \nmid \mid E_{x_i} \mid$, o $p \mid [G : E_{x_i}]$ pues

$$\mid G \mid = [G : E_{x_i}] \mid E_{x_i} \mid,$$

$p \mid\mid G \mid$ y p es primo.
(2)(iii) Por (3.8.1) sigue que $p \mid\mid \mathrm{Z}(G) \mid$ e inferimos la tesis.

3.10. Teoremas de Sylow

1. Dado un primo $p \in \mathbb{N}$, se llama *p-grupo* a todo grupo en el que el orden de cada elemento es una potencia de p (V. Ejs. §3.12.1, §3.12.2, §3.12.3, §3.12.5).
2. Del teorema de Cauchy sigue enseguida que un grupo finito G es p-grupo si y solo si su orden es potencia de p.
3. Sean G grupo finito y p primo. Indicamos $\mid G \mid_p$ a la máxima potencia de p que divide a $\mid G \mid$. Se llama *p-subgrupo de Sylow* a todo subgrupo de G de orden $\mid G \mid_p$. Indicaremos $\mathrm{Syl}_p(G)$ a la clase de p-subgrupos de Sylow de G.
4. (cf. [**142**]; [**5**], p. 19) Sea G grupo finito, $p \in \mathbb{N}$ primo. Entonces:
   (1) $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \emptyset$ (cf. [**30**], Teorema 1.7.18).
   (2) G actúa transitivamente sobre $\mathrm{Syl}_p(G)$ por conjugación (cf. [**30**], Teorema 1.7.19).

(3) $\mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid = [G : N_G(P)] \equiv 1 \bmod p$ y $\mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid \quad \mid \dfrac{\mid G \mid}{\mid G \mid_p}$ cualquiera sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

► (1)(i) Sea $\mid G \mid = p^r m$, con $r, m \in \mathbb{N}$ y $(p : m) = 1$. Debemos probar la existencia en G de un subgrupo de orden p^r. Haremos para ello inducción en el orden de G.

(1) (ii) Evidentemente podemos suponer G no trivial.

(1) (iii) Si $p \mid \quad \mid \mathrm{Z}(G) \mid$ por el teorema de Cauchy existe $x \in \mathrm{Z}(G)$ elemento de orden p. Evidentemente $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ y $\mid G/\langle x \rangle \mid = p^{r-1}m$. Por hipótesis inductiva, podemos suponer la existencia de un subgrupo S^* en $G/\langle x \rangle$ de orden p^{r-1}. Si $\pi : G \to G/\langle x \rangle$ es la proyección al cociente, $S \triangleq \pi^{-1}(S^*)$ es subgrupo de G y

$$p^{r-1} = \mid S^* \mid = \mid \frac{S}{\langle x \rangle} \mid = \frac{\mid S \mid}{\mid \langle x \rangle \mid} = \frac{\mid S \mid}{p},$$

o sea S es subgrupo de G de orden p^r.

(1)(iv) Si $p \nmid \quad \mid \mathrm{Z}(G) \mid$, por (3.8.1) existirá $y \notin \mathrm{Z}(G)$ tal que $p \nmid [G : E_y]$.

(1)(v) Como p es primo y $\mid G \mid = [G : E_y] \mid E_y \mid$, será $p^r \mid \quad \mid E_y \mid$.

(1)(vi) Pero $[G : E_y] > 1$ porque y es no central, de modo que $\mid E_y \mid < \mid G \mid$. Por hipótesis inductiva podemos inferir que E_y, y por lo tanto G, contiene un subgrupo de orden p^r.

(2)(i) Fijemos $S, T \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y consideremos $X = \{xS : x \in G\}$ como T-grupo mediante la acción $y \cdot xS = (yx)S$, con $y \in T$ y $x \in G$. Por la ecuación de clases $\mid X \mid \equiv \mid E_X(T) \mid \bmod p$.

(2)(ii) Como $\mid X \mid = [G : S]$ y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $p \nmid \quad \mid X \mid$.

(2)(iii) Luego existe $xS \in E_X(T)$, o sea $yxS = xS$ cualquiera sea $y \in T$, o bien $x^{-1}yxS = S$ si $y \in T$.

(2)(iv) Luego $x^{-1}Tx \subseteq S$, e inferimos que $T = xSx^{-1}$.

(3)(i) Sea S un p-subgrupo de Sylow de G y consideremos $\mathrm{Syl}_p(G)$ en cuanto S-grupo por conjugación. Por la ecuación de clases tenemos $\mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid \equiv \mid E_{\mathrm{Syl}_p(G)}(S) \mid \bmod(p)$.

(3)(ii) Pero cualquier p-subgrupo de Sylow T invariante por conjugación bajo S es necesariamente S. Precisamente, si $sTs^{-1} = T$ cualquiera sea $s \in S$, i.e. si $S \subseteq \mathrm{N}_G(T)$, entonces $TS \leq G$. Para ello, si $s, s_1, s_2 \in S$ y $t, t_1, t_2 \in T$ resulta

$$(t_1 s_1)(t_2 s_2) = [t_1(s_1 t_2 s_1^{-1})][s_1 s_2],$$
$$(ts)^{-1} = (s^{-1}t^{-1}s)s^{-1}.$$

Más aún, $T \trianglelefteq TS$ pues en todo caso

$$(t_1 s_1)t_2(t_1 s_1)^{-1} = t_1(s_1 t_2 s_1^{-1})t_1^{-1} \in T.$$

(3)(iii) Además es inmediato que $S \cap T \trianglelefteq S$. Luego $\dfrac{TS}{T} \approx \dfrac{S}{S \cap T}$ por el tercer teorema de isomorfismo, de donde $\mid TS \mid = \dfrac{\mid S \mid \mid T \mid}{\mid S \cap T \mid}$ y ST

es p-subgrupo de G.
Por otra parte, $S \leq ST \geq T$ y concluímos que $S = T = ST$.
(3)(iv) Sigue que $\mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid \equiv 1 \bmod p$.
(3)(v) Como además $\mathrm{Syl}_p(G)$ es G-transitivo resulta

$$\mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid = [G : E_G(S)] = [G : N_G(S)] = \frac{\mid G \mid}{\mid N_G(S) \mid}.$$

Como $S \subseteq N_G(S)$, $\mid G \mid_p \mid \mid N_G(S) \mid$, digamos $\mid N_G(S) \mid = c \mid S \mid$ para cierto $c \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid = \frac{\mid G \mid}{c \mid S \mid} = \frac{\mid G \mid}{c \mid G \mid_p},$$

o bien $\dfrac{\mid G \mid}{\mid G \mid_p} = c \mid \mathrm{Syl}_p(G) \mid$ y tenemos la tesis.

3.11. Grupos abelianos finitos. Teoremas de Gauss y de Schering - Kronecker

1. Dado p-primo, llamamos *p-primario* a todo p-grupo abeliano finito.
2. [**58**] Cada grupo abeliano finito es suma directa de grupos p-primarios.
   Para ello, sea $\mid G \mid = n$ y observemos:
   (i) Podemos suponer $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}$, con $s, m_1, ..., m_s \in \mathbb{N}$, $p_1, ..., p_s$ primos distintos.
   (ii) Dado p-primo indiquemos
   $$G_p = \{x \in G : \exists l \in \mathbb{N} / p^l x = 0\}.$$
   Claramente G_p-es p-subgrupo de G.
   (iii) Haciendo $n_i \triangleq n/p^{m_i}$, $1 \leq i \leq s$, hay $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i n_i$.
   (iv) Luego $x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i n_i x$ si $x \in G$ y $\alpha_i n_i x \in G_{p_i}$ si $1 \leq i \leq s$, o sea $G = \sum_{i=1}^{s} G_{p_i}$.
   (v) Sea $y \in G_{p_j} \cap \langle \cup_{i \in \{1,...,s\}-\{j\}} G_{p_i} \rangle$, digamos $y = \sum_{i \in \{1,...,s\}-\{j\}} y_i$, $j \in \{1, ..., s\}$ fijo. Para cada i sea $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $p_i^{l_i} y_i = 0$ y sea $\mu = \prod_{i \in \{1,...,s\}-\{j\}} p_i^{l_i}$. Sea $l_j \in \mathbb{N}$ tal que $p_j^{l_j} y = 0$.
   Hay enteros a, b tales que $1 = a p_j^{l_j} + b\mu$. Luego
   $$y = a p_j^{l_j} y + b\mu \textstyle\sum_{i \in \{1,...,s\}-\{j\}} y_i = 0$$
   y $G = \oplus_{i=1}^{s} G_{p_i}$.
3. Dado $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ de elementos no nulos de un grupo abeliano G se dice *independiente* si dados $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ tales que $\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = 0$ entonces $m_j x_j = 0$ para cada j.
4. Si G es grupo abeliano, $n \in \mathbb{N}$ y $C = \{x_1, ..., x_n\}$ es subconjunto de G, C es independiente si y solo si
   $$\langle x_1, ..., x_n \rangle = \oplus_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle.$$
5. Sean p-primo, $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, ..., x_n\}$ subconjunto independiente de un grupo p-primario G.

(i) Dados $z_1, ..., z_n \in G$ tales que $pz_i = x_i$ si $1 \leq i \leq n$, el conjunto $\{z_1, ..., z_n\}$ es independiente.
En efecto, sean $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ rales que $\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0$.
Luego $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$ y debe ser $m_1 x_1 = ... = m_n x_n = 0$.
Por lo tanto $\mathrm{ord}(x_i) \mid m_i$ si $1 \leq i \leq n$.
Como G es p-grupo, cada m_i es múltiplo de p. Tenemos

$$0 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{p} p z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{p} x_i,$$

de donde $0 = \frac{m_i}{p} x_i = m_i z_i = 0$ si $1 \leq i \leq n$.
(ii) Dados $k_1, ..., k_n$ enteros tales que $k_i x_i \neq 0$ si $1 \leq i \leq n$, el conjunto $\{k_1 x_1, ..., k_n x_n\}$ es claramente independiente.

6. Todo grupo abeliano finito es suma directa de grupos cíclicos primarios.
7. (cf. [**99**], [**136**]) Todo grupo abeliano finito G es suma directa de subgrupos primarios cíclicos.
► (i) Por §3.11.2 podemos suponer que G es grupo p-primario, para cierto primo p.
(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n G = (0_G)$. Haremos inducción en n.
(iii) Supongamos $pG = (0_G)$.
Entonces G deviene $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial y por ello hay alguna base $\{x_1, ..., x_r\}$ de G. Puesto que se trata de un conjunto de generadores y por §3.11.4 es

$$G = \langle x_1, ..., x_r \rangle = \oplus_{i=1}^{r} \langle x_i \rangle.$$

(iv) Asumamos que $p^{n+1} G = (0_G)$ y hagamos $H = pG$. Entonces H es grupo p-primario y $p^n H = (0_H)$. Inductivamente podemos escribir $H = \oplus_{j=1}^{s} \langle y_j \rangle$ para ciertos $s \in \mathbb{N}$ e $y_1, ..., y_s \in H$.
(v) Dado $1 \leq j \leq s$ sea $z_j \in G$ tal que $y_j = p z_j$.
Por §3.11.5 $\{z_1, ..., z_s\}$ es independiente. Sea $L = \oplus_{j=1}^{s} \langle z_j \rangle$.
(vi) Si $1 \leq j \leq s$ notamos que $\mathrm{ord}(y_j) z_j$ tiene orden p y $\{\mathrm{ord}(y_j) z_j\}_{1 \leq j \leq s}$ es subconjunto linealmente independiente del $\mathbb{Z}_p$ - espacio vectorial

$$G[p] \triangleq \{w \in G : pw = 0_G\}.$$

(vii) Extendamos el conjunto anterior a una base de $G[p]$, digamos

$$\{\mathrm{ord}(y_1) z_1, ..., \mathrm{ord}(y_s) z_s, w_1, ..., w_t\}.$$

Escribamos $K = \oplus_{k=1}^{t} \langle w_k \rangle$.
(viii) Dado $x \in G$ tenemos $px \in H$, digamos $px = \sum_{j=1}^{s} a_j y_j$ para ciertos enteros $a_1, ..., a_s$. Así

$$px = \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_j y_j = p \sum_{j=1}^{s} a_j z_j$$

y $x - \sum_{j=1}^{s} a_j z_j \in G[p]$. Luego hay únicos escalares $b_1, ..., b_s, c_1, ..., c_t$ tales que

$$x - \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_j z_j = \sum_{j=1}^{s} b_j \mathrm{ord}(y_j) z_j + \sum_{k=1}^{t} c_k w_k,$$

o sea $G = L + K$.
(ix) Sea $v \in L \cap K$, digamos $v = \sum_{j=1}^{s} d_j z_j = \sum_{k=1}^{t} e_k w_k$.
Luego

$$0_G = pv = \sum_{j=1}^{s} d_j y_j$$

y $\mathrm{ord}(y_j) \mid d_j$ porque cada $d_j y_j = 0_G$. Sea $d_j = \mathrm{ord}(y_j)\delta_j$, $1 \leq j \leq s$. Así

$$-\sum_{j=1}^{s} \delta_j \mathrm{ord}(y_j) z_j + \sum_{k=1}^{t} e_k w_k = 0_G$$

e inferimos que $v = 0_G$, o sea $G = L \oplus K$.

3.12. Ejemplos

3.12.1. Grupos de permutaciones.

1. (i) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{P}_n = \{\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \text{ biyectiva}\}$. Con la composición, P_n deviene grupo, el *grupo de permutaciones* de n elementos.

   (ii) Notar que es no abeliano si $n > 2$ y $\mathrm{card}(\mathrm{P}_n) = n!$.

   (iii) Si $\sigma \in \mathrm{P}_n$, indicamos
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & ... & \sigma_n \end{pmatrix},$$
   de modo que $\sigma(i) = \sigma_i$ si $1 \leq i \leq n$. Por ejemplo, con $n = 5$, sea
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.12.1}$$
   También se puede representar (3.12.1) en la forma $\sigma = (1, 3, 2, 5)$, lo que expresa que $1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 1$ y $\sigma(4) = 4$.

   (iv) Sea $\Theta : \mathrm{P}_n \to \{-1, 1\}$, $\Theta(\sigma) \triangleq \prod_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}$.

   (v) P. ej., sea σ una *transposición*, digamos $\sigma = (k, h)$ para ciertos $1 \leq k < h \leq n$, i.e. $\sigma(k) = h$, $\sigma(h) = k$ y por otra parte $\sigma(l) = l$ si $l \in \{1, ..., n\} - \{k, h\}$. Evidentemente, $\Theta(\sigma) = -1$.

   (vi) Toda permutación es producto de transposiciones, pues si $r \in \mathbb{N}$ se tiene
   $$(1, 2, ..., r) = (1, r)(1, r - 1)...(1, 2).$$
   (vii) Notar que $\{-1, 1\}$ es grupo con la multiplicación.
   Dados $\sigma, \eta \in \mathrm{P}_n$ tenemos
   $$\begin{aligned} \Theta(\sigma \circ \eta) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\sigma(\eta(i))} - x_{\sigma(\eta(j))}}{x_{\eta(i)} - x_{\eta(j)}} \cdot \frac{x_{\eta(i)} - x_{\eta(j)}}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{1 \leq k < h \leq n} \frac{x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(h)}}{x_k - x_h} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\eta(i)} - x_{\eta(j)}}{x_i - x_j} \\ &= \Theta(\sigma)\Theta(\eta). \end{aligned}$$
   Luego Θ define un morfismo de grupos.

   (viii) Sea $\sigma \in \mathrm{P}_n$ producto de k-transposiciones, con $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\Theta(\sigma) = (-1)^k$. En consecuencia, el número k puede no ser único, pero será siempre par o siempre impar.

   (ix) Se denota $\mathrm{A}_n \triangleq \ker(\Theta)$ al subgrupo de *permutaciones pares* de

P_n, o $n-$*grupo alternado*. Vemos que $\mid \mathrm{A}_n \mid= n!/2$. Las *permutaciones impares* las constituye el conjunto $\mathrm{P}_n - \mathrm{A}_n$.
(x) Si $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sea D_{2n} el *grupo dihedral de orden* $2n$, generado por elementos s, t tales que $s^n = t^2 = 1_{\mathrm{D}_{2n}}$ y $tst = s^{-1}$.

2. (V. §3.13(4)) Veamos que $\mathcal{SP}(\Sigma_4) \approx \mathrm{A}_4$.
(i) Puede verse que A_4 consta de la identidad, tres elementos de orden dos y ocho de orden tres. Precisamente:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_4 = \{&(1),\\ &(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3),\\ &(1,2,3),(1,2,4),(1,3,2),(1,3,4),(1,4,2),(1,4,3),(2,4,3),(3,4,2)\}.\end{aligned}$$

(ii) Indiquemos $s = (1,2)(3,4)$, $t = (1,2,3)$. Es fácil ver que

$$s^2 = t^3 = (st)^3 = (1). \tag{3.12.2}$$

y, en particular, $st \neq ts$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_4 &= \langle s,t\rangle\\ &= \{1, s, t, t^2, st, ts, st^2, tst, t^2s, sts, tst^2, st^2s\}.\end{aligned}$$

(iii) Considerando un tetraedro regular de vértices a, b, c, d, cada vértice fijo proyecta perpendicularmente en el baricentro de la cara opuesta (i.e. el punto de intersección de las medianas, coincidente con el ortocentro o punto de intersección de las alturas porque las caras son triángulos equiláteros). Si se tratare del vértice a, hay rotaciones de amplitud $\pi/3$ o $2\pi/3$ que fijan a a e intercambian los vértices b, c, d mediante $b \to c \to d \to b$ o $b \to d \to c \to b$, respectivamente. Hay ocho de tales rotaciones.
(iv) Por otra parte, cada punto medio de cada arista determina un eje que pasa por el punto medio de la arista opuesta. Si se tratara del eje determinado por los puntos medios de las aristas $[a, c]$ y $[b, d]$, la rotación de amplitud π respecto al mismo intercambiará los vértices $a \curvearrowright c \curvearrowright a$ y $b \curvearrowright d \curvearrowright b$.
(iv)(a) En efecto, consideremos el tetraedro regular centrado en el origen con aristas de longitud uno. El mismo tiene vértices en

$$\begin{aligned}a &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0),\ b = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0),\\ c &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0),\ d = (0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}).\end{aligned}$$

(iv)(b) Los puntos medios $e = (0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0)$ y $f = (0, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ de las aristas $[a, c]$ y $[b, d]$ determinan la recta

$$L : e + t(f - e),\ (t \in \mathbb{R}).$$

(iv)(c) Dado $v \in \mathbb{R}^3$, el único plano perpendicular a L que contiene a v es

$$\Pi_v \triangleq \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - v, f - e\rangle = 0\}.$$

Además

$$\Pi_v \cap L = \{e + \frac{\langle v - e, f - e\rangle}{\| f - e \|^2}(f - e)\},$$

de modo que

$$\mathrm{dist}(v, L) = \| v - e - \frac{\langle v - e, f - e\rangle}{\| f - e \|^2}(f - e) \| .$$

(iv)(d) Observamos que $c \in \Pi_a$ y $b \in \Pi_d$. Como los planos son convexos, $[a, c] \subseteq \Pi_a$ y $[b, d] \subseteq \Pi_d$. Así $L \cap \Pi_a = \{e\}$ y $L \cap \Pi_d = \{f\}$, por lo que una rotación de amplitud π alrededor de L intercambia los puntos a y c, y b y d.
(v) Sea $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$s(v) = -v + 2[e + \frac{\langle v - e, f - e\rangle}{\| f - e \|^2}(f - e)].$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
s^2(v) &= -s(v) + 2[e + \frac{\langle s(v) - e, f - e\rangle}{\| f - e \|^2}(f - e)] \\
&= -s(v) + 2e + 2\langle v - e, f - e\rangle \frac{f - e}{\| f - e \|^2} \\
&= v - 2[e + \frac{\langle v - e, f - e\rangle}{\| f - e \|^2}(f - e)] + 2e + 2\langle v - e, f - e\rangle \frac{f - e}{\| f - e \|^2} \\
&= v,
\end{aligned}$$

i.e. $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ pues v es arbitrario.
(vi) La rotación

$$t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ t(x, y, z) = (\frac{x + \sqrt{3}y}{2}, \frac{-\sqrt{3}x + y}{2}, z)$$

fija el vértice d y aplica

$$a \xrightarrow{t} b \xrightarrow{t} c \xrightarrow{t} d \xrightarrow{t} a.$$

(vii) Tenemos $s, t \in \mathcal{SP}(\Sigma_4)$ y se verifica (3.12.2). Por (ii) sigue la afirmación.

3. Cada grupo G admite una *inmersión* en $\mathrm{B}(G)$, donde $\mathrm{B}(G)$ es el grupo de biyecciones de G en G, o sea existe un monomorfismo $\pi : G \hookrightarrow \mathrm{B}(G)$. En particular, si $| G | = n \in \mathbb{N}$, $G \hookrightarrow \mathrm{P}_n$.
Este resultado se conoce como *teorema de Cayley* [**23**]. Para ello, sea $\pi : G \to \mathrm{B}(G)$, la *transformada o representación de Cayley* de modo que, para $g \in G$, hacemos $\pi(g) : G \to G$ tal que $\pi(g)(h) = gh$ para cada $h \in G$. Es fácil ver que π está bien definida y que es monomosfismo de grupos.

3.12.2. Grupos dihedral y cuaterniónico.

1. Si $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, D_n denota el *grupo dihedral* de simetrías de un polígono regular de n-vértices, lo que incluye rotaciones y simetrías. Tienen orden $2n$ y son no abelianos.
2. En particular,
$$\mathrm{D}_4 = \{(1), (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (14)(23), (13), (24)\}.$$
3. El grupo de cuaterniones
$$\mathrm{Q}_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$
es dado por las relaciones $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$. Considerando (3.12,3), Q_8 se identifica con su imágen por la transformada de Cayley, o sea
$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_8 \approx \{(1), & (1, i, -1, -i)(j, k, -j, -k),\\ & (1, j, -1, -j)(i, -k, -i, k),\\ & (1, k, -1, -k)(i, j, -i, -j),\\ & (1, -1)(i, -i)(j, -j)(k, -k),\\ & (1, -i, -1, i)(j, -k, -j, k),\\ & (1, -j, -1, j)(i, k, -i, -k),\\ & (1, -k, -1, k)(i, -j, -i, j)\}. \end{aligned}$$
Notamos que D_4 contiene cinco elementos de orden dos, y Q_8 posee solo uno, de modo que no son grupos isomorfos.

3.12.3. Grupo lineal.

1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ el *grupo lineal de* matrices cuadradas inversibles de n-filas y n-columnas con coeficientes complejos. Con el producto usual de matrices, $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ es un grupo. Si $\det(z)$ designa el determinante de una matriz z entonces $\det\colon \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ es homomorfismo de grupos. Introducimos los grupos *especial lineal* y *ortogonal*, a saber:
$$\begin{aligned} \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) &\triangleq \{z \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) : \det(z) = 1\},\\ O(n, \mathbb{C}) &\triangleq \{z \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) : z^t z = 1_{\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})}\}, \end{aligned}$$
donde $z^t_{i,j} = \overline{z_{j,i}}$ si $z = (z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Vemos que el grupo especial lineal es el núcleo del determinante. Además, $z^{-1} = z^t$ si $z \in O(n, \mathbb{C})$. Más aún, si $1 \leq r, s \leq n$ se tiene
$$\delta_{r,s} = (z^t z)_{r,s} = \textstyle\sum_{j=1}^n z^t_{r,j} z_{j,s} = \sum_{j=1}^n \overline{z_{j,r}} z_{j,s} = \langle z^s, z^r \rangle,$$
donde z^s y z^r son las r y s-esimas columnas de z consideradas como vectores en $\mathbb{C}^n$. Entonces $\{z^1, ..., z^n\}$ constituye una *base ortonormal* de $\mathbb{C}^n$. Análogamente, el conjunto de filas $\{z_1, ..., z_n\}$ de z también resulta base ortonormal.
Sea $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C}^n : \parallel \omega \parallel_2 \triangleq [\sum_{j=1}^n \mid \omega_j \mid^2]^{1/2} = 1\}$ la esfera unitaria de $\mathbb{C}^n$. Podemos definir una acción de $O(n, \mathbb{C})$ en Ω escribiendo

$$z * \omega = (\sum_{j=1}^{n} z_{i,j}\omega_j)_{1\le i\le n},$$

donde $z \in O(n,\mathbb{C})$ y $\omega \in \Omega$.
Precisamente, notemos que

$$\begin{aligned}
\parallel z*\omega \parallel_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} \mid \sum_{j=1}^{n} z_{i,j}\omega_j \mid^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{i,j}\omega_j \overline{\sum_{j=1}^{n} z_{i,j}\omega_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{1\le j,k\le n} z_{i,j}\omega_j\overline{z_{i,k}\omega_k} \\
&= \sum_{1\le j,k\le n} \omega_j\overline{\omega_k}\sum_{i=1}^{n} z_{i,j}\overline{z_{i,k}} \\
&= \sum_{1\le j,k\le n} \omega_j\overline{\omega_k}\langle z^j, z^k\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mid \omega_j \mid^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Además

$$1_{O(n,\mathbb{C})} * \omega = (\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}\omega_j)_{1\le i\le n} = \omega$$

y dados $x, y \in O(n,\mathbb{C})$ resulta

$$\begin{aligned}
(xy)*\omega &= (\sum_{j=1}^{n}\omega_j \sum_{k=1}^{n} x_{i,k}y_{k.j})_{1\le i\le n} \\
&= (\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}\sum_{j=1}^{n} y_{k,j}\omega_j)_{1\le i\le n} \\
&= (\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}(y*\omega)_k)_{1\le i\le n} \\
&= x*(y*\omega).
\end{aligned}$$

2. Sean $p \in \mathbb{N}$ primo y $\mathbb{F}_p$ un cuerpo finito de p-elementos. Si $n \in \mathbb{N}_{>1}$ veamos que $\mid \mathrm{gl}(n,p) \mid= \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$, donde $\mathrm{gl}(n,p)$ indica el conjunto de matrices inversibles cuadradas $n \times n$ sobre $\mathbb{F}_p$.
Podemos considerar cada matriz en este grupo como representante de una base de $(\mathbb{F}_p)^n$. Para la elección de la primer fila hay $p^n - 1$ opciones. Fijada la misma, $(p_{1,1},...,p_{1,n})$, la segunda no deberá ser múltiplo de ella, i.e. hay $p^n - p$ elecciones posibles. Asimismo, construídas i-filas la siguiente debe ser distinta a $\sum_{j=1}^{i} c_j(p_{j,1},...,p_{j,n})$,

i.e. es elegible entre $p^n - p^i$ alternativas. La afirmación sigue claramente.
Como el determinante es epimorfismo y su núcleo es $\mathrm{sl}(n,p)$, el grupo especial lineal $n \times n$ sobre $\mathbb{F}_p$, vemos que

$$| \mathrm{sl}(n,p) |= (p-1)^{-1} \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i). \tag{3.12.3}$$

3.12.4. Generadores de sl$(2,p)$. Las matrices

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son generadoras de $\mathrm{sl}(2,p)$.
Para ello, fijemos $A \in$ sl(2,p). Bastará ver que multiplicando a izquierda A por un número finito ciertas de potencias de S y T se obtiene la matriz idéntica. Si $a_{2,1} = 0$ entonces $a_{1,1} \neq 0$. Luego

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \triangleq B$$

y $b_{2,1} \neq 0$. O sea podemos suponer $a_{2,1} \neq 0$. En todo caso, si $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$S^n B = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} + nb_{2,1} & * \\ ** & *** \end{pmatrix}.$$

Podemos seleccionar n de modo que $b_{1,1} + nb_{2,1} = 1$, y con tal elección hacemos $S^n B \triangleq C$. Ahora

$$T^{-c_{2,1}} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2,1}p - c_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{1,2} \\ & 1 \end{pmatrix} = S^{c_{1,2}},$$

y sigue enseguida la afirmación.

3.12.5. Grupos, cocientes, índices.

1. Si G es grupo no abeliano entonces $G/\mathrm{Z}(G)$ no es cíclico. Sino, supongamos $G/\mathrm{Z}(G) = \langle \pi(a) \rangle$, donde π es la proyección al cociente y $a \in G$. Dados $x, y \in G$ sean $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $\pi(x) = \pi(a)^r$ y $\pi(y) = \pi(a)^s$. Luego existen $c_1, c_2 \in \mathrm{Z}(G)$ tales que $x = a^r c_1$ e $y = a^s c_2$. En consecuencia
$$xy = a^r c_1 a^s c_2 = a^{r+s} c_1 c_2 = a^{r+s} c_2 c_1 = a^s c_2 a^r c_1 = yx,$$
y siendo x, y cualesquiera G resulta abeliano en contradicción con la hipótesis.
2. (i) Sean G grupo, H, K subgrupos de G de índice finito. Veamos que $[G : K \cap H] < \infty$.
En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $x_0, ..., x_n, y_0, ..., y_m$ en G tales que
$$\frac{G}{H} = \{x_0 H, ..., x_n H\}, \ \frac{G}{K} = \{y_0 K, ..., y_m K\}.$$
Dado $z \in G$ quedan determinados únicos x_i, y_j tales que
$$z(H \cap K) \subseteq zH \cap zK = x_i H \cap y_j K.$$
Sea $f : \dfrac{G}{H \cap K} \to \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{K}$,

$$f(x(H\cap K)) = (x_iH, y_jK) \text{ si } z(H\cap K)\subseteq x_iH\cap y_jK.$$

Bastará ver que esta función es inyectiva pues entonces

$$[G : H\cap K] \leq [G : H][G : K] < \infty.$$

Para ello, sea

$$(x_iH, y_jK) = f(z(H\cap K)) = f(w(H\cap K))$$

para ciertos $z, w \in G$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$. Podemos escribir $z = x_ih_1 = y_jk_1$ y $w = x_ih_2 = y_jk_2$ para ciertos $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$. Entonces

$$z^{-1}w = h_1^{-1}h_2 = k_1^{-1}k_2 \in H\cap K,$$

o sea $z(H\cap K) = w(H\cap K)$.

(ii) Si H es subgrupo de indice finito de G entonces $N \triangleq \cap_{x\in G} xHx^{-1}$ es subgrupo normal de indice finito de G.

Para ello, evidentemente N es subgrupo normal de G. Si $u, v \in G$, $Nu = Nv$ sii $vu^{-1}\in N$, lo que equivale a $x^{-1}vu^{-1}x \in H$ para todo $x\in G$. En particular, $u^{-1}v \in H$, i.e. $uH = vH$. Así, la función $g : G/N \to G/H$, $g(Nu) = uH$ está bien definida y es inyectiva, de donde sigue la afirmación pues H tiene índice finito.

3.12.6. Sobre p-grupos.

1. Si $n, p \in \mathbb{N}$, p es primo y G es grupo de orden p^n, hay subgrupos normales S_k tales que $\mid S_k \mid = p^k$ para $0 \leq k \leq n$.
   En efecto, haremos inducción en el orden del grupo.
   Si $n = 1$, $G \approx \mathbb{Z}_p$ y solo tiene subgrupos triviales, evidentemente ambos normales.
   Supongamos $n > 1$ y el resultado cierto para grupos de orden p^ν, cuando $\nu < n$. Por la ecuación de clases (3.8.1), $p \mid \quad \mid \mathrm{Z}(G) \mid$ y por ello G contiene algún elemento $x \in \mathrm{Z}(G) - \{1_G\}$. Sea $\mid x \mid = p^r$, para cierto $0 < r < n$ en $\mathbb{N}$. Entonces $\langle x\rangle \trianglelefteq G$ y $\mid G/\langle x\rangle \mid = p^{n-r}$. Por hipótesis inductiva, hay subgrupos normales S_k^* de $G/\langle x\rangle$, con $\mid S_k^* \mid = p^k$ y $0 \leq k \leq n - r$. Si $\pi : G \to G/\langle x\rangle$ es la proyección al cociente y $S_k = \pi^{-1}(S_k^*)$ entonces $\langle x\rangle \leq S_k$, $S_k \trianglelefteq G$ y
   $$p^k = \mid S_k^* \mid = \mid \frac{S_k}{\langle x\rangle} \mid = \frac{\mid S_k \mid}{p^r},$$
   o sea $\mid S_k \mid = p^{r+k}$. Obtenemos así subgrupos normales S_ν tales que $\langle x\rangle \leq S_\nu$, de orden p^ν, con $r \leq \nu \leq n$.
2. Sean G un p-grupo finito, $\{1_G\} < H \trianglelefteq G$. Entonces $H\cap \mathrm{Z}(G) \neq \{1_G\}$.
   Sino, dado $h \neq 1_G$ en H existe $g_h \in G$ tal que $g_hh \neq hg_h$. Entonces, si consideramos H en cuanto G-grupo por la acción de conjugación, $\mid O_h \mid > 1$. Si $X = \{gh_1g^{-1} : g \in G, h_1 \in H\}$, por la ecuación de clases resulta $\mid X \mid \equiv 1 \bmod p$ porque $E_G(H) = \{1_G\}$. Pero $X = H$ porque $H \trianglelefteq G$ y H es un p-grupo, i.e. $\mid X \mid = \mid H \mid \equiv 0 \bmod p$ en contradicción con lo anterior.

3. Si G es p-grupo finito, $H \trianglelefteq G$ y $\mid H \mid = p$, entonces $H \leq \mathrm{Z}(G)$.
   En efecto, por §3.12.2 existe $h \in H \cap \mathrm{Z}(G)$, $h \neq 1_G$. Como H tiene orden p tenemos
   $$\langle h \rangle = H \subseteq H \cap \mathrm{Z}(G) \subseteq \mathrm{Z}(G).$$
4. Sean G-grupo finito, $H \leq G$ un p-subgrupo. Entonces

$$[N_G(H) : H] \equiv [G : H] \bmod p. \tag{3.12.4}$$

   (i) Consideremos en $\mathcal{L} = \{xH : x \in G\}$ la acción natural a izquierda de H.
   (ii) Sabemos que $\mid \mathcal{L} \mid = (G : H)$.
   (iii) Si $x \in G$ tenemos
   $$\begin{aligned} xH \in E_H(\mathcal{L}) &\Leftrightarrow hxH = xH \text{ si } h \in H \\ &\Leftrightarrow x^{-1}hx \in H \text{ si } h \in H \\ &\Leftrightarrow x \in N_G(H). \end{aligned}$$
   Ahora (3.12.4) resulta de la ecuación de clases.
5. Sea G un p-grupo finito, $H < G$ tal que $\mid H \mid = p^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Entonces hay un subgrupo K de G tal que $H \trianglelefteq K$ y $\mid K \mid = p^{n+1}$.
   (i) Como $H < G$ y H es p-grupo, $p \mid \ [G : H]$.
   (ii) Por (3.12.4), $p \mid \ [N_G(H) : H]$.
   (iii) Como $H \trianglelefteq N_G(H)$, $N_G(H)/H$ es grupo y, por el teorema de Cauchy, contiene algún subgrupo $\mathcal{S}$ de orden p.
   (iv) Sea $\mathcal{S} = K/H$, donde $K \in \mathcal{S}_H(N_G(H))$.
   (v) Evidentemente $H \trianglelefteq K$ y $\mid K \mid = p^{n+1}$.

3.12.7. Sobre subgrupos de Sylow.

1. Veamos que $\mid \mathrm{Syl}_2(\mathrm{A}_5) \mid = 15$.
   Sabemos que $\mid \mathrm{Syl}_2(\mathrm{A}_5) \mid \equiv 1 \bmod 2$ y que $\mid \mathrm{Syl}_2(\mathrm{A}_5) \mid \mid 15$, pues $\mid \mathrm{A}_5 \mid = 60 = 2^2 \cdot 15$.
   Debe ser $\mid \mathrm{Syl}_2(\mathrm{A}_5) \mid \in \{1, 3, 5, 15\}$.
   Haciendo $\alpha = (1,2)(3,4)$, $\beta = (1,3)(2,4)$ es $\langle \alpha, \beta \rangle = \{1_{\mathrm{A}_5}, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$,

con $\alpha\beta = \beta\alpha = (1,4)(2,3)$, $\alpha^{-1} = \alpha$ y $\beta^{-1} = \beta$, y se tiene un 2-subgrupo de Sylow de A_5. Evaluamos:

$$\begin{aligned}
(1,2)(3,5)\langle\alpha,\beta\rangle(1,2)(3,5) &= \langle 1_{\mathrm{A}_5}, (1,2)(4,5), (1,4)(2,5), (15)(24)\rangle, \\
&\triangleq S_1, \\
(1,3)(2,5)S_1(1,3)(2,5) &= \{1_{\mathrm{A}_5}, (2,4)(3,5), (2,5)(4,3), (12)(45)\} \\
&\triangleq S_2 \\
(1,3)(4,5)S_2(1,3)(4,5) &= \{1_{\mathrm{A}_5}, (1,4)(2,5), (1,5)(2,4), (23)(45)\} \\
&\triangleq S_3, \\
(1,4)(2,3)S_3(1,4)(2,3) &= \{1_{\mathrm{A}_5}, (1,4)(3,5), (1,3)(4,5), (15)(23)\} \\
&\triangleq S_4, \\
(1,4)(2,5)S_4(1,4)(2,5) &= \{1_{\mathrm{A}_5}, (1,4)(2,3), (1,2)(3,4), (24)(35)\} \\
&\triangleq S_5.
\end{aligned}$$

Habiendo al menos seis elementos en la orbita de conjugación de $\langle\alpha,\beta\rangle$ deducimos que hay quince 2-grupos de Sylow en A_5.

2. (i) Todo 2-subgrupo de Sylow de P_5 es isomorfo a D_8.
Precisamente, enumerando $1,2,3,4$ los vertices de un cuadrado, el grupo de simetrías correspondiente es $\mathcal{S}_4 = \langle S, T\rangle$, con $S = (1,2,3,4)$ y $T = (1,2)(3,4)$.
O sea $\mathcal{S}_4 \equiv \mathrm{D}_8$. Evidentemente $\mathrm{D}_8 \hookrightarrow \mathrm{Syl}_2(\mathrm{P}_5)$ pues cada 2-subgrupo de Sylow de P_5 tiene orden 8. La afirmación sigue ahora claramente.
(ii) Todo 2-subgrupo de Sylow de P_6 es isomorfo a $\mathrm{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$.
Para ello, sea

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h} : \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{P}_6, \\
&\mathfrak{h}(g, 0_2) = g', \text{ con } g' = g \hookrightarrow \mathrm{P}_6, \\
&\mathfrak{h}(g, 1_2) = g'(5,6).
\end{aligned}$$

Evidentemente $\mathfrak{h}$ es monomorfismo de grupos e $\mathrm{Im}(\mathfrak{h}) \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{P}_6)$, porque $\mid \mathrm{Im}(\mathfrak{h}) \mid = 16$ y $\mid \mathrm{P}_6 \mid_2 = 16$. La conclusión sigue pues los 2-subgrupos de Sylow son isomorfos.

3. Sean G un grupo, $p \in \mathbb{N}$ primo, $H \trianglelefteq G$.
(i) Dado $\mathcal{K} \in \mathrm{Syl}_p(G/H)$ existe $K \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $H \leq K$ y $\mathcal{K} = K/H$.
En efecto, ciertamente existe un subgrupo K de G que contiene a H y $\mathcal{K} = K/H$.
Si $[G : H]_p = p^\nu$ con $\nu \in \mathbb{N}$ será $\mid G \mid_p = p^{\nu+s}$ para cierto $s \in \mathbb{N}_0$.
Luego $\mid G \mid / \mid H \mid = p^\nu l$ para cierto $l \in \mathbb{N}$ tal que $(p : l) = 1$ y

$$p^\nu = \mid \mathcal{K} \mid = \frac{\mid K \mid}{\mid H \mid}.$$

Entonces

$$\frac{\mid K \mid}{\mid \mathcal{K} \mid} = \frac{\mid K \mid}{p^\nu} = \mid H \mid = \frac{\mid G \mid}{[G : H]} = \frac{\mid G \mid}{p^\nu l},$$

de donde $\mid G \mid = \mid K \mid l$ y $p^{\nu+s} \mid\mid K \mid$.
En consecuencia $\mid K \mid_p = p^{\nu+s}$ y $K \in \mathrm{Syl}_p(G)$.
(ii) Si $H \trianglelefteq K \leq G$ y $K \in \mathrm{Syl}_p(G)$ entonces $K/H \in \mathrm{Syl}_p(G/H)$.
Basta observar que $G/K \approx \dfrac{G/H}{K/H}$, y $p \nmid \ \mid \dfrac{G/H}{K/H} \mid$ pues $\mid G \mid_p = \mid K \mid_p$, de modo que $\mid G/H \mid_p = \mid K/H \mid_p$.

4. Sean G-grupo, H, K-subgrupos de G. Entonces $\mid H \cdot K \mid = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$, con $H \cdot K = \{hk : h \in H, k \in K\}$.
   Para ello, sea $f : H \times K \to H \cdot K$ tal que $F(h, k) = hk$ cuando $(h, k) \in H \times K$.
   Claramente f es suryectiva.
   Sea $f(h, k) = f(h_1, k_1)$. Entonces $hk = h_1k_1$, i.e. $h_1^{-1}h = k_1k^{-1} \triangleq j$ y $j \in H \cap K$. Luego $(h_1, k_1) = (hj^{-1}, jk)$, o sea
   $$f^{-1}(\{hk\}) = \{(hj^{-1}, jk) : j \in H \cap K\}.$$
   Pero $H \times K$ es la unión disjunta de conjuntos del tipo $f^{-1}(\{x\})$, con $x \in H \cdot K$, cada uno de los cuales tiene cardinal $\mid H \cap K \mid$, de donde sigue la afirmación.
5. Todo grupo G de orden 96 no es *simple* , i.e. G posee algún subgrupo normal no trivial.
   En efecto, como $\mid G \mid = 2^5 \cdot 3$ y como $\mid \mathrm{Syl}_2(G) \mid\mid \dfrac{96}{32}$, $\dfrac{96}{32} = 3$ y tanto 1 como 3 son congruentes a 1 módulo 2, habrá uno o tres 2-subgrupos de Sylow de G.
   Por el teorema de Sylow, en el primer caso dicho subgrupo sería automáticamente normal.
   Supongamos que H, K son 2-subgrupos de Sylow distintos de G y sea $L = H \cap K$. Debe ser $\mid L \mid < 32$.
   Notar que $\mid H \cap K \mid = \dfrac{\mid H \mid\mid K \mid}{\mid HK \mid}$. Precisamente, consideremos la acción $(H \times K) \times G \to G$, $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$. Se tiene $O_e = HK$ y $E_e = H \cap K$, de donde
   $$\mid HK \mid = \mid O_e \mid = \frac{\mid H \times K \mid}{\mid E_e \mid} = \frac{\mid H \mid\mid K \mid}{\mid H \cap K \mid}.$$
   Ahora, si $\mid L \mid \leq 8$ tendremos $\dfrac{2^{10}}{\mid HK \mid} \leq 8$, o sea $\mid HK \mid \geq 2^7 > 96$, lo que es imposible. En consecuencia $\mid L \mid = 16$.
   Como $[H : L] = [K : L] = 2$, $L \trianglelefteq H$ y $L \trianglelefteq K$.
   P. ej., en el primer caso dado $h \in H - L$ se tiene $H/L = \{L, hL\}$ y $H/L = \{L, Lh\}$, según se considere la partición de H en coclases a izquierda o derecha respectivamente. Luego H se representa como unión disjunta
   $$H = L \cup hL = L \cup Lh,$$

de donde $hL = Lh$, o sea $L = hLh^{-1}$ y, siendo $h \in H$ arbitrario, L deviene normal en H.
Luego $H \cup K \subseteq \mathrm{N}_G(L)$, $\mid \mathrm{N}_G(L) \mid > 32$ y $\mid \mathrm{N}_G(L) \mid$ es múltiplo de 32 y divisor de 96, i.e. $\mid \mathrm{N}_G(L) \mid = 96$.
Así $N_G(L) = G$ y L es subgrupo normal de G de orden 16.

6. Por (3.12.3) se tiene $\mid \mathrm{sl}(2,3) \mid = 24$.
Luego sl$(2,3)$ tiene uno o tres 2-subgrupos de Sylow y uno o cuatro 3-subgrupos de Sylow.
Como las matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
tienen orden tres sl$(2,3)$ tiene cuatro 3-subgrupos de Sylow.
Supongamos haya tres 2-subgrupos de Sylow S_1, S_2, S_3. Como sl(2,3) actúa por conjugación en $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{sl}(2,3))$ queda inducido un morfismo de grupos $\varphi : \mathrm{sl}(2,3) \to \mathrm{P}_3$.
Tenemos $\ker(\varphi) = \cap_{i=1}^{3} \mathrm{N}_{\mathrm{sl}(2,3)}(S_i)$ y $24/ \mid \ker(\varphi) \mid \leq 6$, de modo que
$$4 \leq \mid \ker(\varphi) \mid \leq \mid \mathrm{N}_{\mathrm{sl}(2,3)}(S_i) \cap \mathrm{N}_{\mathrm{sl}(2,3)}(S_j) \mid \tag{3.12.5}$$
si $1 \leq i < j \leq 3$.
Pero $[\mathrm{sl}(2,3) : \mathrm{N}_{\mathrm{sl}(2,3)}(S_i)] = 3$ y $S_i \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{sl}(2,3)}(S_i)$, de donde concluímos que $\mathrm{N}_{\mathrm{sl}(2,3)}(S_i) = S_i$ para cada i. Por (3.12.5) sigue que
$$4 \leq \mid S_1 \cap S_2 \cap S_3 \mid \leq \mid S_1 \cap S_2 \mid \leq 4,$$
i.e. $\mid S_1 \cap S_2 \cap S_3 \mid = 4$.
Habría entonces al menos dieciseis elementos de sl(2,3) cuyo orden es potencia de dos, y como hay cuatro 3-subgrupos de Sylow hay ocho elementos de orden tres. O sea todo elemento de sl(2,3) tendría orden tres o alguna potencia de dos. Sin embargo, el elemento
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
tiene orden seis. Por lo tanto sl(2,3) tiene un único 2-subgrupo de Sylow S, necesariamente normal.

3.12.8. Sobre conmutadores.

1. Sean G grupo, $x, y \in G$. Indicamos $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ al *conmutador* de x e y, y $G^{(1)}$, o también G', al *subgrupo conmutador* de G generado por elementos del tipo $[x, y]$.
2. $G' \trianglelefteq G$ y dado un subgrupo normal H de G, G/H es abeliano si y solo si $G' \leq H$.
3. Evaluemos $\mathrm{gl}(2,2)' = \mathrm{sl}(2,2)'$.
Es fácil ver que $\mathrm{gl}(2,2)$ tiene seis elementos: la identidad, tres elementos de orden dos y dos de orden tres, i.e. $\mathrm{gl}(2,2) \approx \mathrm{P}_3$ (V. (3.13.1.i)).
Por otra parte, $\mathrm{A}_3 = \{(1), (123), (132)\}$ (V. (3.13.1.ix)). En consecuencia $\mathrm{P}_3/\mathrm{A}_3 = \{\mathrm{A}_3, v\}$, con $v = (12)\mathrm{A}_3 = (13)\mathrm{A}_3 = (23)\mathrm{A}_3$.
Puesto que este cociente es abeliano ($\mathrm{A}_3 \trianglelefteq \mathrm{P}_3$), $\mathrm{P}_3' \leq \mathrm{A}_3$.

Por el teorema de Lagrange P_3' será trivial o tendrá tres elementos. Pero no es trivial porque P_3 no es abeliano. Luego $\mathrm{gl}(2,2)' \approx \mathrm{A}_3$.

4. Ídem con $\mathrm{gl}(2,3)'$ y $\mathrm{gl}(2,5)'$.
Por (3.12.3.2) es
$$\mid \frac{\mathrm{gl}(2,p)}{\mathrm{sl}(2,p)} \mid = p-1.$$
Los cocientes $\dfrac{\mathrm{gl}(2,3)}{\mathrm{sl}(2,3)}$ y $\dfrac{\mathrm{gl}(2,5)}{\mathrm{sl}(2,5)}$ devienen abelianos.
En consecuencia $\mathrm{gl}(2,3)' \le \mathrm{sl}(2,3)$ y $\mathrm{gl}(2,5)' \le \mathrm{sl}(2,5)$. Como
$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$
con $a = 1$ inferimos que $\mathrm{gl}(2,3)' = \mathrm{sl}(2,3)$ y $\mathrm{gl}(2,5)' = \mathrm{sl}(2,5)$ a raíz de (3.12.4).

5. Sabemos que si S es el único 2-subgrupo de Sylow de sl(2,3) debe ser $S \approx \mathrm{Q}_8$ o $S \approx \mathrm{D}_4$. Si $g \in S$ tuviere orden dos el correspondiente polinomio minimal dividiría a $\mathrm{x}^2 - 1$. Como $\det(g) = 1$ necesariamente $g = -\mathrm{Id}_{2\times 2}$. Luego S tiene un único elemento de orden dos. Por (3.12.2.2) es $S \approx Q_8$.
Luego $\mathrm{sl}(2,3)/\mathrm{Q}_8$ deviene grupo abeliano porque tiene orden tres y $\mathrm{sl}(2,3)' \le \mathrm{Q}_8$. Concluiremos que $\mathrm{sl}(2,3)' = \mathrm{Q}_8$ exhibiendo ocho elementos en $\mathrm{sl}(2,3)'$. En efecto, puesto que
$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right],$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right],$$
$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right],$$
las siguientes seis matrices
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$
pertenecen a $\mathrm{sl}(2,3)'$. El producto de la tercer y quinta matrices,
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
y su inversa
$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
constituyen ocho elementos distintos de $\mathrm{sl}(2,3)'$.

6. [**21**] El conjunto de conmutadores de un grupo puede no ser un subgrupo. Por ejemplo, sean k un cuerpo y G el conjunto de matrices de la forma

$$(f, g, h) \triangleq \begin{pmatrix} 1 & f(\mathrm{x}) & h(\mathrm{x,y}) \\ 0 & 1 & g(\mathrm{y}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $f \in k[\mathrm{x}]$, $g \in k[\mathrm{y}]$, $h \in k[\mathrm{x,y}]$.
Entonces G resulta grupo con la multiplicación, con

$$(f, g, h)(f', g', h') = (f + f', g + g', fg' + h + h'), \tag{3.12.6}$$
$$1_G = (0, 0, 0),$$
$$(f, g, h)^{-1} = (-f, -g, fg - h), \tag{3.12.7}$$

si $(f, g, h), (f', g', h') \in G$. Entonces

(3.12.8)
$$(f, g, h)^{-1}(f', g', h')^{-1} = (-f, -g, fg - h)(-f', -g', f'g' - h'),$$
$$= (-f - f', -g - g', fg' + fg - h + f'g' - h'), \tag{3.12.9}$$

y combinando (3.12.6), (3.12.7) y (3.12.8) tenemos

$$[(f, g, h), (f', g', h')] = (0, 0, fg' - f'g). \tag{3.12.10}$$

Si $h(\mathrm{x,y}) = \sum_{i,j} a_{i,j}\mathrm{x}^i\mathrm{y}^j$ por (4.3.2) y (4.2) resulta

$$(0, 0, h) = \prod_{i,j}[(a_{i,j}\mathrm{x}^i, 0, 0), (0, \mathrm{y}^j, 0)].$$

En particular, sea $h(\mathrm{x,y}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{xy} + \mathrm{y}^2$. Si $(0, 0, h)$ fuera un conmutador existirán polinomios

$$f(\mathrm{x}) = \sum_i b_i\mathrm{x}^i,\ f'(\mathrm{x}) = \sum_i b'_i\mathrm{x}^i$$

en $k[\mathrm{x}]$ y $g, g' \in k[\mathrm{y}]$ tales que $\mathrm{x}^2 + \mathrm{xy} + \mathrm{y}^2 = f(\mathrm{x})g'(\mathrm{y}) - f'(\mathrm{x})g(\mathrm{y})$. Luego

$$\mathrm{y}^2 = f(0)g'(\mathrm{y}) - f'(0)g(\mathrm{y}) = b_0g'(\mathrm{y}) - b'_0g(\mathrm{y}). \tag{3.12.11}$$

Además $2\mathrm{x} + y = \dfrac{df}{d\mathrm{x}}g'(\mathrm{y}) - \dfrac{df'}{d\mathrm{x}}g(\mathrm{y})$, o sea

$$y = \frac{df}{d\mathrm{x}}(0)g'(\mathrm{y}) - \frac{df'}{d\mathrm{x}}(0)g(\mathrm{y}) = b_1g'(\mathrm{y}) - b'_1g(\mathrm{y}). \tag{3.12.12}$$

También $2 = \dfrac{d^2f}{d\mathrm{x}^2}g'(\mathrm{y}) - \dfrac{d^2f'}{d\mathrm{x}^2}g(\mathrm{y})$, de donde

$$1 = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{d\mathrm{x}^2}(0)g'(\mathrm{y}) - \frac{1}{2}\frac{d^2f'}{d\mathrm{x}^2}(0)g(\mathrm{y}) = b_2g'(\mathrm{y}) - b'_2g(\mathrm{y}). \tag{3.12.13}$$

Por (3.12.11), 3.12.12 y (3.12.13) sique que $\{g, g'\}$ generan al conjunto linealmente independiente $1, \mathrm{y}, \mathrm{y}^2$, lo que es imposible.

3.13. Problemas

1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{P}_n$. Decimos que se trata de *permutaciones disjuntas* si para $1 \leq i, j \leq n$ es $\beta(i) = i$ si $\alpha(i) \neq i$ y $\alpha(j) = j$ si $\beta(j) \neq j$.
   Probar que $\alpha\beta = \beta\alpha$ si α y β son disjuntas.
2. Sean $n, r \in \mathbb{N}$ con $1 \leq r \leq n$, $\sigma \in \mathrm{P}_n$, $1 \leq i_1 < ... < i_r$. Decimos que σ es un *r-ciclo* si

$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3,\ ...\ ,\sigma(i_{r-1}) = i_r \text{ y } \sigma(i_r) = i_1,$$

   mientras que $\sigma(j) = j$ si $j \notin \{i_1, ..., i_r\}$.
   (i) Sea $\alpha = \beta_1\beta_2...b_m$ producto de r_i-ciclos disjuntos, con $m \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\mid \alpha \mid = \mathrm{mcm}\{r_1, ..., r_m\}$.
   (ii) Sean $\alpha = (i_1, i_2, ..., i_r)$, $\beta = (j_1, j_2, ..., j_s)$. Mostrar que α y β son disjuntas si y solo si $\{i_1, ..., i_r\} \cap \{j_1, ..., j_s\} = \emptyset$.
   (iii) Si α y β son permutaciones disjuntas y $\alpha\beta = 1$, $\alpha = \beta = 1$.
   (iv) Hay $[n(n-1)...(n-r+1)]/r$ r-ciclos en P_n.
   (v) Si $\alpha, \beta \in \mathrm{P}_n$ son disjuntas, $(\alpha\beta)^k = \alpha^k\beta^k$ si $k \in \mathbb{N}_0$. Esto no es válido en el caso general.
   (vi) La potencia de un ciclo no es necesariamente un ciclo.
   (vii) Una permutación es *regular* si: o bien es la permutación idéntica o no tiene puntos fijos y se descompone como producto de ciclos disjuntos de igual longitud.
   Se probará que los n-ciclos de P_n son potencias de n-ciclos. Para ello:
   (a) Toda permutación regular de P_n es potencia de algún n-ciclo. [Sug.: Sea $\alpha = (a_1, ..., a_k)(b_1, ..., b_k)...(z_1, ..., z_k)$ permutación regular. Considerar $\beta = (a_1, b_1, ..., z_1, a_2, b_2, ..., z_2, ..., a_k, b_k, ..., z_k)$].
   (b) Si α es n-ciclo de P_n y $k \in \mathbb{N}$, α^k es producto de $(n : k)$-ciclos disjuntos, todos de longitud $n/(n : k)$. [Sug.: $\mid \alpha^k \mid = n/(n : k)$].
   (viii) Un r-ciclo es par si y solo si r es impar.
3. Sea $\mathrm{V}_4 = \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ el *grupo de Klein*. Probar que
   (i) $\mathrm{V}_4 \approx \mathrm{D}_4$.
   (ii) $\mathrm{D}_6 \approx \mathrm{S}_3$.
   (iii) $\mathrm{V}_4 \not\approx \mathbb{Z}_4$.
   (iv) $\mathrm{V}_4 \trianglelefteq \mathrm{P}_4$.
   (v) $\mathrm{V}_4 \approx \mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_2$.
4. Sean $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ y $\pi_n = [v_1, v_2, ..., v_n]$ un polígono regular con vértices $v_1, v_2, ..., v_n$. Indicamos $\mathcal{S}(\pi_n)$ al *grupo de simetrías* de π_n , o sea

$$\mathcal{S}(\pi_n) = \{T \in O(n, \mathbb{C}) : T(\pi_n) = \pi_n\}.$$

   Probar que $\mid \mathcal{S}(\pi_n) \mid = 2n$. Describir los grupos de simetría de un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono y un hexágono.

5. ¿Cómo generalizaría §3.13(4) al caso de grupos de simetría $\mathcal{SP}(\Sigma_n)$ de poliedros regulares?[2] .
6. Sea $\mathfrak{O}(\mathbb{R}^2) = \{T_{\alpha,a,b} : \alpha, a, b \in \mathbb{R}\}$, con $T_{\alpha,a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las transformaciones tales que
   $T_{\alpha,a,b}(x, y) = (x \cos\alpha + y \sin\alpha + a, -x \sin\alpha + y \cos\alpha + b), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$
   Probar que $\mathfrak{O}(\mathbb{R}^2)$ es grupo, conocido como *grupo afín ortogonal del plano*.
7. Idem para
   $$\mathfrak{S}(\mathbb{R}^2) = \{S_{r,\alpha,a,b} \triangleq rT_{\alpha,a,b} : r > 0, T_{\alpha,a,b} \in \mathfrak{O}(\mathbb{R}^2)\},$$
   el *grupo de semejanzas del plano* .
8. Probar[3] que $\mathcal{SP}(\Sigma_6) \approx \mathrm{P}_4 \approx \mathcal{SP}(\Sigma_8)$.
   Sug.: Notar que $\mathrm{P}_4 = \langle s, t\rangle$, con $s^2 = t^3 = (st)^4 = 1$.
9. Idem $\mathcal{SP}(\Sigma_{12}) = \mathrm{A}_5 \approx \mathcal{SP}(\Sigma_{20})$.
   Sug.: $\mathrm{A}_5 = \langle s, t\rangle$, con $s^2 = t^3 = (st)^5 = 1$.
10. Idem para el *grupo de afinidades del plano*, de transformaciones $(x, y) \to (x', y')$ tales que
   $$x' = ax + by + p,$$
   $$y' = cx + dy + q,$$
   donde $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ y $ad - bc \neq 0$.
11. Sea $\mathrm{Tr}(n, \mathbb{R})$ el *grupo de traslaciones* de $\mathbb{R}^n$. Probar que se trata de un subgrupo abeliano normal de
   $\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n :\parallel f(x) - f(y) \parallel=\parallel x - y \parallel \text{ si } x, y \in \mathbb{R}^n\},$
   el *grupo de movimientos* de $\mathbb{R}^n$, y que
   $$\frac{\mathrm{M}(n, \mathbb{R})}{\mathrm{Tr}(n, \mathbb{R})} \approx \mathrm{O}(n, \mathbb{R}).$$
12. Sea $\mathrm{G}_4 \triangleq \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ en $\mathcal{S}(\mathrm{P}_4)$. Probar que $\mathrm{G}_4 \not\cong \mathbb{Z}_4$.
13. Todo grupo de orden no superior a cinco es abeliano.
14. Sean G, H grupos, $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Si $x \in G$ tiene orden finito, $\mathrm{ord}(f(x)) \mid \mathrm{ord}(x)$.
15. Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid= 1\}$. Probar que $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, \cdot)$ es morfismo de grupos continuo sii existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \exp(ixy)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
16. Mostrar que $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ es isomorfismo de grupos.
17. Si $n \in \mathbb{N}$, describir los endomorfismos de $\mathbb{Z}_n$ y caracterizar los isomorfismos.
18. Si $n, m \in \mathbb{N}$ determinar $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Para ello:
   (i) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{h_c : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/h_c(x) = cx \text{ si } x \in \mathbb{Z}, \text{ con } c \in \mathbb{Z}\}$.

[2]Será $n = 4, 6, 8, 12, 20$ según el poliedro sea tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro o icosaedro

[3]Por §3.12(2), este problema y el siguiente, $\mathrm{A}_4, \mathrm{P}_4$ y A_5 se denominan *grupo tetraedral, octaedral e icosaedral* respecticamente.

(ii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ si $n > 1$.
(iii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) = \{h_c : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m / h_c(x) = [cx]_m$ si $x \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}\}$.
(iv) Sean $n, m \in \mathbb{N}_{>1}$ y $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Exíste $c \in \{0, 1, ..., m-1\}$ único tal que $h([1]_n) = [c]_m$. Además

$$c \in \{m/d, 2m/d, ..., (d-1)m/d\},$$

donde $d = (m : n)$. Concluya que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \approx \mathbb{Z}_{(n:m)}$.

19. Sea G un grupo tal que $x^2 = e$ para todo $x \in G$. Entonces G es abeliano.
20. Dado $p \in \mathbb{N}$ primo, $(p-1)! = 1 \bmod(p)$. [Sug.: $\mathbb{Z}_p^{\times} \triangleq (\mathbb{Z}_p - \{0\}, \cdot)$ es grupo. Dado $\psi \in \mathbb{Z}^{\times}, \psi^2 = 1 \bmod(p)$ sii $\psi = 1$ o $\psi = p-1 \bmod(p)$].
21. Si G es grupo finito y $K \leq H \leq G$, $[G : K] = [G : H][H : K]$.
22. Sean $N \trianglelefteq G$ y $f : G \to H$ un homomorfismo tal que $N \subseteq \ker(f)$. Probar que f induce un homomorfismo $f_* : N/G \to H$.
23. Si S, T son subgrupos de un grupo G, ST es subgrupo de G si y solo si $ST = TS$.
24. Probar la llamada *ley modular*: Sean A, B, C subgrupos de G tales que $A \leq B$. Si $A \cap C = B \cap C$ y $AC = BC$ entonces $A = B$.
25. Probar la siguiente *ley de Dedekind*: Sean A, B, C subgrupos de G tales que $A \leq B$. Entonces $A(B \cap C) = B \cap (AC)$.
26. Todo grupo de orden par tiene un número impar de elementos de orden 2.
27. (i) Si $H \leq G$ y $[G : H] = 2$ entonces $x^2 \in H$ cualquiera sea $x \in G$.
28. Sean G un grupo, $x, y \in G$, ambos de orden finito, tales que $xy = yx$. Entonces xy tiene orden finito.
(ii) Sea $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ el grupo de matrices inversibles de dos filas y dos columnas con coeficientes racionales. Los siguientes elementos de G tienen orden finito

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

pero $\mid AB \mid = \infty$.

29. (i) Sea $G = \langle a \rangle$ grupo cíclico de orden n. Probar que $G = \langle a^k \rangle$ sii $\mathrm{mcd}\{k, n\} = 1$. Luego el número de generadores de G es $\varphi(n)$, donde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la *función de Euler* $\varphi(1) = 1$ y, si $h \in \mathbb{N}_{>1}$, $\varphi(h) = \mathrm{card}(\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j < h$ y $\mathrm{mcd}\{j, h\} = 1\})$.
(ii) Si $\mid a \mid = rs$ y $\mathrm{mcd}\{r, s\} = 1$ existen únicos $b, c \in G$ tales que $a = bc$, $\mid b \mid = r$ y $\mid c \mid = s$.
(iii) Concluir que si $r, s \in \mathbb{N}$ son coprimos entonces $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s)$.
(iv) Si $\mathrm{mcd}\{r, s\} = 1$ entonces $s^{\varphi(r)} \equiv 1\text{-}\mathrm{mod}(r)$. [Sug.: Notar que $\mid \mathrm{U}(\mathbb{Z}_n) \mid = \varphi(n)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_n)$ es el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}_n$].
(v) Dado $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$.
30. Un grupo finito G de orden n es cíclico sii para cada divisor d de n G tiene a lo sumo un subgrupo de orden d.

31. Sea $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\theta(n) =\mid \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\} \mid$.
(i) Dado $n \in \mathbb{N}_{>1}$, existen $\nu \in \mathbb{N}$, únicos primos positivos $p_1, ..., p_\nu$ y $m_1, ..., m_\nu \in \mathbb{N}$ tales que $n = \prod_{j=1}^{\nu} p_j^{m_j}$ y $\theta(n) = \prod_{j=1}^{\nu}(m_j + 1)$.
(ii) Dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $\theta(n_1 n_2) \leq \theta(n_1)\theta(n_2)$ y vale la igualdad si y solo si $(n_1 : n_2) = 1$.
32. Sean G, H grupos finitos de orden n y m respectivamente. Entonces $G \times H$ es cíclico si y solo si G y H devienen cíclicos y
$$\mathcal{S}(G \times H) = \mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(H).$$
Para ello:
(a) $\mathbb{Z}_{mn} \approx \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ si y solo si (n:m)=1.
(b) Si $G \times H$ es cíclico entonces G y H también lo son.
(c) Evidentemente $\mathcal{S}(G \times H) \supseteq \mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(H)$.
(d) Si $G \times H$ es cíclico entonces $(n : m) = 1$.
(e) Por §3.13(31), si $G \times H$ es cíclico se tiene
$$\theta(nm) =\mid \mathcal{S}(G \times H) \mid \geq \mid \mathcal{S}(G) \mid\mid \mathcal{S}(H) \mid = \theta(n)\theta(m) = \theta(nm).$$
(f) Recíprocamente, como $\theta(nm) = \theta(n)\theta(m)$ será $(n : m) = 1$.
33. Sea G' el *subgrupo conmutador de* G, generado por elementos de la forma $[x, y] \triangleq xyx^{-1}y^{-1}$ con $x, y \in G$.
(i) $G' \trianglelefteq G$.
(ii) si $H \trianglelefteq G$, G/H es abeliano sii $G' \leq H$.
34. Completar las pruebas de §3.4(5).
35. Sea G grupo finito para el que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(xy)^n = x^n y^n$ si $x, y \in G$. Sean $G[n] = \{x \in G : x^n = e\}$ y $G^n = \{x^n : x \in G\}$. Probar que $G^n \leq G$, $G[n] \trianglelefteq G$ y $\mid G^n \mid = [G : G[n]]$.
36. Sean G un grupo, $n \in \mathbb{N}$ y $G_1, ..., G_n$ subgrupos de G. Son equivalentes:
(i) La aplicación
$$\pi : G_1 \times ... \times G_n \to G,\ \pi(x_1, ..., x_n) = x_1 ... x_n$$
es isomorfismo de grupos.
(ii) $G = \langle G_1, ..., G_n \rangle$, $G_i \trianglelefteq G$ y $G_i \cap \langle G_j : j \neq i \rangle_{1 \leq j \leq n} = \{1_G\}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.
(iii) $G_i \trianglelefteq G$ si $1 \leq i \leq n$ y cada $x \in G$ se escribe en la forma $x = x_1 ... x_n$ de manera unica.
37. Calcular todos los subgrupos de Sylow de:
(i) $\mathbb{Z}_{72}$.
(ii) $\mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_{30}$.
(iii) $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
(iv) $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$.
38. (i) $\mathcal{S}_4$ consta de la identidad, seis transposiciones, ocho triciclos, seis cuatriciclos y tres productos de transposiciones.
(ii) A_4 consta de la identidad, ocho triciclos y tres productos de transposiciones.

(iii) A_4 tiene un único 2-subgrupo de Sylow.
(iv) A_4 tiene cuatro 3-subgrupos de Sylow.

39. Hay en $G \triangleq \mathrm{P}_3 \times \mathrm{P}_3$ subgrupos de Sylow A, B, C de manera que $A \cap B = \{1_G\}$ y $A \cap C \neq \{1_G\}$.
40. Sean $p \in \mathbb{N}$ primo y

$$\mathrm{UT}(3, \mathbb{Z}_p) \triangleq \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \}.$$

(i) Probar que $\mid \mathrm{gl}(3, \mathbb{Z}_p) \mid = (p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2)$.
(ii) $\mathrm{UT}(3, \mathbb{Z}_p) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{gl}(3, \mathbb{Z}_p))$.
(iii) Probar que

$$\mathrm{Z}(\mathrm{UT}(3, \mathbb{Z}_p)) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_p \}.$$

41. Si $n \in \mathbb{N}_{>1}$, evaluar $\mathrm{Z}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$. Para ello:
(i) Sea $f_{i,j}^{(n)} = e_{i,j} + e_{j,i} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} - \{i,j\}} e_{k,k}$, con $1 \leq i \neq j \leq n$, donde cada $e_{r,s} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, con $1 \leq r, s \leq n$, indica la matriz canónica nula salvo en la fila r y en la columna s, donde hay un uno.
Entonces cada $f_{i,j}^{(n)} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$.
(ii) Dado $x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ resultan

$$(f_{i,j}^{(n)} x)_{k,h} = \delta_k^i x_{j,h} + \delta_k^j x_{i,h} + x_{k,h}, \tag{3.13.1}$$

$$(x f_{i,j}^{(n)})_{k,h} = \delta_h^j x_{k,i} + \delta_h^i x_{k,j} + x_{k,h}. \tag{3.13.2}$$

(iii) Si $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$, $1 \leq i, j, k, h \leq n$ inferir que

$$\delta_k^i x_{j,h} + \delta_k^j x_{i,h} = \delta_h^j x_{k,i} + \delta_h^i x_{k,j}.$$

(iv) Dado $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$, $x_{1,1} = \ldots = x_{n,n}$ y $x = x^t$.
(v) Sea $g_{i,j}^{(n)} = e_{i,j} - e_{j,i} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} - \{i,j\}} e_{k,k}$, con $1 \leq i < j \leq n$.
Entonces $\{g_{i,j}^{(n)}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subseteq \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$.
(vi) Usando dichas matrices, si $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$ se tiene

$$\delta_j^i x_{h,k} - \delta_j^h x_{i,k} = \delta_k^h x_{j,i} - \delta_k^i x_{j,h}, \text{ con } 1 \leq i, j, k, h \leq n.$$

(vii) Concluir que $\mathrm{Z}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R}_{\neq 0} \cdot \mathrm{Id}_{n \times n}$.

42. Evaluar $\mathrm{Z}(\mathrm{sl}(n, \mathbb{R}))$. Para ello, con la notación de §3.13(41):
(i) $\{g_{i,j}^{(n)}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subseteq \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$.
(ii) Si $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{sl}(n, \mathbb{R}))$ se tiene

$$\delta_j^i x_{l,k} - \delta_j^l x_{i,k} = x_{j,i} \delta_k^l - x_{j,l} \delta_k^i, \text{ con } 1 \leq i, j, k, l \leq n.$$

Luego x tiene diagonal constante y $x_{i,j} = -x_{j,i}$ si $1 \leq i \neq j \leq n$.
(iii) En particular,

$$\mathrm{Z}(\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})) \subseteq \{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \},$$

de donde $\mathrm{Z}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})) = \{\mathrm{Id}_{2\times 2}\}$.

(iv) Asimismo

$$\mathrm{Z}(\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})) \subseteq \{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ -c & -d & a \end{pmatrix} : a^3 + a(b^2+c^2+d^2) = 1\}$$

y sigue que $\mathrm{Z}(\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})) = \{\mathrm{Id}_{3\times 3}\}$.

(v) $\mathrm{Z}(\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})) = \{\mathrm{Id}_{n\times n}\}$ si $n > 3$.

43. Probar §3.12.8(2).

Capítulo 4

ANEXO 2: Módulos

4.1. Anillos

1. Llamamos *anillo* a toda terna $(A, +, \cdot)$ que verifica las siguientes condiciones:
   (i) $(A, +)$ es grupo con elemento neutro 0.
   (ii) $(A, \cdot)$ es un semigrupo, el que podrá o no tener identidad. Si la hubiere, siendo entonces necesariamente única, decimos que se trata de un *anillo con identidad*, y si 1 es el elemento idéntico se asume que $1 \neq 0$.
   (iii) Dados $x, y, z \in A$ se tiene
   $$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \text{ y } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$
   Decimos que se trata de un *anillo abeliano* si $x \cdot y = y \cdot x$ cualesquiera sean $x, y \in A$.
   Por abuso de notación, a veces nos referiremos simplemente a un anillo A sin explicitar la *suma* $+$ o el *producto* $\cdot$, o escribiremos xy en vez que $x \cdot y$ si $x, y \in A$.
2. Todo anillo A es *unitizable* , o sea hay un anillo A_1 unitario tal que A es isomorfo a un subanillo de A_1.
   Es fácil ver que basta considerar $A_1 \triangleq A \times \mathbb{Z}$ munido de las operaciones
   $$\begin{aligned} (a, m) + (b, n) &= (a + b, m + n), \\ (a, m) \cdot (b, n) &= (ab + na + mb, mn), \end{aligned}$$
   donde $a, b \in A$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Por esto, salvo mención contraria, supondremos que los anillos con que tratamos son unitarios.
3. En todo anillo con identidad la suma es necesariamente conmutativa. En efecto, dados $x, y \in A$ tenemos
   $$\begin{aligned} (1 + 1)(x + y) &= 1(x + y) + 1(x + y) = x + y + x + y \\ &= (1 + 1)x + (1 + 1)y = x + x + y + y, \end{aligned}$$
   de donde $x + y = y + x$. Puesto que todo anillo es unitizable sigue claramente que la suma en todo anillo es abeliana.
4. Se llama *anillo opuesto de un anillo* A al anillo $A^{op} = (A, +, \cdot_{op})$, donde $x \cdot_{op} y \triangleq y \cdot x$ si $x, y \in A$.

5. Sean A, B sendos anillos. Indicamos $\mathrm{Hom}(A, B)$ al conjunto de *homomorfismos entre los anillos A y B* , i.e. aplicaciones $f : A \to B$ tales que para $a, a' \in A$ es $f(a+a') = f(a)+f(a')$ y $f(aa') = f(a)f(a')$. Si ambos anillos fueran unitarios deberá ser además $f(1_A) = 1_B$.
6. Dados un anillo A y $B \subseteq A$ no vacío, decimos que B es *subanillo* de A si B es cerrado por las operaciones de suma y producto de A. Si además A tuviera unidad, deberá ser además $1_A \in B$.
7. Un homomorfismo de anillos es monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo de anillos si es inyectivo, suryectivo y biyectivo respectivamente.
8. Un anillo A se llama *dominio* si no tiene *divisores de cero*[1], o sea: si $a, b \in A$ y $ab = 0_A$ entonces $a = 0_A$ o $b = 0_A$. Un dominio A se dice *de integridad* si es abeliano.
9. Dado un anillo unitario A indicamos
$$\mathrm{U}_i(A) = \{a \in A : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } xa = 1\},$$
$$\mathrm{U}_d(A) = \{a \in A : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } ax = 1\},$$
a los conjuntos de *unidades a izquierda y derecha* de A. El *conjunto de unidades de A* es $\mathrm{U}(A) = \mathrm{U}_i(A) \cap \mathrm{U}_d(A)$.
10. Por §4.1.2 si $(a, m) \in \mathrm{U}(A_1)$ sea $(b, n) \in A_1$ único tal que
$$(a, m)(b, n) = (b, n)(a, m) = (0_A, 1).$$
Debe ser $m = n = \pm 1$. Luego
$$0_A = ab + a + b = ba + a + b \text{ si } m = 1,$$
$$0_A = ab - a - b = ba - a - b \text{ si } m = -1.$$
Dados $u, v \in A$ sea $u \circ v \triangleq u + v - uv$, el llamado *producto de Kaplansky* de u y v.. Entonces, con $m = 1$,
$$0_A = -a - b - ab = -a - b - (-a)(-b) = (-a) \circ (-b) = (-b) \circ (-a),$$
y con $m = -1$ es $a \circ b = c \circ a = 0_A$.
11. Entonces $(A, \circ)$ es un semigrupo y $a \circ 0_A = 0_A \circ a = a$ para $a \in A$, o sea 0_A deviene elemento unidad. Indicamos
$$\mathrm{LQI}(A) = \{a \in A : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } x \circ a = 0_A\},$$
$$\mathrm{RQI}(A) = \{a \in A : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } a \circ x = 0_A\},$$
$$\mathrm{QI}(A) = \mathrm{LQI}(A) \cap \mathrm{RQI}(A),$$
a las clases de *elementos cuasi-inversibles a izquierda, cuasi-inversibles a derecha y cuasi-inversibles de A*, respectivamente..
12. Dados $a, b, c \in A$ se tiene
$$(ba) \circ (bca - ba) = b((ab) \circ c)a,$$
$$(bca - ba) \circ (ba) = b(c \circ (ab))a.$$

[1]Un elemento $a \in A$ se dice divisor de cero a izquierda o derecha si $a \neq 0_A$ y existe $x \in A - (0)$ tal que $ax = 0_A$ o $xa = 0_A$ respectivamente.

Luego $ab \in \mathrm{RQI}(A) \Leftrightarrow ba \in \mathrm{RQI}(A)$ y $ab \in \mathrm{LQI}(A) \Leftrightarrow ba \in \mathrm{LQI}(A)$.

13. En todo anillo A se pueden efectuar operaciones de suma, resta y multiplicación, mas no necesariamente de división. Se dice que A es *anillo de división* si $\mathrm{U}(A) = A - \{0\}$. Por otra parte A se denomina *cuerpo* si es anillo de división conmutativo.

4.2. Módulos

1. Llamamos *módulo a izquierda sobre un anillo* A a todo par (M, A) formado por un grupo abeliano $(M, +, 0_M)$ y un anillo A, sujeto a las siguientes condiciones:
   (i) Hay una *acción de* A en M, o sea una correspondencia

$$A \times M \to M,\ (a, m) \to am \tag{4.2.1}$$

   (ii) Si $a, b \in A$ y $m, n \in M$ resulta

$$(a + b)m = am + bm, \tag{4.2.2}$$

$$a(m + n) = am + an, \tag{4.2.3}$$

$$(ab)m = a(bm), \tag{4.2.4}$$

$$1m = m. \tag{4.2.5}$$

2. Un módulo a derecha sobre sobre un anillo A es todo módulo a izquierda sobre el anillo A^{op}. Es ese caso, (4.2.1) define una acción

$$M \times A \to M,\ (m, a) \to ma$$

   y (4.2.4) toma la forma $m(ab) = (ma)b$ para cada $a, b \in A$ y $m \in M$.
3. Si $M \in A$-Mod-B se habrá de verificar la condición adicional

$$(am)b = a(mb) \tag{4.2.6}$$

   cualquiera sea $a \in A$, $b \in B$ y $m \in M$.
4. Fijados anillo A y B indicamos A-Mod, Mod-B y A-Mod-B a las clases de A-módulos a izquierda, B-módulos a derecha y de módulos a izquierda sobre A y a derecha sobre B respectivamente.
   También escribiremos ${}_AM$, M_B o ${}_AM_B$ para indicar que M es A-módulo a izquierda, B-módulo a derecha o (A, B)-módulo respectivamente.
5. Por ejemplo, si C es un cuerpo la clase C-Mod-C consiste de la clase de los *espacios vectoriales sobre* C, de modo que la teoría de módulos generaliza a la de espacios vectoriales y al álgebra lineal [**104**][**113**].
6. Todo grupo abeliano $(G, +, 0_G)$ es naturalmente un $\mathbb{Z}$-módulo. La teoría de módulos generaliza también la teoría de grupos abelianos.
7. (i) Sea M un A-módulo a izquierda. Notar que $\mathrm{Hom}(M; M)$ es un anillo si para $f, g \in \mathrm{Hom}(M; M)$ definimos $f + g$ y $f \circ g$ mediante

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m) \text{ y } (f \circ g)(m) = f(g(m)) \text{ si } m \in M.$$

   (ii) Queda inducida una aplicación

$$\lambda : A \to \mathrm{Hom}(M; M) \text{ tal que } \lambda(a)(m) = am \text{ si } a \in A, m \in M.$$

La misma es un homomorfismo de anillos. Decimos que λ define la *representación regular a izquierda de* A en M .
(iii) Más generalmente, se llama *representación de un anillo* A a todo homomorfismo de anillos de A en la clase de endomorfismos de un grupo abeliano en si mismo.
(iv) Si $\rho : A \to \mathrm{Hom}(M; M)$ es una representación de A en un grupo abeliano M entonces M deviene A-módulo a izquierda: si $a \in A$ y $m \in M$ basta hacer $a \cdot m \triangleq \rho(a)(m)$.
(v) Hay entonces una correspondencia 1-1 entre las estructuras de A-módulo sobre un grupo abeliano M y la clase de representaciones de A en M.

4.3. Álgebras

1. Sean A, R anillos, con R-abeliano. Se dice que A es *álgebra sobre el anillo abeliano* R, o una R*-álgebra*, si A es R-módulo y
$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$
para cualesquiera $r \in R$ y $a, b \in A$.
2. Si A, B son R-álgebras, una aplicación $f : A \to B$ se dice *homomorfismo de* R*-álgebras* si es un homomorfismo de anillos tal que $f(ra) = rf(a)$ cuando $r \in R$ y $a \in A$.
3. Sean F un cuerpo, $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Indicamos $F\langle \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n\rangle$ al *álgebra libre sobre* F *en las variables* $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n$. Es similar al álgebra $F[\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n]$ excepto que las variables $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n$ no conmutan entre si aunque sí con los escalares de F. Notar que

$$F\langle \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n\rangle \approx \oplus_{\nu=1}^{\infty} F^{n^{\nu}}. \tag{4.3.1}$$

4. Con la notación anterior,

$$F[\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n] \approx \frac{F\langle \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n\rangle}{\langle \mathrm{x}_i\mathrm{x}_j - \mathrm{x}_j\mathrm{x}_i\rangle_{1\le i<j\le n}}. \tag{4.3.2}$$

5. Además

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) \approx \frac{\mathbb{R}\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}{\langle \mathrm{x}^2+1, \mathrm{y}^2+1, \mathrm{xy}+\mathrm{yx}\rangle}, \tag{4.3.3}$$

donde $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ indica el *álgebra real de Hamilton*:
$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) \triangleq \{a1 + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
con $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$, $\mathrm{xy} = \mathrm{k}$, $\mathrm{kx} = \mathrm{y}$ e $\mathrm{yk} = \mathrm{x}$.

4.4. Homomorfismos de módulos. Submódulos. Módulo generado.

1. Sean dados un anillo A y A-módulos a izquierda (derecha) M y N sobre A. Se llama *homomorfismo a izquierda* (*derecha*) *de* M *en* N a toda aplicación aditiva $f : M \to N$ tal que $f(am) = af(m)$ ($f(ma) = f(m)a$) si $a \in A$ y $m \in M$.

Indicamos ${}_A\mathrm{Hom}(M;N)$ y $\mathrm{Hom}_A(M;N)$ a las clases de homomorfismos a izquierda y derecha de M en N respectivamente. Si B fuere un segundo anillo y $M, N \in A$-Mod-B, ${}_A\mathrm{Hom}_B(M;N)$ denota la clase de homomorfismos a izquierda sobre A y a derecha sobre B de M en N.

2. Llamamos *monomorfismo*, *epimorfismo* e *isomorfismo de módulos* a cada homomorfismo de módulos que sea inyectivo, suryectivo o biyectivo respectivamente.
3. Sean M un A-módulo a izquierda (derecha) y N un subconjunto de M. Decimos que N *es un A-submódulo a izquierda* (*derecha*) de M si $N \in A$-Mod ($N \in$ Mod-A).
4. Un A-módulo no nulo M se llama *simple* si sus únicos A-submódulos son solo los triviales: $\{0_M\}$ y M.
5. Todo anillo A es A-módulo. Los A-submódulos a izquierda (derecha) se denominan *ideales a izquierda (derecha)* de A.
6. Sean $M \in A$-Mod-B y $\mathfrak{Q} \subseteq M$. Indicamos $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ al A-Mod-B *submódulo de M generado por* $\mathfrak{Q}$, o sea

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{Q}\rangle &= \{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in A, m_i \in \mathfrak{Q}, b_i \in B, 1 \leq i \leq n\}\\ &= \bigcap\{N : \mathrm{Q} \subseteq N \text{ y } N \text{ es } A\text{-}B \text{ submódulo de } M\}.\end{aligned}$$

4.5. Suma, producto, cocientes y suma directa de módulos.

1. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-submódulos a izquierda de un A-módulo a izquierda M. Indicamos la *suma de módulos* de esta familia, a saber

$$\textstyle\sum_{i\in I} M_i \triangleq \{\sum_{j=1}^{n} m_{i_j} : n \in \mathbb{N}, m_{i_j} \in M_{i_j}, 1 \leq j \leq n\}.$$

Esta suma se dice *suma directa interna* , que representamos mediante $\bigoplus_{i\in I} M_i$, cuando la escritura de cada elemento en la misma es única. Entonces, cada M_i se denomina *sumando directo interno.*

2. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos a izquierda. Indicamos el *producto directo* y la *suma directa externa* de esta familia mediante

$$\prod_{i\in I} M_i \triangleq \{m = (m_i)_{i\in I} : m_i \in M_i \text{ si } i \in I\} \text{ y}$$

$$\oplus_{i\in I} M_i \triangleq \{m = (m_i)_{i\in I} : m \in \prod_{i\in I} M_i \text{ y } \mathrm{card}\{i \in I : m_i \neq 0_{M_i} < +\infty\}\}.$$

Si $a \in A$ y $m, n \in \prod_{i\in I} M_i$ o $m, n \in \sum_{i\in I} M_i$, las operaciones

$$m + n = (m_i + n_i)_{i\in I} \text{ y } am = (am_i)_{i\in I}$$

definen en el producto y la suma estructuras de A-módulo a izquierda. Desde luego, construcciones análogas son válidas a derecha.

3. Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, y si $j \in I$ sean

$$\pi_j : \textstyle\prod_{i\in I} M_i \to M_j \text{ e } \iota_j : M_j \to \oplus_{i\in I} M_i$$

las proyecciones e inmersiones canónicas.
Sean U, V dos A-módulos y

$$U \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} V,\ i \in I,$$

morfismos de A-módulos. Hay únicos morfismos

$$p \triangleq \prod_{i\in I} f_i : U \to \prod_{i\in I} M_i,$$

$$s \triangleq \oplus_{i\in I} g_i : \oplus_{i\in I} M_i \to V,$$

tales que $\pi_i \circ p = f_i$ y $s \circ \iota_i = g_i$ para cada $i \in I$, dados mediante

$$p(u) \triangleq \{f_i(u)\}_{i\in I} \text{ y}$$

$$s(\{m_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} g_i(m_i). \tag{4.5.1}$$

En particular, notar que la suma en (4.5.1) se limita a un número finito de sumandos no nulos.

4. Las propiedades universales en §4.5(3) determinan al producto y suma directos salvo isomorfismos.
Por ejemplo sea $(P', \{\pi'_i\}_{i\in I})$ un par formado por un A-módulo y una familia de morfismos $P' \xrightarrow{\pi'_i} M_i$ con la siguiente propiedad: dado cualquier A-módulo U y dados morfismos $U \xrightarrow{f_i} M_i$ hay un morfismo $p' : U \to P'$ tal que $\pi'_i \circ p' = f_i$ para cada $i \in I$.
Haciendo $U = \prod_{i\in I} M_i$ y $f_i = \pi_i$ si $i \in I$ hay entonces un morfismo $p' : \prod_{i\in I} M_i \to P'$ tal que $\pi'_i \circ p' = \pi_i$ si $i \in I$.
Asimismo, haciendo $U = P'$ y $f_i = \pi'_i$ si $i \in I$ hay un morfismo $p : P' \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que $\pi_i \circ p = \pi'_i$ si $i \in I$.
Dados ahora $\xi \in \prod_{i\in I} M_i$ e $i \in I$ tenemos

$$\pi_i[(p \circ p')(\xi)] = (\pi_i \circ p)(p'(\xi)) = \pi'_i(p'(\xi)) = \pi_i(\xi),$$

o sea $p \circ p' = \mathrm{Id}_{\prod_{i\in I} M_i}$.
Análogamente, dado $\xi' \in P'$ resulta

$$\pi'_i[(p' \circ p)(\xi')] = (\pi'_i \circ p')(p(\xi')) = \pi_i(p(\xi')) = \pi'_i(\xi'),$$

i.e. $\pi'_i \circ (p' \circ p) = \pi'_i$ para cada $i \in I$. Por unicidad debe ser $p' \circ p = \mathrm{Id}_{P'}$ e inferimos que $P' \approx \prod_{i\in I} M_i$.
En definitiva, todo producto y cada suma directa de $\{M_i\}_{i\in I}$ son, salvo isomorfismos, pares $(P, \{\pi_i\}_{i\in I})$ y $(S, \{\iota_i\}_{i\in I})$ formados por ciertos módulos y familias de homomorfismos sujetos a la propiedad universal descripta.

5. Con la notación precedente, sea $\iota_i : M_i \hookrightarrow M$ cada inclusión. Son equivalentes:
(i) $\sum_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} M_i$.
(ii) $\iota \triangleq \oplus_{i\in I} \iota_i = \oplus_{i\in I} M_i \to M$ es inyectiva,
(iii) $\{M_i\}_{i\in I}$ es *independiente* , o sea $M_j \cap \sum_{i\in I-\{j\}} M_i = \{0_M\}$ si $j \in I$.

(iv) $\{M_i\}_{i\in F}$ es independiente para cada $F \subseteq I$ finito.
(v) Dados subconjunos disjuntos J, K de I,

$$\sum_{j\in J} M_j \cap \sum_{k\in K} M_k = \{0_M\}.$$

6. Sean M, N módulos a izquierda o derecha sobre un anillo A tales que $N \subseteq M$. Entonces M/N es A-módulo a izquierda o derecha con las operaciones

$$(m+N)+(m'+N) \triangleq (m+m')+N \text{ y } a(m+N) \triangleq am+N.$$

o

$$(m+N)+(m'+N) \triangleq (m+m')+N \text{ y } (m+N)a \triangleq ma+N,$$

respectivamente.

4.6. Módulos libres

1. Dado ${}_AM$, un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de M se dice *A-linealmente independiente* si: toda vez que F es subconjunto finito de I y $\{a_i\}_{i\in F}$ es subconjunto de A tal que $\sum_{i\in F} a_i x_i = 0_M$ entonces $a_i = 0_A$ para cada $i \in F$.
El conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ se dice *linealmente dependiente* si no es linealmente independiente, y que se trata de una *base libre de M sobre A* si es un conjunto de generadores linealmente independiente sobre A.
2. ${}_AM$ se llama *A-módulo libre con rango* $\mid I \mid$ si tiene alguna base libre con cardinal $\mid I \mid$.
3. Sean $\{x_i\}_{i\in I}$ subconjunto de un A-módulo F y $\rho_i : A \to F$ tal que $\rho_i(a) = ax_i$, con $i \in I$. Son equivalentes:
(a) Dados ${}_AM$ e $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq M$ existe $f : F \to M$ homomorfismo único tal que $f(x_i) = y_i$ si $i \in I$.
(b) $\rho \triangleq \oplus_{i\in I}\rho_i : A^{(I)} \to F$ es isomorfismo, con $A^{(I)} \triangleq \oplus_{i\in I} A$.
(c) F es libre con base libre $\{x_i\}_{i\in I}$.
$(a \Rightarrow b)$ Por hipótesis existe $h \in_A \mathrm{Hom}(F, A^{(I)})$ tal que $h(x_i) = e_i$ si $i \in I$. Observando que $h \circ \rho = \mathrm{Id}_{A^{(I)}}$ sigue que ρ es inyectiva.
Si ρ no fuera suryectiva sea $N = F/\mathrm{Im}(\rho)$. Entonces N es A-módulo a izquierda y, si $\pi : F \to N$ es la proyección al cociente, $\pi(x_i) = 0_N$ para cada i. Además π no es idénticamente nula porque $\mathrm{Im}(\rho) \subsetneq F$. Pero $0_{F,N} \in_A \mathrm{Hom}(F, N)$ y $0_{F,N}(x_i) = 0_N$ para todo $i \in I$ y se contradice la hipótesis. Luego ρ es isomorfismo.
$(b \Rightarrow c)$ Sean $z \in F$ y $b \in A^{(I)}$ tal que $z = \rho(b)$. Luego $z = \sum_{i\in I} b_i x_i$ y $\{x_i\}_{i\in I}$ genera a F.
Sea $\sum_{i\in\Lambda} c_i x_i = 0_F$, con $\Lambda \in \mathcal{P}_f(I)$. Luego $\rho(\tilde{c}) = 0_F$, donde hacemos $\tilde{c}_i = c_i$ si $i \in \Lambda$ y $\tilde{c}_i = 0_A$ si $i \in I - \Lambda$. Como ρ es inyectiva $\tilde{c} = 0_{A^{(I)}}$, o sea $\{x_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente.
$(c \Rightarrow a)$ Sea $\{y_i\}_{i\in I}$ subconjunto de un A-módulo a izquierda M. Hacemos $f : F \to M$ tal que $f(x) = \sum_{i\in I} a_i y_i$ si $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$. Fijado x sabemos que $\{a_i\}_{i\in I}$ está unívocamente determinado en A,

siendo eventualmente $a_i \neq 0_A$ salvo un conjunto finito de índices. Luego f está bien definida y es fácil ver sigue la afirmación.

4. Si $I \neq \emptyset$, ${}_AF$ es libre de rango $\mid I \mid$ si y solo si $F \approx A^{(I)}$. Hay entonces A-módulos libres de rango arbitrario.
5. Si ${}_AF$ es libre, cada epimorfismo $f : M \to F$ es *escindido* , i.e. existe algún morfismo $f' : F \to M$ tal que $f \circ f' = \mathrm{Id}_F$.[2]
6. Todo módulo ${}_AM$ es cociente de algún módulo libre.
   En efecto, sea $f : A^{(M)} \to M$ tal que
   $$f(a) = \textstyle\sum_{m\in M} a_m m$$
   si $a = (a_m)_{m\in M}$. Claramente f es morfismo de A-módulos a izquierda. Más aún, $f(e_m) = m$ para cada $m \in M$, donde $e_m = \{\delta_{m,n}\}_{n\in M}$. Siendo f epimorfismo la conclusión es inmediata.

4.7. Sucesiones exactas

1. Sean A un anillo, $..., M_{-1}, M_0, M_1, ...$ una sucesión de A-módulos a izquierda (derecha) y $..., f_{-1}, f_0, f_1, ...$ una sucesión de homomorfismo de A-módulos a izquierda (derecha) sobre A, con $f_i : M_{i-1} \to M_i$ para cada i. Escribimos
   $$(S):\ ... \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} ...$$
   Decimos que (S) define una *sucesión exacta de módulos y morfismos* si $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ para cada i.
   En particular, llamamos *sucesión exacta corta* a toda aquella del tipo

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \tag{4.7.1}$$

   en la que f es monomorfismo y g es epimorfismo. Se dice que esta sucesión exacta corta representa *una extensión de M por P*.
2. Una sucesión exacta (4.7.1) se dice *escindida* si f es inversible a derecha.
3. Con la notación precedente, son equivalentes:
   (i) La sucesión (4.7.1) es escindida.
   (ii) g es inversible a izquierda.
   (iii) $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ es sumando directo de N.
   (iv) Para cada homomorfismo $h : M \to N'$ existe un homomorfismo $h' : N \to N'$ tal que $h = h' \circ f$.
   (v) Para cada homomorfismo $k : P' \to P$ existe un homomorfismo $k' : P' \to N$ tal que $k = g \circ k'$.
4. Son equivalentes:
   (i) La sucesión exacta corta
   $$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{g_2} M_2 \to 0$$

[2] Análogamente, un monomorfismo $f : M \to N$ es *escindido* si existe algún morfismo $f' : N \to M$ tal que $f' \circ f = \mathrm{Id}_M$.

es escindida.
(ii) Hay una sucesión de A-módulos y morfismos

$$0 \to M_2 \xrightarrow{f_2} M \xrightarrow{g_1} M_1 \to 0,$$

necesariamente exacta escindida, tal que para $i, j \in \{1, 2\}$, se tiene $g_i f_j = \delta_{i,j}\mathrm{Id}_{M_i}$ y $f_1 g_1 + f_2 g_2 = \mathrm{Id}_M$.
(iii) Hay un isomorfismo $h : M_1 \times M_2 \to M$ tal que $f_1 = h \circ \iota_1$ y $g_2 \circ h = \pi_2$, donde ι_1 y π_2 son la inmersión natural de M_1 en $M_1 \times M_2$ y la proyección natural de $M_1 \times M_2$ sobre M_2.

4.8. Productos tensoriales

1. Sean R anillo, $M \in \mathrm{Mod}_R$, $N \in_R \mathrm{Mod}$, G un grupo abeliano aditivo. Una función $f : M \times N \to G$ es R- *admisible* si es *biaditiva*[3] y además $f(mr, n) = f(m, rn)$ si $m \in M$, $r \in R$ y $n \in N$. Indiquemos $B_R(M, N; G)$ al conjunto de tales funciones R-admisibles.
2. [**109**] Hay un grupo abeliano T y una función $t : M \times N \to T$ tales que para cada $f \in B_R(M, N; G)$ existe $\overline{f} \in \mathrm{Hom}(T, G)$ único tal que $f = \overline{f} \circ t$, i.e. se verifica la *propiedad universal del producto tensorial.* Para ello, sea $T = \mathbb{Z}^{(M\times N)}/\mathfrak{T}$, donde $\mathfrak{T}$ es el subgrupo generado por funciones del tipo

$$\delta_{(m+m',n)} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m',n)},$$
$$\delta_{(m,n+n')} - \delta_{(m,n)} - \delta_{(m,n')},$$
$$\delta_{(mr,n)} - \delta_{(m,rn)},$$

con $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $r \in R$. Definimos $t : M \times N \to T$ como $t(m, n) = \tau(\delta_{(m,n)})$, con $\tau : \mathbb{Z}^{(M\times N)} \to T$ la proyección al cociente y $(m, n) \in M \times N$.
Sean $f \in B_R(M, N; G)$ y $x \in T$, digamos $x = \tau(X)$ para cierto $X \in \mathbb{Z}^{(M\times N)}$. Podemos escribir $X = \sum_{(m,n)\in M\times N} X(m, n)\delta_{(m,n)}$. Definimos $\overline{f} \to G$ mediante

$$\overline{f}(x) = \textstyle\sum_{(m,n)\in M\times N} X(m, n)f(m, n).$$

Las sumas anteriores constan de un número finito de sumandos porque X tiene soporte finito y, en particular, F es nula sobre $\mathfrak{T}$. Por ello F está bien definido y claramente es un morfismo de grupos único de modo que $f = \overline{f} \circ t$.
3. Haciendo $m\otimes n \triangleq t(m, n)$ para cada (m, n) se tienen las identidades:

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n,$$
$$m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n',$$
$$(mr) \otimes n = m \otimes (rn),$$

cualesquiera sean $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $r \in R$.

[3] O sea $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$ y $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$ cualesquiera sean $m, m' \in M$ y $n, n' \in N$.

4. El par (T,t) es único salvo isomorfismos.
En efecto, sean T' grupo abeliano, $t' : M \times N \to T'$ función R-admisible tal que para cada función R-admisible $g : M \times N \to G$ existe $\hat{g} \in \operatorname{Hom}(T', G)$ única tal que $g = \hat{g} \circ t'$.
Entonces $t = \bar{t} \circ t'$ y $t' = \hat{t'} \circ t$, de donde
$$(\bar{t} \circ \hat{t'})(t(m,n)) = \bar{t}(t'(m,n)) = t(m,n),$$
$$(\hat{t'} \circ \bar{t})(t'(m,n)) = \hat{t'}(t(m,n)) = t'(m,n),$$
cualquiera sea $(m,n) \in M \times N$. O sea $\hat{t'} \circ \bar{t} = \mathrm{Id}_{T'}$, $\bar{t} \circ \hat{t'} = \mathrm{Id}_T$ y así $T \approx T'$.
5. Indicaremos $T = M \otimes_R N$ al *producto tensorial de M y N sobre R*.
6. Dados $M, M' \in \mathrm{Mod}_R$, $N, N' \in_R \mathrm{Mod}$, $f \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$ y además $g \in_R \operatorname{Hom}(N, N')$ existe $f \otimes g \in \operatorname{Hom}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ único tal que $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ para cada $m \in M$, $n \in N$.
Basta observar que la función
$$\eta : M \times N \to M' \otimes_R N',$$
$$\eta(m,n) = f(m) \otimes g(n)$$
es R-admisible y aplicar entonces la propiedad universal del producto tensorial.
7. Dados anillos R_1, R_2, R_3, ${}_{R_1}M_{R_2}$ y ${}_{R_2}N_{R_3}$, $M \otimes_{R_2} N \in R_1$-Mod-$R_3$.
En efecto, fijado $r_1 \in R_1$ la función
$$F(r_1) : M \times N \to M \otimes_{R_2} N, F(r_1)(m,n) = (r_1 m) \otimes n$$
deviene R_2-admisible, por lo que existe un único endomorfismo de grupos $F(r_1)^*$ de $M \otimes_{R_2} N$ tal que $F(r_1)^*(m \otimes n) = (r_1 m) \otimes n$ para cada m, n. Escribiendo $F(r_1)(u) = r_1 u$ si $u \in M \otimes_{R_2} N$ vemos que
$$r_1(m \otimes n) = (r_1 m) \otimes n$$
para cada *tensor básico* $m \otimes n$. Es fácil ver que así $M \otimes_{R_2} N$ resulta R_1-módulo a izquierda. Análogamente se realiza $M \otimes_{R_2} N$ como R_3-módulo a derecha.
8. Dados M_R, ${}_RN_S$ y ${}_SP$ resulta
$$(M \otimes_R N) \otimes_S P \approx M \otimes_R (N \otimes_S P).$$
Para ello, fijado $p' \in P$ la función
$$f_p : M \times N \to M \otimes_R (N \otimes_S P), \ f_p(m,n) = m \otimes (n \otimes p),$$
es R-admisible. Luego existe $f_p^* \in \operatorname{Hom}(M \otimes_R N, M \otimes_R (N \otimes_S P))$ único tal que $f_p^*(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes p)$ para cada m, n. Sea ahora
$$f : M \otimes_R N \times P \to M \otimes_R (N \otimes_S P), \ f(u,p) \triangleq f_p^*(u),$$
con $(u,p) \in M \otimes_R N \times P$. Es fácil ver que f es S-admisible y existe por ello un morfismo de grupos
$$F : (M \otimes_R N) \otimes_S P \to M \otimes_R (N \otimes_S P)$$

tal que

$$\begin{aligned} F((m \otimes n) \otimes p) &= f(m \otimes n, p) \\ &= f_p^*(m \otimes n) \\ &= m \otimes (n \otimes p) \end{aligned}$$

en cada tensor básico. Evidentemente, F es el isomorfismo buscado.

9. Dados M_R, N_R y ${}_RP$ se tiene
$$(M \oplus N) \otimes_R P \approx (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P).$$

4.9. Módulos simples y semisimples

1. Un A-módulo no nulo M se llama *simple* o *irreducible* si sus únicos A-submódulos son solo los triviales: $\{0_M\}$ y M.
2. ${}_AM$ es simple si y solo si $M \approx A/\mathfrak{I}$ para cierto ideal a izquierda maximal de A.
3. Un A-módulo M se llama *semisimple* o *completamente reducible* si cada A-submódulo de M es sumando directo de M (o *complementable*).
4. Claramente todo módulo simple es semisimple y el módulo nulo es semisimple pero no es simple.
5. Sean M un A-módulo semisimple y N un A-submódulo de M. Entonces N es semisimple.
En efecto, si $P \leq N$ tenemos $M = N \oplus N' = P \oplus P'$ para ciertos A-submódulos N' y P' de M. Sigue enseguida que $N = P \oplus (N \cap P')$.
6. Si ${}_AM$ es no nulo y semisimple entonces M contiene algún A-submódulo simple.
Para ello, sea $m \in M - \{0_M\}$. Entonces Am es A-módulo semisimple y bastará ver que Am contiene algún módulo simple.
Sea $\mathcal{F}$ la clase de submódulos no nulos N de Am tales que $m \notin N$.
Si $\mathcal{F} = \emptyset$, cada submódulo no nulo N de Am contiene a m, de modo que $N = Am$. Así Am resulta simple y sigue la tesis.
Podemos suponer $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y considerar $\mathcal{F}$ ordenado parcialmente por inclusión.
Del lema de Zorn hay en $\mathcal{F}$ un elemento maximal $\mathcal{N}$.
Hagamos $Am = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}'$, para cierto submódulo $\mathcal{N}'$ de Am.
Ahora $\mathcal{N}'$ debe ser simple, pues si $\mathcal{N}''$ es submódulo no nulo de $\mathcal{N}'$ entonces $m \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}''$ por ser $\mathcal{N}$ maximal.
Luego $Am = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}''$, y debe ser $\mathcal{N}'' = \mathcal{N}'$.
7. [**20**] [**102**] [**2**] Para un A-módulo M son equivalentes:
(i) M es semisimple.
(ii) M es suma de una familia de submódulos simples de M.
(iii) M es suma directa de una familia de submódulos simples de M.
► ((i)⇒(ii)) Dado un A-módulo semisimple M sea $\mathfrak{S}_M$ la familia de submódulos simples de M. Si $\sum \mathfrak{S}_M \subsetneq M$ existe un submódulo no nulo N de M de modo que $M = N \oplus \sum \mathfrak{S}_M$. Por (4.9.5), N es

semisimple. Luego, por (4.9.6) N contiene algún submódulo simple, lo cual no es posible porque $N \cap \sum \mathfrak{S}_M = \{0_M\}$. Luego sigue (ii).
((ii) $\Rightarrow$(iii)) Sea $M = \sum_{i\in I} S_i$, con $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{S}_M$. Hagamos

$$\mathfrak{F} = \{J \in \mathcal{P}(I) : \textstyle\sum_{i\in J} S_i = \oplus_{i\in J} S_i\}.$$

Dado $i \in I$ claramente $\{i\} \in \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Ordenando parcialmente $\mathfrak{F}$ por inclusión, del lema de Zorn sigue enseguida que existe $J_0 \in \mathfrak{F}$ maximal. Escribiendo $N = \oplus_{i\in J_0} S_i$ debe ser $M = N$. Precisamente, dado $i \in I$ debe ser $S_i \cap N \neq (0_M)$, sino $i \notin J_0$ y $J_0 \cup \{i\} \in \mathfrak{F}$, lo que no es posible por el carácter maximal de $\mathfrak{F}$. Pero como S_i es simple, $S_i \cap N = S_i$, de donde $S_i \subseteq N$. Como $i \in I$ es arbitrario sigue la afirmación.
((iii)$\Rightarrow$(i)) Sea $M = \oplus_{i\in I} S_i$, con $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{S}_M$ y fijemos un submódulo P de M. Veamos que P es complementable en M.
Pudiendo suponer $P < M$, sea $\pi : M \to M/P$ la proyección al cociente y consideremos $i \in I$.
Si $S_i \subseteq P$ entonces $\pi\,|_{S_i} \equiv 0$.
Si $S_i \nsubseteq P$ entonces $\pi\,|_{S_i}$ es monomorfismo. En efecto, en este caso debe ser $S_i \cap P = (0_M)$ porque S_i es simple. Tomando $u \in S_i - P$, $Ru = S_i$. Luego, si $\pi(au) = 0_{M/P}$ para $a \in A$, $au \in P \cap S_i$, o sea $au = 0_M$.
Ahora,

$$M/P = \pi(M) = \textstyle\sum_{i\in K} \pi(S_i),$$

con $K = \{i \in I : S_i \nsubseteq P\}$. Por la implicación anterior hay un subconjunto no vacío L de K tal que $M/P = \oplus_{i\in L}\pi(S_i)$.
Si $Q = \oplus_{i\in L} S_i$, $\pi\,|_Q : Q \to M/P$ es isomorfismo.
Sea $f = \iota_{Q,M} \circ (\pi\,|_Q)^{-1} : M/P \to M$.
Así $f \in \mathrm{H}(M/P, M)$ y $\pi \circ f = \mathrm{Id}_{M/P}$.
Considerando la sucesión exacta corta $0 \to P \hookrightarrow M \to M/P \to 0$ inferimos que P es complementable.

4.10. Módulos proyectivos

1. Un módulo P es *proyectivo* si dados un morfismo $f : P \to Q'$ y un epimorfismo $g : Q \to Q'$ como en el diagrama

(4.10.1)
$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ Q & \xrightarrow{g} & Q' & \to & 0 \end{array}$$

hay un morfismo $h : P \to Q$ tal que $f = g \circ h$.
2. Todo módulo libre ${}_AL$ es proyectivo.
Precisamente, consideremos el diagrama de módulos y morfismos

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & & \downarrow f & & \\ Q & \xrightarrow{g} & Q' & \to & 0 \end{array}$$

y sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una base libre de L. Para cada $i \in I$ existe $q_i \in Q$ tal que $g(q_i) = f(x_i)$.
Por §4.6(3) hay un único morfismo $h : L \to Q$ tal que $h(x_i) = q_i$ para cada $i \in I$.
Dado $x \in L$ sean $n \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_n \in I$ y $a_{i_1}, ..., a_{i_n} \in A$ tales que $x = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_{i_j}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} g(h(x_{i_j})) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} g(q_{i_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} f(x_{i_j}) \\ &= f(x),\end{aligned}$$

o sea $f = g \circ h$ y sigue la afirmación.

3. Una suma directa de módulos es proyectiva si y solo si cada sumando es proyectivo.
4. Un A-módulo a izquierda P es proyectivo si y solo si es sumando directo de algún A-módulo libre.
   ($\Rightarrow$) Sea ${}_AP$ proyectivo. Por §4.6(6) hay un módulo libre ${}_AL$, un submódulo ${}_AN$ de L y un isomorfismo $f : P \to L/N$.
   Si $g : L \to L/N$ es la proyección al cociente, $h \triangleq f^{-1} \circ g : L \to P$ es epimorfismo. Tenemos el diagrama de módulos y morfismos
   $$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \mathrm{Id}_P & & \\ L & \xrightarrow{h} & P & \to & 0. \end{array}$$
   Puesto que P es proyectivo hay un morfismo $i : P \to L$ tal que $h \circ i = \mathrm{Id}_P$. En particular, i es monomorfismo.
   Dado ahora $l \in L$ se tiene $l - i(h(l)) \in \ker(h)$, i.e. $L = \ker(h) + \mathrm{Im}(i)$.
   Si $p \in P$ e $i(p) \in \ker(h)$, $0_P = h(i(p)) = p$, o sea $L = \ker(h) \oplus \mathrm{Im}(i)$.
   Como $P \approx \mathrm{Im}(i)$ la condición es necesaria.
   ($\Leftarrow$) Sea P sumando directo de un módulo libre ${}_AL$ y veamos que es proyectivo. Para ello consideremos el diagrama de módulos y morfismos (4.10.1). Tenemos el siguiente diagrama:
   $$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ Q & \xrightarrow{g} & Q' & \to & 0, \end{array}$$
   donde π es la proyección de L sobre P. Por §4.10(2) L es proyectivo, por lo cual existe un morfismo $h : L \to Q$ tal que $g \circ h = f \circ \pi$.

Si además $\iota : P \to L$ es la inmersión natural de P en L, como $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_P$, resulta $f = g \circ (h \circ \iota)$ y P deviene proyectivo.

5. Un módulo P es proyectivo si y solo si el functor $\mathrm{Hom}(P, \circ)$ es exacto.
6. Un R-módulo P es proyectivo si y solo si existen un conjunto no vacío I, $\{p_i\}_{i\in I} \subseteq P$ y $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$ tales que si $p \in P$ se tiene $p = \sum_{i\in I} \varphi_i(p)p_i$, donde además $\varphi_i(p) \neq 0_R$ para a lo sumo un número finito de índices.
   ($\Rightarrow$) Por §4.10(4) existen un R-módulo libre L y $\psi : L \to P$ epimorfismo.
   Por §4.17(34) existe $\theta : P \to L$ tal que $\psi \circ \theta = \mathrm{Id}_P$.
   Sean $\{l_i\}_{i\in I}$ una R-base libre de L y $p_i = \psi(l_i)$ para cada $i \in I$.
   Dado $p \in P$ hay únicos $\varphi_i(p) \in R$, nulos salvo un número finito de índices, tales que $\theta(p) = \sum_{i\in I} \varphi_i(p)l_i$.
   Evidentemente $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$ y
   $$p = \psi(\theta(p)) = \textstyle\sum_{i\in I} \varphi_i(p)p_i.$$
   ($\Leftarrow$) En las condiciones de la afirmación sea L un R-módulo libre con base R-libre $\{l_i\}_{i\in I}$.
   Por hipótesis hay un epimorfismo $\zeta : L \to P$, $\zeta(l_i) = p_i$ si $i \in I$. Además la aplicación $\eta : P \to L$ tal que $\eta(p) = \sum_{i\in I} \varphi_i(p)l_i$ está bien definida, es morfismo de R-módulos a izquierda e $\mathrm{Id}_P = \zeta \circ \eta$, i.e. P resulta isomorfo a un sumando directo de L y deviene proyectivo.

4.11. Módulos inyectivos

1. Un módulo Q es *inyectivo* si dados un monomorfismo $f : M \to M'$ y un morfismo $g : M \to Q$ como en el diagrama

(4.11.1)
$$\begin{array}{c} 0 \to M \xrightarrow{f} M' \\ g\downarrow \quad\; \\ Q \quad\;\; \end{array}$$

   existe un morfismo $h : M' \to Q$ tal que $g = h \circ f$.
2. Todo producto directo de módulos es inyectivo si y solo si cada factor es inyectivo. (V. §4.16.5).
3. [**9**] Dados un anillo unitario A y $Q \in A$-Mod, para que Q sea inyectivo es condición necesaria y suficiente que dados un ideal I de A y $f \in_A \mathrm{Hom}(I, Q)$ exista $q \in Q$ tal que $f(a) = aq$ si $a \in I$.
   ($\Rightarrow$) Sean I ideal de A y $f \in_A \mathrm{Hom}(I, Q)$. Si $\iota : I \hookrightarrow A$ es la inclusión, por la inyectividad de A hay un morfismo $g : A \to Q$ tal que $f = g \circ \iota$. Entonces $f(a) = g(a) = ag(1)$ si $a \in I$.
   ($\Leftarrow$) Consideremos el diagrama de módulos y morfismos (4.11.1). Sea $\mathfrak{F}$ la clase de pares (N, h), con $f(M) \leq N \leq M'$ y $h \in \mathrm{Hom}(N, Q)$ y $h \circ f = g$.
   Puesto que f es monomorfismo evidentemente $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.
   Dados $(N_1, h_1), (N_2, h_2) \in \mathfrak{F}$ hagamos $(N_1, h_1) \leq (N_2, h_2)$ si y solo si $N_1 \subseteq N_2$ y $h_2 \mid_{N_1} = h_1$. Así $\mathfrak{F}$ resulta parcialmente ordenado y del

lema de Zorn sigue que existe $(N_0, h_0) \in \mathfrak{F}$ maximal.
Suponiendo $N_0 \subsetneq M'$ sea $m' \in M' - N_0$.
El conjunto $I = \{a \in A : am' \in N_0\}$ es ideal a izquierda de A.
Sea $k : I \to Q$ tal que $k(a) = h_0(am')$.
Como $k \in_A \operatorname{Hom}(I, Q)$ existe $q \in Q$ tal que $h_0(am') = aq$ si $a \in I$.
Sea $l : N_0 + Am' \to Q$, $l(n_0 + am') = h_0(n_0) + aq$ si $n_0 \in N_0$ y $a \in A$. Entonces l está bien definida: si $n_0 + am' = 0_{M'}$ entonces $a \in I$. Luego

$$h_0(n_0) = h_0(-am') = -aq,$$

i.e. $h_0(n_0) + aq = 0_Q$. Claramente $l \in_A \operatorname{Hom}(N_0 + Am', Q)$ y si $m \in M$ vemos que

$$l(f(m)) = h_0(f(m)) = g(m).$$

Así $(N_0 + Am', l) \in \mathfrak{F}$, pero $N_0 \subsetneq N_0 + Am'$ y se contradice la maximalidad de (N_0, h_0). Luego $N_0 = M'$ y sigue la tesis.

4. Todo módulo ${}_AM$ se puede sumergir en algún módulo inyectivo.
(i) Sea Φ el conjunto de pares ordenados (I, f), con I ideal a izquierda de A y $f \in_A \operatorname{Hom}(I, M)$.
(ii) Hagamos $F = M \oplus A^{(\Phi)}$ y sea G el submódulo a izquierda de F generado por elementos de la forma $(f(a), -ae_{(I,f)})$, con $a \in A$, $(I, f) \in \Phi$ y $e_{(I,f)} \in A^{(\Phi)}$ la característica de $\{(I, f)\}$ sobre Φ.
(iii) Sean $D(M) = F/G$ y $\varphi : M \to D(M)$ tal que $\varphi(m) = [(m, 0_{A^{(\Phi)}})]$ si $m \in M$.
(iv) Evidentemente $\varphi \in_A \operatorname{Hom}(M, D(M))$.
(v) Sea $m \in \ker(\varphi)$. Existirán $n \in \mathbb{N}$, $(I_1, f_1), ..., (I_n, f_n) \in \Phi$ y elementos $a_1, b_1, ..., a_n, b_n \in A$ tales que

$$(m, 0_{A^{(\Phi)}}) = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j(f_j(b_j), -b_je_{(I_j,f_j)}).$$

Luego $m = \sum_{j=1}^n f_j(a_jb_j)$ y $\sum_{j=1}^n a_jb_je_{(I_j,f_j)} = 0_{A^{(\Phi)}}$, de modo que $m = 0_M$ y φ es monomorfismo.
(vi) Fijemos $(I, f) \in \Phi$ y $a \in I$. Entonces

$$\begin{aligned}\varphi(f(a)) &= [(f(a), 0_{A^{(\Phi)}})] \\ &= [-(f(a), -ae_{(I,f)})] + [(f(a), 0_{A^{(\Phi)}})] \\ &= [(0_M, ae_{(I,f)})] \\ &= a[(0_M, e_{(I,f)})].\end{aligned}$$

O sea, dados un ideal I de A y $f \in_A \operatorname{Hom}(I, M)$ existe $\xi \in D(M)$ tal que $\varphi(f(a)) = a\xi$.
(vii) Sea Ω el menor *ordinal*[4] infinito cuyo cardinal es mayor que el

[4]Un *conjunto bien ordenado* es un conjunto munido de una relación de orden tal que cada parte no vacía de él tiene elemento mínimo. Los ordinales son conjuntos que permiten clasificar los conjuntos bien ordenados. Precisamente, un conjunto α es un ordinal si
(1) α es *transitivo*, o sea cada uno de sus elementos es a la vez subconjunto de α. O bien, si $a \in \alpha$ y $b \in a$ entonces $b \in \alpha$. Por ejemplo $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, es transitivo.
(2) La relación de pertenencia verifica la condición de tricotomía en α. O sea, si $a, b \in \alpha$

del anillo A.
(viii) Definiremos $Q_\alpha(M)$ para $\alpha \leq \Omega$ por *inducción transfinita* [5].
(ix) Sea $Q_1(M) = D(M)$. Haremos también $Q_{\alpha+1} = D(Q_\alpha)$. Si λ es ordinal límite sea $Q_\lambda = \cup_{\alpha<\lambda} Q_\alpha$.
(x) Veamos que Q_Ω es A-módulo inyectivo.
Sean I ideal de A y $f \in_A \mathrm{Hom}(I, Q_\Omega)$. Como $\mid A \mid < \mid \Omega \mid$ existe $\alpha < \Omega$ tal que $f(I) \subseteq Q_\alpha$.
Por (vi) sea $\xi \in D(Q_\alpha)$ tal que $\varphi_\alpha(f(a)) = a\xi$ si $a \in A$, donde indicamos $\varphi_\alpha : Q_\alpha \hookrightarrow D(Q_\alpha)$.
Pero $D(Q_\alpha) = Q_{\alpha+1} \subseteq Q_\Omega$ y de §4.11(3) sigue la tesis.

5. Un módulo Q es inyectivo si y solo si el functor $\mathrm{Hom}(\circ, Q)$ es exacto.

4.12. Módulos noetherianos y artinianos

1. Sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto C. Decimos que $\mathcal{C}$ satisface una *condición de cadena ascendente* (resp. *condición de cadena descendente*) si no existe una sucesión infinita $C_{i_1} \subsetneq C_{i_2} \subsetneq ...$ (resp. no existe una sucesión infinita $C_{i_1} \supsetneq C_{i_2} \supsetneq ...$).
2. Fijados un anillo A y un A-módulo M, decimos que M es *noetheriano* (resp. *artiniano*) si su familia de submódulos satisface la condición de cadena ascendente (resp. descendente).
3. ${}_AM$ es noetheriano si y solo si cada submódulo de M es finitamente generado.
4. ${}_AM$ es noetheriano y artiniano si y solo si M tiene una *serie de composición finita*, i.e. existe $n \in \mathbb{N}$ y submódulos
$$M_0 = M > M_1 > M_2 > ... > M_n = (0_M)$$
tal que M_i/M_{i+1} es simple si $0 \leq i < n$.
5. Sea $N \leq M$. Entonces M es noetheriano (resp. artiniano) si N y M/N son noetherianos (resp. artinianos).
6. Si ${}_AM$ es noetheriano, cada submódulo y cada factor de M es noetheriano.
7. Sea $N \leq M$. Entonces M es noetheriano (resp. artiniano) si N y M/N son noetherianos (resp. artinianos).
8. La suma directa finita de módulos noetherianos es noetheriana.
9. Sea A un anillo noetheriano. Entonces todo A-módulo finitamente generado en noetheriano.
10. Sean A, B anillos, $\varphi : A \to B$ epimorfismo. Si A es noetheriano entonces B es noetheriano.

---

entonces $a \in b$, $b \in a$ o $a = b$.
Si α es un ordinal también lo es $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$, el *ordinal siguiente de* α . Se dice también que α es el *sucesor* de α' y se escribe $\alpha' = \alpha + 1$. Un *ordinal límite* es todo ordinal no nulo que no es siguiente de ningún otro.
Si α, β son ordinales hacemos $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$.

[5] Una cláusula $g(\alpha)$ se establece por inducción transfinita si (a) $g(1)$ es cierta. (b) $g(\alpha')$ es cierta si $g(\alpha)$ es cierta. (c) $g(\lambda)$ es cierta si $g(\alpha)$ es cierta toda vez que $\alpha < \lambda$.

4.13. Módulos playos

1. Un R-módulo a derecha (resp. a izquierda) Q se dice *playo* si el functor $Q\otimes_R$ (resp. $\otimes_R Q$) es exacto [**141**].
2. Dada la sucesión exacta $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ de R-módulos y morfismos a derecha y un R-módulo a izquierda Q se tiene
$$M \otimes_R Q \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_Q} N \otimes_R Q \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_Q} P \otimes_R Q \to 0,$$
i.e. el functor $\otimes_R Q$ es exacto a derecha.
Claramente $g \otimes \mathrm{Id}_Q$ es epimorfismo e
$$\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_Q) \subseteq \ker(g \otimes \mathrm{Id}_Q) \tag{4.13.1}$$
Consideremos $\nu : N \otimes_R Q \to \dfrac{N \otimes_R Q}{\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_Q)}$ la proyección al cociente y sea $\Phi : \dfrac{N \otimes_R Q}{\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_Q)} \to P \otimes_R Q$ tal que $\Phi(x) = (g \otimes \mathrm{Id}_Q)(u)$ si $x = \nu(u)$. Si fuera además $x = \nu(u')$, $u - u' \in \ker(g \otimes \mathrm{Id}_Q)$ por (4.13.1). Así Φ está bien definido y $g \otimes \mathrm{Id}_Q = \Phi \circ \nu$.
Notemos que Φ es isomorfismo: sea $b : P \times Q \to \dfrac{N \otimes_R Q}{\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_Q)}$ tal que $b(p, q) = \nu(n \otimes q)$ si $g(n) = p$. Si además fuere $g(n') = p$ tendremos $n - n' \in \ker(g)$. Como $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ será $n - n' = f(m)$ para algún $m \in M$. Luego
$$n \otimes q - n' \otimes q = f(m) \otimes q = (f \otimes \mathrm{Id}_Q)(m \otimes q),$$
y b está bien definida. Es fácil ver que b es R-admisible, de modo que existe $b^* : P \otimes_R Q \to \dfrac{N \otimes_R Q}{\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_Q)}$ morfismo de grupos tal que $b^*(p \otimes q) = b(p, q)$ en cada tensor básico. Es fácil verificar también que $b^* = \Phi^{-1}$.
Finalmente, $\ker(g \otimes \mathrm{Id}_Q) = \ker(\nu) = \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_Q)$.
3. Análogamente $Q\otimes_R$ es exacto a izquierda para cada R-módulo a derecha Q.
4. En definitiva, un R-módulo a derecha (resp. a izquierda) Q es playo si el functor $Q\otimes_R$ (resp. $\otimes_R Q$) es exacto a derecha (resp. a izquierda) o, equivalentemente, si dado un monomorfismo de R-módulos a izquierda (resp. a derecha) f entonces $\mathrm{Id}_Q \otimes f$ (resp. $f \otimes \mathrm{Id}_Q$) es monomorfismo.
5. Sea $\{Q_j\}_{i\in J}$ familia de R-módulos a derecha. Entonces $Q \triangleq \oplus_{j\in J} Q_j$ es playo si y solo cada Q_j es playo.
Consideremos $0 \to_R M \xrightarrow{f}_R N$. Hay morfismos únicos de grupo θ, η

de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\oplus_{j\in J}Q_j)\otimes_R M & \xrightarrow{\alpha=\mathrm{Id}_Q\otimes f} & (\oplus_{j\in J}Q_j)\otimes_R N \\
\theta\downarrow & & \downarrow\eta \\
\oplus_{j\in J}(Q_j\otimes_R M) & \xrightarrow{\beta=\oplus_{j\in J}(\mathrm{Id}_{Q_j})\otimes f} & \oplus_{j\in J}(Q_j\otimes_R N)
\end{array}$$

conmuta, $\theta(q\otimes m) = \{q_j\otimes m\}_{j\in J}$ y $\eta(q\otimes n) = \{q_j\otimes n\}_{j\in J}$ en tensores básicos.
Sea $(\mathrm{Id}_Q\otimes f)(u) = 0$, con $u = \sum_k \{q_{j,k}\}_{j\in J}\otimes m_k$ en $Q\otimes_R M$.
Tenemos

$$\begin{aligned}
\beta[\sum_k \theta(\{q_{j,k}\}_{j\in J}\otimes m_k)] &= \sum_k \beta[\{q_{j,k}\otimes m_k\}_{j\in J}] \\
&= \sum_k \{q_{j,k}\otimes f(m_k)\}_{j\in J} \\
&= 0_{\oplus_{j\in J}(Q_j\otimes_R N)}.
\end{aligned}$$

Para cada $j\in J$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_k q_{j,k}\otimes f(m_k) &= (\mathrm{Id}_{Q_j}\otimes f)(\sum_k q_{j,k}\otimes m_k) \\
&= 0_{Q_j\otimes_R N}.
\end{aligned}$$

Si cada Q_j es playo será $\sum_k q_{j,k}\otimes m_k = 0_{Q_j\otimes_R M}$. Luego

$$\begin{aligned}
u &= \sum_k \{q_{j,k}\}_{j\in J}\otimes m_k \\
&= \sum_k \sum_{j\in J} \iota_j(q_{j,k})\otimes m_k \\
&= \sum_{j\in J}(\iota_j\otimes \mathrm{Id}_M)(\sum_k q_{j,k}\otimes m_k) \\
&= 0_{Q\otimes_R M},
\end{aligned}$$

o sea Q es módulo playo.
Recíprocamente, fijemos $j\in J$ y sea $u_j\in Q_j\otimes_R M$ tal que

$$(\mathrm{Id}_{Q_j}\otimes f)(u_j) = 0_{Q_j\otimes_R N}.$$

Notar que

$$(\iota_j\otimes \mathrm{Id}_N)\circ(\mathrm{Id}_{Q_j}\otimes f) = (\mathrm{Id}_Q\otimes f)\circ(\iota_j\otimes \mathrm{Id}_M).$$

Si Q es playo será $(\iota_j\otimes \mathrm{Id}_M)(u_j) = 0_{Q\otimes_R M}$, de donde

$$0_{Q_j\otimes_R M} = (\pi_j\otimes \mathrm{Id}_M)[(\iota_j\otimes \mathrm{Id}_M)(u_j)] = u_j,$$

i.e. Q_j es playo.

4.14. Representaciones y radical de Jacobson

1. En esta sección A indicará un anillo.
2. Llamamos *representación del anillo* A en el grupo abeliano M a todo homomorfismo de anillos $\rho : A \to \mathrm{End}(M)$.
3. Como señalamos en 4.2.7(v) cada representación $\rho : A \to \mathrm{End}(M)$ induce una estructura de A-módulo a izquierda sobre M y recíprocamente.
4. Una tal representación se dice: *fiel* si es inyectiva, y *trivial* si es idénticamente nula.
5. Un submódulo S de M se dice ρ-invariante si $\rho(A)(S) \subseteq S$.
6. Una representación no trivial se dice *irreducible* si sus únicos subespacios invariantes son triviales.
7. Sea L ideal a izquierda de A. Entonces A/L es A-módulo a izquierda y queda inducida una aplicación $\rho_L : A \to \mathrm{L}(A/L)$ de modo que $\rho_L(a)(b+L) \triangleq ab+L$. Entonces ρ_L está bien definida y si $a_1, a_2, b \in A$ tenemos
$$\begin{aligned} \rho_L(a_1a_2)(b+L) &= (a_1a_2)b + L \\ &= a_1(a_2b) + L \\ &= \rho_L(a_1)(a_2b+L) \\ &= (\rho_L(a_1) \circ \rho_L(a_2))(b+L). \end{aligned}$$
Se dice que ρ_L es la *representación regular a izquierda de* A en A/L. En particular,
$$\ker(\rho_L) = \{a \in A : aA \subseteq L\} \triangleq (L : A), \tag{4.14.1}$$
y diremos que $(L : A)$ es el *cociente de* L *en* A. Notar que se trata de un ideal bilátero de A.
8. Sean dados un ideal a izquierda (resp. a derecha) L (resp. R) de A y $u \in A$. Decimos que u es *unidad modular a derecha* (resp. *a izquierda*) de L (R) si $A(1-u) \subseteq L$ (resp. $(1-u)A \subseteq R$). Decimos también que un tal ideal L (resp. R) es *ideal modular a izquierda* (resp. *a derecha*) si posee alguna unidad modular a derecha (resp. a izquierda).
9. Un ideal bilátero P de A se dirá *primitivo* si $P = (L : A)$ para cierto ideal modular maximal a izquierda L de A.
10. Un ideal es primitivo si y solo si es el núcleo de alguna representación irreducible.
($\Rightarrow$) Sea $P = (L : A)$ ideal primitivo, con L ideal modular maximal a izquierda de A. Sabemos que $P = \ker(\rho_L)$ y basta ver que ρ_L es representación irreducible.
Para ello, sea $u \in A$ unidad modular a derecha de L. Puesto que $A(1-u) \subseteq L$, L es propio por ser ideal maximal y L es ideal a izquierda, $u \notin L$. Luego $u - u^2 \in L$ y, necesariamente, $u^2 \notin L$. O sea $\rho_L(u)(u+L) \neq 0_{A/L}$ y ρ_L es no nula.

Sea $\mathfrak{E}$ un A-submódulo a izquierda invariante no nulo de A/L e indiquemos $p_L : A \to A/L$ a la proyección al cociente. Entonces $p_L^{-1}(\mathfrak{E})$ es ideal a izquierda de A y $L \subsetneq p_L^{-1}(\mathfrak{E})$. Así $p_L^{-1}(\mathfrak{E})$ deviene ideal modular a izquierda de A, y como L es ideal modular a izquierda maximal, $p_L^{-1}(\mathfrak{E}) = A$. Luego $\mathfrak{E} = A/L$.
($\Leftarrow$) Sea $\rho : A \to \mathrm{L}(M)$ una representación irreducible de A. Como es no nula existen $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am \neq 0_M$. Por la irreducibilidad de la representación, $Am = M$. Además si $b \in A$

$$\begin{aligned} b \in \ker(\rho) &\Leftrightarrow bM = (0_M) \\ &\Leftrightarrow b(Am) = (0_M) \\ &\Leftrightarrow bA \subseteq \ker(m), \end{aligned}$$

con $\ker(m) \triangleq \{c \in A : cm = 0_M\}$. Claramente $\ker(m)$ es ideal a izquierda de A y resulta $\ker(\rho) = (\ker(m) : A)$. Como $Am = M$ existe $d \in A$ tal que $dm = m$. Luego

$$(e - ed)m = em - e(dm) = em - em = 0_M$$

para cada $e \in A$, i.e. $A(1 - d) \subseteq \ker(m)$ y $\ker(m)$ es ideal modular a izquierda de A.
Sea ahora L ideal a izquierda de A tal que $\ker(m) \subsetneq L$. Considerando $a_1 \in L - \ker(m)$ entonces $a_1 m \neq 0_M$. Por la irreducibilidad $A(a_1 m) = (0_M)$ o $A(a_1 m) = M$. Si $A(a_1 m) = (0_M)$ sea

$$N = \{m' \in M : Am' = (0_M)\}.$$

Notar que N es A-submódulo de M a izquierda y $a_1 m \in N$, o sea $N \neq (0_M)$. Debe ser $N = M$ y $AM = AN = (0_M)$, lo que contradice que ρ es no nula. En consecuencia, $A(a_1 m) = M$. Dado ahora $a_2 \in A$ existe $a_3 \in A$ tal que $a_3(a_1 m) = a_2 m$, i.e. $a_2 - a_3 a_1 \in \ker(m)$, y como $L \supseteq \ker(m)$, $a_1 \in L$ y L es ideal a izquierda de A entonces $a_2 \in L$, o sea $L = A$.

11. Del razonamiento anterior sigue que si M es un A-módulo irreducible y $m \in M - (0_M)$ entonces $Am = M$, $\ker(m)$ es ideal modular a izquierda maximal de A y $Am \approx A/\ker(m)$.
12. Sea P ideal primitivo de A. Sabemos que hay un A-módulo irreducible M tal que $P = \{a \in A : aM = (0_M)\}$. Si P_0 denota la intersección de la clase de ideales modulares maximales que contienen a P tenemos
$$P = \cap_{m \in M - (0_M)} \ker(m) \supseteq P_0 \supseteq P,$$
o sea $P = P_0$.
13. [**88**] El *radical de Jacobson de* A, $\mathrm{J}(A)$, es la intersección de los núcleos de todas las representaciones irreducibles de A. Decimos que el anillo A es *semisimple* (resp. *radical*) si $\mathrm{J}(A) = \{0_A\}$ (resp. si A no posee representaciones irreducibles, en cuyo caso escribimos $\mathrm{J}(A) = A$).

14. Se tiene

$$\mathrm{J}(A) = \cap\{P : P \text{ es ideal primitivo de } A\} \tag{4.14.2}$$
$$= \cap\{L : L \text{ es ideal modular a izquierda maximal de } A\}. \tag{4.14.3}$$

En efecto, (4.14.2) sigue de §4.14.(10).
Si $\mathrm{J}_0(A)$ denota la intersección de ideales modulares maximales a izquierda de A es claro que $\mathrm{J}(A) \supseteq \mathrm{J}_0(A)$. Además, dado $a \notin \mathrm{J}_0(A)$ sea L ideal modular maximal a izquierda de A tal que $a \notin L$. Si $u \in A$ es unidad modular a derecha de L entonces $a - au \in L$. Como $a = au + (a - au)$ debe ser $au \notin L$, o sea $\rho_L(a)(u + L) \neq 0_{A/L}$ y $a \notin \ker(\rho_L)$. Entonces $a \notin \mathrm{J}(A)$ y sigue (4.14.3).

15. $A/\mathrm{J}(A)$ es semisimple.
En efecto, sea $v \in \mathrm{J}(\dfrac{A}{\mathrm{J}(A)})$ y veamos que $v = 0_{A/\mathrm{J}(A)}$. Para ello, fijemos $\rho : A \to \mathrm{L(X)}$ una representación irreducible. Definimos $\rho' : \dfrac{A}{\mathrm{J}(A)} \to \mathrm{L}(X)$ tal que $\rho'(a + \mathrm{J}(A))(x) \triangleq \rho(a)(x)$ si $a \in A$ y $x \in X$. En particular, si $a \in \mathrm{J}(A)$ resulta $\rho(a) = 0_{\mathrm{L}(X)}$ y $\rho'(a+\mathrm{J}(A))$ no depende del representante que se considere. Es fácil ver que ρ' es homomorfismo de anillos. Más aún, es no nulo porque ρ es no nulo. Además, si Y fuere subgrupo de X tal que $\rho'(\dfrac{A}{\mathrm{J}(A)})(Y) \subseteq Y$ será $\rho(A)(Y) \subseteq Y$. Por lo tanto Y habrá de ser trivial y ρ' deviene representación irreducible de $\dfrac{A}{\mathrm{J}(A)}$ en X.
Si escribimos $v = a_0 + \mathrm{J}(A)$ para cierto $a_0 \in A$ dado $x \in X$ resulta
$$0_X = \rho'(v)(x) = \rho(a_0)(x),$$
o sea $\rho(a_0) = 0_{\mathrm{L}(X)}$. Como ρ es arbitraria, $a_0 \in \mathrm{J}(A)$ y $v = 0_{A/\mathrm{J}(A)}$.

16. Sea P ideal primitivo de A y sean L_1, L_2 ideales a izquierda de A tales que $L_1L_2 \subseteq P$. Entonces $L_1 \subseteq P$ o $L_2 \subseteq P$.

17. Sea J ideal a izquierda de A. Si cada elemento de J es cuasi-inversible a izquierda entonces $J \subseteq \mathrm{QI}(A)$. Por lo tanto $\mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{QI}(A)$.

18. $\mathrm{J}(A) = \{a \in A : Aa \subseteq \mathrm{QI}(A)\}$.
Sabemos que $\mathrm{J}(A)$ es ideal a izquierda, de modo que
$$A\mathrm{J(A)} \subseteq \mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{QI}(A).$$
Sea ahora $a \notin \mathrm{J}(A)$, i.e. hay algún A-módulo irreducible X tal que $aX \neq (0_X)$. Dado $x \in X$ tal que $ax \neq 0_X$, como $A(ax) = X$, existe $b \in A$ tal que $b(ax) = x$. Entonces $A(1 - ba) \subseteq \ker(x)$. Como $\ker(x)$ es ideal a izquierda modular maximal de A y ba es unidad modular a derecha del mismo, $ba \notin \ker(x)$. Si fuere $ba \in \mathrm{QI}(A)$ sea $c \in A$ tal que $c \circ (ba) = 0_A$. O sea $c + ba - cba = 0_A$, o $ba = -c + cba$. Pero entonces $c \in A(1 - ba)$, lo que contradice que $x \notin \ker(x)$.

19. Por §4.1.12 y §4.14.18, $\mathrm{J}(A)\{a \in A : aA \subseteq \mathrm{QI}(A)\}$.

4.15. Teoremas de Wedderburn, Schur y Jacobson

1. Un anillo R se dice *semisimple a izquierda* o *derecha* si es semisimple a izquierda o derecha en cuanto módulo sobre si mismo.
2. Sea R un anillo. Son equivalentes
(i) R es semisimple.
(ii) Cada R-módulo es semisimple.
(iii) Cada sucesión exacta corta de R-módulos es escindida.
En efecto, ((i)$\Rightarrow$(ii)): Por (4.6.6), dado un R-módulo M existe algún conjunto no vacío I tal que $M \approx R^{(I)}/S$ para cierto R-submódulo S de $R^{(I)}$. Pero $R^{(I)}$ es claramente semisimple. Luego S es sumando directo de $R^{(I)}$, digamos $R^{(I)} = S \oplus T$ para cierto R-submódulo T. En consecuencia $M \approx T$ y por (4.9.5) T es semisimple.
Ahora ((ii)$\Rightarrow$(iii)): basta notar que si $\pi : M \to N$ es epimorfismo de R-módulos, puesto que M es semisimple $\ker(\pi)$ es complementable en M y por lo tanto π es una retracción.
Finalmente ((iii)$\Rightarrow$(i)): Cada R-submódulo U de R será sumando directo de R porque la sucesión exacta corta
$$0 \to U \hookrightarrow R \xrightarrow{q} R/U \to 0$$
es escindida, donde q es la proyección al cociente.
3. Sea R-anillo semisimple, digamos $R \approx \oplus_{i\in I} M_i$ para cierta familia de R-módulos simples $\{M_i\}_{i\in I}$. Si R es unitario I resulta finito, o sea R tiene *longitud finita*. Además, dados cualquier R-módulo simple M y $x \in M$ no nulo tendremos
$$\oplus_{i\in I} M_i \approx R \xrightarrow{f_x} M \to 0$$
con $f_x(r) = rx$ o $f_x(r) = xr$ según sea M un R-módulo a izquierda o derecha respectivamente. En ambos casos f_x resulta epimorfismo. Luego f_x será una retracción y $M \approx M_i$ para un único $i \in I$. O sea, habrá un número finito de R-módulos simples no isomorfos.
4. Sea M un R-módulo semisimple de longitud finita, digamos
$$M \approx \oplus_{i=1}^n M_i^{\nu_i},$$
donde $n, \nu_1, ..., \nu_n \in \mathbb{N}$ y $M_1, ..., M_n$ son R-módulos simples no isomorfos. Hay un isomorfismo de grupos abelianos
$$\mathrm{End}_R(M) \approx \prod_{i=1}^n \mathrm{M}_{\nu_i}(\mathrm{End}_R(M_i)). \tag{4.15.1}$$
Para ello observar lo siguiente:
(a) Sean $\iota_j : M_j^{\nu_j} \hookrightarrow \oplus_{i=1}^n M_i^{\nu_i}$ y $\pi_j : \oplus_{i=1}^n M_i^{\nu_i} \to M_j^{\nu_j}$ las inmersiones y proyecciones naturales, $1 \le j \le n$. Definimos
$$F : \mathrm{End}_R(\oplus_{i=1}^n M_i^{\nu_i}) \to \prod_{i=1}^n \mathrm{End}_R(M_i^{\nu_i}),$$
$$F(f) = (\pi_1 \circ f \circ \iota_1, ..., \pi_n \circ f \circ \iota_n).$$

Evidentemente F es aditiva.
(b) Fijado f escribimos

$$\begin{aligned} f(\xi_1, ..., \xi_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(\iota_i(\xi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\pi_1(f(\iota_i(\xi_i))), ..., \pi_n(f(\iota_i(\xi_i)))). \end{aligned}$$

(c) Supongamos $(\pi_j \circ f \circ \iota_i)(\xi_i) \neq 0_{M_j^{\nu_j}}$ para ciertos $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Haciendo $\xi_i = (m_i^1, ..., m_i^{\nu_i})$ será $(\pi_j \circ f \circ \iota_i)(\chi_{l,i}(m_i^l)) \neq 0_{M_j^{\nu_j}}$ para algún $l \in \{1, ..., \nu_i\}$, con $\chi_{l,i}$ la inmersión canónica de M_i en $M_i^{\nu_i}$ en el l-ésimo lugar. Además existirá $k \in \{1, ..., \nu_j\}$ tal que

$$p_{j,k}((\pi_j \circ f \circ \iota_i)(\chi_{l,i}(m_i^l))) \neq 0_{M_j},$$

donde $p_{j,k} : M_j^{\nu_j} \to M_j$ es la proyección a la k-ésima coordenada. Concluímos entonces que $\mathrm{End}_R(M_i, M_j) \neq (0)$.
(d) Pero si $g \in \mathrm{End}_R(M_i, M_j)$ es no nulo, g debe ser suryectivo porque M_j es R-módulo simple e $\mathrm{Im}(g)$ es R-submódulo no nulo de M_j. Asimismo, g debe ser inyectivo, porque $\ker(g)$ es R-submódulo de M_i, que es simple. Por ello, si $\ker(g)$ no fuera trivial debería ser $\ker(g) = M_i$, lo que contradice que g es no nulo. En definitiva, sería $M_i \approx M_j$, lo que no es cierto pues $i \neq j$.[6]
(e) Con la notación anterior tenemos

$$f(\xi_1, ..., \xi_n) = (F_1(f)(\xi_1), ..., F_n(f)(\xi_n)),$$

de donde sigue que F es inyectiva.
(f) Dado $g \in \prod_{i=1}^n \mathrm{End}_R(M_i^{\nu_i})$ sea $f = g_1 \oplus ... \oplus g_n$. Tenemos entonces $f \in \mathrm{End}_R(\oplus_{i=1}^n M_i^{\nu_i})$ y si $1 \leq i \leq n$ y $\xi \in M_i^{\nu_i}$ resulta

$$\begin{aligned} F_i(f)(\xi_i) &= (\pi_i \circ f \circ \iota_i)(\xi_i) \\ &= \pi_i(0, ..., 0, g_i(\xi_i), 0, ..., 0)) \\ &= g_i(\xi_i), \end{aligned}$$

o bien $F_i(f) = g_i$. Así $F(f) = g$ y F es isomorfismo.
(g) Fijado $i \in \{1, ..., n\}$ sea

$$\begin{aligned} &G_i : \mathrm{End}_R(M_i^{\nu_i}) \to \mathrm{M}_{\nu_i}(\mathrm{End}_R(M_i)), \\ &G_i(h) = (h_{t,s})_{1 \leq t,s \leq \nu_i}, \end{aligned}$$

donde $h_{t,s} = p_t^i \circ h \circ \chi_s^i$, $\chi_s^i : M_i \hookrightarrow M_i^{\nu_i}$ y $p_t^i : M_i^{\nu_i} \to M_i$ la inmersión canónica en el s-ésimo lugar y la proyección canónica a la t-ésima

[6] Este es básicamente el alcance del siguiente teorema de I. Schur [**137**]: Dados R-anillo y un R-módulo simple M a izquierda ${}_R\mathrm{End}(M)$ es anillo de división.

coordenada para cada s,t. Claramente G_i es morfismo de grupos abelianos. Para $m^i \in M_i^{\nu_i}$ se tiene

$$\begin{aligned} h(m^i) &= h(m_1^i, ..., m_{\nu_i}^i) \\ &= \sum_{s=1}^{\nu_i} (h \circ \chi_s^i)(m_s^i) \\ &= \sum_{s=1}^{\nu_i} (h_{1,s}(m_s^i), ..., h_{\nu_i,s}(m_s^i)), \end{aligned}$$

y sigue enseguida que G_i es inyectiva.
Finalmente, si $k \in \mathrm{M}_{\nu_i}(\mathrm{End}_R(M_i))$ la aplicación

$$h : M_i^{\nu_i} \to M_i^{\nu_i},$$
$$h(m^i) = \sum_{s=1}^{\nu_i} (k_{1,s}(m_s^i), ..., k_{\nu_i,s}(m_s^i))$$

es endomorfismo de R-módulos y $G_i(h) = k$, o sea G_i resulta biyectiva y

$$\mathrm{End}_R(M_i^{\nu_i}) \approx \mathrm{M}_{\nu_i}(\mathrm{End}_R(M_i)), \tag{4.15.2}$$

(h) Puesto que F es isomorfismo de (4.15.2) obtenemos (4.15.1).
(i) Sea $\theta :_R \mathrm{End}(R) \to R^{op}$ tal que $\theta(f) = f(1)$ para cada f. Evidentemente θ es aditiva y dados f, g es

$$\theta(f \circ g) = f(g(1)) = f(g(1)1) = g(1)f(1) = f(1) \circ_{op} g(1).$$

Luego θ es morfismo de anillos. Más aún, es fácil ver que se trata de un isomorfismo de anillos.
(j) Si $n \in \mathbb{N}$ sea $\tau : \mathrm{M}_n(R^{op}) \to \mathrm{M}_n(R)^{op}$ la aplicación traspuesta. Si $a, b \in \mathrm{M}_n(R^{op})$ y $1 \leq i, j \leq n$ tenemos

$$\begin{aligned} \tau(ab)_{i,j} &= (ab)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \circ_{op} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \tau(b)_{i,k} \tau(a)_{k,j} \\ &= (\tau(b)\tau(a))_{i,j} \\ &= (\tau(a) \circ_{op} \tau(b))_{i,j}. \end{aligned}$$

Luego τ es homomorfismo de anillos, más aún, un isomorfismo de anillos.
(k) Todo anillo unitario semisimple R tiene longitud finita. Sabemos

que exísten $n \in \mathbb{N}$, $\nu_1, ..., \nu_n \in \mathbb{N}$ y anillos de división $D_1, ..., D_n$ tales que

$$R^{op} \approx_R \mathrm{End}(R) \approx \prod_{i=1}^n \mathrm{M}_{\nu_i}(D_i).$$

En consecuencia

$$R \approx (R^{op})^{op} \approx \prod_{i=1}^n \mathrm{M}_{\nu_i}(D_i)^{op} \approx \prod_{i=1}^n \mathrm{M}_{\nu_i}(D_i^{op}).$$

(l) Queda establecido el siguiente teorema de Wedderburn [**148**]: Todo anillo semisimple unitario es isomorfo a un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos de división.

5. Vamos a necesitar, y además tiene interés propio, del llamado teorema de densidad de Jacobson: [**89**] Sean R anillo, M un R-módulo a izquierda simple, $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, ..., x_n\}$ subconjunto ${}_R\mathrm{End}(M)$-linealmente independiente de M. Dados $y_1, ..., y_n \in M$ existe $r \in R$ tal que $rx_i = y_i$ si $i = 1, ..., n$.
(a) Se hará inducción de n. Si $n = 1$ es resultado es inmediato. Supongamos $n > 1$ y el resultado cierto para valores menores a n.
(b) Veremos que existen $r_1', ..., r_n' \in R$ tales que $r_i' x_i \neq 0_M$ cuando $i = 1, ..., n$ y $r_i' x_j = 0_M$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
Entonces, por el caso $n = 1$, existirán $r_1, ..., r_n \in R$ tales que $r_i r_i' x_i = y_i$ si $1 \leq i \leq n$. Haciendo $r = r_1 r_1' + ... + r_n r_n'$ tendremos que $rx_i = y_i$ en cada caso y será válido el paso inductivo.
(c) Si (b) no fuere cierto, si $r'' \in R$ verifica $r'' x_1 = ... = r'' x_{n-1} = 0_M$ entonces $r'' x_n = 0_M$.
Definimos $f : M^{n-1} \to M$, a saber: dado $m \in M^{n-1}$, por hipótesis inductiva sea $r''' \in R$ tal que $r''' \in R$ tal que $r''' x_i = m_i$ si $1 \leq i \leq n-1$. Hacemos entonces $f(m) = r''' x_n$.
Vemos que f está bien definida, porque si además $r_1''' x_i = x_i$ si $1 \leq i \leq n$ entonces $(r''' - r_1''') x_i = 0_M$ si $1 \leq i \leq n$. Por ello, $(r''' - r_1''') x_n = 0_M$, o sea $r''' x_n = r_1''' x_n$.
Por otra parte, $f(\overline{r} m + m') = \overline{r} f(m) + f(m')$ si $m, m' \in M^{n-1}$ y $\overline{r} \in R$. En efecto, sean $\overline{\overline{r}}, \overline{\overline{\overline{r}}} \in R$ tales que $\overline{\overline{r}} x_i = m_i$ y $\overline{\overline{\overline{r}}} x_i = m_i'$ si $1 \leq i \leq n-1$. Entonces $(\overline{r}\overline{\overline{r}} + \overline{\overline{\overline{r}}}) x_i = \overline{r} m_i + m_i'$ si $1 \leq i \leq n-1$ y

$$f(\overline{r} m + m') = (\overline{r}\overline{\overline{r}} + \overline{\overline{\overline{r}}}) x_n = \overline{r} f(m) + f(m').$$

Sea ahora $f_i = f \circ \iota_i$, con ι_i la inmersión natural de M en M^{n-1}, $1 \leq i \leq n-1$. Dado $m \in M^{n-1}$ tenemos $f(m) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(m_i)$. En particular,

$$x_n = 1x_n = f(x_1, ..., x_{n-1}) = f_1(x_1) + ... + f_n(x_{n-1}),$$

lo cual contradice que $\{x_1, ..., x_n\}$ es $\mathrm{End}_R(M)$-linealmente independiente.

6. El teorema de Wedderburn es válido para cada álgebra compleja finito dimensional semisimple A en el sentido de (4.14.13).
(a) Como A es semisimple la intersección de la clase de ideales primitivos de A es trivial.

Sean $P_1, P_2, ...$ ideales primitivos de A, digamos $P_i = \ker(\rho_i)$ para representaciones irreducibles ρ_i's de A. Supongamos

$$P_1 \supsetneq P_1 \cap P_2 \supsetneq ...$$

y sea $a_i \in P_1 \cap ... \cap P_i - P_{i+1}$ si $i = 1, 2, ...$ Pero $\{a_1, a_2, ...\}$ es linealmente independiente: supongamos $z_1 a_1 + ... + z_n a_n = 0_A$ para ciertos $n \in \mathbb{N}$ y $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Como $\rho_2(a_2) = ... = \rho_2(a_n) = 0$ resulta $z_1 \rho_2(a_1) = 0$ y como $\rho_2(a_1) \neq 0$ entonces $z_1 = 0$. Razonando inductivamente sigue la afirmación.

(b) Puesto que A es finito dimensional existen $n \in \mathbb{N}$ e ideales primitivos $P_1, ..., P_n$ tales que

$$P_1 \supsetneq P_1 \cap P_2 \supsetneq ... \supsetneq P_1 \cap ... \cap P_n = (0_A).$$

Dicho valor n no solo existe sinó puede elegirse máximo, se trata de la *dimensión de Krull de A* [**100**] .

(c) Con la notación anterior, sean $\rho_j : A \to \mathrm{End}(X_j)$, $1 \leq j \leq n$.

(d) Como cada ρ_j es representación irreducible de A y A es finito dimensional, cada X_j deviene finito dimensional, digamos de dimensión d_j.

(e) En cada caso, por el teorema de densidad de Jacobson

$$A/P_j \approx \rho_j(A) = \mathrm{End}(X_j) \approx \mathrm{M}_{d_j}(\mathbb{C}).$$

(f) Pero $\mathrm{M}_{d_j}(\mathbb{C})$ es anillo simple, por lo que cada P_j será ideal modular maximal.

(g) Hay un isomorfismo

$$\rho : A \to \oplus_{j=1}^{n} \mathrm{End}(X_j),$$
$$\rho(a) = \oplus_{j=1}^{n} \rho_j(a).$$

Evidentemente ρ es monomorfismo. Veamos que además es epimorfismo.

Para ello, sea $I_j = \cap_{i \in \{1,...,n\}-\{j\}} P_i$, $1 \leq j \leq n$. Fijado j, si $I_j \subseteq P_j$ entonces $\prod_{i \in \{1,...,n\}-\{j\}} P_i \subseteq P_j$. Pero P_j es *ideal primo*[7] , de modo que existe $i \in \{1, ..., n\} - \{j\}$ tal que $P_i \subseteq P_j$. Por (f) deberá ser entonces $P_i = P_j$, lo cual no es cierto. Luego $I_j \nsubseteq P_j$, i.e. $I_j X_j \neq (0_{X_j})$. Más aún, sea Y un I_j-submódulo a izquierda de X_j no nulo. Como $A = I_j + P_j$ sigue que Y es A-submódulo no nulo de X_j y, por irreducibilidad, $Y = X_j$. Por lo tanto X_j deviene I_j-módulo simple de dimensión finita y por el teorema de densidad de Jacobson $\rho_j(I_j) = \mathrm{End}(X_j)$.

Sean $(T_1, ..., T_n) \in \mathrm{End}(X_1) \times ... \times \mathrm{End}(X_n)$, sean $a_j \in I_j$ tales que $T_j = \rho_j(a_j)$ si $j = 1, ..., n$ y $a = a_1 + ... + a_n$. Por construcción,

[7]Un ideal bilátero propio P de A se dice *ideal primo* si dados ideales biáteros I, J de A tales que $IJ \subseteq P$ será entonces $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$.
Notar que todo ideal primitivo es primo. En efecto, sean P-ideal primitivo y X un A-módulo irreducible a izquierda tal que $PX = (0_X)$. En particular, sabemos que P es ideal bilátero propio. Sean I, J ideales biláteros de A tales que $IJ \subseteq P$. Si $J \nsubseteq P$ entonces $JX \neq (0_X)$. En consecuencia $AJX = X$ e $IX \subseteq IJX = (0_X)$, o sea $I \subseteq P$.

$$\rho_j(a) = \rho_j(a_j) + \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}-\{j\}} \rho_j(a_i) = T_j, 1 \leq j \leq n.$$

4.16. Ejemplos

4.16.1. Sobre anillos.

1. Sean A-anillo unitario y $a \in A$ inversible a izquierda mas no divisor de cero a derecha. Veamos que a es inversible.
   En efecto, por las hipótesis la aplicación $\mathrm{R}_a : A \to A$, $R_a(x) = xa$ si $x \in A$ es biyectiva.
   Dado $y \in A$ tal que $ya = 1$ existe $y' \in A$ único tal que $ay = R_a(y')$.
   Tenemos
   $$R_a(1) = 1a = a = a1 = aya = y'a^2 = R_a(y'a),$$
   i.e. $y'a = 1$, de donde $ay = 1$ y a resulta inversible.
2. Dado $p \in \mathbb{N}$ primo, todo anillo unitario R de orden p^2 es abeliano.
   Precisamente, sea $f : \mathbb{Z} \to R$ tal que $f(m) = m1_R$ si $m \in \mathbb{Z}$. Entonces f es homomorfismo de grupos abelianos y $\mathrm{Im}(f)$ tendrá orden p o p^2.
   Si $\mid \mathrm{Im}(f) \mid = p^2$, $R \approx \mathbb{Z}_{p^2}$ y R resulta abeliano.
   Suponiendo $\mid \mathrm{Im}(f) \mid = p$ entonces R deviene $\mathbb{Z}_p$ álgebra. Para ello, sea $x_p \cdot r' = f(x)r'$ para $x \in \mathbb{Z}$ y $r' \in R$.
   Si $x_p = y_p$ existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + cp$. Luego $f(x)r' = f(y)r'$ porque $pf(c)r' = 0_R r' = 0_R$.
   O sea $x_p \cdot r' = xr'$ si $x \in \mathbb{Z}$ y $r' \in R$, y claramente ahora R es $\mathbb{Z}_p$-álgebra.
   Dado $r \in R - \mathbb{Z}1_R$, $\{1_R, r\}$ es $\mathbb{Z}_p$-linealmente independiente.
   Debe ser entonces $R = \mathbb{Z}_p \cdot 1_R \oplus \mathbb{Z}_p \cdot r$, de donde sigue que R es abeliano.

4.16.2. Anillos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathbb{Z}[x,y]/\langle xy \rangle$.

1. Fijado $p \in \mathbb{N}$ primo sea
   $$\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \text{ y } p \nmid b\}.$$
   Evidentemente $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un anillo y $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Z}_{(p)} - p\mathbb{Z}_{(p)}$.
   Por otra parte, $p\mathbb{Z}_{(p)}$ es ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.
   En efecto, claramente $p\mathbb{Z}_{(p)}$ es subconjunto propio de $\mathbb{Z}_{(p)}$.
   Sea J ideal de $\mathbb{Z}_{(p)}$ tal que $p\mathbb{Z}_{(p)} \subsetneq J$.
   Si $r \in J - p\mathbb{Z}_{(p)}$, r resulta inversible y resulta $1 \in J$, i.e. $J = \mathbb{Z}_{(p)}$.
   Observemos que $p\mathbb{Z}_{(p)}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$, porque si hubiere otro ideal maximal K y $K \nsubseteq p\mathbb{Z}_{(p)}$ entonces K contendrá alguna unidad, y por lo tanto $K = \mathbb{Z}_{(p)}$ lo que no es posible.
   Decimos que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es *anillo local* , pues tiene un único ideal maximal.
2. (i) Se tiene $R \approx \mathbb{Z}[x,y]/\langle xy \rangle$, donde
   $$R = \{(p,q) \in \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[y] : p(0) = q(0)\}.$$

Dado $r \in \mathbb{Z}[x,y]$ podemos escribir

$$r = r(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} r_{i,n-i}x^i y^{n-i}$$

$$= -r_{0,0} + r(x,0) + r(0,y) + xy\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} r_{i,n-i}x^{i-1}y^{n-i-1}, \tag{4.16.1}$$

con $r_{i,j\in\mathbb{Z}}$ nulos salvo un número finito de índices.
Si $\pi : \mathbb{Z}[x,y] \to \mathbb{Z}[x,y]/\langle xy\rangle$ es la proyección al cociente será

$$\pi(r) = \pi(r_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty}(r_{n,0}x^n + r_{0,n}y^n))$$
$$= \pi(-r_{0,0} + r(x,0) + r(0,y)).$$

Definimos

$$f : \frac{\mathbb{Z}[x,y]}{\langle xy\rangle} \to \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[y],$$
$$f(\xi) = (r(x,0), r(0,y)) \text{ si } \xi = \pi(r).$$

Si además $\xi = \pi(s)$ existirá $t \in \mathbb{Z}[x,y]$ tal que

$$-r_{0,0} + r(x,0) + r(0,y) = -s_{0,0} + s(x,0) + s(0,y) + xyt(x,y).$$

Haciendo $x = 0$ e $y = 0$ vemos que $r(0,y) = s(0,y)$ y $r(x,0) = s(x,0)$ respectivamente, de modo que f está bien definida.
Claramente f es un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.
Además f es inyectivo, pues si $f(\xi) = (0,0)$ y $\xi = \pi(r)$, resulta

$$r(x,0) = r(0,y) = 0 \text{ y } r_{0,0} = r(x,0)\mid_{x=0}= 0.$$

Por (4.16.1) inferimos que $r \in \langle xy\rangle$, o sea $\xi = 0$.
Evidentemente $\mathrm{Im}(f) \subseteq R$.
Dado ahora $(p,q) \in R$, hagamos $\eta = \pi(-p(0) + p(x) + q(y))$ en $\mathbb{Z}[x,y]/\langle xy\rangle$. Entonces $f(\pi(\xi)) = (p,q)$ y sigue la afirmación.
(ii) R no es anillo simple. Por ejemplo $R(0,y)$ o $R(x,0)$ son ideales propios de R.

4.16.3. Gráficos de endomorfismos de A-módulos. Sean M un A-módulo no nulo,

$$M_1 = \{(m,0) \in M^2 : m \in M\},$$
$$M_2 = \{(0,m) \in M^2 : m \in M\}$$

y $K \leq M^2$. Si $\sigma \in \mathrm{End}({}_AM)$ claramente $\mathrm{Graf}(\sigma) \leq M^2$. Entonces:
(i) $M^2 = K \oplus M_2$ si y solo si existe $\sigma \in \mathrm{End}({}_AM)$ tal que $K =\mathrm{Graf}(\sigma)$. En efecto, supongamos $M^2 = K \oplus M_2$.
Notemos que si $(k_1,k_2),(k_1,k_2') \in K$ tendremos $k_1 = k_2$, pues entonces $(0, k_2 - k_2') \in K \cap M_2$.
Además dado $m \in M$ existen únicos $(k_1'',k_2'') \in K$ y $m' \in M$ tales que $(m,0) = (k_1'',k_2'') + (0,m')$. Necesariamente $k_1'' = m$ y queda definida una

aplicación $\sigma : M \to M$ tal que $\sigma(m) = k_2''$. Notamos además que $m' = -\sigma(m)$.
Veamos que $\sigma \in$End$({}_AM)$: si $m_1, m_2 \in M$, $a \in A$ y $j = 1, 2$ tenemos

$$(m_j, 0) = (m_j, \sigma(m_j)) + (0, -\sigma(m_j)).$$

Por unicidad en la representación tendremos

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2, 0) &= (m_1 + m_2, \sigma(m_1) + \sigma(m_2)) + (0, -\sigma(m_1) - \sigma(m_2)) \\ &= (m_1 + m_2, \sigma(m_1 + m_2)) + (0, -\sigma(m_1 + m_2)).\end{aligned}$$

Así $\sigma(m_1 + m_2) = \sigma(m_1) + \sigma(m_2)$. Asimismo

$$\begin{aligned}a(m_1, 0) &= a[(m_1, \sigma(m_1)) + (0, -\sigma(m_1))] \\ &= (am_1, a\sigma(m_1)) + (0, -a\sigma(m_1)).\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}a(m_1, 0) &= (am_1, 0) \\ &= (am_1, \sigma(am_1)) + (0, -\sigma(am_1)).\end{aligned}$$

Por unicidad de representación inferimos que $\sigma(am_1) = a\sigma(m_1)$ y sigue la afirmación.
Por construcción, Graf$(\sigma) \subseteq K$.
Y si $(k^1, k^2) \in K$, como $(k_1, \sigma(k_1)) \in K$, deberá ser $k^2 = \sigma(k^1)$, o sea $K \subseteq$Graf(σ), con lo que la condición es necesaria.
Recíprocamente, sea dado $\eta \in$End$({}_AM)$.
Si $m \in M$ y $(m, \eta(m)) \in M_2$ entonces $m = 0$ y $(m, \eta(m)) = (0, 0)$, o sea Graf$(\eta) \cap M_2 = \{0_{M^2}\}$.
Finalmente, si $(m_1, m_2) \in M^2$ tenemos

$$(m_1, m_2) = (m_1, \eta(m_1)) + (0, m_2 - \eta(m_1))$$

y $M^2 =$Graf$(\eta) \oplus M_2$.
(ii) Es fácil ver que si K es el gráfico de algún automorfismo a izquierda sobre M entonces $M^2 = M_1 \oplus K$.

4.16.4. Sobre anillos semisimples.

1. (i) Sea $A = \prod_{i \in I} F_i$ producto directo de cuerpos. El anillo A es semisimple si y solo si $| I | < \infty$.
   En efecto, indiquemos $e_j = \{\delta_{j,k} 1_{F_k}\}_{k \in I}$, con $j \in I$.
   Sean S un submódulo simple de A y $x \in S - \{0_A\}$.
   Si $i \in I$ es tal que $x_i \neq 0_{F_i}$, como $e_i x = x_i e_i$, resulta $e_i \in S$.
   Luego $S = Ae_i = \iota_i(F_i)$.
   Es claro ahora que si $| I | = \infty$ entonces A no puede realizarse como suma de módulos simples, con lo que la condición es necesaria.
   Recíprocamente, si $| I | < \infty$ se tiene $A = \oplus_{i \in I} \iota_i(F_i)$, i.e. A es semisimple.
   (ii) Determinemos los $\mathbb{Z}$-módulos semisimples.
   Sean M un $\mathbb{Z}$-módulo semisimple y $S \leq M$ simple.
   Si $m \in S - \{0_M\}$ tenemos

$$\mathbb{Z}m = S \approx \mathbb{Z}/\ker(m),$$

donde $\ker(m) = \{\nu \in \mathbb{Z} : \nu m = 0_M\}$.
Puesto que S es simple $\ker(m)$ habrá de ser ideal maximal de $\mathbb{Z}$, i.e. $S \approx \mathbb{Z}_p$ para cierto primo p.
Por lo tanto, si M es semisimple será suma directa de una familia de submódulos simples.
Habrá entonces un conjunto $\mathcal{P}$ de números primos y un subconjunto $\{n_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ de $\mathbb{N}$ tales que

$$M \approx \oplus_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p^{(n_p)}.$$

2. (i) Sean A-anillo semisimple a izquierda, I ideal a izquierda y J ideal a derecha de A. Entonces $IJ = I \cap J$.
Para ello, tenemos $A = J \oplus K$ para cierto ideal a izquierda K de A.
En particular, $1_A = j + k$, para únicos $j \in J$ y $k \in K$.
Si $x \in I \cap J$, $x = xj + xk$.
Como $xk = x - xj$, $xk \in J$ pues $x \in J$ y J es ideal a izquierda.
Además $xk \in K$ pues K es ideal a izquierda.
Luego $xk = 0_A$ porque $J \cap K = \{0_A\}$.
En consecuencia $x = xj$, i.e. $x \in IJ$ e $I \cap J \subseteq IJ$.
La inclusión $IJ \subseteq I \cap J$ sigue porque I es ideal a derecha y J es ideal a izquierda.
(ii) Siempre con A anillo semisimple a izquierda, si I, J, K son ideales tenemos las identidades:

$$I \cap (J + K) = I \cap J + I \cap K, \tag{4.16.2}$$

$$I + J \cap K = (I + J) \cap (I + K). \tag{4.16.3}$$

Precisamente, por (i) tenemos

$$I \cap (J + K) = I(J + K) \subseteq IJ + IK = I \cap J + I \cap K.$$

Además

$$IJ + IK \subseteq I(J + K) + I(J + K) = I(J + K) = I \cap (J + K)$$

y concluímos (4.16.2). Por otra parte

$$\begin{aligned} I + J \cap K &\subseteq (I + J) \cap (I + K) \\ &= (I + J)(I + K) \\ &\subseteq II + IK + JI + JK \\ &\subseteq I + J \cap K \end{aligned}$$

y tenemos (4.16.3).

3. Dado $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $\mathbb{Z}_n$ es semisimple si y solo si n es libre de cuadrados.
($\Leftarrow$) Si n es libre de cuadrados exísten $\nu \in \mathbb{N}$ y primos distintos $p_1, ..., p_\nu$ tales que $n = p_1 \cdot ... \cdot p_\nu$. Como $\operatorname{mcd}\{n_1, ..., n_\nu\} = 1$, donde $n_s = n/p_s$ si $1 \leq s \leq \nu$, hay enteros $a_1, ..., a_\nu$ tales que $1 = \sum_{s=1}^{\nu} a_s n_s$. Dado $x \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$[x]_n = [\textstyle\sum_{s=1}^{\nu} x a_s n_s]_n = \sum_{s=1}^{\nu}[x a_s n_s]_n,$$

i.e. $\mathbb{Z}_n = \sum_{s=1}^{\nu} \dfrac{n_s\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Veamos que la suma es directa aplicando §4.5(5): sean $t \in \{1,...,\nu\}$ y $[n_t y]_n \in \sum_{s\in\{1,...,s\}-\{t\}} \dfrac{n_s\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, digamos $[n_t y]_n = \sum_{s\in\{1,...,s\}-\{t\}} [n_s y_s]_n$. Habrá cierto $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n_t y = \sum_{s\in\{1,...,s\}-\{t\}} n_s y_s + nz.$$

Como p_t divide al segundo término y $(n_t, p_t) = 1$ entonces $p_t \mid y$. Por lo tanto $n_t y$ es múltiplo de n y $[n_t y]_n = [0]_n$.
($\Rightarrow$) Supongamos $n = p^a n'$ para ciertos $a \in \mathbb{N}_{>1}$, $p \in \mathbb{N}$ primo y $n' \in \mathbb{N}$ tal que $(p : n') = 1$. Dado un divisor k de n resulta $[p^{a-1}k]_n \in \dfrac{p^{a-1}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cap \dfrac{k\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ y $[p^{a-1}k]_n \neq [0]_n$, i.e. $\dfrac{p^{a-1}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ no es sumando directo de $\mathbb{Z}_n$.

4. Sea $n \in \mathbb{Z}-\{-1,0,1\}$, digamos $n = \prod_{j=1}^{\nu} p_j^{m_j}$, donde $\nu \in \mathbb{N}$, $p_1, ..., p_\nu$ son números primos y $m_1, ..., m_\nu \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{Z}_n$ es semisimple si $m_1 = ... = m_\nu = 1$ y $\mathrm{J}(\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_{r(n)}$, con $r(n) = \prod_{j=1}^{\nu} p_j^{m_j-1}$ en otro caso.
5. Un anillo R es semisimple si y solo si todo R-módulo es proyectivo.
($\Rightarrow$) Sea $M \in R$-Mod. Veremos que M es sumando directo de algún R-módulo libre.
Podemos suponer $M \approx R^{(I)}/V$, cierto conjunto no vacío I y para algún $V \in_R \mathcal{S}(R^{(I)})$. Bastaría ver que $R^{(I)}$ es R-módulo semisimple, porque entonces V será complementable y M será devendrá sumando directo de un R-módulo libre.
Precisamente, como R es semisimple habrá una familia $\{J_s\}_{s\in\sigma}$ de ideales a izquierda de R tales que $R \approx \oplus_{s\in\sigma} J_s$. Entonces

$$R^{(I)} \approx (\oplus_{s\in\sigma} J_s)^{(I)} = \oplus_{i\in I}(\oplus_{s\in\sigma} J_s) \approx \oplus_{s\in\sigma} J_s^{(I)}.$$

Para ello, sea

$$F : \oplus_{i\in I}(\oplus_{s\in\sigma} J_s) \to \oplus_{s\in\sigma} J_s^{(I)},\ F(\varphi)(s)(i) = \varphi(i)(s)$$

para $i \in I$ y $s \in \sigma$. Para cada $s \in \sigma$, $\varphi(i)(s) \in J_s$ si $i \in I$ y

$$\mathrm{card}(\{i \in I : \varphi(i)(s) \neq 0_{J_s}\}) \leq \mathrm{card}(\{i \in I : \varphi(i) \neq 0_{\oplus_{s\in\sigma} J_s}\}) < \infty,$$

o sea F está bien definido y claramente F es morfismo de R-módulos a izquierda.
Si $\varphi \in \ker(F)$, dado $i \in I$ es $\varphi(i) = 0_{\oplus_{s\in\sigma} J_s}$, i.e. $\varphi = 0_{\oplus_{i\in I}(\oplus_{s\in\sigma} J_s)}$.
Dado $\zeta \in \oplus_{s\in\sigma} J_s^{(I)}$ escribimos $\zeta = \{\{\chi_{\sigma_1}(s)\zeta_s(i)\chi_{I_s}(i)\}_{i\in I}\}_{s\in\sigma}$ para ciertas partes finitas σ_1 de σ, y también I_s de I si $s \in \sigma_1$. Obervar que $\zeta_s(i) \in J_s$ cualesquiera sean los índices i o s. Claramente

$$\{\{\chi_{\sigma_1}(s)\zeta_s(i)\chi_{I_s}(i)\}_{s\in\sigma}\}_{i\in I} \in \oplus_{i\in I}(\oplus_{s\in\sigma} J_s)$$

y $F(\{\{\chi_{\sigma_1}(s)\zeta_s(i)\chi_{I_s}(i)\}_{s\in\sigma}\}_{i\in I}) = \zeta$, i.e. F es isomorfismo de R-módulos a izquierda y la condición es necesaria.
($\Leftarrow$) Si R no fuera semisimple habría algún ideal L a izquierda de R no complementable. Por hipótesis, como R/L es proyectivo, si

$\pi : R \to R/L$ es la proyección al cociente, existirá $\nu \in_R H(R/L, R)$ tal que $\mathrm{Id}_{R/L} = \pi \circ \nu$. Pero entonces la sucesión exacta corta

$$0 \to L \hookrightarrow R \xrightarrow{\pi} R/L \to 0$$

es escindida y, por ello, L debe ser complementable, lo que no es posible.

4.16.5. Módulo sin submódulos simples. Sea $A =$C$[0,1]$ el anillo usual de funciones reales continuas sobre el intervalo $[0,1]$. Entonces A no tiene A-submódulos simples.
Para ello, supongamos que $\mathcal{I}$ es A-submódulo simple de A y sea $f \in \mathcal{I} - \{0_A\}$. Entonces $\mathcal{I} = Af$.
Supongamos existen $t_1, t_2 \in [0,1]$ distintos tales que $f(t_1) \neq 0$ y $f(t_2) \neq 0$.
Por el lema de Urysohn existe $g \in A$ tal que $g(t_1) = 1$ y $g(t_2) = 0$.
Haciendo $h = fg$, $h \in \mathcal{I}$, $h(t_1) \neq 0$ y $h(t_2) = 0$.
Además $\mathcal{I} = Ah$, de modo que $k(t_2) = 0$ para cada $k \in \mathcal{I}$.
Más aún, siendo t_2 arbitrario, si $k \in \mathcal{I}$ resulta $k(t) = 0$ toda vez que $f(t) = 0$, o $f(t) \neq 0$ y $t \neq t_1$. Pero como k es continua será $k = 0_A$.
Inferimos entonces que $\mathcal{I} = \{0_A\}$, lo que no es posible y sigue la afirmación.

4.16.6. $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es $\mathbb{Z}$-módulo libre. [**8**] Indicaremos a continuación una guía para probar que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es libre (V. (4.17.31)).

1. Sean G-grupo abeliano con base $\{e_\lambda : \lambda \in L\}$ y S un subconjunto no vacío de L. Si H es el subgrupo de G generado por S entonces G/H es grupo libre con base libre $\{e_\lambda + H : \lambda \in L - S\}$.
2. Todo elemento no nulo de un grupo abeliano libre tiene un número finito de divisores.
3. Supongamos que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tiene una base libre $\{e_\lambda\}_{\lambda \in L}$. Observar que L debe ser no numerable.
4. Dado $n \in \mathbb{N}$ sea $\delta_n = (\delta_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ y escribamos $\delta_n = \sum_{\lambda \in L} m_{n,\lambda} e_\lambda$, donde los coeficientes enteros $m_{n,\lambda}$'s están unívocamente determinados y los nulos salvo finitos λ's. Escribamos $A_n = \{\lambda \in L : m_{n,\lambda} \neq 0\}$ y sea $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Entonces A es numerable.
5. El subgrupo H de G generado por $\{e_\lambda\}_{\lambda \in A}$ es numerable y es el menor subgrupo que contiene a $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
6. G/H es grupo libre abeliano, con base libre $\{e_\lambda + H\}_{\lambda \in L - A}$.
7. El conjunto
$$M = \{a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : a_n \neq 0 \text{ y } a_n \mid a_{n+1} \text{ si } n \in \mathbb{N}\}.$$
es no numerable.
8. Sea $a \in M - H$. Dado $n \in \mathbb{N}$ sean
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i,$$
$$t_n = (0, ..., 0, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_n}, ...).$$

Entonces $a = s_n + a_n t_n$ y $a + H = a_n(t_n + H)$. Luego $a + H$ tiene infinitos divisores, lo que contradice (4.16.6.2).

4.16.7. $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \approx$ **Hom**$_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$**.**

1. Es fácil ver que la aplicación

$$F : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}),$$
$$F(\sigma)(x) = \sum_n \sigma_n x_n$$

define un monomorfismo de grupos abelianos.

2. Hagamos

$$G : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})},$$
$$G(T) = \{T(\delta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Deberemos probar que G está bien definido. Para ello, supongamos exista $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ tal que $T(\delta_n)$ es no nulo para infinitos valores de n.
(i) Sean

$$\sigma(T) = \{n \in \mathbb{N} : T(\delta_n) \neq 0\},$$
$$\sigma_+(T) = \{n \in \mathbb{N} : T(\delta_n) > 0\},$$
$$\sigma_-(T) = \{n \in \mathbb{N} : T(\delta_n) < 0\}.$$

Si $\sigma_+(T) = \emptyset$ consideremos $-T$ en lugar de T. Si $\sigma_+(T)$ y $\sigma_-(T)$ son no vacíos sea $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$ tal que $S(x)_n = \pm x_n$ si $n \in \sigma_\pm(T)$ y $S(x)_n = 0$ en otro caso. Así $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ y $(T \circ S)(\delta_n) \geq 0$ para todo n, siendo dicho valor positivo para infinitos n's. Podemos considerar entonces $\sigma_-(T) = \emptyset$ y $\sigma_+(T) : n_1 < n_2 < ....$
Sea ahora $U \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$ tal que $U(x) = x_1\delta_{n_1} + x_2\delta_{n_2} + ...$ Tenemos entonces $T \circ U \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ y $(T \circ U)(\delta_n) > 0$ para todo n.
En definitiva, podemos asumir que $T(\delta_n) > 0$ para todo n.
(ii) Inductivamente podemos ver que hay una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ tal que $2^{k_{i+1}} > 2^{k_i} T(\delta_i)$ para cada i.
(iii) Hagamos $x = \{2^{n_0}, 2^{n_1}, ...\} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
(iv) Consideremos los desarrollos binarios

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j 2^j,$$
$$T(\delta_i) = \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon_l^i 2^l, i \in \mathbb{N}.$$

(v) Tenemos, para $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\xi_h &\triangleq T(x - \sum_{i=0}^{h-1} 2^{k_i}\delta_i)\\ &= T(0, ..., 0, 2^{k_h}, 2^{k_{h+1}}, ...)\\ &= 2^{k_h} T(0, ..., 0, 1, 2^{k_{h+1}-k_h}, ...)\end{aligned}$$

o sea $2^{k_h} \mid \xi_h$.
(vi) Por otra parte

$$\xi_h = T(x) - \sum_{i=0}^{h-1} 2^{k_i} T(\delta_i)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j 2^j - \sum_{i=0}^{h-1} 2^{k_i} \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon_l^i 2^l. \tag{4.16.4}$$

Ahora en (4.16.4) puede ser $0 \leq j < k_0$; $j = k_0+l$ con $0 \leq l < k_1-k_0$; $j = k_1 + l$ con $0 \leq l < k_2 - k_1$; etc.. Luego

$$\xi_h = \sum_{j=0}^{k_0-1} \epsilon_j 2^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k_{j+1}-k_j-1} (\epsilon_{k_j+l} - \epsilon_l^j) 2^{k_j+l}. \tag{4.16.5}$$

(vii) Puesto que $2^{k_h} \mid \xi_h$ por (4.16.5) será $\epsilon_{k_j+l} = \epsilon_l^j$ toda vez que $k_j + l < k_h$. Pero dado $j \in \mathbb{N}$, como $T(\delta_j) > 0$, existe $l \in \mathbb{N}_0$ tal que $\epsilon_l^j \neq 0$. Luego $T(x)$ tiene infinitos términos no nulos en su desarrollo binario, lo cual es imposible siendo entero. Por ello G está bien definido.

3. G deviene morfismo de grupos abelianos y dados $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ y $x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tenemos

$$(F \circ G)(T)(x) = \textstyle\sum_n T(\delta_n)x_n = T(x),$$

o sea $(F \circ G)(T) \mid_{\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}} = T \mid_{\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}}$.

4. Veremos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Z}) = (0). \tag{4.16.6}$$

Por ello, dado $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ tal que $S(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) = \{0\}$ queda inducido $\hat{S} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Z})$ tal que $\hat{S}(x + \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) = S(x)$ para cada $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. En consecuencia S es el homomorfismo nulo. Podremos concluir por (3) que $(F \circ G)(T) = T$, o bien que F es epimorfismo.

5. Veamos finalmente (4.16.6).
(i) Hay elementos $\zeta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ *infinitamente divisibles*, o sea para infinitos $m \in \mathbb{Z}$ existe $\zeta_m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tal que $\zeta = m\zeta_m$. Más aún, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ tiene un conjunto de generadores cuyos elementos son infinitamente divisibles.

(ii) Precisamente, sea $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no nulo. Dado $n \in \mathbb{N}$ hay enteros a_n, b_n tales que $1 = a_n 2^n + b_n 3^n$. Luego

$$x = (x_n) = (a_n x_n 2^n) + (b_n x_n 3^n) = y + z.$$

Además $y + \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ y $z + \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ son infinitamente divisibles. Por ejemplo, fijado $k \in \mathbb{N}$ resulta

$$y + \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = 2^k[(0, ..., 0, a_k x_k, a_{k+1} x_{k+1} 2, a_{k+2} x_{k+2} 2^2, ...) + \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}].$$

(iii) El único entero infinitamente divisible es el cero y todo homomorfismo de grupos abelianos transforma elementos infinitamente divisibles en elementos infinitamente divisibles. Por ello sigue enseguida la afirmación.

6. En consecuencia, en general

$$\mathrm{Hom}(\prod_i M_i, N) \ncong \prod_i \mathrm{Hom}(M_i, N).$$

P. ej.

$$\mathrm{Hom}(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \ncong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \approx \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

7. Puesto que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{(X)}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^X$ si $X \neq \emptyset$ es $\mathbb{Z}^{(X)}$ reflexivo.

4.16.8. Un módulo no libre proyectivo. Todo módulo libre es proyectivo. Por otra parte, hay módulos proyectivos no libres. Por ejemplo, dados $n, m \in \mathbb{N}_{>1}$, $\mathbb{Z}_n$ es $\mathbb{Z}_m$-módulo si $n \mid m$. En particular, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ deviene $\mathbb{Z}_6$ - módulo libre, con $\{(1_2, 1_3)\}$ base libre sobre $\mathbb{Z}_6$. En consecuencia $\mathbb{Z}_3$ es $\mathbb{Z}_6$ - módulo proyectivo aunque no es libre por razones de cardinalidad.

4.16.9. Sobre productos tensoriales.

1. Sean R anillo conmutativo, I ideal de R y M, N dos R-módulos. Entonces

$$\frac{M \otimes_R N}{I(M \otimes_R N)} \approx \frac{M}{IM} \otimes_{R/I} \frac{N}{IN}. \tag{4.16.7}$$

Indiquemos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a las proyecciones naturales sobre $\frac{R}{I}, \frac{M}{IM}, \frac{N}{IN}$ y $\frac{M \otimes_R N}{I(M \otimes_R N)}$ respectivamente.

Hacemos $\alpha(r)\beta(m) = \beta(rm)$ si $r \in R$ y $m \in M$. Si $\alpha(r) = \alpha(r')$ y $\beta(m) = \beta(m')$ entonces

$$rm - r'm' = (r - r')m + r'(m - m') \in IM$$

porque $r - r' \in I$ y $m - m' \in IM$. Así $\frac{M}{IM}$ deviene $\frac{R}{I}$-módulo. Análogamente $\frac{N}{IN}$ resulta $\frac{R}{I}$-módulo.

Sean G-grupo abeliano, $f : \frac{M}{IM} \times \frac{N}{IN} \to G$ una función $\frac{R}{I}$-admisible. Probaremos que existen $f^* : \frac{M \otimes_R N}{I(M \otimes_R N)} \to G$ morfismo de grupos y una función $\frac{R}{I}$-admisible $\nu : \frac{M}{IM} \times \frac{N}{IN} \to \frac{M \otimes_R N}{I(M \otimes_R N)}$ de modo

que $f = f^* \circ \nu$, y (4.16.7) será consecuencia de la unicidad salvo isomorfismos del producto tensorial.
Dado $u \in \dfrac{M \otimes_R N}{I(M \otimes_R N)}$ sea $x \in M \otimes_R N$ tal que $u = \delta(x)$.
Si $x = \sum_{l=1}^{l(x)} m_l \otimes n_l$ hagamos $f^*(u) = \sum_{l=1}^{l(x)} f(\beta(m_l), \gamma(n_l))$. Si $\delta(x) = \delta(x')$ será $x = x' + x''$ para cierto $x'' \in I(M \otimes_R N)$, digamos $x'' = \sum_{l=1}^{l(x'')} (r_l m_l'') \otimes n_l''$, con $r_1, ..., r_{l(x'')} \in I$.
Evidentemente $\beta(r_l m_l'') = 0_{M/(IM)}$ para cada l y como f es biaditiva sigue que f^* está bien definida y deviene morfismo de grupos.
Por otra parte, sea $\nu(\beta(m), \gamma(n)) = \delta(m \otimes n)$, con $m \in M$ y $n \in N$. Si $\beta(m) = \beta(m')$ y $\gamma(n) = \gamma(n')$ tenemos

$$m \otimes n = (m - m') \otimes n + m' \otimes (n - n') + m' \otimes n',$$

y como $m - m' \in IM$ y $n - n' \in IN$ vemos que

$$\delta(m \otimes n) = \delta(m' \otimes n').$$

Más aún, es inmediato ahora que ν es R/I-admisible y sigue enseguida la afirmación.

2. Por ejemplo $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_3 = (0)$.
Basta ver que toda función $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \to G$ $\mathbb{Z}_6$-admisible es nula, cualquiera sea el grupo abeliano G.
En efecto, debería ser

$$f(a_2 \cdot x_6, b_3) = f((ax)_2, b_3) = f(a_2, (xb)_3) = f(a_2, x_6 \cdot b_3)$$

cualesquiera sean $a_2 \in \mathbb{Z}_2$, $b_3 \in \mathbb{Z}_3$ y $x_6 \in \mathbb{Z}_6$. Si la expresión anterior no fuera nula sería $(ax)_2 = 1_2$ y

$$f(1_2, (xb)_3) = f(1_2, x_6 \cdot b_3) = f(a_2, x_6 \cdot b_3) = f((ax)_2, b_3) = f(1_2, b_3).$$

Luego $f(1_2, (b - xb)_3) = 0_G$ si b es arbitrario y x no es múltiplo de 6. Si tomamos $x = 2$ sigue que $f(1_2, c_3) = 0_G$ cualquiera sea $c \in \mathbb{Z}$, o sea $f \equiv 0$.

3. (i) Dados R-anillo unitario, ${}_RM$ e $I \leq R_R$, $\dfrac{R}{I} \otimes_R M \approx \dfrac{M}{IM}$.
Para ello, sea $f : \dfrac{R}{I} \times M \to G$ función R-admisible con valores en un grupo abeliano G. La función

$$\tau : \frac{R}{I} \times M \to \frac{M}{IM}, \ \tau(r + I, m) = rm + I,$$

está bien definida y es R-admisible. Si además

$$f^* : \frac{M}{IM} \to G, \ f^*(m + IM) = f(1 + I, m),$$

entonces f^* es morfismo de grupos y $f = f^* \circ \tau$, de donde sigue la afirmación por la unicidad salvo equivalencia del producto tensorial.
(ii) Si además $J \leq_R R$, $\dfrac{R}{I} \otimes_R \dfrac{R}{J} \approx \dfrac{R}{I + J}$.
En efecto, sabemos que $\dfrac{R}{I} \otimes_R \dfrac{R}{J} \approx \dfrac{R/J}{I(R/J)}$.
Sea $g = \nu \circ \lambda$, con λ y ν las proyecciones naturales de R sobre R/J

y de R/J en $(R/J)/(I(R/J))$ respectivamente.
Evidentemente g es epimorfismo.
Si $r \in R$, $r \in \ker(g)$ si y solo si existen $n \in \mathbb{N}$, $r_1, ..., r_l \in I$ y $r'_1, ..., r'_l \in R$ tales que $r + J = \sum_{l=1}^{n} r_l r'_l + J$, lo que equivale a $r \in I + J$. Por otra parte, si $r' \in I$, $r'' \in J$ entonces

$$g(r' + r'') = \nu(\lambda(r')) = \nu(r'\lambda(1)) = 0_{(R/J)/(I(R/J))},$$

o sea $\ker(g) = I + J$, $\dfrac{R/J}{I(R/J)} \approx \dfrac{R}{I+J}$ y sigue la afirmación.
(iii) Por lo tanto si $n \in \mathbb{N}_{>1}$ resulta $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \approx (0)$.
(iv) Asimismo, si R es anillo unitario dado ${}_R M$ se tiene $R \otimes_R M \approx M$.
(v) Veamos que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \approx \mathbb{Z}_{(n,m)}$.
Precisamente, por §4.16.3(i) tenemos

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \approx \frac{\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}}{n\mathbb{Z}\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}} \tag{4.16.8}$$

Además

$$n\mathbb{Z}\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \frac{n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \frac{(n,m)\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}. \tag{4.16.9}$$

La afirmación sigue combinando (4.16.8) y (4.16.9).

4. Sean R, S-anillos, con $S = S_R$. Si P es R-módulo proyectivo entonces $S \otimes_R P$ es S-módulo proyectivo.
Para ello, sean I un conjunto, $\{p_i\}_{i \in I}$ y $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subseteq_R \operatorname{Hom}(P, R)$ en las condiciones de §4.10(6).
Si $i \in I$, la función $\varphi'_i : S \times_R P \to S$, $\varphi'_i(s, p) = s\varphi_i(p)$ es R-admisible.
Sea $\varphi^*_i : S \otimes_R P \to S$ morfismo de grupos tal que $\varphi^*_i(s \otimes p) = s\varphi_i(p)$ en tensores básicos. Tenemos que

$$\begin{aligned} s \otimes p &= s \otimes \sum_{i \in I} \varphi_i(p) p_i \\ &= \sum_{i \in I} s \otimes (\varphi_i(p) p_i) \\ &= \sum_{i \in I} (s\varphi_i(p)) \otimes p_i \\ &= \sum_{i \in I} (s\varphi_i(p)) 1_S \otimes p_i \\ &= \sum_{i \in I} \varphi^*_i(s \otimes p) 1_S \otimes p_i. \end{aligned}$$

Luego $u = \sum_{i \in I} \varphi^*_i(u) 1_S \otimes p_i$ y $\varphi^*_i(u) = 0$ salvo a lo más un número finito de índices para cada $u \in S \otimes_R P$, de donde sigue la afirmación.

4.16.10. Sobre Módulos divisibles. Todo módulo inyectivo ${}_AQ$ es *divisible*, o sea $aQ = Q$ toda vez que a no es divisor de cero a derecha en A.
Precisamente, sean $q \in Q$ y $a \in A$ tal que no existe $x \in A$ no nulo de modo que $xa = 0_A$.
Definimos $f : Aa \to Q$ tal que $f(xa) = xq$ si $x \in A$.
Entonces f está bien definida. Como $f \in_A \mathrm{Hom}(Aa, Q)$ y Q es inyectivo existe $f' \in \mathrm{Hom}(A, Q)$ extensión de f.
Finalmente
$$q = f(a) = f'(a) = af'(1_A)$$
y sigue la afirmación.

5. (i) Un grupo abeliano G es divisible si y solo si es inyectivo en cuanto $\mathbb{Z}$-módulo.
($\Rightarrow$) Sean I ideal de $\mathbb{Z}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I, G)$. Veremos que existe $x \in G$ tal que $f(m) = mx$ si $m \in I$, para aplicar luego (§4.11.3). Precisamente, podemos suponer I no nulo, y como $\mathbb{Z}$ es principal existe $n \in \mathbb{Z} - (0)$ tal que $I = n\mathbb{Z}$. Como G es divisible existe $x \in G$ tal que $f(n) = nx$. Sigue enseguida que la condición es necesaria.
($\Leftarrow$) Sean $y \in G$ y $n \in \mathbb{Z} - (0)$. Consideremos $g : n\mathbb{Z} \to G$, $g(nk) = ky$ si $k \in \mathbb{Z}$. Como $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, G)$ y G es inyectivo existe $z \in G$ tal que $g(nk) = nkz$ si $k \in \mathbb{Z}$. Luego $y = nz$ y G deviene divisible.
(ii) Sea G grupo abeliano. Si G es divisible entonces $T(G)$ y $G/T(G)$ son divisibles y $G \approx T(G) \oplus G/T(G)$ (V. (§4.17.38)).
En efecto, dados $x_1 \in T(G)$ y $n \in \mathbb{Z} - (0)$ existe $x_2 \in G$ tal que $x_1 = nx_2$. Además existe $k \in \mathbb{Z} - (0)$ tal que $kx_1 = 0_G$. Luego $(kn)x_2 = 0_G$ y $kn \neq 0_{\mathbb{Z}}$, i.e. $x_2 \in T(G)$ y $T(G)$ es divisible. Asimismo $G/T(G)$ resulta divisible por ser imágen homomórfica de G que es divisible.
Por (i) $T(G)$ resulta inyectivo y la sucesión exacta corta
$$0 \to T(G) \hookrightarrow G \to G/T(G) \to 0$$
deviene escindida y sigue la afirmación.
(iii) Todo grupo abeliano divisible libre de torsión es suma directa de copias de $\mathbb{Q}$, pues admite estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
(iv) Sean G, H grupos abelianos divisibles p-primarios para cierto entero primo positivo p. Sea G_p (resp. H_p) el subgrupo de G (resp. de H) de elementos anulados por p. Entonces $G \approx H$ si y solo si $G_p \approx H_p$.
($\Rightarrow$) Si $\varphi : G \to H$ es isomorfismo evidentemente $\varphi(G_p) = H_p$ y $\varphi\,|_{G_p} : G_p \to H_p$ es isomorfismo de grupos.
($\Leftarrow$) Sea $\phi : G_p \to H_p$ isomorfismo. Como G deviene inyectivo en cuanto $\mathbb{Z}$-módulo existe $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$ tal que $\xi \circ \phi\,|^H = \iota_{G_p,G}$, donde $\iota_{G_p,G} : G_p \hookrightarrow G$. Veamos que ξ es isomorfismo.
En efecto, sea $\xi(h) = 0_G$. Si $h \neq 0_H$ sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n = \mathrm{ord}(h)$. Entonces $p^{n-1}h \in H_p$ y existe $g \in G_p$ tal que $\phi(g) = p^{n-1}h$. Luego

$$g = \xi(\phi(g)) = \xi(p^{n-1}h) = p^{n-1}\xi(h) = p^{n-1}0_G = 0_G,$$

i.e. $p^{n-1}h = 0_G$, lo que no es posible. Luego $h = 0_H$ y ξ es inyectiva. Por otra parte, dado $g' \in G - (0_G)$ sea $\mathrm{ord}(g') = p^{n'}$ para cierto $n' \in \mathbb{N}$. Como $p^{n'-1} \in G_p$ tenemos

$$p^{n'-1}g' = \xi(\phi(p^{n'-1}g')) = p^{n'-1}\xi(\phi(g')),$$

o sea $p^{n'-1}(g' - \xi(\phi(g'))) = 0_G$. Pero $\mathrm{ord}(g' - \xi(\phi(g'))) = p^{n'}$ o $g' - \xi(\phi(g')) = 0_G$. Necesariamente debe ser $g' = \xi(\phi(g'))$ y ξ es suryectiva.

(v) Si G es grupo abeliano divisible (o inyectivo),

$$G \approx T(G) \oplus G/T(G)$$

y $G/T(G) \approx \mathbb{Q}^{(J)}$ para cierto conjunto J, donde $\mid J \mid = \dim_{\mathbb{Q}}(G/T(G))$.

(vi) Por el algoritmo de Euclides es fácil ver que $T(G) \approx \oplus_{p\in\mathbb{P}} T(G)_p$, con $\mathbb{P}$ el conjunto de primos positivos. Luego $T(G)$ es suma directa externa de grupos abelianos p-primarios divisibles.

(vii) Fijemos $p \in \mathbb{P}$ y sea P grupo abeliano p-primario divisible. Entonces P_p es $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial, digamos d_p-dimensional. Sea $V = \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(d_p)}$. Luego $V_p \approx \mathbb{Z}_p^{(d_p)} \approx P_p$, y como V y P son grupos abelianos divisibles $V \approx P$.

(viii) En consecuencia todo grupo abeliano divisible es del tipo

$$G \approx \oplus_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(d_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(J)}.$$

4.16.11. Sobre módulos inyectivos. Veamos como construir módulos inyectivos sobre un anillo R. Sean entonces R anillo y G grupo abeliano.

(i) Se tiene $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G) \in_R \mathrm{Mod}_R$ si $(rf)(r') = f(r'r)$ y $(fr)(r') = f(rr')$ respectivamente, con $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ y $r, r' \in R$.

(ii) Si G es grupo abeliano divisible entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ es R-módulo inyectivo.

Para esto, sean I ideal a izquierda de R y $f : I \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ morfismo. Queda inducido $\beta : I \to G$ tal que $\beta(a) = f(a)(1_R)$ si $a \in I$. Puesto que G es inyectivo existe $\alpha \in_R \mathrm{Hom}(R, G)$ tal que $\alpha(a) = \beta(a)$ si $a \in I$.

Como $f(ra) = rf(a)$ si $r \in R$ y $a \in I$ si además $r' \in R$ se tiene

$$f(ra)(r') = (rf(a))(r') = f(a)(r'r).$$

Entonces

$$f(a)(r) = f(ra)(1_R) = \beta(ra) = \alpha(ra) = (a\alpha)(r).$$

Siendo $r \in R$ arbitrario $f(a) = a\alpha$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ es R-módulo a izquierda inyectivo. El caso a derecha es análogo.

4.16.12. Módulos colibres. Cada R-módulo unitario es inmersible en un *R-módulo colibre*, o sea en un producto directo de módulos

$$R^{\#} \triangleq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(i) Sean $N =_R N_S$ y G grupo abeliano. Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, G)$ es (S, R)-módulo haciendo $(Tr)(n) = T(rn)$ y $(sT)(n) = T(ns)$, con $r \in R$, $s \in S$, $n \in N$ y $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, G)$.

(ii) En particular, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ es R-bimódulo.
(iii) Dado $N =_R N$ hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\zeta_N : \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G))_R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, G).$$

Basta hacer $\zeta_N(T)(n) = T(n)(1_R)$, con $\zeta_N^{-1}(g)(n)(r) = g(rn)$ para cada $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, G)$ y $T \in \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G))$.
(iv) En particular, con $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $N = R$, $R^{\#} \approx \mathrm{Hom}_R(R, R^{\#})$.
(v) Sean G grupo abeliano no trivial y sea $g \in G - \{0_G\}$. Sea $\mathbb{Z}g \xrightarrow{\theta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de modo que $\theta(kg) = ku$, donde $u \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} - \{0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}\}$ y $\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}}(u) \mid \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}}(g)$ si $\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}}(g) < \infty$.
Puesto que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo existe $\Theta_g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tal que $\Theta_g \mid_{\mathbb{Z}g}= \theta$.
Sea también Θ_{0_G} el morfismo nulo de G en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
Queda definido $\Theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^G$, $\Theta = \{\Theta_g\}_{g\in G}$.
Observamos que si $g \neq 0_G$ es $\Theta_g(g) \neq 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$, o sea Θ_g es no nulo i.e. Θ es monomorfismo de grupos abelianos. Concluímos que todo grupo abeliano es inmersible en un grupo abeliano divisible (y por lo tanto inyectivo).
(vi) Por (v), dado $_RN$ no trivial, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es no trivial. En consecuencia por (iii), si $_RN$ es no trivial hay algún morfismo no nulo $\varphi : N \to R^{\#}$ de R-módulos a izquierda.
(vii) Sea $_RN$ no trivial. Dado $n \neq 0_N$ por (vi) hay algún morfismo no nulo $\varphi_n : Rn \to R^{\#}$. Por (4.17.47) $R^{\#}$ resulta inyectivo. Luego existe un morfismo de R-módulos $\phi_n : N \to R^{\#}$ tal que $\phi_n \mid_{Rn}= \varphi_n$. En particular, sea ϕ_{0_N} el morfismo nulo de N en $R^{\#}$. Queda definido el morfismo de R-módulos a izquierda $\phi : N \to (R^{\#})^N$, $\phi(n) = \phi_n$ para $n \in N$, que es correcto porque cada $\phi_n \in (R^{\#})^N$. Observamos que ϕ es monomorfismo.

4.16.13. $\mathbf{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) \approx \mathbf{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^2$ en $\mathbf{Mod}$-$\mathbf{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$.

1. Fijados s y $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$ se tiene

$$\begin{aligned} f(s) &= f(\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k\delta_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k f(\delta_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k \sum_{j\in\mathbb{N}} f(\delta_k)_j\delta_j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k f(\delta_k)_j]\delta_j, \end{aligned}$$

pues las sumas anteriores tienen en cada caso solo un número finito de sumandos no nulos.
2. Las columnas de la matriz infinita con coeficientes enteros

$$J(f) = (f(\delta_k)_j)_{j,k\in\mathbb{N}}$$

son nulas salvo quizás un número finito de entradas. Queda definida una aplicación $J : \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) \to \mathrm{CFM}(\mathbb{Z})$ claramente aditiva.

3. Con la notación anterior, si además $g \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$ tenemos

$$\begin{aligned}(g \circ f)(s) &= \sum_{j\in\mathbb{N}}[\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k f(\delta_k)_j] g(\delta_j)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}[\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k f(\delta_k)_j] \sum_{l\in\mathbb{N}} g(\delta_j)_l \delta_l\\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}}[\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k \sum_{j\in\mathbb{N}} f(\delta_k)_j g(\delta_j)_l]\delta_l\\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}}[\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k (g\circ f)(\delta_k)_l]\delta_l,\end{aligned}$$

con $(g \circ f)(\delta_k)_l = \sum_{j\in\mathbb{N}} f(\delta_k)_j g(\delta_j)_l$. Luego J es multiplicativa y como J aplica la identidad en la identidad deviene homomorfismo de anillos.
4. Evidentemente J es inyectiva.
Además es suryectiva. Para ello, si $(f_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CFM}(\mathbb{Z})$ y $s \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ sea $f(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}}[\sum_{i\in\mathbb{N}} s_i f_{i,j}]\delta_j$. Puesto que $f_{i,j} = 0$ salvo eventualmente finitos i's para cada j tenemos que $f(s)(j) \in \mathbb{Z}$ para cada j. Podemos asumir que s es no nulo, y como

$$\begin{aligned}\mid f(s)(j) \mid &= \mid \sum_{i\in\mathrm{Sop}(s)} s_i f_{i,j} \mid\\ &\leq (\sum_{i\in\mathrm{Sop}(s)} s_i^2)^{1/2} (\sum_{i\in\mathrm{Sop}(s)} f_{i,j}^2)^{1/2}\end{aligned}$$

inferimos que

$$\{j \in \mathbb{N} : f(s)(j) \neq 0\} \subseteq \{j \in \mathbb{N} : \textstyle\sum_{i\in\mathrm{Sop}(s)} f_{i,j}^2 > 0\}.$$

Si $\sum_{i\in\mathrm{Sop}(s)} f_{i,j}^2 > 0$ para infinitos j's, como $\mathrm{Sop}(s)$ es finito, existirá alguna columna de la matriz dada con infinitos términos no nulos, lo que no es posible. Luego $f(s) \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ y $f : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Es claro ahora que f es endomorfismo y que $J(f) = (f_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$.
En definitiva, J es isomorfismo de anillos.
5. La aplicación

$$\begin{aligned}&\varphi : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})},\\ &\varphi(s) = ((s_{2n-1})_n, (s_{2n})_n),\end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos abelianos.
6. $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^2 \in \text{Mod-}\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$ haciendo $(f, g)h = (f \circ h, g \circ h)$ si $f, g, h \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$.
7. Queda inducido un isomorfismo de $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$-módulos a derecha

$$\begin{aligned}&\Phi : \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) \to \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^2,\\ &\Phi(f) = (\varphi_1 \circ f, \varphi_2 \circ f).\end{aligned}$$

Precisamente, $\varphi_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta^*_{2n-1}\delta_n$, con $\delta^*_k(s) = s(k)$ si $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Sean $f, g, h \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$. Por un lado,

$$\begin{aligned}\Phi_1(f) &= \varphi_1 \circ f \\ &= (\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta^*_{2n-1}\delta_n) \circ (\sum_{k\in\mathbb{N}} \delta^*_k f(\delta_k)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} f(\delta_k)(2n-1)\delta^*_k]\delta_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} J(f)_{2n-1,k}\delta^*_k]\delta_n.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\Phi_1(g\circ f) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} J(g\circ f)_{2n-1,k}\delta^*_k]\delta_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} (J(g)J(f))_{2n-1,k}\delta^*_k]\delta_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} \{\sum_{l\in\mathbb{N}} J(g)_{2n-1,l}J(f)_{l,k}\}\delta^*_k]\delta_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} [\sum_{k\in\mathbb{N}} \{\sum_{l\in\mathbb{N}} J(\Phi_1(g))_{n,l}J(f)_{l,k}\}\delta^*_k]\delta_n \\ &= \Phi_1(g)\circ f.\end{aligned}$$

Análogamente Φ_2 resulta homomorfismo de $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$-módulos a derecha. Luego

$$\begin{aligned}\Phi(g\circ f) &= (\Phi_1(g\circ f), \Phi_2(g\circ f)) \\ &= (\Phi_1(g)\circ f, \Phi_2(g)\circ f) \\ &= (\Phi_1(g), \Phi_2(g))f \\ &= \Phi(g)f.\end{aligned}$$

8. Concluímos que el anillo $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$ no tiene la *propiedad de invariancia del cardinal de bases a derecha*. Para anillos R con esta propiedad, dos bases cualesquiera de cualquier R-módulo libre a derecha tienen el mismo cardinal [**26**].

4.17. Problemas

1. Un anillo R es anillo de división si y solo si cada elemento no nulo de R es inversible a derecha.
2. Probar que la característica de un dominio es cero o un número primo.
3. Si K es cuerpo y $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}_n(K)$ es un *anillo simple*, i.e. no contiene ideales biláteros no triviales.
4. Sean K un cuerpo y

$$\mathrm{CFM}(K) = \{x = [x_{n,m}]_{n,m\in\mathbb{N}} :\mid \{n : x_{n,m} \neq 0\} \mid < \infty\ \forall m\}.$$

(i) Probar que $\mathrm{CFM}(K)$ es un anillo.
(ii) Sea T el subconjunto de $\mathrm{CFM}(K)$ de matrices con solo un número finito de filas no nulas. Probar que T es un ideal no trivial.

5. Sea $n \in \mathbb{Z}-\{-1,0,1\}$, digamos $n = \prod_{j=1}^{\nu} p_j^{m_j}$, donde $\nu \in \mathbb{N}$, $p_1, ..., p_\nu$ son números primos y $m_1, ..., m_\nu \in \mathbb{N}$.
(i) $\mathbb{Z}_n$ es semisimple si $m_1 = ... = m_\nu = 1$ y $\mathrm{J}(\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_{r(n)})$, con $r(n) = \prod_{j=1}^{\nu} p_j^{m_j-1}$ en otro caso.
(ii) $\mathbb{Z}$ no es semisimple en cuanto $\mathbb{Z}$-módulo, aunque $\mathrm{J}(\mathbb{Z}) = (0)$.
6. Decidir verdad o falsedad: En un anillo R, si ab es unidad entonces a o b es unidad.
7. Sean A un anillo y $n \in \mathbb{N}_{>1}$.
(i) la aplicación $I \to \mathrm{M}_n(I)$ entre la clase $\mathfrak{I}(A)$ de ideales de A y la clase $\mathfrak{I}(\mathrm{M}_n(A))$ de ideales de $\mathrm{M}_n(A)$ es biyectiva.
(ii) Dado $I \in \mathfrak{I}(A)$, $\mathrm{M}_n(\dfrac{A}{I}) \approx \dfrac{\mathrm{M}_n(A)}{\mathrm{M}_n(I)}$.
8. Sea p-primo.
(i) Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{I}(\mathbb{Z}_{p^n})$ forman una cadena y cada uno de sus miembros es nilpotente.
(ii) Sea $A = \prod_{n\in\mathbb{N}_{>1}} \mathbb{Z}_{p^n}$. Probar que A contiene un *nil ideal*[8] no nilpotente.
Sug.: Para cada n considerar un ideal propio I_n de $\mathbb{Z}_{p^n}$, y hacer $I = \oplus_{n\in\mathbb{N}_{>1}} I_n$.
9. Sean p primo positivo y $\mathbb{Q}_p \triangleq \cup_{n=0}^{\infty} p^{-n}\mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}_p \leq \mathbb{Q}$. Indicaremos $\mathbb{Z}_{p^\infty} \triangleq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.
(i) Dados $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ existe $y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tal que $x = my$.
(ii) Cada subgrupo propio de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es cíclico.
(iii) El retículo de subgrupos $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ es una cadena en la que no hay elemento máximo.
10. Probar que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \approx \oplus_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$.
11. Probar (4.5.5).
12. Sea $M = K \oplus K' = L \oplus L'$. Probar:
(i) $K = L$ implica $K' \approx L'$.
(ii) Si $K \subseteq H \leq M$ entonces $H = K \oplus H \cap K'$.
13. Sea $M = K + L$ y $f : M \to N$ epimorfismo. Si $K \cap L = \ker(f)$ resulta $N = f(K) \oplus f(L)$.
14. (i) Probar que $H \oplus (K \oplus L) = (H \oplus K) \oplus L$.
Sug.: Hacer $M = H \oplus H'$, con $H' = K \oplus L$. Entonces $M = (H+K) \oplus L$ y $H + K = H \oplus K$.
(ii) Sean H, K, L submódulos de M. Probar que $M = H \oplus K \oplus L$ si y solo si $H \cap K = L \cap K = 0$ y
$$\frac{M}{K} = \frac{H+K}{K} \oplus \frac{L+K}{K}.$$

[8]Nil ideal es todo ideal en que cada uno de sus elementos es nilpotente

15. Sean $\{M_\imath\}_{i\in I}$ un conjunto de A-módulos, $K_i \leq M_i$ y

$$\iota_i : \frac{M_i}{K_i} \to \frac{\oplus_I M_i}{\oplus_I K_i},$$
$$p_i : \frac{\prod_I M_i}{\prod_I K_i} \to \frac{M_i}{K_i}$$

las aplicaciones canónicas si $i \in I$. Probar:
(i) $(\frac{\oplus_I M_i}{\oplus_I K_i}, \{\iota_i\}_{i\in I})$ es suma directa de $\{\frac{M_i}{K_i}\}_{i\in I}$.
(ii) $(\frac{\prod_I M_i}{\prod_I K_i}, \{p_i\}_{i\in I})$ es producto directo de $\{\frac{M_i}{K_i}\}_{i\in I}$.

16. Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos a izquierda y L ideal a izquierda de A. Probar:
(i) $L(\oplus_I M_i) = \oplus_I L M_i$.
(ii) $\dfrac{\oplus_I M_i}{L(\oplus_I M_i)} \approx \oplus_I \dfrac{M_i}{LM_i}$.

17. (i) Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo finito *cíclico* , i.e. admite ser generado por algún elemento. Entonces hay una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} M \to 0.$$

(ii) Hay alguna sucesión exacta (sobre $\mathbb{Z}$) del tipo

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

(iii) Exhibir una sucesión exacta (sobre $\mathbb{Z}$) del tipo

$$... \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to ...$$

18. Probar (4.7.3).
19. Probar (4.7.4).
20. Sea $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ sucesión de módulos y morfismos sobre un anillo A. La misma es exacta si y solo si hay un diagrama de A-módulos y A-homomorfismos conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & N \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
M' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[ur] & & M'' \\
 & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión diagonal resulta exacta.

21. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de módulos y homomorfismos con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D \to & E \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & \epsilon\downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' \to & E' \end{array}$$

(i) Si α es suryectiva y β y δ son inyectivas entonces γ es inyectiva.
(ii) Si ϵ es inyectiva y β y δ son suryectivas entonces γ es suryectiva.
(iii) Si α, β, δ y ϵ son isomorfismos, γ es isomorfismo.

22. Dos extensiones de K por N

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0,$$

$$0 \to K \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N \to 0,$$

se dicen *equivalentes* si hay un homomorfismo $h : M \to M'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & M & & & & \\ & & & f\nearrow & \downarrow & \searrow g & & & \\ 0 & \to & K & & h & & N & \to & 0 \\ & & & f'\searrow & \downarrow & \nearrow g' & & & \\ & & & & M' & & & & \end{array}$$

(i) Probar que si las extensiones anteriores son equivalentes (vía h), entonces h es isomorfismo.
(ii) Queda definida una relación de equivalencia en la clase de extensiones de K por N.
(iii) Dados K y N hay al menos una extensión de K por N:

$$0 \to K \xrightarrow{\iota_1} K \times N \xrightarrow{\pi_2} N \to 0.$$

(iv) Hay al menos dos extensiones no equivalentes de $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_4$.

23. Suponer que el siguiente diagrama de módulos y morfismos conmuta y tiene filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A'' & \to & B'' & \to & C'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Probar que si la segunda columna es exacta, la tercera es exacta si y solo si lo es la primera.

24. Sean A-anillo semisimple, L ideal a izquierda de A. Entonces existe $e \in A$ *idempotente* (i.e. $e^2 = e$) tal que $L = Ae$. Luego A no contiene *ideales nilpotentes*[9] a izquierda.

25. Probar (4.9.2).

[9]Un ideal I de A es nilpotente si exíste $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = \{0_A\}$.

26. Probar (4.6.4).
27. Probar (4.6.5).
28. Sean F un A-módulo libre a derecha y $\{x_i\}_{i\in I}$ una base libre de F. Probar que hay un isomorfismo suryectivo $\mathrm{End}_A(F) \approx \mathrm{CFM}_I(A)$ sobre el anillo de matrices $I \times I$ con columnas finitas sobre A.
29. Probar (4.10.3).
30. Mostrar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es $\mathbb{Z}$-módulo libre, por lo que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tampoco lo es.
31. Probar las afirmaciones de (4.16.6).
32. Si ${}_AL$ es libre entonces todo epimorfismo $f : M \to L$ es escindido.
33. Sea L_A un A-módulo libre con una base libre $\{x_i\}_{i\in I}$. Probar que $\mathrm{End}(L_A) \approx \mathrm{CFM}\ _I(A)$.
34. Sea P un A-módulo a izquierda. Entonces P es proyectivo si y solo si toda sucesión exacta
$$0 \to M \to N \to P \to 0$$
es escindida.
35. Sean D un dominio de integridad, G un grupo. Probar:
(i) El anillo de polinomios con coeficientes en D es D - módulo libre.
(ii) Sea
$$D[G] = \{\phi : G \to D :\mid \{g \in G : \phi(g) \neq 0\} \mid < \infty\}.$$
Dados $\phi, \psi \in D[G]$ se definen $\phi + \psi$ y $\phi * \psi$ en $D[G]$ mediante
$$(\phi + \psi)(g) = \phi(g) + \psi(g),$$
$$(\phi * \psi)(g) = \sum_{(k,h)\in G\times G: kh=g} \phi(k)\psi(h).$$
Probar que $D[G]$ es anillo y además es D - módulo libre.
36. Sea A anillo conmutativo.
(i) Todo subconjunto de dos elementos de A es linealmente dependiente. Luego cada ideal libre no nulo de A es principal .[10]
(ii) El ideal $\langle 2, X\rangle$ de $\mathbb{Z}[X]$ no es $\mathbb{Z}[X]$ - módulo libre.
37. Probar (4.11.2).
38. Sean D un dominio de integridad conmutativo y $M =_D M$. Indicamos al *conjunto de torsión* de M mediante
$$\mathrm{T}(M) = \{m \in M : \mathrm{ann}(m) \neq \{0_D\}\},$$
donde $\mathrm{ann}(m) = \{d \in D : dm = 0_M\}$. Si $\mathrm{T}(M) = \{0_M\}$ se dice que M es *módulo libre de torsión* . Si $\mathrm{T}(M) = M$ decimos que M es *módulo de torsión*. Probar:
(i) $\mathrm{T}(M)$ es submódulo de M.
(ii) $M/T(M)$ es módulo libre de torsión.
Sea $f \in_D \mathrm{Hom}(M, N)$.
(iii) Si N es libre de torsión entonces $\mathrm{T}(M) \leq \ker(f)$.
(iv) Si M es módulo de torsión entonces $\mathrm{Im}(f) \leq \mathrm{T}(N)$.

[10]Un ideal I de A es principal si exíste $x \in A$ tal que $I = Ax$.

39. Sea D dominio de integridad conmutativo. Dado ${}_DM$, M se dice *módulo de división* si $dM = M$ cualquiera sea $d \in D - \{0_D\}$.
(i) Sea Q el cuerpo de fracciones asociado a al dominio de integridad conmutativo D. Probar que todo Q-espacio vectorial es D-módulo de división libre de torsión.
(ii) Sea ${}_DM$ un D-módulo de división libre de torsión. Probar que hay en M una estructura de Q-espacio vectorial.
(iii) Si p es primo, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible.
(iv) Un grupo abeliano G es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ si y solo si G tiene una sucesión de generadores $\{g_n\}_{n\geq 1}$ tal que $pg_1 = 0$ y $pg_{n+1} = g_n$ si $n \in \mathbb{N}$.
40. Sumas directas, imágenes homomorficas y sumandos directos de grupos divisibles son divisibles.
41. Todo grupo finito no trivial y todo grupo abeliano libre es no divisible.
42. Probar (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3).
43. Probar (1.1.6).
44. Probar (1.1.8).
45. Probar (4.11.5).
46. Ningún grupo abeliano finito es, en cuanto $\mathbb{Z}$-módulo, inyectivo o proyectivo. [V. §4.16(4.16.10)].
47. En cuanto $\mathbb{Z}-$módulos, $\mathbb{Z}$ no es inyectivo pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ si lo son.
48. Probar (4.12.3).
49. Probar (4.12.4).
50. Probar (4.12.6).
51. Probar (4.12.7).
52. Probar (4.12.8).
53. Probar (4.12.9).
54. Probar (4.12.10).
55. Probar (4.8.9).
56. Probar que para dos grupos dados G, H y un anillo R es
$$R[G \times H] \approx R[G] \otimes_R R[H].$$
57. Sean K-cuerpo, $n, m \in \mathbb{N}$. Hay un isomorfismo de K-*álgebras*[11]
$$K^n \otimes_K K^m \approx K^{nm}.$$
58. Si M es A-módulo unitario a izquierda y $n \in \mathbb{N}$ entonces
$$\mathrm{M}_n(A) \otimes M \approx \mathrm{M}_n(M).$$
En consecuencia, si además $m \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\mathrm{M}_n(A) \otimes \mathrm{M}_m(A) \approx \mathrm{M}_n(\mathrm{M}_m(A)) \approx \mathrm{M}_{nm}(A).$$
59. Dado $M \in R$-Mod resulta $R \otimes_R M \approx M$.
60. Sean R-anillo conmutativo, M, N dos R-módulos libres. Probar que $M \otimes_R N$ es R-módulo libre [Sug.: Aplique (4.6.3)].

[11] Sean A-anillo, K-cuerpo. Decimos que A es una K-álgebra si A es K-espacio vectorial munido de un producto tal que $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ cuando $k \in K$ y $a, b \in A$.

61. Probar:
$$\frac{\mathbb{Q}[\mathrm{x}]}{\langle \mathrm{x}-1\rangle}\otimes_{\mathbb{Q}}\frac{\mathbb{Q}[\mathrm{x}]}{\langle \mathrm{x}+1\rangle}\approx\mathbb{Q},$$
$$\frac{\mathbb{Q}[\mathrm{x}]}{\langle \mathrm{x}-1\rangle}\otimes_{\mathbb{Q}[x]}\frac{\mathbb{Q}[\mathrm{x}]}{\langle \mathrm{x}+1\rangle}\approx 0.$$
62. Si R-es anillo conmutativo y M, N son R-módulos proyectivos entonces $M\otimes_R N$ es proyectivo.
63. Sean ${}_RP$ módulo proyectivo e I ideal bilátero de R. Entonces $\dfrac{P}{IP}$ es $\dfrac{R}{I}$-módulo proyectivo.
64. Fijado un anillo unitario R los functores $\mathrm{Id}_R\otimes\circ$ e $\mathrm{Id}_{R\mathfrak{M}}$ sobre la categoría de R-módulos a izquierda son isomorfos.
65. Un R-módulo unitario I es inyectivo si y solo si es sumando directo de un R-módulo colibre.
66. Sean ${}_RM$ un R-módulo unitario y G un grupo abeliano divisible en el que M se puede sumergir. Mostrar que M se puede sumergir en un R-módulo inyectivo mediante el esquema
$$M\approx\mathrm{Hom}_R(R,M)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,G).$$
67. Probar (4.14.16).
68. Probar (4.14.17).
69. Sea B *anillo de Boole*, o sea un anillo en el que todo elemento es idempotente.
(i) Probar que B es abeliano y que $b=-b$ cualquiera sea $b\in B$. [Sug.: Evaluar el cuadrado de $a+a$ y de $a-b$].
(ii) Determinar $\mathrm{J}(B)$.
70. Sea R anillo unitario. Probar que
$$\mathrm{J}(R)=\{a\in R: 1_R-Ra\subseteq\mathrm{Inv}_i(R)\}.$$
71. Sean K un cuerpo y $\mathrm{T}_n^+(K)$ el anillo de matrices triangulares superiormente sobre K con coeficientes en K. Determinar $\mathrm{J}(\mathrm{T}_n^+(K))$.
72. Sea R el anillo de matrices infinitas, triangulares superiormente, con un número finito de entradas no nulas. Probar que $\mathrm{J}(R)$ consta de las matrices de R con diagonal nula.
73. Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos. Entonces
$$\mathrm{J}(\textstyle\prod_{i\in I}R_i)=\{r\in\prod_{i\in I}R_i : r_i\in\mathrm{J}(R_i)\text{ si } i\in I\}.$$
74. Con la notación de (4.16.1), mostrar que $\mathrm{J}(\mathbb{Z}_{(p)})=\{\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Z}_{(p)}: p\mid a\}$.
75. Si R es anillo unitario, $\mathrm{J}(R)$ es el máximo ideal bilátero de R, en el sentido de la inclusión, tal que $1_R+J\subseteq\mathrm{U}(R)$.
76. Sean R anillo, I ideal bilátero de R. Probar que $\mathrm{J}(I)=\mathrm{J}(R)\cap I$.
77. Sean $n,k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le n$, y D anillo de división. Indicamos $\mathrm{F}_k(D)$ (o $\mathrm{C}_k(D)$) al subconjunto de $\mathrm{M}_n(D)$ de matrices nulas salvo eventualmente la fila (o columna) k-ésima. Probar:
(i) $\mathrm{F}_k(D)$ es $\mathrm{M}_n(D)$ módulo simple a derecha.

(ii) $\mathrm{C}_k(D)$ es $\mathrm{M}_n(D)$ módulo simple a izquierda.
(iii) $\mathrm{F}_k(D) \approx \mathrm{M}_{1\times n}(D)$ en cuanto $\mathrm{M}_n(D)$-módulos a derecha.
(iv) $\mathrm{C}_k(D) \approx \mathrm{M}_{n\times 1}(D)$ en cuanto $\mathrm{M}_n(D)$-módulos a izquierda.
(v) $\mathrm{M}_n(D) = \oplus_{k=1}^n \mathrm{C}_k(D) = \oplus_{k=1}^n \mathrm{F}_k(D)$.

78. Sean R anillo, S subanillo de R. Entonces cada S-módulo simple es R-módulo simple, aunque la clase de R-módulos simples puede ser mayor a la de S-módulos simples.
79. Sean V un K-espacio vectorial y $v, w \in V$. Probar que $\{v, w\}$ es linealmente dependiente si y solo si $x \otimes y = y \otimes x$ en $V \otimes V$.
80. Sean E y F subespacios de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente. Probar que $E \otimes F$ es isomorfo al subespacio de $\mathbb{C}^{m\times n}$ de funciones de la forma
$$(s,t) \to \textstyle\sum_{l=1}^{\nu} f_l(s) g_l(t),\ \nu \geq 1, 1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n.$$
81. Sean E, F, M espacios vectoriales complejos y $\phi \in \mathcal{B}^2_{\mathbb{C}}(E, F; M)$ una forma bilineal. Decimos que E, F son *ϕ-linealmente disjuntos* si dados $n \in \mathbb{N}$, $\{e_1, ..., e_n\}$ y $\{f_1, ..., f_n\}$ subconjuntos de E y F tales que $\sum_{i=1}^n \phi(e_i, f_i) = 0_M$ se tiene
(a) $e_1 = ... = e_n = 0_E$ si $f_1, ..., f_n$ es linealmente independiente.
(b) $f_1 = ... = f_n = 0_F$ si $\{e_1, ..., e_n\}$ es linealmente independiente.
Se llama *producto tensorial de E y F* a todo par (M, ϕ), donde M es espacio vectorial complejo, $\phi \in \mathcal{B}^2_{\mathbb{C}}(E, F; M)$, $M = \mathrm{cl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{im}(\phi))$ y E y F son ϕ-linealmente disjuntos.
(i) Probar que E y F son ϕ-linealmente disjuntos si y solo si dados $n, m \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $\{e_1, ..., e_n\}$ y $\{f_1, ..., f_m\}$ linealmente independientes de E y F el conjunto
$$\{\phi(e_i, f_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$
es linealmente independiente en M.
(ii) Mostrar la existencia de algún producto tensorial. Para ello considere el cociente M del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^{(E\times F)}$ y el subespacio S generado por elementos del tipo
$$\begin{aligned}&\delta_{(c_1e_1+c_2e_2, d_1f_1+d_2f_2)}\\ &- c_1d_1\delta_{(e_1,f_1)} - c_1d_2\delta_{(e_1,f_2)} - c_2d_1\delta_{(e_2,f_1)} - c_2d_2\delta_{(e_2 f_2)}.\end{aligned}$$
Definir entonces $\phi : E \times F \to M$ tal que $\phi(e, f) = \delta_{(e,f)} + S$.
(iii) Dados un espacio vectorial N y $\beta \in \mathcal{B}^2_{\mathbb{C}}(E, F; N)$ existe una única aplicación lineal $\overline{\beta} : M \to N$ tal que $\beta = \overline{\beta} \circ \phi$.
(iv) Probar que el producto tensorial está unívocamente determinado salvo isomorfismos.

Índice alfabético

w^*-Bimódulos de Banach, 76

Acciones a izquierda y derecha, 138
Acción fiel, 139
Acción transitiva, 139
Acción trivial, 138
Amenabilidad aproximada, 8
Amenabilidad aproximadamente esencial, 8
Amenabilidad esencial, 8
Amenabilidad por caracteres, 8
Amenabilidad por ideales, 8
Amenabilidad por operadores, 8
Anillo opuesto, 165
Anillos, 165
Anillos abelianos, 165
Anillos con identidad, 165
Anillos de Boole, 212
Anillos locales, 191
Anillos radicales, 184
Anillos semisimples, 184, 186
Anillos simples, 206
Aproximación acotada de la identidad, 54
Arens regularidad, 78
Automorfismos, 135
Automorfismos interiores, 140

Bases libres, 171
Bimódulos algebraicos, 7
Biplayicidad de álgebras, 66
Biproyectividad de álgebras, 64
Bordes, 18

C*-norma maximal, 87
C*-norma minimal, 87
C*-álgebra de un grupo, 3
C*-álgebra reducida de un grupo, 3
Cadenas en espacios topológicos, 17
Categorías, 11
Categorías equivalentes, 13
Centro de un grupo, 134
Ciclos, 18, 158
Cobordes y cociclos, 19, 20
Cocadenas, 19
Cociente de un ideal en un álgebra, 183
Coclases, 138
Complejo de cadenas, 20
Complejo de cocadenas, 20
Complejos de Banach admisibles, 38
Complejos de Banach escindidos, 38
Componentes de un complejo, 39
Condición de cadena ascendente, 180
Condición de cadena descendente, 180
Conjuntos bien ordenados, 179
Conjuntos casi ordenados, 29
Conjuntos paradojales respecto a un grupo, 49
Conmutadores, 155
Connes-σ-amenabilidad, 8
Connes-amenabilidad, 76
Connes-amenabilidad fuerte, 119
Contractibilidad de complejos, 39

Coretracciones, 113
Cuasi-expectación, 82
Cuerpos, 167

Dependencia lineal, 171
Derivaciones, 20
Derivaciones aproximadamente internas, 8
Derivaciones internas., 20
Diagonal de un álgebra asociativa, 46
Diagonales aproximadas, 56
Diagonales virtuales, 56
Diagonales virtuales normales, 120
Dimensión de Krull, 190
Divisores de cero, 166
Dominio de integridad, 166
Dominios, 166
Débil amenabilidad, 8
Débil amenabilidad permanente, 8
Débil-amenabilidad, 7

Ecuación de clases, 140
Elementos w^*, 119
Elementos C-diagonales, 110
Elementos cuasi-inversibles de un anillo, 166
Elementos infinitamente divisibles, 198
Elementos inversibles, 133
Epimorfismo de módulos, 169
Epimorfismos, 135
Epimorfismos escindidos, 172
Espacio de operadores, 8
Espacios ϕ-linealmente disjuntos, 213
Espacios (AL), 100
Espacios hiper-stoneanos, 4
Espectro de un álgebra, 107
Esqueletos, 108
Estabilizador de un elemento, 139
Estados de C*-álgebras, 85
Expulsor de morfismos, 33
Extensiones de módulos, 172
Extensiones equivalentes, 209

F-unidades, 101
Filtros y ultrafiltros, 106
Forma bilineal completamente contractiva, 8
Funcionales invariantes, 49
Funciones R-admisibles, 173
Funciones biaditivas, 173
Funciones débilmente medibles, 74
Funciones fuertemente medibles, 74
Funciones no negativas, 127
Funciones uniformemente continuas, 89
Función de Euler, 160
Functor barra-normalizada, 41
Functor de olvido, 30
Functores, 11
Functores aditivos, 11
Functores adjuntos, 14
Functores contravariantes, 11
Functores covariantes, 11
Functores densos, 30
Functores exactos, 12
Functores fieles, 30
Functores isomorfos, 13
Functores naturalmente isomorfos, 13
Functores plenos, 30

G-grupos, 138
G-grupos finitos, 140
Generadores de un grupo, 134
Grado de homomorfismo de complejos, 36
Grupo afín ortogonal del plano, 159
Grupo abeliano, 134
Grupo alternado, 146
Grupo de afinidades del plano, 159
Grupo de Klein, 158

Grupo de movimientos, 159
Grupo de permutaciones, 145
Grupo de semejanzas del plano, 159
Grupo de simetrías, 158
Grupo de traslaciones, 159
Grupo dihedral, 146
Grupo especial lineal, 148
Grupo icosaedral, 159
Grupo lineal de matrices cuadradas, 148
Grupo octaedral, 159
Grupo opuesto, 134
Grupo ortogonal, 148
Grupo tetraedral, 159
Grupos, 133
Grupos p-primarios, 143
Grupos de cohomología, 20
Grupos de cohomología de Hochschild, 20
Grupos de extensión, 21
Grupos de homología, 18
Grupos gl(n, p) y sl(n, p)., 149
Grupos internamente amenables, 90
Grupos localmente compactos, 51
Grupos simples, 154

Hamilton (Álgebra real de Hamilton), 168
Homomorfismos, 134
Homomorfismos conectores, 20
Homomorfismos de anillos, 166
Homomorfismos de módulos, 168
Homomorfismos de álgebras, 168
Homomorfismos equigraduados homotópicos, 36
Homotopía, 22
Homotopía de morfismos de cadena, 35

Ideales, 169
Ideales débilmente complementables, 128
Ideales modulares, 183
Ideales nilpotentes, 209
Ideales primitivos, 183
Ideales primos, 190
Ideales principales, 210
Idempotentes, 209
Independencia en grupos, 143
Independencia lineal, 171
Indice de un subgrupo, 138
Inducción transfinita, 180
Inmersiones, 147
Inyectividad topológica, 38
Isomorfismo de módulos, 169
Isomorfismos, 135

Ley de Dedekind, 160
Ley modular, 160
Longitud de un anillo, 186
Límites directo e inverso, 16

Medida de Haar en grupos localmente compactos, 51
Monoides, 29
Monomorfismo de módulos, 169
Monomorfismos, 135
Monomorfismos escindidos, 172
Morfismo de G-grupos, 139
Morfismo de cadenas, 22
Módulo artiniano, 180
Módulo cíclico, 208
Módulo libre, 171
Módulo noetheriano, 180
Módulos a derecha, 167
Módulos a izquierda, 167
Módulos colibres, 203
Módulos de Banach colibres, 60
Módulos de Banach inyectivos, 60
Módulos de Banach libres, 60
Módulos de Banach playos, 62
Módulos de Banach proyectivos, 60
Módulos de Banach unitarios, 29
Módulos de división, 211
Módulos de operadores, 8
Módulos de torsión, 210
Módulos divisibles, 202

Módulos esenciales, 68, 129
Módulos independientes, 170
Módulos inyectivos, 178
Módulos irreducibles, 175
Módulos libres de torsión, 210
Módulos playos, 181
Módulos proyectivos, 176
Módulos pseudounitarios, 55
Módulos semisimples, 175
Módulos simples, 169, 175

Nil ideales, 207
Norma espacial, 87
Norma matricial, 8
Normalizador de un subgrupo, 135
Nuclearidad, 87

Objetos, 11
Operador completamente acotado, 8
Operador completamente contractivo, 8
Operadores admisibles, 60
Operadores aproximables, 96
Operadores de cobordismo, 19
Operadores de rango finito, 96
Operadores Nucleares, 130
Orden de un elemento, 134
Orden de un grupo, 134
Ordinales, 179
Ordinales límite, 180

p - Subgrupo de Sylow, 141
p-Grupos, 141
Par dual de espacios de Banach, 130
Paracompacidad, 109
Particiones de la unidad, 109
Permutaciones disjuntas, 158
Permutaciones pares e impares, 145
Permutaciones regulares, 158
Principio de reflexividad local, 100
Producto de Kaplanky, 166
Producto de Yoneda, 39
Producto directo, 169
Producto directo de grupos, 135
Producto tensorial, 174
Producto tensorial de espacios vectoriales, 213
Promedios en semigrupos, 49
Promedios invariantes por conjugación, 90
Promedios topológicos invariantes, 90
Propiedad ($\mathbb{A}$), 96
Propiedad de aproximación, 129
Propiedad de aproximación acotada, 104
Propiedad de invariancia del cardinal de bases a derecha, 206
Propiedad de Radon-Nikodým, 101
Pseudo-amenabilidad, 8
Pseudomedidas, 132

Radical de Jacobson, 184
Representaciones, 139
Representaciones de anillos, 168, 183
Representaciones involutivas, 85
Representación fiel, 183
Representación irreducible, 183
Representación regular a izquierda, 183
Representación trivial, 183
Resoluciones, 20, 21
Resoluciones barra-normalizadas, 41
Resolución barra no normalizada., 46
Retracciones, 60
Retículo completo, 134

Semigrupo, 133
Semigrupos amenables, 49
Semigrupos inversos, 5
Series de composición, 180

Siguiente de un ordinal, 180
Sistema finito bi-ortogonal, 96
Sistemas directo e inverso, 16
Sistemas directos constantes, 34
Subanillos, 166
Subcategorías, 11
Subcategorías totales, 11
Subgrupo, 133
Subgrupo conmutador, 155, 161
Subgrupo generado, 134
Subgrupos irreducibles de $\mathrm{Gl}(n\mathbb{C})$, 125
Subgrupos normales, 135
Submódulo generado, 169
Submódulos, 169
Submódulos complementables, 175
Submódulos invariantes, 183
Sucesiones admisibles, 63
Sucesiones escindidas, 172
Sucesiones exactas, 172
Sucesión exacta corta, 172
Sucesor de un ordinal, 180
Suma de módulos, 169
Suma directa externa, 169
Suma directa interna, 169
Símplices, 17

T-norma C*, 87
Tensores básicos, 174
Teorema de Cayley, 147
Teorema de densidad de Jacobson, 189
Teorema de Schur, 187
Topología $\mathrm{C}_0(X)$-estricta de $\mathrm{C}_b(X)$, 127
Topología uniforme sobre compactos, 127
Torsión, 210
Transformaciones naturales entre functores, 12
Transformada o representación de Cayley, 147
Transitividad en ordinales, 179
Transposiciones, 145

Unidades, 133
Unidades en anillos, 166
Unidades modulares, 183
Unitización de anillos, 165

Vectores cíclicos, 85

W*-álgebras, 4

Álgebra de Figà-Talamanca-Herz, 132
Álgebra de Fourier, 132
Álgebra de von Neumann de un grupo localmente compacto, 116
Álgebra envolvente, 29, 37, 111
Álgebra libre sobre un cuerpo, 168
Álgebras, 168, 211
Álgebras C-amenables, 126
Álgebras compactas, 106
Álgebras contractivas, 46
Álgebras de Banach amenables, 51
Álgebras de Banach completamente contractivas, 8
Álgebras de Banach duales, 75
Álgebras de Beurling, 5
Álgebras de grupo, 51
Álgebras de Lipschitz, 6
Álgebras de Segal pesadas, 6
Álgebras super-amenables, 46
Órbita de un elemento, 139

Bibliografía

[1] M. Altman: *Contracteurs dans les algébres de Banach.* C. R. Acad. Sci.. Paris, Sér. A-B **274**, 399-400, (1972).

[2] F. W. Anderson, K. R. Fuller: *Rings and categories of modules.* Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. ISBN: 0-387-90069-1, (1974).

[3] R. Arens: *Operations induced in function classes.* Monatsh. Math. **55**, 1-19, (1951).

[4] R. Arens: *The adjoint of a bilinear operation.* Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 839-848, (1951).

[5] M. Aschbacher: *Finite group theory.* Cambridge University Press, USA, (1999). ISBN: 0-521-30431-9.

[6] W. G. Bade, P. C. Curtis: *The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras.* Amer. J. Math., **82**, 851-866, (1960).

[7] W. G. Bade, P. C. Curtis, Jr., H. G. Dales: Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras. Proc. London Math. Soc. **3**: 359-377, (1987).

[8] R. Baer: *Abelian groups without elements of finite order.* Duke Math. J., **3**: 68-122, (1937).

[9] R. Baer: *Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group.* Bull. Am. Math. Soc., Vol. 46, No. 10, 800 - 806, (1940).

[10] S. J. Bhatt, P. A. Dahbi: *Arens regularity and amenability of Lau product of Banach algebras defined by a Banach algebra morphism.* Bull. Aust. Math. Soc. **87**: 195-206, (2013).

[11] S. Banach, A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parts respectivement congruents.* Fund. Math., **6**, 244-277, (1924).

[12] A. L. Barrenechea, C. C. Peña: *Amenability and Connes-amenability related to generalized module extension Banach algebras.* Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 15, no. 3, 23-34, (2022).

[13] S. K. Berberian: *Lectures in functional analysis and operator theory.* Springer-Verlag. New York - Heidelberg - Berlin, (1974).

[14] E. Betti: *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.* Annali di Matematica **4**(1), 140-158, 1870.

[15] E. Biyabani, A. Rejali: *Approximate and character amenability of vector valued Lipschitz algebras.* Bull. Koran Math. Soc., **55**:4, 1109-1124, (2018).

[16] S. Bochner: *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind.* Fundamenta Mathematicae, **20**, 262-276, (1933).

[17] J. J. Bonsall, J. Duncan: *Complete normed algebras.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1973). ISBN: 3-540-06386-2.

[18] J. W. Bunce, W. L. Paschke: *Quasi-expectation and amenable von Neumann algebras.* Proc. Amer. Math. Soc., **71**, 232-236, (1978).

[19] W. Burnside: *Theory of groups of finite order.* Cambridge University Press, (1897).

[20] H. Cartan, S. Eilenberg: *Homological algebra.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey. ISBN: 0-691-07977-3, (1956).

[21] P. J. Cassidy: *Products of commutators are not always commutators: an example.* Amer. Math. Monthly **86**: 772, (1972).

[22] A. L. Cauchy: *Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données, et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre.* Exercises d'analyze et de physique mathématique. Paris: **3**: 151-252, (1845).

[23] A. Cayley: On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. Philosophical Magazine **7**:42, 40-47, (1854).

[24] Y. Choi, F. Ghahramani, Y. Zhany: *Approximate and pseudo amenability of various classes of Banach algebras.* J. Funct. Anal. **256**: 3158-3191, (2009).

[25] P. J. Cohen: *Factorization in group algebras.* Duke Math. J., **26**, 199-205, (1959).

[26] P. M. Cohn: *Some remarks on the invariant basis property.* Topology, Vol. 5, Pergamon Press, GB, 215-228, (1966).

[27] A. Connes: *Classification of injective factors.* Ann. of Math., **104**, 73-114, (1976).

[28] A. Connes: *On the cohomology of operator algebras.* J. of Functional Analysis **28**, 248-253, (1978).

[29] J. Conway: *A course in functional analysis.* 2nd. Edition. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - London - Paris - Tokyo - Hong Kong, (1990).

[30] G. Cortiñas: *Notas de álgebra II.* Departamento de Matemáticas. FCEyN. UBA. Fasc. 11, Cursos de Grado. ISSN: 1851-1295, (2020).

[31] R. Creighton Buck: *Bounded continuous functions on a locally compact space.* Mich. Math. J., **5**, 95-104, (1958).

[32] P. C. Curtis, Jr., R. J. Loy: The structure of amenable Banach algebras. J. London Math. Soc., (2)**40**, 89-104, (1989).

[33] H. G. Dales: *Banach algebras and automatic continuity.* Clarendon Press, Oxford, (2000). ISBN: 0-19-850013-0.

[34] H. G. Dales, F. Ghahramani, N. Grønbæk, *Derivations into iterated duals of Banach algebras.* Studia Math. **128**: 19-54, (1998).

[35] H. G. Dales, F. Ghahramani, A. Ya. Helemskii: *The amenability of measure algebras.* J. London Math. Soc., (2) **66**, 213-226, (2002).

[36] M. D. P. Daws: *Arens-regularity of algebras arising from tensor norms.* New York Journal Maths., **13**, 215-270, (2007).

[37] M. M. Day: *Ergodic theorems for abelian semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 51, 399-412, (1942).

[38] M. M. Day: *Amenable groups.* Abstract 40, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 56, p. 46, (1950).

[39] M. M. Day: *Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 69, 276-291, (1950).

[40] M. M. Day: *Amenable semigroups.* Illinois J. Math., **1**, 509-544, (1957).

[41] J. Diestel, J. J. Uhl,Jr.: *Vector measures.* Mathematical surveys and monographs. Number 15, AMS, Providence, Rhode Island. ISBN: 0-8218-1515-6.

[42] E. Dubuc: *Categorías: Los primeros treinta años.* La Gaceta de la RSME. Vol. 17(**2**), 335-347, (2014).

[43] J. Dugundji: *Topology.* Allyn and Bacon Series in Advances Mathematics, Inc., Boston, (1973).

[44] J. Duncan, I. Namioka: *Amenability of inverse semigroups and their semigroup algebras.* Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A, **80** Issue 3-4, 309-321, (1878).

[45] J. Duncan, A. L. T. Paterson: *Amenability for discrete convolution semigroup algebras.* Math. Scand. **66**, 141-146, (1990).

[46] A. Ebadian, A. Jabbari: *Some notions of amenability of weighted Segal algebras.* A. P. B. Sci. Bull., Series A, Vol. 77, Issue 4, 57-64, (2015).

[47] E. G. Effros: *Property* Γ *and inner amenability.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 47, no. 2, 483-486, (1975).

[48] S. Eilenberg, S. Mac Lane: *General theory of natural equivalences.* Trans. Amer. Math. Soc., **58**, 231-294, (1942).

[49] S. Eilenberg, N. E. Steenrod: *Axiomatic approach to homology theory.* Proc. National Acad. Sci. of USA, **31**4, 117-120, (1945).

[50] M. Essmaili, A. S. Marzijarani, A. Rejali: *Characterization of homological properties of θ-Lau product of Banach algebras.* FILOMAT **35**:1, 37-46, (2021).

[51] P. Eymard: *Moyennes invariantes et représentations unitaires.* Bull. Soc. Math. France **92**, 181-236, (1964).

[52] D. R. Farenick, B. E. Forrest, L. W. Marcoux: *Amenable operators on Hilbert spaces.* J. reine angew. Math. **582**, 201-228, (2005).

[53] E. Feizi, A. Pourabbas: *Amenability of weighted measure algebras.* Iranian J. of Sci. and Technology, Transaction A, Vol. 30, No. A2, 1-5, (2006).

[54] C. F. Feldman: *The Wedderburn principal theorem in Banach algebras.* Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 771-777, (1951).

[55] E. Følner: *On groups with full Banach mean value.* Math. Scand., 3: 243-254, (1955).

[56] H. Freudenthal: *Teilweise geordnete Moduln.* Prod. Acad. Amsterdam, **39**, 641-651, (1936).

[57] V. Gantmacher: *Über schwache totalstetige Operatoren* . Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 7(49): 2, 301-308, (1940). JFM 66.0548.02.

[58] C. F. Gauss: *Disquisitiones arithmeticae*, Gauβ Werke, Göttingen, 1870-1927, Vol. 1-12, (1801).

[59] I. M. Gélfand, M. A. Naimark: *On the embedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space.* Mat. Sb., **12**, 197-213, (1943).

[60] I. M. Gélfand, D. A. Raikov, G. E. Shilov: *Commutative normed rings.* Uspekhi Mat. Nauk. **1**, 48-146, (1946). AMS Transl. **5**, 115-220, (1957).

[61] I. M. Gélfand, G. E. Shilov: *Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes.* Mt. Sb. **9**, 25-39, (1941).

[62] R. Ghamarshoushtari, Y. Zhang: *Amenability properties of Banach algebra continuous valued functions.* J. Math. Anal. and Appl., **422**: 1335-1341, (2015).

[63] F. Ghahramani, R. J. Loy: *Generalized notions of amenability.* J. Funct. Anal. **208**: 229-260, (2004).

[64] H. H. Goldstine: *Weakly complete Banach spaces.* Duke Math. J., **4**, 125-131, (1938).

[65] M. E. Gorgi, T. Yazdanpanah: *Derivations into duals of ideals of Banach algebras.* Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., **114**(4): 399-408, (2004).

[66] R. I. Grigorchuck: *Symmetric randon walks on discrete groups.* Multi-component random systems, Dobrushin and Sinai eds.. Marcel Dekker, New York - Bassel, 285-325, (1980).

[67] N. Grønbæk: *Amenability of discrete convolution algebras, the commutative case.* Pacific J. of Math., (**143**) 2: 243-249, (1990).

[68] N. Grønbæk: *Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **319**, 765-775, (1990).

[69] N. Grønbæk: *Amenability and weak amenability of tensor algebras and algebras of nuclear operators.* J. Austral. Math. Soc. (Series A) **51**, 483-488, (1991).

[70] N. Grønbæk, B. E. Johnson, G. A. Willis: *Amenability of Banach algebras of compact operators.* Israel J. Math., **87**, 289-324, (1994).

[71] A. Guichardet: *Tensor products of C^*-algebras.* Soviet Math. Dokl., **6**, (1965), 210-213.

[72] A. Guichardet: *Sur l'homologie et la cohomologie des algébres de Banach.* C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, A 38-40, (1966).

[73] A. Guichardet: *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes localement compacts.* C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, A 118-120, (1966).

[74] U. Haagerup: *Al nuclear C^*-algebras are amenable.* Invent. Math. **74**, 305-319, (1983).

[75] A. Haar: *Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen.* Ann. of Math. (2)**34**, 147-169, (1933).

[76] F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit, (1914). Leipzig (1914). ISBN: 978-0-8284-0061-9.
[77] C. Herz: *The theory of p-spaces with applications to convolution operators.* Trans. Amer. Math. Soc., **154**, 69-82, (1971).
[78] A. Ya. Helemskii: Homological characteristics of Banach algebras. Doctoral dissertation, Moscow State University, Moscow, (1973).
[79] A. Ya. Helemskii, M. V. Sheinberg: *Amenable Banach algebras.* Moscow State University. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya. Vol. 13, no. 1, 42-48, (1979).
[80] A. Ya. Helemskii: *The homology of Banach and topological algebras.* Moscow University Press, (1986). English transl. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1989).
[81] A. Y. Helemskii: *Homological essence of amenability in the sense of A. Connes: the injectivity of the predual bimodule.* (Translated from the Russian). Math. USSR-Sb **68**: 555-566, (1991).
[82] E. Hewitt, K. Ross: *Abstract harmonic analysis.* Vol. I, Spronger-Verlag. Berlin - Gottingen - Heidelberg, (1963).
[83] P. Hilton: *The bird of homological algebra.* Rocky Mountain J. Math., Vol. 32, no. 4, 1101-1117, (2002).
[84] G. Hochschild: *On the cohomology groups of an associative algebra.* Ann. of Math., Vol. 46, 58-67, (1945).
[85] J. R. Holub: *Compactness in topological tensor products and operator spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 36(**2**), 398-406, (1972).
[86] A. Hulanicki: *Groups whose regular representation weakly contains all unitary representations.* Studia Mathematica **24**: 37-59, (1964).
[87] A. Hulanicki: *Means and Følner condition on locally compact groups.* Studia Math, **27**, 87-104, (1966).
[88] N. Jacobson: *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings.* Amer. J. Math., **67**, 300-320, (1945).
[89] N. Jacobson: *Structure theory of simple rings without finitiness assumptions.* Trans. Amer. Math. Soc., **57**, 228-245, (1945).
[90] B. E. Johnson: *Cohomology in Banach algebras.* Mem. Amer. Math. Soc., **127**, (1972).
[91] B. E. Johnson: *Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras.* Amer. J. Math., **94**, 685-698. (1972).
[92] B. E. Johnson, R. V. Kadison, J. Ringrose: *Cohomology of operator algebras III.* Bull. Soc. Math. France **100**: 73-79, (1972).
[93] R. V. Kadison, J. Ringrose: *Cohomology in operator algebras I, type I von Neumann algebras.* Acta Math. **126**: 227-243, (1971).
[94] S. Kakutani: *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem.* Ann. of Math., (2)**42**, 523-537, (1941).
[95] H. Kamowitz: *Cohomology groups of commutative Banach algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **102**, 352-372, (1962).
[96] E. Kaniuth: *A course in commutative Banach algebras.* Graduate Texts in Mathematics **246**, Springer, (2009). ISBN: 978-0-387-72475-1.
[97] E. Kaniuth, A. T. Lau, J. Pym: *On ϕ-amenability of Banach algebras.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **144**: 85-96, (2008).
[98] J. L. Kelley: *Topología general.* EUDEBA, Buenos Aires, (1975).
[99] L. Kronecker: *Auseinandersetzungen einiger Eigenschsaften der Klassenzahl idealer komplexer Zahlen*, Monatshefte der Berliner Akademie, 881 889, (1870).
[100] W. Krull: *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie.* Mathematische Zeitschrift, Vol. 42, 745-766, (1937).
[101] J. L. Lagrange: *Site des réflexions sur la résolution algébrique des équations. Section troisieme. De la résolution des équations du cinquieme degré et des degrés ultérieurs.*

Nouveax mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin: 138-254, (1771).

[102] T. Y. Lam: *A first course in commutative rings.* Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg, ISBN: 0-387-97523-3, (1991).

[103] C. Lance: *On noclear C^*-algebras.* J. Functional Analysis, **12**, 157-176, (1973).

[104] A. R. Larotonda: *Álgebra Lineal y Geometría.* Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina, (1977).

[105] A. T. Lau: *Characterizations of amenable Banach algebras.* Proc. Amer. Math. Soc., **70**(**2**), 156-160, (1978).

[106] A. T. Lau: *Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups.* Fund. Math. **118**: 161-175, (1983).

[107] A. T. Lau, V. Losert: *Weak*-closed complemented invariant subspaces of $L_\infty(G)$ and amenable locally compact groups.* Pacific J. Math. **123**:1, 149-159, (1986).

[108] H. Leptin: *Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **266**, 1180-1182, (1968).

[109] T. Levi-Civita, Ricci-Curbastro: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* Math. Annal. **54**: 125-201, (1900).

[110] Li Bing-Ren: Introduction to operator algebras. World Scientific. Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, (1999). ISBN: 981-02-0941-X.

[111] E. Lluis-Puebla: Álgebra homológica, cohomológica de grupos y K-teoría algebraica clásica. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana. Serie Textos. Vol. 5 (2005). ISBN: 968-9161-04-0.

[112] J. Lindenstrauss, H. Rosenthal: *The $\mathcal{L}_p$ spaces.* Israel J. Math., **7**, 325-349, (1969).

[113] S. Lipschutz: *Teoría y problemas de álgebra lineal.* McGraw-Hill, USA, (1979).

[114] V. Losert, H. Rindler: *Conjugation-invariant means.* Colloquium Mathematicum. Vol. 51, Issue 1, 221-225, (1987).

[115] R. J. Loy, C. J. Read, V. Runde, G. A. Willis: *Amenable and weakly amenable Banach algebras with compact multiplication.* J. of Functional Analysis. Vol. 171, Issue 1, 78-114, (2000).

[116] A. Martínez-Abejón *An elementary proof of the principle of local reflexivity.* Proc. Amer. Math. Soc., 127**5**, 1397-1398, (1999).

[117] M. J. Mehdipour, A. Rejali: *Homological and cohomological properties of Banach algebras and their second duals.* arXiv: 2210.16596. Cornell University, 1-18, (2022).

[118] O. T. Mewomo: *Various notions of amenability in Banach algebras.* Expositiones Mathematicae **29** : 283-299, (2011).

[119] A. Minapoor, A. Rejali: *A new class of ideal Connes amenability.* arXiv.2201.05625v1 [math.FA], (2022).

[120] M. S. Monfared: *Character amenability of Banach algebras.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **144**: 697-706, (2008).

[121] J. von Neumann: *Zur allgemeinen Theorie des Masses.* Fund. Math., **13**, 73-116, (1929).

[122] A. L. Paterson: *Amenability.* AMS, Math. Surveys and Monographs. Vol. 29. Providence, Rhode Island, (1988). ISBN: 0-8218-1529-6.

[123] B. J. Pettis: *On integration on vector spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **44**:2, 277-304, (1938).

[124] R. S. Phillips: *On linear transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 516-541, (1940).

[125] M. J. Redondo: *Hochschild cohomology: some methods for computation.* Resenhas IME-USP. Vol. 5(**2**), 113-137, (2001).

[126] F. Riesz: Sur les opérations fonctionnelles linéaires. C. R. Acad. Sci.. Paris, **149**, 974-977, (1909).

[127] A. Rosenberg, D. Zelinsky: *Cohomology of infinite algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **82**, 85-98, (1956).

[128] J. J. Rotman: *An introduction to homological algebra.* Academic Press, New York - San Francisco - London, (1979).

[129] J. J. Rotman: *An introduction to the theory of groups.* 4th Edition. Springer - Verlag. New York, Berlin, Heidelberg (1995). ISBN: 0-387-94285-8.

[130] Z.- J. Ruan: The operator amenability of A(G) Amer. J. Math., **117**:6, 1449-1474, (1995).

[131] Z.- J. Ruan: *Amenability of Hopf von Neumann algebras and Kac algebras.* J. Funct. Anal. **139**: 466-499, (1996).

[132] W. Rudin: *Real and complex analysis.* 2nd. Edition. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, (1974). ISBN: 0-07-054233-3.

[133] V. Runde: *Lectures on amenability.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (2002. ISBN: 3-540-42852-6.

[134] V. Runde: *Amenability for dual Banach algebras.* Studia Math., **148**(1), 47-66, (2001).

[135] R. Schatten: *A theory of cross-spaces.* Ann. Math. Studies, **26**. Princeton University Press, Princeton, N. J., (1950).

[136] E. Schering: *Die Fundamental Klassen der zusammengesetzten arithmetischen Formen.* Abh. der Gött. Akad. **14**, 3-13, (1869).

[137] I. Schur: *Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegeben Matrix zuordnen lassen.* Inaugural-Dissertation, Berlin (1901).

[138] M. V. Sheinberg: *A characterization of the algebra $C(\Omega)$ in terms of cohomology groups.* Uspekhi Matem. Nauk **32**, 203-204, (1977).

[139] I. E. Segal: *The group ring of a locally compact group.* Proc. N. A. S., 348-352, (1941).

[140] I. E. Segal: *Irreducible representations of operator algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., **61**, 69-105, (1947).

[141] J. P. Serre: *Géometrie algébrique et géometrie analytique.* Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier, **6**:1-42, (1956).

[142] L. Sylow: *Théorèmes sur les groupes de substitutions.* Math. Ann., **5**(4): 584-594, (1872).

[143] A. Szankowski: $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *does not have the approximation property.* Acta Math., **147**, 89-108, (1981).

[144] M. Takesaki: *On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras.* Tohoku Math. J., **16**, (1964), 111-122.

[145] J. L. Taylor: *Homology and cohomology for topological algebras.* Adv. in Math. **9**: 137-182, (1972).

[146] T. Turumaru. *On the direct product of operator algebras.* Tohoku Math. J., **4** (1952), 242-251.

[147] S. Wassermann: *On tensor products of certain group C^*-algebras.* J. Functional Analysis **23**, 239-254, (1976).

[148] J. H. M. Wedderburn: *On hypercomplex numbers.* Proc. London Math. Soc., **6**: 77-118, (1908).

[149] R. L. Wheeden, A. Zygmund: *Measure and integral.* An introduction to real analysis. CRC Press. Marcel Dekker, Inc.. New York-Basel, (1977).

[150] D. Zelinsky: *Raising idempotents.* Duke Math. J., **21**, 315-322, (1954).