Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Sobre Análisis Funcional, Variable Compleja, Topología, Álgebra y Teoría de la Medida

Carlos C. Peña

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Textos. Vol. 3 (2003)

Sobre Análisis Funcional, Variable Compleja, Topología, Álgebra y Teoría de la Medida

Carlos C. Peña

8 de agosto de 2003

Índice

1. Prólogo

Inicié este trabajo en el verano de 2000, movido en parte por la necesidad de profundizar el estudio de algunas cuestiones puntuales emergentes en mis propias investigaciones. En la selección de los temas he seguido, debo reconocerlo, mi propia inclinación y goce personal por la belleza de las construcciones. El trabajo consta de cuatro secciones principales: Análisis Funcional, Variable Compleja, Topología y Álgebra y, finalmente, Teoría de la Medida. He procurado desarrollar cada problemática en forma exhaustiva y rigurosa, en un lenguaje dirigido a estudiantes de grado universitario en Matemáticas y a jóvenes investigadores. Espero poder cautivar al lector, al punto de motivarlo a enriquecer mi trabajo con sus propios aportes y hacerlo así partícipe de esta empresa formativa. Finalmente, agradezco la consideración del Comité Editorial de la Serie Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, así como las atenciones dispensadas por sus Editores Ejecutivos y los árbitros que revisaron este trabajo.

Carlos C. Peña
Facultad de Ciencias Exactas. Dpto. de Matemáticas, NuCoMPA.
Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Buenos Aires, Argentina.

2. Introducción

En general, los problemas considerados han sido seleccionados para analizar con cierto detalle situaciones puntuales, poniendo de manifiesto la necesidad de condiciones establecidas para la validez de resultados de envergadura. Asimismo, desde la resolución de problemas, se procura lograr una mayor comprensión de situaciones descriptas en teoría. No obstante la profusa y muy buena bibliografía existente, la generalidad y cuidado con que se presentan resultados clásicos, suele ser difícil la aplicación de estos a situaciones dadas. El lector con herramientas básicas de grado universitario en Matemáticas podrá abordar este trabajo sin mayores prevenciones. Asumiendo una mínima familiaridad con tópicos de cada una de las áreas aquí tratadas, no abundamos en exposiciones teóricas y, eventualmente en notas al pie, introducimos algunas definiciones sobre conceptos de carácter algo más específicos. Presentados los problemas, recomendamos al lector buscar posibles líneas de trabajo para su resolución, dejando para una última instancia la lectura de la solución propuesta en nuestro trabajo. Si hubieren prosperado sus intentos, la lectura posterior de este material puede ser una fuente interesante de comparación en el uso de técnicas, la aplicación de resultados, o en la detección de eventuales errores. Ocasionalmente, algunos ítems han sido adjuntados para dar cierre a algunas descripciones, que sin ellos serían incompletas. En estos casos, tratados usual y detalladamente en la bibliografía existente, remitimos al lector a citas específicas. El mismo proceder observamos cuando el desarrollo de los problemas adquiere un tinte más profundo, en cuyo caso el lector interesado puede consultar los artículos sugeridos. La nomenclatura usada es clásica, y en algunos casos se introduce en el mismo texto. Una nota característica del trabajo la da la aparente heterogeneidad de las materias tratadas. Sin embargo, la división del trabajo en las diferentes cuatro secciones principales no ha de confundirse con compartimientos separados. Las secciones tan solo señalan grandes áreas, aunque es posible hallar custiones ligadas a problemas de medidas (p. ej. Problema 3.8, (vii)) en la sección Tópicos de Análisis Funcional, cuestiones topológicas en la sección Tópicos de Variable Compleja (p. ej. Problema 4.5, (vi)), etc.. Hay un común denominador en todo el trabajo, consistente en la actitud necesaria de búsqueda, de profundización de cada materia, de cuidado en la elaboración y escritura de los argumentos.

The only way to lern mathematics is to do mathematics. That tenet is the foundation of the do - it - yourself, Socratic, or Texas method, the method in which the teacher plays the role of an omniscient but largely uncommunicative referee between the learner and the facts ... The right way to read mathematics is first to read the definitions of the concepts and the statements of the theorems, and then, putting the book aside, to try to discover the appropiate proofs. If the theorems are not trivial, the attempt might fail, but it is likely to be instructive just the same. To the passive reader a routine computation and a miracle of ingenuity come with equal easy, and later, when he must depend on himself, he will find that they went as easily as they came ...

P. R. Halmos, 1982. (cf. [20])

3. Sobre Análisis Funcional

3.1. Subespacios cerrados en $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ cuya suma es densa y no cerrada.

En $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ sean

$$e_m = e_m(t) = \exp(imt)\,,\ m \in \mathbb{Z},\ f_n = f_n(t) = e_{-n} + n\ e_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos los subespacios cerrados X_1 y X_2 generados por $(e_n)_{n\geq 0}$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ respectivamente. Entonces $X_1 + X_2$ es denso y no cerrado.

Solución

Si $f \in \mathrm{L}^2(-\pi,\pi)\,,\ \varepsilon > 0,$ sea $M \in \mathbb{N}_0$ tal que $\sum_{|m|>M} |\langle f, e_m\rangle|^2 \leq \varepsilon^2$. Escribiremos $f = (f - f_{(M)}) + f_{(M)}$, donde $f_{(M)} = \sum_{|m|\leq M} \langle f, e_m\rangle\ e_m$. Entonces hay escalares $\alpha_m \in \mathbb{C}$, $|m| \leq M$, tales que

$$f_{(M)} = \alpha_0\ e_0 + \sum_{m=1}^{M} (\alpha_m\ e_m + \alpha_{-m}\ f_m).$$

En efecto, basta considerar

$$\alpha_m = \langle f, e_0\rangle \quad si\ -M \leq m \leq 0 \quad y \quad \alpha_m = \langle f, e_m\rangle - m\ \alpha_{-m} \quad si \quad 1 \leq m \leq M.$$

Luego $f_{(M)} \in X_1 + X_2$, $\left\|f - f_{(M)}\right\| \leq \varepsilon$ y $X_1 + X_2$ deviene denso en $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$. Probaremos que $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,e_{-n}$ pertenece a $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi) - (X_1 + X_2)$, con lo cual deduciremos que $X_1 + X_2$ es no cerrado. Como $\langle f_n, f_m\rangle = (1 + nm)\ \delta_{nm}$ sigue que $(f_n)_{n\geq 1}$ es un conjunto ortogonal. Dado $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ f_n \in X_2$ tenemos entonces

$$\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\ \|f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\ \left(1 + n^2\right) < \infty,$$

i.e. tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\ n^2$ son series convergentes. Luego $g_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ e_{-n}$ y $g_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n\ e_n$ son elementos bien definidos en $L^2(-\pi,\pi)$ y $g = g_1 + g_2$. Supongamos que $f_0 = f_1 + f_2,\ f_1 \in X_1,\ f_2 \in X_2$. Escribiendo $f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ f_n$ tenemos $f_0 - f_1 = f_2$, o sea

$$f_0 - f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ e_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n\ e_n.$$

Luego $f_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n\ e_n$ y $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ e_{-n}$ de donde $a_n = n^{-1}$ si $n \geq 1$, lo cual es imposible. $\square$

3.2. Subconjuntos de un espacio de Hilbert de diámetro finito no realizable.

Sea H un espacio de Hilbert con una base ortonormal $(e_n)_{n\geq 1}$, A el subconjunto de todas las sumas finitas del tipo $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (1-1/k) \, e_k$, donde $\lambda_k \geq 0$ para todo k y $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Probar:

(i) cl $A = \{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, (1-1/k) \, e_k : \lambda_k \geq 0$ para todo k y $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1 \}$.

(ii) $\operatorname{diam}(A) = 2$.

(iii) No existen $f, \ g \in A$ tales que $\|f - g\| = 2$.

Solución

(i) Notemos que si $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de números no negativos tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ entonces es de cuadrados sumables y $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \leq 1$. Luego el conjunto

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, (1-1/k) \, e_k : \lambda_k \geq 0 \ \text{ para todo } k \ \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1 \right\}$$

es no vacío. Como $A \subseteq S$ tenemos cl $A \subseteq$ cl S. Veremos que S es cerrado y que $S \subseteq$ cl A. En efecto, sea

$$f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,n} \, (1-1/k) \, e_k, \ n \geq 1,$$

una sucesión de elementos de S tal que $f_n \to f$ para cierto $f \in H$. Si escribimos $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, e_k$ entonces $\lim_{n\to\infty} [\lambda_{k,n} \, (1-1/k)] = \lambda_k$ para cada $k \geq 1$. En particular, cada λ_k es no negativo. Como para cada $n \geq 1$ tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,n} = 1$ entonces $\sum_{k=1}^{K} \lambda_{k,n} \leq 1$ para cada $K \geq 1$. En consecuencia $\sum_{k=2}^{K} \lambda_k/(1-1/k) \leq 1$ si $K \geq 2$, i.e. $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k/(1-1/k) \leq 1$. Por otra parte, consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N}, \ 2^{\mathbb{N}}, \ \sharp)$, donde $\sharp$ es el cardinal considerado como medida. Si $f_n(k) = \lambda_{k,n}, \ \ n, \ k \in \mathbb{N}$, por el lema de Fatou tenemos $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n(k) \, d\sharp(k) \geq \int_{\mathbb{N}} \overline{\lim}_{n\to\infty} \ f_n(k) \, d\sharp(k)$. Si

$$f(k) = \lambda_k/(1-1/k), \ k \geq 2, \ f(1) = 0,$$

escribiremos Im $f = \{\xi_k\}_{k \geq 1}$ e Im $f_n = \{\xi_k^n\}_{k \geq 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Ahora

$$\overline{\text{lím}}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^n \, \sharp \{j : f_n(j) = \xi_k^n\} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \, \sharp \{j : f(j) = \xi_k\} \, .$$

Como las series anteriores son incondicionalmente convergentes deducimos que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k / (1 - 1/k) \leq \overline{\text{lím}}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,n} = 1$$

y S deviene cerrado. Sea ahora $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, (1 - 1/k) \, e_k$ un elemento de S. Dado $\varepsilon > 0$ sea K entero positivo tal que $1 - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \leq \varepsilon/2$. Escribiremos $\mu_k = \lambda_k + \zeta_k$, $\zeta_k = (1 - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k)/K$, $1 \leq k \leq K$. Entonces cada μ_k es no negativo, $\sum_{k=1}^{K} \mu_k = 1$ y

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=1}^{K} \mu_k \, (1 - 1/k) \, e_k \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{K} (-\zeta_k) \, (1 - 1/k) \, e_k \right\| + \\
&+ \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k \, (1 - 1/k) \, e_k \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} \zeta_k + \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k \\
&= 2 \, (1 - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

y tenemos (i).

(ii) Dados $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, (1 - 1/k) \, e_k$ y $g = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \, (1 - 1/k) \, e_k$ en cl A

escribimos

$$\|f-g\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\mu_k)^2\ (1-1/k)^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\mu_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k = 2,$$

i.e. diam $A \leq 2$. Además

$$\|(1-1/n)\ e_n - (1-1/m)\ e_m\| = \left((1-1/n)^2+(1-1/m)^2\right)^{1/2} \to 2$$

si $n,\ m \to \infty,\ n \neq m$ y tenemos (ii).

(iii) Con la notación anterior, supongamos $\|f-g\| = 2$. Por (1) debe ser $(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2)^{1/2} = 2$, más aún

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 = 1.$$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$, i.e. $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_k^2) = 0$. Como $0 \leq \lambda_k \leq 1$ para todo k debe ser $\lambda_k - \lambda_k^2 \geq 0$ y, necesariamente, $\lambda_k\ (1-\lambda_k) = 0$. Deducimos que $f = 0$ o $f = (1-1/k)\ e_k$ para algún índice k. La misma conclusión es aplicable a g. Como evidentemente $f \neq g$ no es posible que $\|f-g\| = 2$. $\square$

3.3. Sobre separación de conjuntos.

(i) Si E es un espacio vectorial topológico, $A,\ B$ son convexos disjuntos no vacíos y A es abierto hay un hiperplano cerrado que les separa. Más aún, si además B es cerrado algún hiperplano separa a A y B estrictamente (cf. [45], Ch. 18, Prop. 18.1, pág. 189). Mostrar que ello no es posible si ninguno de los conjuntos es abierto.

(ii) Considerar el subespacio $B = \{\sigma \in l^1(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{R}) :\ \sigma_n = 0 \text{ si } n > 0\}$ de $l^1(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{R})$. Probar que existen $\alpha,\ \beta \in l^1(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{R})$ tales que, si

$$A = A(\alpha,\ \beta) = \left\{\sigma \in l^1(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{R}) :\ \sigma_0 \geq |\alpha_n\ \sigma_n - \beta_n| \quad si \ \ n \geq 0\right\},$$

entonces $A \cap B = \emptyset$ y $A - B$ es denso en $l^1(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{R})$. Deducir que no hay un hiperplano cerrado que separe a A y B.

(iii) El subconjunto C de $\mathbb{R}[X]$ formado por polinomios reales con coeficiente principal positivo es un cono convexo. Probar que no hay hiperplano que le deje a un lado.

(iv) En $L^2[-1,1]$, con respecto a la medida de Lebesgue, para $\alpha \in \mathbb{C}$ indicamos $E_\alpha = \{f \in C[-1,1] :\ f(0) = \alpha\}$. Entonces cada E_α es un subconjunto convexo denso de $L^2[-1,1]$ y, si $\alpha \neq \beta$, E_α y E_β no son separables por ningún funcional lineal acotado.

Solución

(i) Los conjuntos

$$A = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ xy \geq z^2\right\},$$

$$B = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 0,\ z = 1\right\},$$

son no vacíos y disjuntos. B es convexo pues es una recta y dados dos elementos $(x,\ y,\ z)$, $(\widetilde{x},\ \widetilde{y},\ \widetilde{z})$ de A y $0 < t < 1$ resulta

$$\begin{aligned}(t\ z + (1-t)\ \widetilde{z})^2 &= t^2\ z^2 + 2\ t(1-t)\ z\ \widetilde{z} + (1-t)^2\ \widetilde{z}^2 \\ &\leq t^2\ xy + 2\ t(1-t)\sqrt{x\ y\ \widetilde{x}\ \widetilde{y}} + (1-t)^2\ \widetilde{x}\ \widetilde{y} \\ &\leq t^2\ xy + t(1-t)\ \ (x\ \widetilde{y} + \widetilde{x}\ y) + (1-t)^2\ \widetilde{x}\ \widetilde{y} \\ &= (t\ x + (1-t)\ \widetilde{x})\,(t\ y + (1-t)\ \widetilde{y})\end{aligned}$$

i.e. A es convexo (el primer octante lo es e intersección de convexos es convexo). Si algún plano

$$P = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = d\right\}$$

contuviere a B debería ser $by + c = d$ para todo $y \in \mathbb{R}$, de modo que $b = 0$ y $c = d$, o sea $P = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + cz = c\}$ y $a \neq 0$ o $c \neq 0$. Indicaremos

$$P_> = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + cz > c\right\},$$

$$P_< = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + cz < c\right\}.$$

Si $a = 0$ resulta $P = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1\}$, $(2, 2, 2) \in A \cap P_>$ y $(1, 1, 1/2) \in A \cap P_<$. Si $c = 0$ entonces $P = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 0\}$ y, evidentemente, tanto A como B están a un mismo lado de P. Ahora, si a y c no son nulos entonces $A \cap P_>$ y $A \cap P_<$ son no vacíos, p. ej.

$$a > 0,\ c > 0 \ \Rightarrow\ (c/a,\ a/c,\ 1) \in A \cap P_> \text{ y } (0,\ 0,\ 0) \in A \cap P_<,$$

$$a < 0,\ c < 0 \ \Rightarrow\ (0,\ 0,\ 0) \in A \cap P_> \text{ y } (c/a,\ a/c,\ 1) \in A \cap P_<,$$

$$a > 0,\ c < 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} (0,\ 0,\ 0) \in A \cap P_> \\ y \\ \left(1, 5\left[(c-a)/c\right]^2, 2(c-a)/c\right) \in A \cap P_<, \end{cases}$$

$$a < 0,\ c > 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} \left(1, 5\left[(c-a)/c\right]^2, 2(c-a)/c\right) \in A \cap P_> \\ y \\ (0,\ 0,\ 0) \in A \cap P_<. \end{cases}$$

(ii) Dados α y β, si $A \cap B \neq \emptyset$ la inecuación $x \geq |\alpha_0\, x - \beta_0|$ es soluble para $x \in [0, +\infty)$. Es fácil ver entonces que $A \cap B = \emptyset$ si (i) $\beta_0 < 0$ y $\alpha_0 \in (-\infty,\ -1) \cup [1,\ +\infty)$ o (ii) $\beta_0 > 0$ y $\alpha_0 = -1$. En cualquiera de estas situaciones, sea $\gamma \in l^1(\mathbb{N}_0,\ \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} |\gamma_n| < \varepsilon$ y definimos $\sigma \in A,\ \rho \in B$ como

$$\sigma_n = \begin{cases} \text{máx}\left\{\text{máx}_{1 \leq n \leq N}\ |\alpha_n\ \gamma_n - \beta_n|,\ \sup_{n>N}\ |\beta_n|\right\} & si \quad n = 0, \\ \gamma_n & si \quad 1 \leq n \leq N, \\ 0 & si \quad n > N, \end{cases}$$

$\rho_n = 0$ si $n > 0$ y $\rho_0 = \sigma_0 - \gamma_0$. Entonces

$$\|\gamma - (\sigma - \rho)\|_{l^1} = |\gamma_0 - (\sigma_0 - \rho_0)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n - \sigma_n| = \sum_{n>N} |\gamma_n| < \varepsilon$$

y $A - B$ es denso. Ahora, con la notación del Problema 3.5, si $H_{T,r}$ separara A y B, podemos suponer $T(\zeta) \leq r$ si $\zeta \in A$ y $T(\zeta) \geq r$ si $\zeta \in B$. Pero si $\zeta_0 \, T(e_0) \geq r$ para todo $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ debe ser $T(e_0) = 0$. Luego $T(\zeta) \leq r$ para todo ζ por la densidad de $A - B$ lo cual no es posible porque T es no nulo.

(iii) Todo hiperplano de $\mathbb{R}[X]$ es del tipo

$$H = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, X^n \in \mathbb{R}[X] : \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, b_n = 0 \right\}, \tag{2}$$

con $b = (b_n)_{n \geq 0}$ una sucesión no nula, siendo las sumas formales en (2) básicamente finitas ya que los coeficientes de los polinomios son no nulos en número finito. Evidentemente b determina a H salvo constantes no nulas. Si $N = \sharp\{n : \; b_n \neq 0\}$ y N es finito podemos suponer $b_N > 0$. Tenemos $X^N \in C \cap H_>$ y $X^{N+1} - X^N \in C \cap H_<$, donde

$$H_> = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, X^n \in \mathbb{R}[X] : \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, b_n > 0 \right\},$$

$$H_< = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, X^n \in \mathbb{R}[X] : \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, b_n < 0 \right\}.$$

Si N no es finito sea $\mathrm{Supp}(b) = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $n_1 < n_2 < \ldots$ Podemos suponer $b_{n_1} > 0$, de modo que $X^{n_1} \in C \cap H_>$ y, si c es una constante real tal que $b_{n_2} + c \, b_{n_1} < 0$ entonces $X^{n_2} + c \, X^{n_1} \in C \cap H_<$.

(iv) Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, ya que $C[-1,1]$ es denso en $L^2[-1,1]$ veremos que E_α es denso en $(C[-1,1], \, \|\circ\|_2)$. Sea $g \in C[-1,1]$, $\varepsilon > 0$ y, por la continuidad uniforme de g en $[-1,1]$ sea $\delta > 0$ tal que $|g(s) - g(t)| \leq \varepsilon$ si $|s - t| \leq 2\delta$ en $[-1,1]$. Definimos $f_\delta : [-1,1] \to \mathbb{C}$ de manera que

$$f_\delta(s) = \begin{cases} g(s) & si \quad \delta \leq |s| \leq 1, \\ g(-\delta) + (s+\delta) \; (\alpha - g(-\delta)) / \delta & si \quad -\delta \leq s \leq 0, \\ g(\delta) + (\alpha - g(\delta)) \; (\delta - s) / \delta & si \quad 0 \leq s \leq \delta. \end{cases}$$

Por construcción f_δ es continua y, para $-\delta \leq s \leq 0$ escribimos

$$\begin{aligned}
|f_\delta(s) - g(s)| &= |g(-\delta) + (s+\delta)\ (\alpha - g(-\delta))/\delta - g(s)| \\
&\leq \frac{s+\delta}{\delta}\ |\alpha - g(s)| + \left(1 + \frac{s+\delta}{\delta}\right)\ |g(s) - g(-\delta)| \\
&\leq 2\ |\alpha - g(s)| + 3\ \varepsilon
\end{aligned}$$

mientras que si $0 \leq s \leq \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|f_\delta(s) - g(s)| &= |g(\delta) + (\alpha - g(\delta))\ (\delta - s)/\delta - g(s)| \\
&\leq \frac{\delta - s}{\delta}\ |\alpha - g(s)| + \left(1 + \frac{\delta - s}{\delta}\right)\ |g(s) - g(\delta)| \\
&\leq 2\ |\alpha - g(s)| + 3\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si $\mu = \text{máx}_{|s|\leq 1}\ |\alpha - g(s)|$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|g - f_\delta\|_2 &= \left(\int_{|s|\leq\delta} |g(s) - f_\delta(s)|^2\ ds\right)^{1/2} \\
&\leq \left(2\ \left(4\ \mu^2 + 12\ \mu\ \varepsilon + 9\ \varepsilon^2\right)\delta\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces la densidad de E_α en $(C[-1,1],\ \|\circ\|_2)$. Es evidente que $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ es una familia disjunta de conjuntos convexos. Por la densidad de estos, si Λ es un funcional lineal continuo no nulo sobre $L^2[-1,1]$ deducimos

$$\mathbb{C} = \Lambda(\text{cl}\ E_\alpha) \subseteq \text{cl}\ \Lambda(E_\alpha)$$

y sigue (iv). $\square$

3.4. Gramianos. Distancia de un punto a un subespacio finitamente generado en un espacio prehilbertiano. Totalidad de conjuntos del tipo $\{t^{\alpha_n}\}_{n\geq 1}$ en $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[(0,1], dx]$.

(i) Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano, $n \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{1\leq i\leq n} \subseteq V$. El *determinante de Gram (o gramiano)* $G = G(x_1, \dots, x_n) = \det(x_i \cdot x_j)_{1\leq i,j\leq n}$ es no negativo, siendo nulo sii $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ es linealmente dependiente.

(ii) Si $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ es linealmente independiente y $x \in V$ resulta

$$\operatorname{dist}\left(x, \operatorname*{gen}_{\mathbb{C}}\{x_i\}_{1\leq i\leq n}\right) = \sqrt{\frac{G(x,\ x_1,\ \dots,\ x_n)}{G(x_1,\ \dots,\ x_n)}}.$$

(iii) En $L^2_{\mathbb{R}}[(0,1], dx]$, una sucesión $\{t^{\alpha_n}\}_{n\geq 1}$ en la cual cada exponente α_n es mayor que $-1/2$ es conjunto total si se verifica al menos una de las tres condiciones siguientes: (a) $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{-1} = +\infty$. (b) $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = -1/2$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + 1/2) = +\infty$. (c) Alguna subsucesión de $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ converge a un límite finito $> -1/2$.

Solución

(i) Si $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ es linealmente independiente, por el proceso de Gram - Schmidt definimos $y_1 = x_1$ e

$$y_k = x_k - \sum_{h=1}^{k-1}(x_k \cdot y_h) \quad y_h/\|y_h\|^2, \ 2 \leq k \leq n, \tag{3}$$

resultando $\{y_k\}_{1\leq k\leq n}$ conjunto ortogonal. Hay escalares $a_{k,h}\acute{}\, s$, unívocamente determinados, de modo que

$$x_k = \sum_{h=1}^{n} a_{k,h}\ y_h/\|y_h\|, \ 1 \leq k \leq n.$$

Por (3) $a_{k,k} = \|y_k\|$ y si $a_k = (a_{k,1},\ \dots,\ a_{k,n})$, $1 \leq k \leq n$, es

$$G = \det(a_k \cdot a_l)_{1\leq k,l\leq n} \tag{4}$$

$$= G\left((a_{1,1}, 0, \dots, 0),\ (a_{2,1}, a_{2,2}, 0, \dots, 0), \dots, (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,n})\right)$$

$$= \begin{vmatrix} |a_{1,1}|^2 & a_{1,1}\ \overline{a_{2,1}} & \dots & a_{1,1}\ \overline{a_{n,1}} \\ \overline{a_{1,1}}\ a_{2,1} & |a_{2,1}|^2 + |a_{2,2}|^2 & \dots & a_{2,1}\ \overline{a_{n,1}}\ + a_{2,2}\ \overline{a_{n,2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_{1,1}}\ a_{n,1} & \overline{a_{2,1}}\ a_{n,1}\ + \overline{a_{2,2}}\ a_{n,2} & \dots & |a_{n,1}|^2 + \dots + |a_{n,n}|^2 \end{vmatrix}$$

$$= |A \cdot A^{\tau}| = \prod_{h=1}^{n} \|y_h\|^2 > 0,$$

donde A es la matriz - triangular inferior - $A = (a_{k,h})_{1 \leq k,h \leq n}$. Recíprocamente, si $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es linealmente dependiente y x_h es combinación lineal de los restantes vectores para cierto índice h, por la linealidad del producto interno, la $h-$ ésima fila de la matriz gramiana es combinación lineal de las demás, i.e. $G = 0$.

(ii) Si $n = 1$ escribimos $x = y + \langle x, x_1 \rangle\, x_1 / \|x_1\|^2$, donde $y \in (\mathbb{C} \cdot x_1)^{\perp}$. Entonces

$$\text{dist}\,(x, \mathbb{C} \cdot x_1) = \|y\| = \left\| x - (x \cdot x_1)\ \ x_1 / \|x_1\|^2 \right\|$$

$$= \left[\|x\|^2 - \frac{|x \cdot x_1|^2}{\|x_1\|^2} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{G(x, x_1)}{G(x_1)}}.$$

Inductivamente, sea el resultado cierto para $< n$ y $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ l.i., $n \geq 2$.

Con la notación de (i), si $z = x - \langle x, y_n \rangle \ y_n / \|y_n\|^2$ tenemos

$$\operatorname{dist}\left(x, \underset{\mathbb{C}}{\operatorname{gen}} \{x_i\}_{1\leq i\leq n}\right) = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} (x \cdot y_j) \ \frac{y_j}{\|y_j\|^2} \right\| \tag{5}$$

$$= \left\| z - \sum_{j=1}^{n-1} (z \cdot y_j) \ \frac{y_j}{\|y_j\|^2} \right\|$$

$$= \operatorname{dist}\left(z, \underset{\mathbb{C}}{\operatorname{gen}} \{x_i\}_{1\leq i\leq n-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{G(z, x_1, ..., x_{n-1})}{G(x_1, ..., x_{n-1})}}.$$

Notemos que $G(x_1, \ ... \ , \ x_n) = G(x_{\sigma 1}, \ ... \ , \ x_{\sigma n})$ cualquiera sea la permutación $\sigma \in S_n$. [1]Por (6)

$$\frac{G\left(x, x_1, ..., x_n\right)}{G(x_1, ..., x_n)} = \frac{G(z, x_1, ..., x_{n-1})}{G(x_1, ..., x_{n-1})} \tag{7}$$

$$\Updownarrow$$

$$G\left(x, x_1, ..., x_n\right) = G(z, x_1, ..., x_{n-1}) \cdot \|y_n\|^2 .$$

Por el proceso de Gram - Schmidt, aplicado a $\{x_1, \ ... \ , \ x_{n-1}, \ z\}$, obtenemos

$$y'_n = z - \sum_{h=1}^{n-1} (z \cdot y_h) \ y_h / \|y_h\|^2 = x - \sum_{h=1}^{n} (x \cdot y_h) \ y_h / \|y_h\|^2 . \tag{8}$$

---

[1]En efecto, basta considerar $n > 1$. Por (4) y la unicidad del proceso de Gram - Schmidt resulta

$$G(x_1, \ ... \ , \ x_n) = G(x_1, \ ... \ , \ x_{n-1}) \cdot \|y_n\|^2 . \tag{6}$$

Inductivamente, supongamos cierta la afirmación para $< n$. Por (6) el resultado sigue para permutaciones que fijan n. El gramiano $G(x_1, \ x_2, \ ... \ , \ x_{n-2}, \ x_n, \ x_{n-1})$ difiere en el signo del determinante de la matriz que resulta al intercambiar las columnas $n-1$ y n de la matriz gramiana. Por otra parte, se produce un segundo cambio de signo al intercambiar las filas $n-1$ y n, resultando el gramiano $G(x_1, \ ... \ , \ x_n)$. Por la hipótesis inductiva el resultado sigue para permutaciones que fijan $n-1$. En particular, con la invariancia para la transposición $(n-1, n)$ y la hipótesis inductiva sigue el caso general.

Por (4):

$$G(z,x_1,...,x_{n-1})\cdot\|y_n\|^2=\|y'_n\|^2\cdot\prod_{h=1}^{n}\|y_h\|^2\,. \qquad (9)$$

Por otra parte, (8) es el $(n+1)-$ ésimo paso al aplicar el proceso de Gram - Schmidt a $\{x_1,\ \ldots\ ,\ x_n,\ x\}$ y

$$G\left(x,x_1,...,x_n\right)=\|y'_n\|^2\cdot\prod_{h=1}^{n}\|y_h\|^2\,. \qquad (10)$$

Finalmente, (7) sigue de (9) y (10). Finalmente, la afirmación sigue de (5) y (7).

(iii) Sean $k\in\mathbb{N}$, $n_1<n_2<\ldots<n_k$ enteros no negativos, $m\in\mathbb{N}_0$. Haciendo $\alpha_0=n_0$ tenemos

$$\operatorname{dist}\left(t^m,\ \underset{\mathbb{C}}{\operatorname{gen}}\left\{t^{\alpha_{n_1}},...,t^{\alpha_{n_k}}\right\}\right)=\sqrt{\frac{G\left(t^{\alpha_{n_0}},t^{\alpha_{n_1}},...,t^{\alpha_{n_k}}\right)}{G\left(t^{\alpha_{n_1}},...,t^{\alpha_{n_k}}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\det\left(1/\left(\alpha_{n_i}+\alpha_{n_j}\right)\right)_{0\le i,j\le k}}{\det\left(1/\left(\alpha_{n_i}+\alpha_{n_j}\right)\right)_{1\le i,j\le k}}}.$$

Si $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_k,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ ,\ b_k$ son números positivos, es válida la siguiente fórmula de Cauchy (cf. [11], Ch. XIII, §11, page 164):

$$\det\left(\frac{1}{a_j+b_j}\right)_{0\le j\le k}=\frac{\prod_{0\le i<j\le k}\left(a_i-a_j\right)\left(b_i-b_j\right)}{\prod_{0\le i,j\le k}\left(a_i+b_j\right)}.$$

Haciendo $a_j=b_j=\alpha_{n_j}+1/2$, $0\le j\le k$, obtenemos

$$\operatorname{dist}\left(t^m,\ \underset{\mathbb{C}}{\operatorname{gen}}\left\{t^{\alpha_{n_1}},...,t^{\alpha_{n_k}}\right\}\right)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{j=1}^{k}\frac{\left|\alpha_{n_j}-m\right|}{\alpha_{n_j}+m+1}.$$

Si $0\le u_n<1$, $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)>0\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n<+\infty$ (cf. [43], Ch. 15, Th. 15.5, page 322). Asumiendo (a), (b) o (c) probaremos que $\lim_{k\to+\infty}\prod_{j=1}^{k}\left|\alpha_j-n\right|/\left(\alpha_j+n+1\right)=0$, $n\in\mathbb{N}_0$. En el caso (a), como $0\le\left|\alpha_j-n\right|<\alpha_j+n+1$ para todo n, j escribimos

$$u_j=1-\left|\alpha_j-n\right|/\left(\alpha_j+n+1\right).$$

Si $n > 0$, como $\alpha_j \to +\infty$ existe j_n tal que si $j \geq j_n$ resulta

$$(\alpha_j + n + 1) / \alpha_j \leq 2n + 1 \quad y \quad \alpha_j \geq n.$$

En consecuencia $1/\alpha_j \leq u_j$ para $j \geq j_n$ y al ser $\sum \alpha_j^{-1}$ divergente y, salvo un número finito, una serie de términos positivos, $\sum u_j$ diverge. Asimismo existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_j / (1 + \alpha_j) \geq 1/2$ si $j \geq j_0$ y entonces $u_j \geq 1/(2\alpha_j)$, i.e. $\sum u_j$ diverge. En el caso (b), como $\alpha_j \to -1/2$ es, salvo un número finito de $j' s$, $u_j = (2\alpha_j + 1) / (\alpha_j + n + 1)$. Existe $\widetilde{j}_n$ tal que $u_j/2 \geq (\alpha_j + 1/2) / (2n+1)$ si $j \geq \widetilde{j}_n$ y $\sum u_j$ diverge. En el caso (c), sea $(\alpha_{j_k})_{k\geq 1}$ subsucesión de $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ y $\alpha > -1/2$ tal que $\alpha_{j_k} \to \alpha$. Si $n \in \mathbb{N}_0$ sean $r \in \mathbb{Q}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que $(n - \alpha) / (\alpha + n + 1) < r < 1$ y $(n - \alpha_{j_k}) / (\alpha_{j_k} + n + 1) < r$ si $k > k_0$. Como

$$\prod_{h=1}^{k} \frac{n - \alpha_{j_h}}{\alpha_{j_h} + n + 1} \leq r^{k-k_0} \cdot \prod_{h=1}^{k_0} \frac{n - \alpha_{j_h}}{\alpha_{j_h} + n + 1}$$

al hacer $k \to +\infty$, siendo n arbitrario, sigue la afirmación. $\square$

3.5. Hiperplanos soporte e hiperplanos paralelos. Distancia de puntos a hiperplanos. Operadores no extendibles.

(i) Sea E un espacio normado real, $A \neq \emptyset$. Si $u : E \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$ escribiremos $H_{u,\alpha} = \{f \in E : u(f) \leq \alpha\}$. Si $A^o \neq \emptyset$ y $H_{u,\alpha}$ es un hiperplano soporte de A (i.e. $A \subseteq H_{u,\alpha}$ y $A \cap \partial H_{u,\alpha} \neq \emptyset$) entonces $H_{u,\alpha}$ es cerrado.

(ii) Si E un espacio normado, $u \in E^*$ es no nulo y $f \in E$ entonces dist $(f, u^{-1}(\{0\})) = |u(f)| / \|u\|$.

(iii) En c_0, si $H = \{f : u(f) = 0\}$, donde $u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f_n$, dado $f \notin H$ no existe $g \in H$ tal que dist $(f, H) = \|f - g\|$.

(iv) En $c_0(\mathbb{R})$, la bola unitaria cerrada no tiene hiperplano soporte alguno.

(v) Sea E un espacio prehilbertiano real, A es un subconjunto compacto no vacío de E, $a_1,\ a_2 \in A$ tales que $\delta = \text{diam}\ A = \|a_1 - a_2\|$. Existen dos hiperplanos paralelos $H_1,\ H_2$ soportes de A, que contienen a a_1 y a_2 respectivamente, tales que $\text{dist}(H_1, H_2) = \delta$.

(vi) El operador $T : C^1_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi]) \to \mathbb{C},\ Tf = f'(0)$ es lineal y acotado si para cada $f \in C^1_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ escribimos $\|f\| = |f(0)| + \|df/dx\|_\infty$. El mismo no es extendible a un elemento de $L^2[-\pi,\pi]$.

Solución

(i) Si $g \in A \cap \partial H_{u,\alpha}$ entonces $H_{u,0}$ soporta a $A - g$ y este último conjunto tiene interior no vacío. Podemos suponer que $\alpha = 0$. Sea $B(f_0,\ \varepsilon) \subseteq A$ para ciertos $f_0 \in E,\ \varepsilon > 0$. Si $f \neq 0$ entonces $f_0 \pm (\varepsilon\ f)/(2\ \|f\|) \in A$ y

$$u(f_0 \pm (\varepsilon\ f)/(2\ \|f\|)) = u(f_0) \pm (\varepsilon\ u(f))/(2\ \|f\|) \leq 0,$$

o sea $|u(f)| \leq (2/\varepsilon)\ |u(f_0)|\ \|f\|$, desigualdad válida también si $f = 0$. Así u es acotada y sigue (i).

(ii) Si $f,\ g \in E$ tenemos $|u(f) - u(g)| = |u(f-g)| \leq \|u\|\ \|f-g\|$. Así dist $(f, u^{-1}(\{0\})) \geq |u(f)| / \|u\|$. Como $u^{-1}(\{0\})$ es cerrado podemos suponer que dist $(f, u^{-1}(\{0\})) > 0$. Por el teorema de Hahn - Banach existe $\psi \in (E/u^{-1}(\{0\}))^*$ tal que $\|\psi\| = 1/\|\pi(f)\|$ y $\psi(\pi(f)) = 1$, donde $\pi : E \to E/u^{-1}(\{0\})$ es la proyección al cociente. Entonces $\psi \circ \pi \in E^*$ y $\ker(\psi \circ \pi) = \ker(u)$, por lo cual ambos funcionales son linealmente dependientes. Es inmediato que $\psi \circ \pi = u/u(f)$ y, como $\|\pi(f)\| = \text{dist}\ (f, u^{-1}(\{0\}))$, si $g \in E$ tenemos

$$|u(g)| = |u(f)\ \psi(\pi(g))| \leq \frac{|u(f)|\,\|\pi(g)\|}{\|\pi(f)\|} \leq \frac{|u(f)|\,\|g\|}{\text{dist}\ (f, u^{-1}(\{0\})},$$

i.e. $\|u\| \leq |u(f)| / \text{dist}\ (f, u^{-1}(\{0\}))$.

(iii) Es fácil ver que $\|u\| = 2$. Si $f \notin H$ por (i), si existiese $g \in H$ tal que dist $(f, H) = \|f - g\|$, tendríamos $\|f-g\| = |u(f)|/2$, o sea $|u(f-g)| = 2\ \|f-g\|$. Entonces

$$2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\ |f_n - g_n| / \|f-g\| \leq 2$$

y, necesariamente, $|f_n - g_n| / \|f-g\| = 1$ para cada n, lo cual es imposible en c_0.

(iv) Supongamos que cl $B(0,1)$ tiene un hiperplano soporte $H_{u,\alpha}$. En particular, $u \in c_0^*$ y, como cl $B(0,1) \cap \partial H_{u,\alpha} \neq \emptyset$ y

$$\text{cl } B(0,1) \cap \partial H_{u,\alpha} \subseteq \partial B(0,1)$$

entonces $\alpha \in (-2,2)$ pues sabemos por (iii) que $|u(f)| < 2$ si $\|f\| = 1$. Pero, $u(0) = 0$ y si $0 < |\beta| < 2$ existe $f \in$ cl $B(0,1)$ tal que $|\beta| < |u(f)|$. Podemos escribir $\beta = u((\beta/u(f))\ f)$, o sea $(-2,2) = u\,[\text{cl } B(0,1)]$. Luego tenemos (iv).

(v) Basta considerar

$$H_1 = \left\{c \in H : \langle c - a_1, a_2 - a_1\rangle = \delta^2\right\},$$

$$H_2 = \left\{c \in H : \langle c - a_2, a_1 - a_2\rangle = \delta^2\right\}.$$

(vi) $\left(C^1_{\mathbb{C}}\left([-\pi,\pi]\right),\ \|\circ\|\right)$ es espacio normado y $T \in C^1_{\mathbb{C}}\left([-\pi,\pi]\right)^*$ pues, evidentemente, $\|T\| \leq 1$. Supongamos que existe $g \in L^2\left[-\pi,\pi\right]$ tal que $Tf = \int_{-\pi}^{\pi} fg\ dx$ para $f \in C^1_{\mathbb{C}}\left([-\pi,\pi]\right)$. Sería

$$\frac{im}{\sqrt{2\pi}} = T\left(\frac{\exp\left(imx\right)}{\sqrt{2\pi}}\right) = \left\langle g, \frac{\exp\left(-imx\right)}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Pero (11) indica la sucesión de coeficientes de g en la base ortonormal $\{\exp\left(imx\right)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $L^2\left[-\pi,\pi\right]$, la cual ha de ser acotada. Por esta contradicción T no es extendible a $L^2\left[-\pi,\pi\right]$. □

3.6. Conos convexos punteados salientes y órdenes compatibles con la estructura vectorial. Subespacios lineales generados por conos convexos en espacios vectoriales reales. Teorema de Krein. Extensión de formas lineales no negativas. Unidades de orden.

Sea E un espacio vectorial real, C un subconjunto de E.

(i) C es un cono convexo (cc) si y solo si C es un cono y $C + C \subseteq C$.

(ii) Si C es un cono convexo el subespacio lineal generado por C es $C-C$.

(iii) El mayor subespacio lineal de E contenido en un cono convexo C es $C \cap (-C)$.

(iv) Sea P un subconjunto no vacío de E. Dados $x,\ y \in E$ escribiremos $x \geq y$ si y solo si $x-y \in P$. Entonces P es un cono convexo *punteado saliente* (ccps) si y solo si $\geq$ es una relación de orden compatible con la estructura lineal de E. [2]

(v) Si $\omega(x,y)$ es una relación de orden compatible con la estructura lineal de E el conjunto $\Omega = \{x \in E : \omega(x,0)\}$ de elementos $\omega-$ positivos de E es un cono convexo punteado saliente.

(vi) Si $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 1$ entonces $E^* = P^* \cup (-P^*)$, donde P^* es el ccps de formas lineales sobre E no negativas sobre P.

(vii) (teorema de Krein) Sea $(E,\leq)$ espacio vectorial topológico munido de una relación $\geq$ de orden compatible con su estructura lineal. Sea M un subespacio vectorial de E, P el ccps de elementos positivos, $f : M \to \mathbb{R}$ una forma lineal positiva sobre M, i.e. $f(x) \geq 0$ si $x \in M \cap P$. Si $M \cap P^o \neq \emptyset$ existe una forma lineal positiva $\widetilde{f}$ sobre E que extiende a f.

(viii) Con $(E,\leq)$ como en (vii), un elemento $e \in E$ es una *unidad de orden* [3] si y solo si para cada $x \in E$ existe $\delta > 0$ tal que $e \pm t\, x \geq 0$ si $0 \leq t \leq \delta$.

(ix) Si $(E,\leq)$ admite una unidad de orden e, M es un subespacio vectorial de E que contiene a e y $f : M \to \mathbb{R}$ es una forma lineal positiva sobre M entonces existe una forma lineal positiva $\widetilde{f}$ sobre E que extiende a f.

(x) El espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ de funciones acotadas tiene unidades de orden. El espacio $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ no tiene unidades de orden.

(xi) Caracterizar las unidades de orden de $\mathcal{BC}_{\mathbb{R}}(T)$, donde T es un espacio localmente compacto.

[2] P se dice *punteado* si contiene al orígen y es *saliente* si el único subespacio lineal de E contenido en P es $\{0\}$.

[3] $e \in E$ es *unidad de orden* si para cada $x \in E$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n\,e \leq x \leq n\,e$.

(xii) Si X un espacio localmente compacto, sea $C_0(X)$ el espacio de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. Mostrar que $C_0(X)$, con el orden natural, puede no tener unidades de orden (V. Problema 3.7).

(xiii) Si $A \in \mathcal{S}(2, \mathbb{R})$ es una matriz 2×2 real simétrica, escribimos $A \geq 0$ sii A es semidefinida positiva. $(\mathcal{S}(2, \mathbb{R}), \leq)$ es un espacio vectorial ordenado. Caracterizar sus unidades de orden.

Solución

(i) Si C es un cono convexo y $x, y \in C$ entonces $x + y = 2(x/2 + y/2)$ y $C + C \subseteq C$. La recíproca es evidente.

(ii) Si C es un cono convexo y $\langle C \rangle$ es el subespacio lineal generado por C es claro que $C - C \subseteq \langle C \rangle$. Si $r \in \mathbb{R}$, $x, y, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in C$ entonces

$$r(x - \widetilde{x}) + (y - \widetilde{y}) = (r x + y) - (r \widetilde{x} + \widetilde{y})$$

y por (i) $r(x - \widetilde{x}) + (y - \widetilde{y}) \in C$. Luego $C - C$ es un subespacio vectorial de E y sigue (ii).

(iii) Si C es un cc, $x, y \in C \cap (-C)$ y $r \geq 0$ tenemos $r x + y \in C + C$ y, por (i), $r x + y \in C$. Además $-(r x + y) = r(-x) + (-y)$ y es aplicable el caso anterior. Si $r < 0$ tenemos $r x + y = (-r)(-x) + y$ y por el caso anterior $r x + y \in C$. Entonces $C \cap (-C)$ es un subespacio vectorial de E contenido en C. Si S es otro subespacio vectorial contenido en C, como $S = -S$ resulta $S \subseteq C \cap (-C)$.

(iv) Si P es un ccps entonces la relación $\geq$ es reflexiva porque P es punteado, es antisimétrica pues P es saliente y es transitiva por (i). Además $\geq$ es compatible con la linealidad de E porque P es un cono. Recíprocamente, si $\geq$ es una relación de orden compatible con la linealidad de E entonces P es un cono por la compatibilidad del orden bajo la multiplicación por escalares positivos. Por la monotonía del orden con la adición P es cerrado por sumas y, por ser cono es, en particular, convexo. Por la reflexividad P es punteado y, por la antisimetría, P es saliente.

(v) Sigue de (iv).

(vi) Claramente P^* es ccps; si $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 1$ y $\varphi \in E^* - P^*$ sea $x \in P$ tal que $\varphi(x) < 0$. Debe ser $x \neq 0$ y por hipótesis, si $y \in P$ existe $r \in \mathbb{R}$ único tal que $y = r\, x$. Si $r < 0$ entonces el subespacio generado por x estaría contenido en P. Pero P es saliente y debe ser $r \geq 0$. En consecuencia $\varphi(y) = r\ \varphi(x)$ y $\varphi(y) \leq 0$. Como y es arbitrario $-\varphi \in P^*$.

(vii) Si $x_0 \in M \cap P^o$ entonces $x_0 \neq 0$ porque P es saliente. Sea U un entorno de cero en E tal que $x_0 + U \subseteq P$ y sea $x \in E$. Por continuidad de la aplicación $s \to s\ (-x)$ de $\mathbb{R}$ en E existe $r > 0$ tal que $s\ (-x) \in U$ si $|s| \leq r$. En particular, $x_0 - r\ x \in x_0 + U$, i.e. $(1/r)\ x_0 \geq x$. Luego para cada $x \in E$ existe $y \in M$ tal que $x \leq y$, i.e. M es un conjunto *cofinal* de E. Escribiremos $p(x) = \inf_{y \in M / x \leq y}\ f(y),\ x \in E$. Entonces p está bien definida, es finita y no negativa. Sean $x_1,\ x_2 \in E,\ \varepsilon > 0$ e $y_1,\ y_2 \in M$ tales que $f(y_i) \leq p(x_i) + \varepsilon/2,\ i = 1,\ 2$. Entonces

$$f(y_1 + y_2) \leq p(x_1) + p(x_2) + \varepsilon$$

por la aditividad de f, $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ por la monotonía del orden respecto de la adición e $y_1 + y_2 \in M$ pues M es un subespacio. Luego $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2) + \varepsilon$ y por ser ε arbitrario p es subaditiva. Es fácil ver que $p(r\ x) = r\ p(x)$ si $x \in E,\ r \geq 0$, i.e. p es una seminorma. Es claro que $p(x) = f(x)$ si $x \in M$ y, por el teorema de Hahn - Banach, existe $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ lineal que extiende a f y $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$ si $x \in E$. Si $x \in P$, como $-x \leq 0$, $0 \in M$ y $f(0) = 0$ resulta $p(-x) \leq 0$. Entonces

$$\widetilde{f}(-x) = -\widetilde{f}(x) \leq p(-x) \leq 0$$

y $\widetilde{f}(x) \geq 0$, o sea $\widetilde{f}$ es positiva.

(viii) Sea $e \in E$ unidad de orden, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n\ e \leq x \leq n\ e$ y $0 \leq t \leq 1/n$. Entonces $-nt\ e \leq \pm t\ x \leq nt\ e$, de donde

$$(1 - nt)\ e \leq e \pm t\ x \leq (1 + nt)\ e.$$

Como evidentemente e debe ser positivo la condición es necesaria. Recíprocamente, sea $\delta > 0$ tal que $e \pm t\ x \geq 0$ si $0 \leq t \leq \delta$, $n \geq 1/\delta$ un entero positivo. Como $e \pm x/n \geq 0$ sigue (viii).

(ix) Si M contiene una unidad de orden entonces es cofinal, y estamos en las condiciones deducidas en el teorema de Krein.

(x) Cualquier función constante positiva es una unidad de orden de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Si $e \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ fuere unidad de orden deberá ser $e(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Más aún, si $x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ entonces $x/e \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Deducimos entonces que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ no tiene unidades de orden.

(xi) Veamos que $e \in \mathcal{BC}_{\mathbb{R}}(T)$ es unidad de orden si y solo si existe $r > 0$ tal que $e \geq r$. La condición es necesaria pues existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n\ e$. Recíprocamente, si $e \geq r$ y $r > 0$ para $x \in \mathcal{BC}_{\mathbb{R}}(T)$ y $t \in T$ escribimos

$$
\begin{aligned}
-e(t)\ \|x\|/r \leq -r\ \|x\|/r &= -\|x\| \\
&\leq x(t) \\
&\leq \|x\| = r\ \|x\|/r \leq e(t)\ \|x\|/r.
\end{aligned}
$$

Luego $|x(t)| \leq e(t)\ \|x\|/r \leq e(t)\left([\|x\|/r]+1\right)$ si $t \in T$ y e es unidad de orden.

(xii) Consideremos el espacio $C_0(\mathbb{Z})$, el que podemos identificar con el espacio de funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{m\to\infty} f(m) = 0$. En efecto, $\mathbb{Z}$ tiene la topología indiscreta, de modo que sus subespacios compactos son conjuntos finitos. Si $f \in C_0(\mathbb{Z})$ y $\varepsilon > 0$ resulta $|f(m)| \geq \varepsilon$ solamente para un número finito de enteros m. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $|m| \geq n_0$ en $\mathbb{Z}$ entonces $|f(m)| < \varepsilon$, i.e. $\sup_{|m|\geq n_0} |f(m)| \leq \varepsilon$ y, como ε es arbitrario, $\lim_{m\to\infty} f(m) = 0$. Si $g \in C_0(\mathbb{Z})$ fuese unidad de orden entonces $g \geq 0$. Más aún, si $f_m(n) = m\ \delta_{nm},\ n,\ m \in \mathbb{Z}$, y si $N_m \in \mathbb{N}$ es tal que $|f_m| \leq N_m\ g$ entonces $g(m) > 0$ si $m \neq 0$. Ahora, si $h(m) = g(m)^{1/2},\ m \in \mathbb{Z}$, tenemos $h \in C_0(\mathbb{Z})$ y no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|h| \leq N\ g$.

(xiii) Es claro que $(\mathcal{S}(2,\ \mathbb{R}), \leq)$ es un espacio vectorial ordenado. Indicando

$$
A = \left\| \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \right\|, \qquad U = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{matrix} \right\|,
$$

A es positiva si y solo si $a \geq 0,\ c \geq 0$ y $b^2 \leq a\ c$. Veremos que U es una unidad de orden si y solo si $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ y $\det(U) > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $-n\ U \leq A \leq n\ U$ debe ser $n\ \alpha - a \geq 0$. Si $\alpha \leq 0$ puede no ser posible determinar n en las condiciones establecidas. Por ello $\alpha > 0$ y, análogamente, $\gamma > 0$. Como

$$(n\beta - b)^2 \leq (n\alpha - a)(n\gamma - c) \quad y \quad (n\beta + b)^2 \leq (n\alpha + a)(n\gamma + c), \tag{12}$$

si $\det(U) = 0$ deducimos que

$$\det(A) \geq n \ |2b\beta - a\gamma - c\alpha| . \tag{13}$$

En consecuencia, como (13) es válido si reemplazamos n por enteros mayores, $2b\beta - a\gamma - c\alpha = 0$. Deberá ser entonces $2b = (a + c) / \sqrt{\alpha\gamma}$, lo cual no es en general cierto. Recíprocamente, si si $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ y $\det(U) > 0$ podemos determinar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \ \geq \text{máx}\{|a|/\alpha, \ |c|/\gamma\}$ y en las condiciones de (12) pues $\alpha \ \gamma > \beta^2$, obteniendo $-n \ U \leq A \leq n \ U$. $\square$

3.7. Construcciones de espacios de funciones continuas sobre un espacio localmente compacto subyacente. Familias totalmente acotadas. Total disconexión. Un espacio ideal maximal totalmente disconexo. Caracterización del rango esencial de una función.

(i) Sea X un espacio localmente compacto, X_∞ la compactación de X con un punto, $C_0(X)$ el espacio de funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto y $C_{\infty,0}(X)$ el espacio de funciones $f \in C(X_\infty)$ tales que $f(\infty) = 0$. Entonces, con las métricas usuales, $C_0(X)$ es un subespacio cerrado de $C_b(X)$ y los espacios de Banach $C_0(X)$ y $C_{\infty,0}(X)$ son isométricamente isomorfos. [4]

(ii) Una subfamilia $\mathfrak{F}$ de $C_0(X)$ es totalmente acotada sii $\mathfrak{F}$ es acotada, equicontinua y para todo $\varepsilon > 0$ hay un compacto K tal que $|f(x)| < \varepsilon$ si $f \in \mathfrak{F}$ y $x \in X - K$.

(iii) Un espacio compacto Hausdorff X es *totalmente disconexo*[5] sii $C(X)$ es la cápsula cerrada lineal de sus idempotentes hermitianos.

[4]V. Problemas 3.44 (iv) y 3.43(iii).

[5]Espacio *totalmente disconexo* es aquél en el que los conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados (*clopen´s*) son base de entornos de cada punto.

(iv) Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida finita, el espacio ideal maximal $\mathfrak{X}$ de $L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ es totalmente disconexo.

(v) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$ finita, $f \in L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Son equivalentes: (a) $\zeta \in \sigma(f)$.

(b) $0 = \sup\{\inf\{|f(x) - \zeta| : x \in X - \Delta\}, \Delta \in \Sigma, \mu(\Delta) = 0\}$.

(c) Si $\varepsilon > 0$, $\mu(f^{-1}(D(\zeta, \varepsilon)) > 0$. (d) $\zeta \in \operatorname{supp}(\upsilon)$, donde υ es la medida $\upsilon(\Theta) = \mu(f^{-1}(\Theta))$, definida para cada subconjunto boreliano Θ de $\mathbb{C}$.[6]

(vi) Con la notación de (v), fijado $f \in L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ la relación

$$M_f(g) = f \cdot g,\ g \in L^2(X, \Sigma, \mu),$$

define $M_f \in \mathcal{L}[L^2(X, \Sigma, \mu)]$. Entonces $\sigma_{ap}(M_f) = \operatorname{ess-ran}(f)$.

Solución

(i) Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de $C_0(X)$ convergente a $f \in C_b(X)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_{C_b(X)} \leq \varepsilon/2$. Dado $x \in X$ tenemos

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)|$$

$$\leq \|f - f_N\|_{C_b(X)} + |f_N(x)| \leq \varepsilon/2 + |f_N(x)|$$

y resulta $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_N(x)| \geq \varepsilon/2\}$. Por lo tanto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ deviene compacto por ser subespacio cerrado de un espacio compacto. Definimos ahora

$$T : C_{\infty,0}(X) \to C_0(X),\ Tf = f\,|_X .$$

Entonces T es un operador bien definido pues para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ resulta cerrado en X_∞ y, por lo tanto,

[6] El espectro de f también suele denominarse, en estos casos, *rango* $\mu-$ *esencial de* f, el que suele definirse también como

$$\operatorname{ess-ran}(f) = \bigcap\{\operatorname{cl} f(\Delta) : \Delta \in \Sigma, \mu(X - \Sigma) = 0\}.$$

compacto. Claramente T es un operador lineal isométrico. Bastará ver ahora, por el teorema de la función abierta, que T es suryectivo. Dada $g \in C_0(X)$ definimos $f : X_\infty \to \mathbb{C}$ como $f(x) = g(x)$ si $x \in X$ y $f(\infty) = 0$. Probando que $f \in C_{\infty,0}(X)$ tendremos $Tf = g$. Sea entonces U un abierto del plano complejo. Si $0 \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(0,\varepsilon) \subseteq U$ y

$$\{\infty\} \cup (X - \{x \in X : \ |g(x)| \geq \varepsilon\}) \subseteq f^{-1}[D(0,\varepsilon)] \subseteq f^{-1}(U).$$

Además $f^{-1}(U) \cap X = g^{-1}(U)$. Si $0 \notin U$ entonces $f^{-1}(U) = g^{-1}(U)$. En todo caso, $f^{-1}(U)$ es abierto.

(ii) Si $\mathfrak{F}$ es totalmente acotado es inmediato que es acotado y equicontinuo. Además, si $\varepsilon > 0$, $F \in \mathcal{P}_f(\mathfrak{F})$ y $\mathfrak{F} \subseteq \cup_{f \in F} B(f, \varepsilon/2)$ sea

$$K = \cup_{f \in F} \{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon/2\}.$$

Entonces K es compacto y, si $g \in \mathfrak{F}$, $x \in X - K$ y $f \in F$ es tal que $g \in B(f, \varepsilon/2)$ tenemos

$$|g(x)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x)| < \|f - g\|_{C_b(X)} + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Recíprocamente, existe $r > 0$ tal que $|h(y)| \leq r$ si $y \in X$ y $h \in \mathfrak{F}$. Dado $\xi > 0$ sea C compacto tal que $|h(y)| < \xi/2$ si $y \in X - C$ y $h \in \mathfrak{F}$. Por la equicontinuidad de $\mathfrak{F}$ y la compacidad de C hay un subconjunto finito $\{y_1, \ \dots\ , \ y_n\}$ de C y entornos abiertos U_{y_j} de y_j tales que $C \subseteq \cup_{j=1}^n U_{y_j}$ y $|h(y) - h(y_j)| < \xi/3$ si $y \in U_{y_j}$ y $h \in \mathfrak{F}$ para cada j. Asociamos a cada $h \in \mathfrak{F}$ la $n-$ upla $\overrightarrow{h} \in \prod_1^n \overline{D}(0,r)$, $\overrightarrow{h} = (h(y_1), \dots, h(y_n))$. Por la compacidad del conjunto $\mathfrak{W} = \mathrm{cl}\left\{\overrightarrow{h} : \ h \in \mathfrak{F}\right\}$ en $\mathbb{C}^n$ existe $G \in \mathcal{P}_f(\mathfrak{F})$ tal que $\mathfrak{W} \subseteq \cup_{k \in G} D\left(\overrightarrow{k}, \xi/3\right)$. Sea $h \in \mathfrak{F}$, $y \in X$ y $k \in G$ tal que $\overrightarrow{h} \in D\left(\overrightarrow{k}, \xi/3\right)$. Si $y \in X - C$ entonces

$$|h(y) - k(y)| \leq |h(y)| + |k(y)| < \xi.$$

Sino existe j, $1 \leq j \leq n$, tal que $y \in U_{y_j}$ y tenemos

$$|h(y) - k(y)| \leq |h(y) - h(y_j)| + |h(y_j) - k(y_j)| + |k(y_j) - k(y)| < \xi.$$

En definitiva $\mathfrak{F} \subseteq \cup_{k \in G} \overline{B}(k, \xi)$ y $\mathfrak{F}$ es totalmente acotado.

(iii) Sea $\mathcal{J}(X)$ la subclase de idempotentes hermitianos de $C(X)$. Como $\mathcal{J}(X) \subseteq C(X, \{0,1\})$ dada $f \in \mathcal{J}(X)$ es $f = \varkappa_{f^{-1}(\{1\})}$ y $f^{-1}(\{1\})$ es clopen. Por otra parte, si M es un subconjunto clopen de X entonces $\varkappa_M \in \mathcal{J}(X)$ y tenemos $\mathcal{J}(X) = \{\varkappa_M : \ M \in \mathcal{P}(X), \ M - \mathit{clopen}\}$. Sea $\mathcal{C}$ la cápsula cerrada lineal de $\mathcal{J}(X)$ en $C(X)$. Entonces $\mathcal{C}$ es una subálgebra cerrada, unitaria - como X es clopen $1 = \varkappa_M$ pertenece a $\mathcal{J}(X)$ - y autoadjunta. Además si $x_1, \ x_2$ son puntos distintos de X, por la separabilidad tienen entornos disjuntos U_1 y U_2 respectivamente. Sea N un entorno clopen de x_1 contenido en U_1. Entonces $\varkappa_N \in \mathcal{C}$ y separa a x_1 y x_2. Concluímos, por el teorema de Stone - Weierstrass, la necesidad de la condición. Recíprocamente, sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ un entorno abierto de x. Por el lema de Urysohn existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f \mid_{X-U} = 0$. Si $0 < \varepsilon < 1/2$ sea $g \in \mathrm{gen}_{C(X)} \mathcal{J}(X)$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$. Escribimos $g = \sum_{M \in F} z_M \ \varkappa_M$, donde $F \in \mathcal{P}_f(X)$, $\{z_M\}_{M \in F} \subseteq \mathbb{C}$ y M es clopen para cada $M \in F$. En particular, existe $\widetilde{M} \in F$ tal que $x \in \widetilde{M}$, de donde $\left|1 - z_{\widetilde{M}}\right| < \varepsilon$. Si $X - U \subseteq X - \cup F$ entonces $\widetilde{M} \subseteq \cup F \subseteq U$. Por el contrario, sea $y \in (X - U) \cap N$, para cierto $N \in F$. Tenemos $|z_N| = |g(y)| < \varepsilon$ y, si $N = \widetilde{M}$ entonces $1 \leq \left|1 - z_{\widetilde{M}}\right| + \left|z_{\widetilde{M}}\right| < 2\varepsilon < 1$, lo que es absurdo. Luego, como podemos suponer que F es una familia inyectiva, $y \notin \widetilde{M}$, i.e. $\widetilde{M} \subseteq U$.

(iv) Sea $G : L^\infty(X, \Sigma, \mu) \to C(\mathfrak{X})$ la transformada de Gelfand, $E \in \Sigma$. Entonces $G(\varkappa_E) = \varkappa_{G(\varkappa_{X-E})^{-1}(\{0\})}$ y, como $G(\varkappa_E) : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ es continua, $G(\varkappa_{X-E})^{-1}(\{0\})$ es clopen en $\mathfrak{X}$. Por otra parte, si $M \subseteq \mathfrak{X}$ es clopen entonces $\varkappa_M \in C(\mathfrak{X})$. Si $f_M = G^{-1}(\varkappa_M)$, $\sigma(f_M) = \mathrm{ran}(\varkappa_M)$ pues G es biyectiva. Si M es clopen no trivial es $\sigma(f_M) = \{0,1\}$. Con la misma notación, si $f_{M^c} = G^{-1}(\varkappa_{M^c})$, por ser G homomorfismo es

$$G(f_M \cdot f_{M^c}) = \varkappa_M \cdot \varkappa_{M^c} = 0, \ G(f_M + f_{M^c}) = \varkappa_M + \varkappa_{M^c} = 1 \,.$$

Como G es inyectiva sigue que $f_M + f_{M^c} = 1$ y $f_M \cdot f_{M^c} = 0$. Luego $f_M \neq 0$ sii $f_M = 1$ y $f_M = \varkappa_{f_M^{-1}(\{1\})}$. Queda probada, con la notación de (ii), la identidad $\mathcal{J}(\mathfrak{X}) = G(\{\varkappa_E : \ E \in \Sigma\})$. Como el subespacio de funciones simples es denso en $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ y G es un isomorfismo isométrico (cf. [13], Cap. 2, Th. 2.64, page 53), por (ii) sigue la tesis.

(v) Si $s = \sup\{\inf\{|f(x) - \zeta| : \ x \in X - \Delta\}, \ \Delta \in \Sigma, \ \mu(\Delta) = 0\}$ y existe $0 < \delta < s$, hay un conjunto $\Delta \in \Sigma$ tal que $\mu(\Delta) = 0$ y $|f - \zeta| > \delta$

sobre $X-\Delta$. Luego la función medible $1/(f-\zeta)$ deviene esencialmente acotada y $\zeta \notin \sigma(f)$, i.e. $(a) \Rightarrow (b)$. Ahora, si para algún $\varepsilon > 0$ es $\mu(f^{-1}(D(\zeta,\varepsilon)) = 0$ entonces $s \geq \varepsilon > 0$ y $(b) \Rightarrow (c)$. Si $\zeta \notin \operatorname{supp}(\upsilon)$ hay un abierto U en $\mathbb{C}$ que contiene a ζ tal que $\upsilon(\Theta) = 0$ para todo subconjunto boreliano Θ de U. Existe $r > 0$ tal que $D(\zeta, r) \subseteq U$,

$$\upsilon(D(\zeta,r)) = \mu\left(f^{-1}(D(\zeta,r))\right) = 0$$

y $(c) \Rightarrow (d)$. Finalmente, si $\zeta \in \rho(f)$ existe $t > 0$ tal que $|f-\zeta| \geq t$ a.e. $[\mu]$, i.e. $\upsilon(D(\zeta,t)) = 0$ y $\zeta \notin \operatorname{supp} \upsilon$, con lo que $(d) \Rightarrow (a)$.

(vi) Si $\alpha \notin \text{ess}-\text{ran}(f)$ sea $\Delta \in \Sigma$ tal que $\mu(X-\Delta) = 0$ y $\alpha \notin \text{cl } f(\Delta)$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\alpha - f(x)| \geq \varepsilon$ si $x \in \Delta$. Si $g \in L^2(X,\Sigma,\mu)$ y $x \in X$ sea $Ng(x) = g(x)/(f(x)-\alpha)$. Ng está bien definida ya que $\mu(X-\Delta) = 0$ y $|\alpha - f(x)| \geq \varepsilon$ si $x \in \Delta$. Además $Ng \in L^2(X,\Sigma,\mu)$ ya que $\int_X |Ng|^2 \, d\mu \leq \varepsilon^{-2} \|g\|_2^2$. Claramente $N \in \mathcal{L}[L^2(X,\Sigma,\mu)]$ y

$$\left(M_f - \alpha I_{L^2(X,\Sigma,\mu)}\right) \circ N = N \circ \left(M_f - \alpha I_{L^2(X,\Sigma,\mu)}\right) = I_{L^2(X,\Sigma,\mu)}$$

de modo que $\alpha \notin \sigma(M_f)$, i.e. $\sigma(M_f) \subseteq \text{ess}-\text{ran}(f)$. Por otra parte, si $\beta \in \text{ess}-\text{ran}(f)$ y $d > 0$ resulta $\mu(f^{-1}(D(\beta,d))) > 0$. Sino hacemos

$$\Lambda = \mathbb{C} - f^{-1}(D(\beta,d)),$$

resultando $\Lambda \in \Sigma$, $\mu(X-\Lambda) = 0$ y $\beta \notin \text{cl } f(\Lambda)$, lo que es falso. Para cada $n \in \mathbb{N}$ por la $\sigma-$ finitud de μ hay un subconjunto K_n de $f^{-1}(D(\beta,1/n))$ perteneciente a Σ de medida finita y positiva. Si escribimos $g_n = \mu(K_n)^{-1/2} \, \varkappa_{K_n}$ tenemos $\|g_n\|_2 = 1$ y

$$\left\|\left(M_f - \beta I_{L^2(X,\Sigma,\mu)}\right) g_n\right\|_2^2 \leq 1/n^2,$$

de modo que $\beta \in \sigma_{ap}(M_f)$. $\square$

3.8. Operadores de transporte unilateral, de multiplicación, de composición, isométricos. Espacios de Banach funcionales. Consistencia algebraica. Continuidad e invertibilidad de operadores de composición.

(i) Un operador lineal acotado S sobre un espacio de Hilbert H se dice *transporte unilateral* si es isométrico y $\cap_{k=1}^{\infty} S^k(H) = \{0\}$. La dimensión μ de $S(H)^{\perp}$ se denomina *multiplicidad de* S. Si μ es finita S^* es realizable como un *operador de composición* sobre $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (cf. [10]).

(ii) Sea $(Cf)(t) = f(t+1)$, $f \in L^2(0, +\infty)$. El operador adjunto C^* es un transporte unilateral de multiplicidad infinita.

(iii) Sea $\mathcal{Y}$ un *espacio de Banach funcional* [7] sobre un conjunto X. Si $h : X \to \mathbb{C}$ es una función tal que $f \cdot h \in \mathcal{Y}$ para cada $f \in \mathcal{Y}$ consideremos el *operador multiplicador* $M_h f = f \cdot h$. Dado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, A es operador multiplicador sii cada evaluación $\delta_x \in \mathcal{Y}^*$ no nula - $x \in \mathcal{Y}$ - es autovector de A^*. Por otra parte, si $M_h \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ entonces h es acotada.

(iv) Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{Y}$ un espacio funcional de Banach sobre X. Supongamos que (a) el operador $M_z f = zf(z)$, $f \in \mathcal{Y}$, es acotado. (b) Que $\mathbb{C}[z]$ es denso en $\mathcal{Y}$ de manera que si $f,\ g,\ f \cdot g \in \mathcal{Y}$ hay sucesiones $\{p_n\}_{n \geq 1}$ y $\{q_n\}_{n \geq 1}$ es $\mathbb{C}[z]$ tales que $p_n \to f$, $q_n \to g$ y $p_n \cdot q_n \to f \cdot g$. Entonces $\mathcal{Y}$ es *algebraicamente consistente*[8] sii los únicos autovectores de M_z^* son múltiplos de evaluaciones.

(v) Si $\mathcal{Y}$ es un espacio funcional de Banach algebraicamente consistente sobre un conjunto X y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, A es operador de composición sii $A(f \cdot g) = A(f) \cdot A(g)$ cuando $f,\ g,\ f \cdot g \in \mathcal{Y}$.

(vi) Si X es un espacio compacto Hausdorff cada aplicación $\varphi : X \to X$ continua determina un operador de composición $C_\varphi \in \mathcal{B}[C_{\mathbb{C}}(X)]$. Determinar cuándo C_φ es inversible.

(vii) Sea $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ una función medible Lebesgue, $1 \leq p < +\infty$. Indicaremos m a la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y m_φ a la medida definida para cada subconjunto medible Lebesgue E de $[0,1]$ mediante $m_\varphi(E) = m(\varphi^{-1}(E))$. Entonces $C_\varphi \in \mathcal{B}(L^p_{dm}[0,1])$ sii $m_\varphi \ll m$ y la derivada de Radon - Nikodym dm_φ/dm es esencialmente acotada, en cuyo caso $\|C_\varphi\| = \|dm_\varphi/dm\|_\infty^{1/p}$.

[7] Un *espacio de Banach funcional sobre un conjunto* X es un espacio de Banach de funciones sobre X, en el que las operaciones vectoriales son puntuales, en el que la clase de funciones subyacente es separadora de puntos de X y en el que las evaluaciones inducidas por elementos de X son continuas.

[8] Un espacio funcional de Banach $\mathcal{Y}$ se dice *algebraicamente consistente* si todo funcional lineal no nulo κ sobre $\mathcal{Y}$ tal que $\kappa(f \cdot g) = \kappa(f) \cdot \kappa(g)$ cuando $f,\ g,\ f \cdot g \in \mathcal{Y}$ es, necesariamente, una evaluación.

(viii) Sea X conjunto no vacío, Ω una $\sigma-$ álgebra de subconjuntos de X, μ, ν medidas $\sigma-$ finitas sobre (X, Ω). Si $\mu \ll \nu$ sea

$$V : L^2(X, \Omega, \mu) \to L^2(X, \Omega, \nu), \ Vf = \sqrt{d\mu/d\nu} \cdot f,$$

donde $d\mu/d\nu$ es la derivada de Radon - Nikodym de μ respecto de ν. V es una isometría, siendo isomorfismo sii $\nu \ll \mu$.

(ix) Sea $\mathcal{A}$ el subespacio de $C_{\mathbb{C}}(\overline{D})$ de funciones analíticas sobre D, donde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sea $\{\varphi_j\}_{0 \le j \le n} \subseteq \mathcal{A}$ un conjunto finito de funciones distintas que inducen operadores de composición acotados $\{C_{\varphi_j}\}_{0 \le j \le n}$ sobre $\mathcal{A}$. Si $C_{\varphi_0} = \sum_{j=1}^n a_j \ C_{\varphi_j}$ para ciertos escalares no nulos $\{a_j\}_{1 \le j \le n}$ entonces $n = a_1 = 1$ y $\varphi_0 = \varphi_1$.

Solución

(i) No puede ser $\mu = 0$ pues, entonces, $\cap_{k=1}^{\infty} S^k(H) = H$. Supongamos $\mu = 1$ y sea $g \in S(H)^{\perp}$ unitario. Como $H = S(H) \bigoplus (\mathbb{C} \cdot g)$ y $S^* \circ S = Id_H$ es $S(H) = S^2(H) \bigoplus (\mathbb{C} \cdot Sg)$. Entonces

$$H = S^2(H) \bigoplus (\mathbb{C} \cdot Sg) \bigoplus (\mathbb{C} \cdot g),$$

$$\langle Sg, g \rangle = 0, \ (\mathbb{C} \cdot Sg) \bigoplus (\mathbb{C} \cdot g) = H \ominus S^2(H).$$

Inductivamente, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$H = S^n(H) \bigoplus \bigoplus_{j=0}^{n-1} \left(\mathbb{C} \cdot S^j g\right), \tag{14}$$

$$\left\langle S^j g, S^k g \right\rangle = \delta_{j,k}, \ 0 \le j, \ k < n,$$

$$\bigoplus_{j=0}^{n-1} \left(\mathbb{C} \cdot S^j g\right) = H \ominus S^n(H.)$$

Evidentemente, $\{S^j g\}_{j \ge 0}$ es un conjunto ortonormal. Si $f \perp S^j g$ para todo j y $f \neq 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $f \notin S^n(H)$. Por (14) existe

$F \in S^n(H)$ tal que $f = F + \sum_{j=0}^{n-1} \langle f, S^j g \rangle S^j g$. Como $\langle f, S^j g \rangle = 0$ para cada j tenemos una contradicción, de donde $f = 0$ y $\{S^j g\}_{j \geq 0}$ es base de H, i.e. $H = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (\mathbb{C} \cdot S^j g)$. En el caso general, hay vectores ortogonales unitarios $g_1, \ \dots \ , \ g_\mu$ tales que $\{S^j g_k\}_{j \geq 0, 1 \leq k \leq \mu}$ es base ortonormal de H. Notemos que si $1 \leq k \leq \mu$ resulta

$$S^* \left(S^j g_k \right) = \begin{cases} 0 & si \quad j = 0, \\ \\ S^{j-1} g_k & si \quad j \geq 1. \end{cases} \tag{15}$$

Identificando H con $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ por (15) S^* se identifica con el operador $\Sigma \in \mathcal{B}\left[l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})\right]$ dado como

$$\Sigma\left(f_1, \ f_2, \ \dots\right) = \left(f_{\mu+1}, \ f_{\mu+2}, \ \dots\right).$$

Por lo tanto, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la función $\varphi(n) = n + \mu$ entonces $\Sigma = C_\varphi$, donde $C_\varphi f = f \circ \varphi, \ f \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

(ii) Es fácil ver que $(C^* f)(t) = \varkappa_{(1,+\infty)}(t) \ f(t-1)$. En consecuencia

$$\left(C^{*k} f\right)(t) = \varkappa_{(k,+\infty)}(t) \ f(t-k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, de modo que $\cap_{k=1}^{\infty} \operatorname{ran} C^{*k} = \{0\}$. Como

$$\left\{ f \in L^2(0, +\infty) : \ \operatorname{supp}(f) \subseteq (0,1) \right\} \subseteq \left(\operatorname{ran} C^*\right)^\perp$$

C^* tiene multiplicidad infinita.

(iii) Sea $A = M_h$ para alguna función $h : X \to \mathbb{C}$. Si $x \in X, \ \delta_x \neq 0, \ f \in \mathcal{Y}$ tenemos

$$(A^* \delta_x) f = \delta_x (Af) = h(x) \cdot f(x) = h(x) \delta_x f = (h(x) \delta_x) f.$$

Como f es arbitraria $A^* \delta_x = h(x) \delta_x$ y la condición es necesaria. Recíprocamente, como $\mathcal{Y}$ es separadora de puntos de X el conjunto $Y = \{x \in X : \ \delta_x \neq 0\}$ es, salvo eventualmente un solo punto, todo X. Por hipótesis, para cada $x \in Y$ existe un único $\alpha_x \in \mathbb{C}$ tal que $A^* \delta_x = \alpha_x \cdot \delta_x$. Sea $h(x) = \varkappa_Y(x) \ \alpha_x, \ x \in X$. Si $f \in \mathcal{Y}$ y $x \in Y$ es

$$Af(x) = \delta_x (Af) = (A^* \delta_x) f = \alpha_x \cdot \delta_x f = h(x) \cdot f(x) = (h \cdot f)(x).$$

Si $\delta_x = 0$ entonces

$$Af(x) = \delta_x(Af) = 0 = 0 \cdot f(x) = (h \cdot f)(x).$$

En consecuencia $Af = h \cdot f \in \mathcal{Y}$ y, como f es arbitraria, $A = M_h$. En consecuencia, si $M_h \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y $x \in Y$ obtenemos

$$|h(x)| = \|h(x) \cdot \delta_x\| / \|\delta_x\| = \|A^*(\delta_x / \|\delta_x\|)\| \leq \|A^*\|$$

y concluímos que h es acotada.

(iv) Si $\varphi \in \mathcal{Y}^*$ es autovector de M_z^* existe $c_\varphi \in \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(zf(z)) = c_\varphi \cdot \varphi(f) \quad si \quad f \in \mathcal{Y}.$$

En consecuencia

$$\varphi(z) = c_\varphi \cdot \varphi(1), \ \varphi\left(z^2\right) = c_\varphi^2 \cdot \varphi(1), \ \ldots$$

y $\varphi(p) = \varphi(1) \cdot p(c_\varphi)$ para todo $p \in \mathbb{C}[z]$. Como $\varphi \neq 0$, por la densidad de $\mathbb{C}[z]$ en $\mathcal{Y}$ es $\varphi(1) \neq 0$ y no perdemos generalidad si asumimos que $\varphi(1) = 1$. En consecuencia $\varphi\ |_{\mathbb{C}[z]}$ es homomorfismo. Por (a) y (b) sigue que $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$ toda vez que $f, \ g, \ f \cdot g \in \mathcal{Y}$. Si $\mathcal{Y}$ es algebraicamente consistente sigue la necesidad. Recíprocamente, sea $\kappa \in \mathcal{Y}^*$ no nulo tal que $\kappa(f \cdot g) = \kappa(f) \cdot \kappa(g)$ si $f, \ g, \ f \cdot g \in \mathcal{Y}$. Si $h \in \mathcal{Y}$, como $z, \ h, \ z \cdot h(z) \in \mathcal{Y}$ tenemos

$$(M_z^* \kappa) h = \kappa(M_z h) = \kappa(z \cdot h(z)) = \kappa(z) \cdot \kappa(h) = (\kappa(z) \cdot \kappa)(h)$$

y $M_z^* \kappa = \kappa(z) \cdot \kappa$. Por hipótesis $\kappa = a \cdot \delta_w$ para ciertos $w \in X$ y $a \in \mathbb{C}$. En particular, como $\kappa(1) = 1$ es $a = 1$ e $\mathcal{Y}$ deviene algebraicamente consistente.

(v) La necesidad es inmediata. Recíprocamente, sea $x \in X$ e indiquemos $\omega(x) h = A(h)x, \ h \in \mathcal{Y}$. $\omega(x)$ es lineal y si $f, \ g, \ f \cdot g \in \mathcal{Y}$ obtenemos

$$\omega(x)(f \cdot g) = A(f \cdot g) x = (Af \cdot Ag) x$$

$$= A(f) x \cdot A(g) x = \omega(x) f \cdot \omega(x) g.$$

Como $\mathcal{Y}$ es espacio funcional de Banach algebraicamente consistente existe un único $\varphi(x) \in X$ tal que $\omega(x) = \delta_{\varphi(x)}$. Queda definida una aplicación $\varphi : X \to X$ y si $h \in \mathcal{Y}$ y $x \in X$ es

$$A(h)\,x = \omega(x)\,h = \delta_{\varphi(x)}h = h(\varphi(x)) = (C_\varphi h)\,x.$$

Luego $h \circ \varphi = A(h)$, i.e. $h \circ \varphi \in \mathcal{Y}$ y siendo h arbitrario $A = C_\varphi$ se realiza como operador de composición.

(vi) Notemos que si X es un espacio compacto Hausdorff $C_{\mathbb{C}}(X)$ es algebraicamente consistente (cf. [42], Ch. 11, Ex. 11.13(a), page 271 - V. Problema 3.21). Si $\varphi : X \to X$ es continua, C_φ es inversible sii φ es biyectiva (cf. [10], Ch. 1, Th.1.6, page 5).

(vii) Supongamos $C_\varphi \in \mathcal{B}(L^p_{dm}[0,1])$ y sea $E \subseteq [0,1]$ un conjunto de medida de Lebesgue nula.

$$0 = C_\varphi 0 = C_\varphi \varkappa_E = \varkappa_{\varphi^{-1}(E)} \Rightarrow m_\varphi(E) = m\left(\varphi^{-1}(E)\right) = 0.$$

Siendo E arbitrario $m_\varphi \ll m$. Si $f \in L^1_{dm}[0,1]$ es

$$\|C_\varphi f\|_p^p = \int_0^1 |C_\varphi f|^p \, dm = \int_0^1 |f|^p \, dm_\varphi = \int_0^1 |f|^p \,(dm_\varphi/dm)\ dm. \tag{16}$$

Usando (16) y que $dm_\varphi/dm \in L^1_{dm}[0,1]$, para a.e. $a \in [0,1]$ tenemos

$$\begin{aligned}(dm_\varphi/dm)(a) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} (dm_\varphi/dm)\ dm \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 \left|(2\varepsilon)^{-1/p}\ \ \varkappa_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}\right|^p (dm_\varphi/dm)\ dm \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\|C_\varphi\left[(2\varepsilon)^{-1/p}\ \ \varkappa_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}\right]\right\|_p^p \le \|C_\varphi\|^p,\end{aligned}$$

i.e. $dm_\varphi/dm \in L^1_{dm}[0,1]$ y $\|dm_\varphi/dm\|_\infty \le \|C_\varphi\|^p$. Si $C_\varphi \neq 0$ sea $0 < \delta < \|C_\varphi\|^p$ y sea $f \in L^1_{dm}[0,1]$ unitario tal que $\|C_\varphi f\|_p^p > \delta$. Si $dm_\varphi/dm \le \delta$ a.e. - notar que $dm_\varphi/dm \ge 0$ a.e. - por (16) es

$$\delta < \int_0^1 |f|^p \,(dm_\varphi/dm)\ dm \le \delta,$$

lo que es absurdo. Entonces $m\{dm_\varphi/dm > \delta\} > 0$ y $\delta \leq \|dm_\varphi/dm\|_\infty$. Como δ es arbitrario $\|dm_\varphi/dm\|_\infty = \|C_\varphi\|^p$. Recíprocamente, por (16) para $g \in L^p_{dm}[0,1]$ obtenemos

$$\int_0^1 |C_\varphi g|^p \, dm = \int_0^1 |g|^p \left(dm_\varphi/dm\right) \, dm \leq \|dm_\varphi/dm\|_\infty \ \|g\|_p^p$$

y C_φ es acotado.

(viii) Si $f \in L^2(X,\Omega,\mu)$ claramente Vf es medible y

$$\int_X |Vf|^2 \, d\nu = \int_X |f|^2 \, d\mu/d\nu \, d\nu = \int_X |f|^2 \, d\mu,$$

i.e. V es isometría. Si V es isomorfismo, como su rango es cerrado entonces será suryectiva. Sea $E \in \Omega$ tal que $\mu(E) = 0$ y supongamos $\nu(E) > 0$. Por la $\sigma-$ finitud de ν podemos suponer que $\nu(E)$ es finita, i.e. $\varkappa_E \in L^2(X,\Omega,\nu)$ y existe $g \in L^2(X,\Omega,\mu)$ tal que $Vg = \varkappa_E$. Entonces

$$\mu(E) = \int_E g \cdot \sqrt{d\mu/d\nu} \, d\mu = 0 \Rightarrow g \cdot \sqrt{d\mu/d\nu} = 0 \text{ a.e. } [\mu].$$

Debe ser $\mu(\{g \neq 0\}) > 0$ y $\sqrt{d\mu/d\nu} \,|_{\{g\neq 0\}} \equiv 0$. Luego

$$0 < \mu(\{g \neq 0\}) = \int_{\{g\neq 0\}} d\mu/d\nu \, d\nu = 0,$$

lo cual es absurdo. Entonces $\nu(E) = 0$ y la condición es necesaria. Recíprocamente, si $G \in \Omega,\ G \subseteq \{d\mu/d\nu = 0\}$ es

$$\mu(G) = \int_G d\mu/d\nu \, d\nu = 0.$$

Como μ es $\sigma-$ finita hay una sucesión creciente $\{G_n\}_{n\geq 1} \subseteq \Omega$ de conjuntos de $\mu-$ medida finita cuya unión es $\{d\mu/d\nu = 0\}$. Debe ser entonces $\mu(\{d\mu/d\nu = 0\}) = 0$. Como $\nu \ll \mu$ resulta $\nu(\{d\mu/d\nu = 0\})$ y dado $h \in L^2(X,\Omega,\nu)$ la función $h/\sqrt{d\mu/d\nu}$ está definida a.e. $[\nu]$ y es medible. Además

$$\int_X \left|h/\sqrt{d\mu/d\nu}\right|^2 \, d\mu = \int_X |h|^2 \, d\nu,$$

i.e. $h/\sqrt{d\mu/d\nu} \in L^2(X,\Omega,\mu)$ y $V\left(h/\sqrt{d\mu/d\nu}\right) = h$, con lo que V es suryectiva. Finalmente la tesis sigue por el teorema de la función abierta.

(ix) Sea $C_{\varphi_0} = \sum_{j=1}^n a_j\, C_{\varphi_j}$ para ciertos escalares no nulos $\{a_j\}_{1\le j\le n}$, $z \in \overline{D}$. Entonces

$$\delta_{\varphi_0(z)} = C^*_{\varphi_0}(\delta_z) = \left(\sum_{j=1}^n \overline{a_j}\; C^*_{\varphi_j}\right)(\delta_z) = \sum_{j=1}^n \overline{a_j}\; \delta_{\varphi_j(z)}. \tag{17}$$

Sean $w,\ w_1,\ w_2$ puntos distintos de $\overline{D}$ y $b_1,\ b_2 \in \mathbb{C}$. El polinomio

$$p = p(u) = \frac{(u-w)\,(u-w_1)}{(w_2-w)\,(w_2-w_1)}$$

verifica $p(w) = p(w_1) = 0$ y $p(w_2) = 1$. Si $\delta_w = b_1\ \delta_{w_1} + b_2\ \delta_{w_2}$ deducimos $b_2 = 0$ y $\delta_w = b_1\ \delta_{w_1}$. Considerando la función constante 1 obtenemos $b_1 = 1$ y $\delta_w = \delta_{w_1}$, de donde necesariamente $w = w_1$. Más generalmente, con un razonamiento análogo si $w \in \overline{D},\ n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{w_0} = b_1\ \delta_{w_1} + ... + b_n\ \delta_{w_n},$$

$\{w_j\}_{1\le j\le n}$ es un subconjunto de n elementos de $\overline{D}$ y $\{b_j\}_{1\le j\le n} \subseteq \mathbb{C}$ entonces $n = b_1 = 1$ y $w_0 = w_1$. Notemos que

$$\sharp\{z \in D:\ \sharp\{\varphi_0(z),\ ...\ ,\ \varphi_n(z)\} \le n\} < \infty,$$

pues en caso contrario, por el princípio de prolongación analítica, ha de ser $\varphi_i \equiv \varphi_j$ para al menos un par de índices diferentes, en contradicción con la hipótesis. Por (17) y la observación anterior, sigue (viii). □

3.9. Sobre números aproximantes.

Si I es un conjunto no vacío, $z \in l^\infty(I,\mathbb{C})$ y $n \in \mathbb{N}$ introducimos los *números aproximantes de* z como

$$a_n(z) = \inf\{\|z-w\|_\infty :\ w \in l^\infty(I,\mathbb{C}),\ \sharp\,\mathrm{supp}\,(w) < n\}.$$

(i) $\{a_n(z)\}_{n\ge 1}$ es una sucesión decreciente para cada $z \in l^\infty(I,\mathbb{C})$.

(ii) Si $z = \{z_n\}_{n\geq 1}$ y $\{|z_n|\}_{n\geq 1}$ es decreciente entonces $a_n(z) = |z_{n+1}|$ para cada n.

(iii) Para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in l^\infty(I, \mathbb{C})$ es

$$a_n(z) = \inf\{c : \ c \geq 0, \ \sharp\{i \in I \mid |z_i| \geq c\} < n\}.$$

(iv) Sean $z, \ w \in l^\infty(I, \mathbb{C})$ y $m, \ n \in \mathbb{N}$. Son válidas las desigualdades:

(iv)(1) $a_{m+n-1}(z + w) \leq a_m(z) + a_n(w)$.

(iv)(2) $a_{m+n-1}(z \cdot w) \leq a_m(z) \ a_n(w)$.

Solución

(i) Inmediato.

(ii) Fijado $n \in \mathbb{N}$, con $e_j = (\delta_{ij})_{i\geq 1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\left\| z - \sum_{j=1}^{n} z_j \ e_j \right\|_\infty = |z_{n+1}| \geq a_n(z).$$

Si $k_1 < ... < k_n$ en $\mathbb{N}$, $\{w_{k_j}\}_{1\leq j\leq n} \subseteq \mathbb{C} - \{0\}$ y $w = \sum_{j=1}^n w_{k_j} \ e_{k_j}$ resulta

$$\|z - w\|_\infty = \text{máx}\left\{\max_{1\leq j\leq n} \left|z_{k_j} - w_{k_j}\right|, \ |z_l|\right\}, \tag{18}$$

donde $l = \text{mín}\, \mathbb{N} - \{k_j\}_{1\leq j\leq n}$. Si $\text{supp}\,(w) \subseteq \{1, \ ... \ , \ n\}$ deducimos

$$\|z - w\|_\infty = \text{máx}\left\{\max_{1\leq j\leq n} \left|z_{k_j} - w_{k_j}\right|, \ |z_{n+1}|\right\} \geq |z_{n+1}|.$$

Si $\text{supp}\,(w) \subseteq \{n+1, \ n+2, \ ...\}$ entonces

$$\|z - w\|_\infty = \text{máx}\left\{\max_{1\leq j\leq n} \left|z_{k_j} - w_{k_j}\right|, \ |z_1|\right\} \geq |z_1| \geq |z_{n+1}|.$$

Si $\text{supp}\,(w) \cap \{1, \ ... \ , \ n\} \neq \emptyset$ y $\text{supp}\,(w) \cap \{n+1, \ n+2, \ ...\} \neq \emptyset$ entonces $1 \leq l \leq n$ y por (18) es $\|z - w\|_\infty \geq |z_l| \geq |z_{n+1}|$. En definitiva $a_n(z) \geq |z_{n+1}|$ pues w es arbitrario.

(iii) Fijado n sea $\gamma_n = \inf A$, $A = \{c : c \geq 0, \sharp\{i \in I \mid |z_i| > c\} < n\}$. Dado $c \in A$ sean $i_1 < \ ... < i_s$ tales que $|z_{i_j}| > c$ para cada j y $s < n$ en $\mathbb{N}$. Con $e_k = (\delta_{kh})_{h \in I}$, $k \in I$, obtenemos

$$a_n(z) \leq \left\| z - \sum_{j=1}^{s} z_{i_j} \ e_{i_j} \right\|_\infty = \sup_{l \in I - \{i_j\}_{1 \leq j \leq s}} |z_l| \leq c.$$

Como c es arbitrario $a_n(z) \leq \gamma_n$. Si $\varepsilon > 0$ existe $w \in l^\infty(I, \mathbb{C})$ tal que $\sharp \operatorname{supp}(w) < n$ y $\|z - w\|_\infty < a_n(z) + \varepsilon$. Haciendo $\widetilde{c} = \sup_{l \notin \operatorname{supp}(w)} |z_l|$ sigue que

$$\widetilde{c} \leq \|z - w\|_\infty < a_n(z) + \varepsilon,$$

$$\sharp\{i \in I : \ |z_i| > \widetilde{c}\} \leq \sharp \operatorname{supp}(w) < n$$

y $\widetilde{c} \geq \gamma_n$. Como ε es arbitrario sigue (iii).

(iv) Dados $z, \ w \in l^\infty(I, \mathbb{C})$ y $m, \ n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ sean $u, \ v \in l^\infty(I, \mathbb{C})$ tales que

$$\|z - u\|_\infty < a_m(z) + \varepsilon/2, \ \sharp \operatorname{supp}(u) < m,$$

$$\|w - v\|_\infty < a_n(w) + \varepsilon/2, \ \sharp \operatorname{supp}(v) < n.$$

Tenemos

$$\|z + w - u - v\| \leq \|z - u\|_\infty + \|w - v\|_\infty \tag{19}$$

$$< a_m(z) + a_n(w) + \varepsilon,$$

$$(a_m(z) + \varepsilon/2) \ (a_n(w) + \varepsilon/2) > \|z - u\|_\infty \|w - v\|_\infty \tag{20}$$

$$\geq \|(z - u) \cdot (w - v)\|_\infty$$

$$= \|z \cdot w - (u \cdot w + v \cdot z - u \cdot v)\|_\infty.$$

Pero $\operatorname{supp}(u+v)\cup\operatorname{supp}(u\cdot w+v\cdot z-u\cdot v)\subseteq\operatorname{supp}(u)\cup\operatorname{supp}(v)$, de modo que

$$\text{máx}\left\{\sharp\operatorname{supp}(u+v),\ \sharp\operatorname{supp}(u\cdot w+v\cdot z-u\cdot v)\right\}\leq n+m-2.$$

Por (19) y (20) obtenemos

$$a_{n+m-1}(z+w)<a_m(z)+a_n(w)+\varepsilon,$$

$$a_{n+m-1}(z\cdot w)<(a_m(z)+\varepsilon/2)\ (a_n(w)+\varepsilon/2).$$

Como ε es arbitrario resulta la tesis. □

3.10. Sobre un espacio normado no completo (de Beurling).

Sea Ω el conjunto de funciones sobre $\mathbb{R}$, Lebesgue integrables, finitas, no nulas, decrecientes en $[0,+\infty)$, pares y no negativas. Sea $\mathcal{A}$ la clase de funciones medibles Lebesgue f sobre $\mathbb{R}$ para las que existe $w\in\Omega$ tal que $f^2/w\in\mathrm{L}^1_{dt}(\mathbb{R})$. Si $f\in\mathcal{A}$ escribiremos $\mathrm{N}_B(f)=\inf_{w\in\Omega}\sqrt{\mathrm{V}(w)\cdot\mathrm{I}_f(w)}$, donde[9] para cada $w\in\Omega$ es

$$\mathrm{V}(w)=w(0)+\|w\|_1,\ \mathrm{I}_f(w)=\int_{\mathbb{R}}|f|^2/w\ dt.$$

(i) $\Omega\subseteq\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A},\mathrm{N}_B)$ es un espacio vectorial complejo seminormado.

(ii) $\mathcal{A}\subseteq\mathrm{L}^1_{dt}(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^2_{dt}(\mathbb{R})$. Más aún, si $f\in\mathcal{A}$ entonces

$$\sqrt{\|f\|_1^2+\|f\|_2^2}\leq\mathrm{N}_B(f)$$

y $(\mathcal{A},\ \mathrm{N}_B)$ es un espacio normado.

(iii) $(\mathcal{A},\ \mathrm{N}_B)$ no es espacio de Banach.[10]

Solución

[9]Convenimos que $0\cdot(+\infty)=0$.

[10]Con el producto de convolución y el cociente de $\mathcal{A}$ por la clase de funciones nulas a.e., se introduce la llamada *álgebra de Banach - Beurling*.

(i) Evidentemente $\Omega \subseteq \mathcal{A}$. Dada $f \in \mathcal{A}$ probaremos que $\mathrm{N}_B(f) = \mathrm{M}_B(f)$, donde $\mathrm{M}_B(f) = \inf_{\eta\in\Omega} \left(\mathrm{V}\left(\eta\right) + \mathrm{I}_f\left(\eta\right)\right)/2$. En efecto, si $\xi \in \Omega$ es

$$2\left(\mathrm{V}\left(\xi\right)\int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/\xi\ dt\right)^{1/2} \leq \mathrm{V}\left(\xi\right) + \int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/\xi\ dt.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{N}_B\left(f\right) \leq \left(\mathrm{V}\left(\xi\right) + \int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/\xi\ dt\right)/2$$

y como ξ es arbitraria $\mathrm{N}_B\left(f\right) \leq \mathrm{M}_B(f)$. Ahora, sea $w \in \Omega$ tal que $0 < \mathrm{I}_f\left(w\right) < +\infty$. La función

$$\eta = \left(\frac{1}{\mathrm{V}\left(w\right)}\int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/w\ dt\right)^{1/2} \cdot w$$

pertenece a Ω y

$$\mathrm{M}_B\left(f\right) \leq \left(\mathrm{V}\left(\eta\right) + \int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/\eta\ dt\right)/2 = \left(\mathrm{V}\left(w\right)\int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/w\ dt\right)^{1/2}.$$

Si $\mathrm{I}_f\left(w\right) = +\infty$ la conclusión es inmediata porque $\mathrm{M}_B\left(f\right)$ es finito. Si $\mathrm{I}_f\left(w\right) = 0$ entonces $\mathrm{N}_B\left(f\right) = 0$ y para $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$w_n = w \cdot \varkappa_{\{w>0\}-[-n,n]} + \frac{w\left(n\right)}{2n+1} \cdot \varkappa_{\{w>0\}\cap[-n,n]}.$$

$\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ y como $f = 0$ a.e. sobre $\{w > 0\}$ y $\lim_{|t|\to+\infty} w(t) = 0$ resulta

$$\mathrm{M}_B\left(f\right) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\mathrm{V}\left(w_n\right) + \int_{\mathbb{R}} \left|f\right|^2/w_n\ dt\right)/2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(w(n) + \int_{|t|>n} w\ dt\right)/2 = 0,$$

i.e. $\mathrm{M}_B\left(f\right) = 0$ y sigue la afirmación. Sean $w_1,\ w_2 \in \Omega$ tales que

$\mathrm{I}_f(w_i) < +\infty$ $(i = 1,\ 2)$, $f_1,\ f_2 \in \mathcal{A}$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Como $w_1 + w_2 \in \Omega$ y[11]

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta \cdot f_1 + f_2|^2}{w_1 + w_2}\, dt \le \int_{\mathbb{R}} \frac{(|\zeta \cdot f_1| + |f_2|)^2}{w_1 + w_2}\, dt$$

$$\le |\zeta|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|f_1|^2}{w_1}\, dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{|f_2|^2}{w_2}\, dt < +\infty$$

$\mathcal{A}$ deviene espacio vectorial complejo. Más aún, si $\varepsilon > 0$ y

$$\mathrm{M}_B(f_i) + \varepsilon/2 > \left(\mathrm{V}(w_i) + \int_{\mathbb{R}} |f|^2 / w_i\, dt\right)/2,\ i = 1,\ 2,$$

podemos escribir

$$2 \cdot (\mathrm{M}_B(f_1) + \mathrm{M}_B(f_2) + \varepsilon) > \mathrm{V}(w_1 + w_2) + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|f_1|^2}{w_1} + \frac{|f_2|^2}{w_2}\right) dt$$

$$\ge \mathrm{V}(w_1 + w_2) + \int_{\mathbb{R}} \frac{(|f_1| + |f_2|)^2}{w_1 + w_2}\, dt$$

$$\ge \mathrm{V}(w_1 + w_2) + \int_{\mathbb{R}} \frac{|f_1 + f_2|^2}{w_1 + w_2}\, dt$$

$$\ge 2 \cdot \mathrm{M}_B(f_1 + f_2)$$

y, como ε es arbitrario, M_B es subaditiva. Finalmente, es claro que $\mathrm{N}_B(\lambda \cdot h) = |\lambda| \cdot \mathrm{N}_B(h)$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $h \in \mathcal{A}$.

(ii) Dadas $g \in \mathcal{A}$, $\eta \in \Omega$ es

$$\|g\|_1 \le \left(\|\eta\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g|^2 / \eta\, dt\right)^{1/2}. \tag{21}$$

[11] Hacemos uso de la desigualdad

$$\frac{(a+b)^2}{\alpha + \beta} \le \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta},\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta \text{ positivos.}$$

En efecto, si $\eta \neq 0$ la desigualdad es válida, ya sea $\mathrm{I}_g(\eta) = +\infty$ o no, pues en el último caso es aplicable la desigualdad de Hölder. Por la definición de $\mathcal{A}$ el miembro derecho en (21) es finito para alguna η, i.e. $g \in \mathrm{L}^1_{dt}(\mathbb{R})$. Como convenimos que $0 \cdot (+\infty) = 0$ podemos deducir que $\|g\|_1 \leq \mathrm{N}_B(g)$. Por otra parte, como $|g|^2 \leq (\eta(0)/\eta) \cdot |g|^2$ sigue asimismo que $\|g\|_2 \leq \mathrm{N}_B(g)$. Sea ahora $f \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$, $w \in \Omega$ tal que $\sqrt{\mathrm{V}(w) \cdot \mathrm{I}_f(w)} < \mathrm{N}_B(f) + \varepsilon$. Como $|f|^2/w(0) \leq |f|^2/w$ aplicando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\sqrt{\|f\|_1^2 + \|f\|_2^2} \leq \sqrt{\left(\left\|\frac{f^2}{\sqrt{w}}\right\|_2 \cdot \|\sqrt{w}\|_2\right)^2 + w(0) \cdot \mathrm{I}_f(w)}$$

$$= \sqrt{[\|w\|_1 + w(0)] \cdot \mathrm{I}_f(w)}$$

$$= \sqrt{\mathrm{V}(w) \cdot \mathrm{I}_f(w)} < \mathrm{N}_B(f) + \varepsilon,$$

y como ε es arbitrario sigue (iii).

(iii) Sean $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Tenemos

$$0 = \mathrm{I}_{\varkappa_{[-n,n]} - \varkappa_{[-n-m,n+m]}}\left(\frac{2 \cdot \varkappa_{[-n+1,n-1]}}{(2n-1) \cdot (n-1)}\right)$$

$$\mathrm{V}\left(\varkappa_{[-n+1,n-1]}\right) = 2n - 1,$$

i.e. $\mathrm{N}_B\left(\varkappa_{[-n,n]} - \varkappa_{[-n-m,n+m]}\right) \leq 1/(n-1)$ y $\left\{\varkappa_{[-n,n]}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$. Sin embargo, $\mathrm{N}_B\left(\varkappa_{[-n,n]}\right) \geq 2\sqrt{n}$ para cada n y, no siendo acotada, no converge. □

3.11. Sobre interpoladores de Lagrange.

Sea $\{a_{i,j} : i,\ j \in \mathbb{N}_0,\ i \leq j\}$ una familia de puntos de $[0,1]$ tal que para todo j es $a_{i_1,j} < a_{i_2,j}$ si $i_1 < i_2$. Para cada entero no negativo n y cada función

$f:[0,1]\to\mathbb{C}$ escribimos[12]

$$w_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-a_{i,n}),$$

$$q_{i,n}(x)=w_n(x)/\left[w'_n(a_{i,n})\,(x-a_{i,n})\right],\ 0\le i\le n,$$

$$L_nf=\sum_{i=0}^{n}f\left(a_{i,n}\right)\ q_{i,n}.$$

(i) $\{L_n\}_{n\ge 0}\subseteq\mathcal{B}\left(C_{\mathbb{C}}\left[0,1\right]\right).$

(ii) $\forall n,\ \|L_n\|=\sup_{x:0\le x\le 1}\sum_{i=0}^{n}|q_{i,n}(x)|.$

(iii) Para $n\in\mathbb{N}_0$ es $\sum_{i=0}^{n}q_{i,n}(x)\equiv 1$ (podemos asumir $q_{0,0}(x)\equiv 1$).

(iv) Si $L_nf\ \underset{\to}{o}\ f$ para toda $f\in C_{\mathbb{C}}\left[0,1\right]$ entonces $\{\|L_n\|\}_{n\ge 1}$ es acotada.

(v) Sea $a_{i,n}=i/n,\ 0\le i\le n,\ n\ge 1$. Probar que $\{\|L_n\|\}_{n\ge 1}$ no es acotada.

Solución

(i) Fijados n, i tales que $0\le i\le n$ tenemos

$$w'_n(a_{i,n})=\prod_{j:\ j\ne i,\ 0\le j\le n}(a_{i,n}-a_{j,n}),$$

i.e. $w'_n(a_{i,n})\ne 0$. Como $a_{i,n}$ es un cero simple de w_n la función

$$x\to w_n(x)/\left(x-a_{i,n}\right)$$

es continua, resultando cada $q_{i,n}$ continua. Si $f\in C_{\mathbb{C}}\left[0,1\right]$ y $0\le x\le 1$ tenemos

$$|L_nf(x)|\le\sum_{i=0}^{n}\left|f\left(a_{i,n}\right)\ q_{i,n}\left(x\right)\right|$$

$$\le\|f\|_\infty\sum_{i=0}^{n}\ \left|q_{i,n}\left(x\right)\right|\le\|f\|_\infty\sup_{x:\ 0\le x\le 1}\sum_{i=0}^{n}\ \left|q_{i,n}\left(x\right)\right|.$$

i.e. L_n es acotada y $\|L_n\|\le\sup_{x:\ 0\le x\le 1}\sum_{i=0}^{n}\ \left|q_{i,n}\left(x\right)\right|.$

[12]Se dice que L_nf es el $n-$*ésimo polinomio interpolador de Lagrange* de f.

(ii) Con la notación anterior, podemos suponer que el supremo anterior es positivo. Sea $0 < \delta < \sup_{x:\ 0 \le x \le 1} \sum_{i=0}^{n} \ |q_{i,n}(x)|$ y $x_0 \in [0,1]$ tal que $\sum_{i=0}^{n} \ |q_{i,n}(x_0)| > \delta$. Cuando $q_{i,n}(x_0) \neq 0$ existe $u_{i,n} \in \mathbb{C}$ unitario tal que $|q_{i,n}(x_0)| = u_{i,n}\ q_{i,n}(x_0)$. Evidentemente existe $g \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$ tal que $g(a_{i,n}) = u_{i,n}$ cuando $q_{i,n}(x_0) \neq 0$ y $\|g\|_\infty \le 1$. Entonces

$$\delta < \sum_{i:\ |q_{i,n}(x_0)| \neq 0} u_{i,n}\ q_{i,n}(x_0) = L_n g(x_0) = |L_n g(x_0)| \le \|L_n g\|_\infty \le \|L_n\|$$

y, siendo δ arbitrario, tenemos (ii).

(iii) Podemos escribir

$$(q_{0,1} + q_{1,1})(x) = \frac{x - a_{1,1}}{a_{0,1} - a_{1,1}} + \frac{x - a_{0,1}}{a_{1,1} - a_{0,1}} \equiv 1.$$

Suponiendo cierto el resultado para $< n$, con $n > 1$, escribimos

$$\sum_{i=0}^{n} q_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{x - a_{j,n}}{a_{i,n} - a_{j,n}} \tag{22}$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{i,n}}{a_{n,n} - a_{i,n}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{n,n}}{a_{i,n} - a_{n,n}} \prod_{\substack{0 \le j < n, \\ j \neq i}} \frac{x - a_{j,n}}{a_{i,n} - a_{j,n}}$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{i,n}}{a_{n,n} - a_{i,n}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{i,n}}{a_{i,n} - a_{n,n}} \prod_{\substack{0 \le j < n, \\ j \neq i}} \frac{x - a_{j,n}}{a_{i,n} - a_{j,n}} + 1,$$

ya que $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{0 \le j < n,\ j \neq i} (x - a_{j,n}) / (a_{i,n} - a_{j,n}) = 1$ por la hipótesis inductiva. Ahora, fijado $0 \le k < n$ es

$$\frac{x - a_{k,n}}{a_{k,n} - a_{n,n}} \prod_{\substack{0 \le j < n, \\ j \neq k}} \frac{x - a_{j,n}}{a_{k,n} - a_{j,n}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{i,n}}{a_{n,n} - a_{i,n}} \right)^{-1} = - \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ i \neq k}} \frac{a_{n,n} - a_{i,n}}{a_{k,n} - a_{i,n}}.$$

Nuevamente por la hipótesis inductiva resulta

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ i \neq k}} \frac{a_{n,n} - a_{i,n}}{a_{k,n} - a_{i,n}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x - a_{k,n}}{a_{k,n} - a_{n,n}} \prod_{\substack{0 \leq j < n, \\ j \neq k}} \frac{x - a_{j,n}}{a_{k,n} - a_{j,n}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{i,n}}{a_{n,n} - a_{i,n}} \right)^{-1},$$

de modo que

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{x - a_{i,n}}{a_{n,n} - a_{i,n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x - a_{k,n}}{a_{k,n} - a_{n,n}} \prod_{\substack{0 \leq j < n, \\ j \neq k}} \frac{x - a_{j,n}}{a_{k,n} - a_{j,n}} = 0 \tag{23}$$

y de (22) y (23) sigue el paso inductivo.

(iv) Si $L_n f \underset{\to}{o} f$ para toda $f \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$ entonces $\{L_n\}_{n \geq 1}$ es puntualmente acotada en $\mathcal{L}(C_{\mathbb{C}}[0,1])$ y, por el teorema de acotación uniforme, ha de ser acotada.

(v) Sea $n > 1,\ x \in [0,1] - \{j/n,\ 0 \leq j \leq n\}$. Entonces

$$|q_{i,n}(x)| = \binom{n}{i} \ |q_{0,n}(x)| \ \frac{x}{|x - i/n|},\ 0 \leq i \leq n. \tag{24}$$

Supondremos $(4n-3)/(4n) \leq x \leq 1 - 1/(2n)$. Tenemos

$$|q_{0,n}(x)| = \prod_{j=1}^{n} \frac{|x - j/n|}{j/n} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \ (1-x) \ \prod_{j=1}^{n-1} (x - j/n), \tag{25}$$

$$x - (n-2)/n > 1/n,\ x - (n-3)/n > 2/n,\ \ldots, x - 1/n > (n-2)/n, \tag{26}$$

y de (25) y (26)

$$|q_{0,n}(x)| > (1-x) \ (x - (n-1)/n) \ n/(n-1). \tag{27}$$

La función $F(y) = (1-y)\ (y-(n-1)/n)$, $y \in \mathbb{R}$, es creciente en $(-\infty,\ 1-1/(2n)]$. Por lo tanto

$$(1-x)\ (x-(n-1)/n) = F(x) \geq F((4n-3)/(4n)) = 3/(16n^2)$$

y en (27) obtenemos $|q_{0,n}(x)| > 3/[16\,n/(n-1)]$. Por (24), como $|x-i/n| \leq 2$ para cada i obtenemos la siguiente estimación:

$$\|L_n\| \geq \sum_{i=0}^{n} |q_{i,n}(x)| = |q_{0,n}(x)| \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{x}{|x-i/n|}$$

$$\geq \frac{4n-3}{4n} \cdot \frac{3}{16n\,(n-1)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \frac{3\,(4n-3)}{n^2\,(n-1)} \cdot 2^{n-7},$$

i.e. $\{\|L_n\|\}_{n\geq 1}$ no es acotada. □

3.12. Divisores topológicos de cero. Álgebras y espectros. Espectro de productos.

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja con unidad e, $\mathcal{DT}_l(\mathcal{A})$ y $\mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$ los conjuntos de *divisores topológicos de cero a izquierda y derecha* respectivamente.[13] Si $a \in \mathcal{A}$ escribimos

$$\lambda(a) = \inf_{b\in\mathcal{A}-\{0\}} \frac{\|a\cdot b\|}{\|b\|}, \qquad \rho(a) = \inf_{b\in\mathcal{A}-\{0\}} \frac{\|b\cdot a\|}{\|b\|}.$$

(i) Dado $a \in \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{DT}_l(\mathcal{A})$ (resp. $a \in \mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$) sii existe una sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ de elementos unitarios tal que $a \cdot b_n \to 0$ (resp. $b_n \cdot a \to 0$).

(ii) $\mathcal{DT}_l(\mathcal{A})$ y $\mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$ son cerrados en $\mathcal{A}$.

(iii) Si $a_1,\ a_2 \in \mathcal{A}$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$(1)\ \lambda(a_1)\ \lambda(a_2) \leq \lambda(a_1\cdot a_2) \leq \|a_1\|\ \lambda(a_2),$$

$$(2)\ \rho(a_1)\ \lambda(a_2) \leq \rho(a_1\cdot a_2) \leq \rho(a_1)\ \|a_2\|.$$

[13] Un elemento $a \in \mathcal{A}$ es *divisor topológico de cero a izquierda* (resp. *a derecha*) si la aplicación $L_a(b) = a\cdot b$, $b \in \mathcal{A}$ (resp. la aplicación $R_a(b) = b\cdot a$, $b\in\mathcal{A}$) no es homeomorfismo sobre su imágen.

(iv) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos inversibles a izquierda (resp. a derecha) de $\mathcal{A}$ convergente a $a \in \mathcal{A}$. Si la sucesión de respectivos inversos a izquierda (resp. de inversos a derecha) es acotada entonces a es inversible a izquierda (resp. a derecha).

(v) $\operatorname{cl} \mathrm{U}_l(\mathcal{A}) - \mathrm{U}_l(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$ y $\operatorname{cl} \mathrm{U}_r(\mathcal{A}) - \mathrm{U}_r(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{DT}_l(\mathcal{A})$.

(vi) $\mathrm{U}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{DT}_l(\mathcal{A}) \cup \mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

(vii) Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de Banach de $\mathcal{A}$ que contiene a e, $b \in \mathcal{B}$. Entonces $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(b)$ y, si $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ tiene interior vacío, son iguales.

(viii) Si $a,\ b \in \mathcal{A}$ y tanto $a \cdot b$ como $b \cdot a$ son inversibles a y b lo son.

(ix) Si $a,\ b \in \mathcal{A}$, $a \cdot b = e$ y $\mathcal{A}$ tiene dimensión finita entonces $b \cdot a = e$.

(x) Dados $a,\ b \in \mathcal{A}$, $e - b \cdot a$ es inversible si $e - a \cdot b$ lo es. [14]

(xi) Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra de $C(\operatorname{cl} D)$ de funciones analíticas sobre el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. La función $g(z) = z,\ |z| \leq 1$, es no inversible y no es divisor topológico de cero.

Solución

(i) Si $a \in \mathcal{A}$ el operador L_a es lineal pues $\mathcal{A}$ es álgebra compleja. Como $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$ para todo $b \in \mathcal{A}$ también L_a es acotado. Si L_a no es inyectiva existirá $b \in \mathcal{A}$ unitario tal que $a \cdot b = 0$. Sea L_a inyectiva y supongamos que $L_a : \mathcal{A} \to L_a(\mathcal{A})$ no es homeomorfismo. Por el teorema de la función abierta $L_a(\mathcal{A})$ no es cerrado. Como $\operatorname{ran}(L_a)$ es denso en $\operatorname{cl} L_a(\mathcal{A})$ entonces L_a no es acotado inferiormente, i.e. existe

[14] Notamos, en consecuencia, que $\sigma(a \cdot b) - \{0\} = \sigma(b \cdot a) - \{0\}$. Sin embargo, podría ser $a \cdot b$ inversible y $b \cdot a$ no inversible. P. ej., en $\mathcal{L}\left[l^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})\right]$ considerar los operadores

$$U(f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots) = (0,\ f_0,\ f_1,\ \ldots),$$

$$V(f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots) = (f_1,\ f_2,\ \ldots),\ f \in l^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}).$$

Se tiene $VU = Id_{l^2(\mathbb{N}_0,\mathbb{C})}$ mientras que UV no es inversible pues

$$UV(f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots) = (0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots).$$

una sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ de elementos unitarios tal que $a \cdot b_n \to 0$. Con R_a se razona en forma análoga, siendo la recíproca inmediata en ambos casos.

(ii) Si $a_1,\ a_2,\ b \in \mathcal{A}$ y $b \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(a_1) &\leq \frac{\|a_1\ b\|}{\|b\|}\\ &\leq \frac{\|(a_1 - a_2)\ b\|}{\|b\|} + \frac{\|a_2\ b\|}{\|b\|}\\ &\leq \|a_1 - a_2\| + \frac{\|a_2\ b\|}{\|b\|}.\end{aligned}$$

Como b es arbitrario $\lambda(a_1) \leq \|a_1 - a_2\| + \lambda(a_2)$. Por simetría es $|\lambda(a_1) - \lambda(a_2)| \leq \|a_1 - a_2\|$. Notando que

$$\mathcal{DT}_l(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} :\ \lambda(a) = 0\}$$

podemos inferir que este conjunto es cerrado. Análogamente sigue la afirmación para $\mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$.

(iii) Dados $a_1,\ a_2 \in \mathcal{A}$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lambda(a_1)\ \lambda(a_2) > 0$. Si $b \neq 0$ en $\mathcal{A}$ debe ser $a_2 \cdot b \neq 0$ obteniendo

$$\begin{aligned}\lambda(a_1)\ \lambda(a_2) &\leq \frac{\|a_1 \cdot (a_2 \cdot b)\|}{\|a_2 \cdot b\|} \cdot \frac{\|a_2 \cdot b\|}{\|b\|}\\ &= \frac{\|(a_1 \cdot a_2) \cdot b\|}{\|b\|}.\end{aligned}$$

Como b es arbitrario $\lambda(a_1)\ \lambda(a_2) \leq \lambda(a_1 \cdot a_2)$. También si $b \neq 0$ es

$$\begin{aligned}\lambda(a_1 \cdot a_2) &\leq \frac{\|(a_1 \cdot a_2) \cdot b\|}{\|b\|}\\ &= \frac{\|a_1 \cdot (a_2 \cdot b)\|}{\|b\|} \leq \|a_1\| \frac{\|a_2 \cdot b\|}{\|b\|}\end{aligned}$$

y obtenemos $\lambda(a_1 \cdot a_2) \leq \|a_1\| \ \lambda(a_2)$. La desigualdad (2) sigue análogamente.

(iv) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{U}_l(\mathcal{A})$, $\{b_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $b_n \cdot a_n = e$ para cada n. Si $a_n \to a$ en $\mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\|e - b_n \cdot a\| = \|b_n \cdot (a_n - a)\| \leq \|b_n\| \, \|a_n - a\|.$$

En consecuencia, si $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es acotada $\lim_{n\to+\infty} \|e - b_n \cdot a\| = 0$ y, como $\mathrm{U}(\mathcal{A})$ es abierto, $a \in \mathrm{U}_l(\mathcal{A})$. El resto sigue análogamente.

(v) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathrm{U}_l(\mathcal{A})$ convergente a $a \in \mathcal{A}$ y asumamos que a no es inversible a izquierda. Si $b_n \cdot a_n = e$ para cada n entonces $\{b_n\}_{n\geq 1}$ no es acotada. Pasando eventualmente a una subsucesión de $\{b_n\}_{n\geq 1}$ podemos suponer $\|b_n\| \to +\infty$. Para $n \geq 1$ lo suficientemente grande $\|b_n\| > 1$ y

$$\frac{b_n - e}{\|b_n - e\|} \cdot a = \frac{b_n - e}{\|b_n - e\|} \cdot (a - a_n) + \frac{e - a_n}{\|b_n - e\|},$$

$$\left\| \frac{e - a_n}{\|b_n - e\|} \right\| \leq \frac{1 + \|a_n\|}{\|b_n\| - 1}.$$

Como $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es acotada concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n - e}{\|b_n - e\|} \cdot a = 0$$

y a es divisor topológico de cero a derecha. La otra demostración es análoga.

(vi) Sea $\{a_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{U}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{DT}_l(\mathcal{A}) \cup \mathcal{DT}_r(\mathcal{A})$ una sucesión convergente a $a \in \mathcal{A}$ y supongamos a no inversible. Si $\sharp\left[\{a_n\}_{n\geq 1} \cap \mathrm{U}(\mathcal{A})\right]$ es no finito, aplicando (v), a será divisor topológico de cero a derecha (resp. divisor topológico de cero a izquierda) si $a \notin \mathrm{U}_l(\mathcal{A})$ (resp. $a \notin \mathrm{U}_r(\mathcal{A})$). En otro caso basta aplicar (ii).

(vii) Sea $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(b)$, digamos $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$, con $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subseteq \rho_{\mathcal{B}}(b)$. Entonces $b - \lambda e \notin \mathrm{U}(\mathcal{B})$, es límite de la sucesión $\{b - \lambda_n e\}_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathrm{U}(\mathcal{B})$ y por (v) debe ser $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(b)$. Finalmente, v. [11], Ch. xv, (15.2.8)(ii), page 313).

(viii) Sean $a,\ b \in \mathcal{A}$ tales que $a \cdot b$ y $b \cdot a$ son inversibles. Si $c = (a \cdot b)^{-1}$ y $d = (b \cdot a)^{-1}$ resulta

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = e. \tag{28}$$

Como $d \cdot (b \cdot a) = e$ es

$$b = e \cdot b = [d \cdot (b \cdot a)] \cdot b$$

y, como el producto es asociativo,

$$b \cdot c = (d \cdot b) \cdot [(a \cdot b) \cdot c] = d \cdot b.$$

Luego

$$(b \cdot c) \cdot a = (d \cdot b) \cdot a = d \cdot (b \cdot a) = e \tag{29}$$

y por (28) y (29) a deviene inversible y $a^{-1} = b \cdot c$. Es inmediato entonces que b también será inversible.

(ix) Sean $a,\ b \in \mathcal{A}$ tales que $a \cdot b = e$ y $b \cdot a \neq e$. Si $b^n = e$ para algún entero positivo n debe ser $n > 1$ ya que claramente $b \neq e$. Luego $a = b^{n-1}$ y, por lo tanto, $a \cdot b = b \cdot a$, lo que no es cierto, i.e. $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ deviene en una sucesión infinita. Supongamos que $\alpha \cdot e + \beta \cdot b = 0,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Si $\beta \neq 0$ entonces $b = (-\alpha/\beta) \cdot e$. Luego $e = a \cdot b = (-\alpha/\beta) \cdot a$ y $b = (\alpha/\beta)^2 \cdot a$. Deducimos que a y b conmutan, lo que no es cierto. Entonces $\beta = 0$ y sigue enseguida que $\alpha = 0$. Ahora, si $\gamma_0\ e + \gamma_1\ b + ... + \gamma_m\ b^m = 0$, con $\gamma_0,\ ... ,\gamma_m \in \mathbb{C}$ y $m > 1$, resulta $\gamma_0\ a + \gamma_1\ e + ... + \gamma_m\ b^{m-1} = 0$. Como a y b no conmutan $\gamma_0 = 0$ y, asumiendo que $\{b^n\}_{0 \leq n \leq p}$ es linealmente independiente si $p < m$, $\gamma_1 = ... = \gamma_m = 0$ y vale el paso inductivo, i.e. $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es linealmente independiente.

(x) Escribiremos $c = (e - a \cdot b)^{-1}$ y $d = e + b \cdot c \cdot a$. Como

$$(e - a \cdot b) \cdot c = c - a \cdot b \cdot c = e,$$

$$c \cdot (e - a \cdot b) = c - c \cdot a \cdot b = e,$$

entonces $a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b = c - e$. Podemos escribir

$$a \cdot d = a + (a \cdot b \cdot c) \cdot a = a + (c - e) \cdot a = c \cdot a,$$

$$d \cdot b = b + b \cdot (c \cdot a \cdot b) = b + b \cdot (c - e) = b \cdot c.$$

Finalmente

$$(e - b \cdot a) \cdot d = e + b \cdot c \cdot a - b \cdot (a \cdot d) = e,$$

$$d \cdot (e - b \cdot a) = e + b \cdot c \cdot a - (d \cdot b) \cdot a = e,$$

$e - b \cdot a$ resulta inversible y $(e - b \cdot a)^{-1} = d$.

(xi) Claramente $g \notin \mathrm{U}(\mathcal{A})$ pues se anula en cero. Sea $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ una sucesión de elementos de norma unidad tal que $z\ g_n(z) \to 0$ en $\mathcal{A}$. Dado n, por la continuidad de g_n sobre $\operatorname{cl} D$, existe $z_n \in \operatorname{cl} D$ tal que $|g_n(z_n)| = 1$. Por compacidad de ∂D, pasando eventualmente a una subsucesión, existe $\eta \in \partial D$ tal que $g_n(z_n) \to \eta$. Por la compacidad de $\operatorname{cl} D$, pasando eventualmente a una segunda subsucesión, hay un elemento $z_0 \in \operatorname{cl} D$ tal que $z_n \to z_0$. Entonces

$$0 = \lim_{n\to+\infty} |z_n\ g_n(z_n)| = |z_0\ \eta| = |z_0|$$

y es $z_0 = 0$. Como $z_n \to 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Por el principio del módulo máximo, si $n \geq n_0$ la función g_n es constante, digamos $g_n(z) \equiv a_n$, donde $|a_n| = 1$. Nuevamente, por la compacidad de ∂D, considerando eventualmente alguna subsucesión, existe $a \in \partial D$ tal que $a_n \to a$. Dado entonces $z \in \operatorname{cl} D$ deducimos que $a_n\ z \to a\ z$, donde la convergencia es uniforme, y debe ser $a\ z \equiv 0$. En consecuencia $a = 0$, lo cual es imposible pues a es unitario. En consecuencia no hay tal sucesión $\{g_n\}_{n\geq 1}$ y sigue la afirmación. □

3.13. Sobre reflexividad.

[15]Sea X un espacio de Banach complejo, $\phi : X \to X^{**}$ el *embedding* natural. Entonces:

(i) ϕ es un homeomorfismo de $(X,\ \sigma(X, X^*))$ sobre un subespacio cerrado de X^{**}, $(\sigma(X^{**}, X^*))$.

(ii) Si B_X es la bola cerrada unitaria de X entonces $\phi(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$ - densa en la bola unitaria cerrada $B_{X^{**}}$ de X^{**}.

[15]V. Problema 3.18(iv).

(iii) X es reflexivo sii B_X es $\sigma(X, X^*)-$ compacto.

(iv) Si X es reflexivo también lo es cada subespacio cerrado de X.

(v) Si X es reflexivo y M es un subespacio cerrado de X entonces X/M es reflexivo.

(vi) X es reflexivo sii X^* es reflexivo.

(vii) Decidir cuáles de los espacios c_0, $l^1(\mathbb{N})$, $l^p(\mathbb{N})$, $l^\infty(\mathbb{N})$ son reflexivos.

(viii) Si X es reflexivo, Y es un espacio normado y $T \in L(X, Y)$ entonces $T(B_X)$ es cerrado.

Solución

(i) Trivial.

(ii) Cf. [9], Prop. 4.1, pág. 131.

(iii) Cf. [9], Prop. 4.2, pág. 132.

(iv) Supongamos X reflexivo y sea M un subespacio cerrado de X. Sea B_M la bola cerrada unitaria de M y $(x_p)_{p\in P}$ una red infinita de B_M. En particular, tenemos una red de B_X y, por (iii), una subred $(x_p)_{p\in Q}$ de $(x_p)_{p\in P}$ la cual converge $\sigma(X, X^*)-$ a un elemento $x \in B_X$. Por lo tanto $\lim_{p\in Q} \langle x_p - x, \Lambda \rangle = 0$ si $\Lambda \in X^*$. Notemos que $x \in M$, pues sino consideramos la forma lineal $\lambda : M + \mathbb{C}x \to \mathbb{C}$ tal que $\lambda(y + \alpha x) = \alpha$ si $y \in M$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Notamos que $|\lambda(y + \alpha x)| \leq \|y + \alpha x\| / \operatorname{dist}(x, M)$ de modo que λ es acotada y, por el teorema de Hann - Banach, admite una extensión $\Lambda \in X^*$. Pero Λ es nula sobre M y $\Lambda(x) = 1$ lo cual no es posible. Entonces $x \in B_M$ y si $\varphi \in M^*$ existe, nuevamente por el teorema de Hahn - Banach, una extensión Φ de φ a X. En consecuencia $0 = \lim_{p\in Q} \langle x_p - x, \Phi \rangle = \lim_{p\in Q} \langle x_p - x, \phi \rangle$ y la subred $(x_p)_{p\in Q}$ converge $\sigma(M, M^*)$ a x, i.e. M es reflexivo.

(v) Sea $\{\xi_r\}_{r\in R}$ una red en la bola cerrada unitaria $B_{X/M}$ de X/M. Si $\pi : X \to X/M$ es la proyección natural, sea $\{x_r\}_{r\in R} \subseteq X$ tal que $\pi(x_r) = \xi_r$ para cada $r \in R$. Puesto que $\|\xi_r\| \leq 1$ existe $y_r \in M$ tal que $\|x_r - y_r\| \leq 1$, $r \in R$. Como B_X es $\sigma(X, X^*)-$ compacta hay una subred $(x_r - y_r)_{r\in S}$ de $(x_r - y_r)_{r\in R}$ convergente $\sigma(X, X^*)-$ a un elemento

$z \in B_X$. Notamos que el operador $F : (X/M)^* \to M^o$, $F(T) = T \circ \pi$ establece un homeomorfismo entre $(X/M)^*$ y M^o. Por lo tanto, si $T \in (X/M)^*$ tenemos $\langle \xi_r, T \rangle = \langle \pi(x_r - y_r), T \rangle = \langle x_r - y_r, F(T) \rangle$ con lo cual $\langle z, F(T) \rangle = \lim_{r \in S} \langle \xi_r, T \rangle = \langle \pi(z), T \rangle$, i.e. la subred $\{\xi_r\}_{r \in S}$ converge débilmente a $\pi(z)$ en $(X/M)^*$.

(vi) Cf. [9], Prop. 4.2, pág. 132.

(vii) c_0, $l^1(\mathbb{N})$ y $l^\infty(\mathbb{N})$ no son reflexivos. En efecto, como c_0^* y $l^1(\mathbb{N})$, $l^1(\mathbb{N})^*$ y $l^\infty(\mathbb{N})$ son isométricamente isomorfos basta ver que $l^1(\mathbb{N})$ no es reflexivo. Consideremos la sucesión $(e_n)_{n \geq 1}$ de la bola cerrada unitaria $B_{l^1(\mathbb{N})}$ de $l^1(\mathbb{N})$, donde $e_n = (\delta_{nm})_{m \geq 1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $B_{l^1(\mathbb{N})}$ fuese débilmente compacta habría una subsucesión $(e_{n_k})_{k \geq 1}$ y un elemento $e \in B_{l^1(\mathbb{N})}$ tal que $e_{n_k} \underset{\to}{w} e$. Entonces para todo $a \in l^\infty(\mathbb{N})$ tendríamos $\lim_{k \to \infty} \langle e_{n_k}, a \rangle = \langle e, a \rangle$. Sin embargo, si $a = (a_m)_{m \geq 1}$ se define como $a_m = 0$ si $m \notin \{n_k\}_{k \geq 1}$ y $a_{n_k} = (-1)^k$ si $k \geq 1$ entonces el límite anterior no existe. Ahora $l^1(\mathbb{N})$ no es reflexivo por (iii). Por otra parte, es evidente que $l^p(\mathbb{N})$ es reflexivo si $1 < p < \infty$.

(viii) Sean $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq B_X$ e $g \in Y$ tales que $Tf_n \to g$. Por (iii) hay una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ convergente débilmente a un elemento $f \in B_X$. Debe ser $g = Tf$ pues para cada $\psi \in Y^*$ es

$$\langle g, \psi \rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle f_{n_k}, T^* \psi \rangle = \langle f, T^* \psi \rangle = \langle Tf, \psi \rangle . \ \square$$

3.14. Cocientes en el espacio dual de un espacio normado. Formas lineales continuas sobre el bidual. Representación de formas lineales sobre el espacio de medidas complejas borelianas en un espacio compacto separado.

(i) Si E es un espacio de Banach y F un subespacio cerrado de E entonces F^* y E^*/F^o son isométricamente isomorfos.

(ii) Sea X un espacio compacto Hausdorff y $M(X)$ el espacio de Banach de medidas complejas de Borel sobre X. Si la restricción de un funcional lineal Θ sobre $M(X)$ a la bola unitaria cerrada $B_{M(X)}$ es w^* continua existe $f \in C(X)$ tal que $\langle \mu, \Theta \rangle = \int_X f \, d\mu$ para todo $\mu \in M(X)$.

(iii) Un funcional lineal $T \in E^{**}$ es w^* continuo sii lo es su restricción a la bola cerrada unitaria B_{E^*}. [16]

Solución

(i) Sea $\pi : E^* \to E^*/F^o$ la proyección natural, $\digamma : E^*/F^o \to M^*$ la aplicación $\digamma(\alpha)x = f(x)$ si $\pi(f) = \alpha$ y $x \in F$. Si $\pi(f) = \pi(g) = \alpha$ y $x \in F$ entonces $f - g \in F^o$ y $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0$ con lo que $\digamma(\alpha)$ está bien definida. Además si $c \in \mathbb{C}$ y $x,\ y \in F$ tenemos

$$\digamma(\alpha)(cx+y) = f(cx+y) = cf(x) + f(y) = c\digamma(\alpha)x + \digamma(\alpha)y,$$

$$|\digamma(\alpha)x| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad si \quad f \in \alpha,$$

i.e. $\digamma(\alpha) \in F^*$ y $\|\digamma(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$. Más aún, dado $\varepsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que $C < \|\digamma(\alpha)\| + \varepsilon$ y $|\digamma(\alpha)x| \leq C\|x\|$ para todo $x \in F$. Si $f_0 \in \alpha$ tenemos entonces $|f_0(x)| \leq C\|x\|$ si $x \in F$. Por el teorema de Hahn - Banach existe $F_0 \in E^*$ tal que $F_0 = f_0$ sobre F y $\|F_0\| \leq C$. Como $F_0 \in \alpha$ tenemos $\|\alpha\| \leq \|F_0\| \leq C \leq \|\digamma(\alpha)\| + \varepsilon$ y $\digamma$ es una aplicación isométrica. Un razonamiento análogo muestra que $\digamma$ es suryectiva.

(ii) La aplicación $f(x) = \langle \delta_x, \Theta \rangle,\ x \in X$ es continua. Notamos que

$$\text{ext } B_{M(X)} = \left\{ c\ \delta_x :\ c \in S^1,\ x \in X \right\}$$

([9], Th. 8.4, pág. 147). La bola $B_{M(X)}$ es no vacía, convexa y, por el teorema de Alaoglu, w^* compacta. Por el teorema de Krein - Milman $B_{M(X)} = \overline{co}\left[\text{ext } B_{M(X)}\right]$. Dada entonces $\mu \in M(X) - \{0\}$ podemos representar $\mu / \|\mu\| = \text{lím}_{a \in A}\ \sigma_a$ donde $\{\sigma_a\}_{a \in A}$ es una red en la cual cada elemento es de forma $\sigma_a = \sum_{k=1}^{k_a} c_{a,k}\ \delta_{x_{a,k}},\ \sum_{k=1}^{k_a} |c_{a,k}| = 1$ en $\mathbb{C}$

[16] V. Problema 3.26.

y $\{x_{a,k}\}_{1\leq k\leq k_a} \subseteq X$. Entonces

$$\langle \mu/\left\|\mu\right\|, \Theta\rangle = \lim_{a\in A} \langle \sigma_a, \Theta\rangle$$

$$= \lim_{a\in A} \sum_{k=1}^{k_a} c_{a,k} \;\; f(x_{a,k}) = \lim_{a\in A} \sum_{k=1}^{k_a} c_{a,k} \int_X f \; d\delta_{x_{a,k}}$$

$$= \lim_{a\in A} \int_X f \; d\sigma_a = \int_X f \; d\mu/\left\|\mu\right\|.$$

(iii) La condición es evidentemente necesaria. Recíprocamente, si $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ es una red w^* convergente a φ en E^* entonces, por el principio de acotación uniforme, es acotada. Multiplicando por una constante positiva, podemos suponer que $\{\varphi_i\}_{i\in I} \cup \{\varphi\} \subseteq B_{E^*}$ y $\lim_{i\in I} \;\langle \varphi_i - \varphi, T\rangle = 0$ de modo que T es w^*-continua. $\square$

3.15. Conjuntos absorventes y polares. Topología w^* sobre el dual de un espacio lineal complejo. Semicontinuidad inferior débil de la norma cuando el espacio subyacente es normado.

Sea X un espacio lineal complejo, X^* el espacio de formas lineales complejas con la topología w^*.

(i) Si x^*, x_1^*, ... $x_n^* \in X^*$ y $\bigcap_{i=1}^n \ker(x_i^*) \subseteq \ker(x^*)$ existen escalares α_1, ... α_n tales que $x^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \; x_i^*$.

(ii) Una funcional lineal $\Lambda : X^* \to \mathbb{C}$ es w^*- continua sii existe $x \in X$ tal que $\langle x^*, \Lambda\rangle = \langle x^*, x\rangle$ para todo $x^* \in X^*$.

(iii) Un subespacio lineal Z de X^* es w^*- denso si para cada $x \in X - \{0\}$ existe $x^* \in Z$ tal que $\langle x^*, x\rangle \neq 0$.

(iv) La topología fuerte de X^* es más fina que la topología w^*.

(v) Un subconjunto A de X es $w-$ acotado sii $\pi(A)$ es absorvente en X^*, donde $\pi(A)$ es el *polar* de A :

$$\pi(A) = \{x^* : \; (\forall x), \; x \in A, \; |\langle x, x^*\rangle| \leq 1\}.$$

(vi) Si X es espacio normado, la norma es $w-$ semicontinua inferiormente.

Solución

(i) Sea $F : X \to \mathbb{C}^n$, $F(x) = (\langle x, x_1^* \rangle, \ldots, \langle x, x_n^* \rangle)$ si $x \in X$. Entonces F es lineal y podemos escribir $\mathbb{C}^n = F(X) \bigoplus F(X)^\perp$. Definimos $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tal que $f(\zeta) = \langle x, x^* \rangle$ si $\zeta = F(x)$ para cierto $x \in X$ y $F(\zeta) = 0$ si $\zeta \in F(X)^\perp$. Por la hipótesis f está bien definida y $x^* = f \circ F$. Como f es una forma lineal de $\mathbb{C}^n$ hay escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ tales que $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \zeta_i$ si $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. Por lo tanto sigue (i).

(ii) Basta ver la necesidad. Si $\Lambda : X^* \to \mathbb{C}$ es w^*- continua existen $x_1, \ldots x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\cap_{i=1}^n \{x^* \in X^* : \ |\langle x_i, x^* \rangle| < \varepsilon\} \subseteq \Lambda^{-1}(D),$$

donde D es el disco abierto de centro cero y radio uno. Luego si $x^* \in \cap_{i=1}^n \ker(\langle x_i, \cdot \rangle)$ entonces para todo entero positivo N resulta $|\langle N x^*, \Lambda \rangle| < 1$, i.e. $|\langle x^*, \Lambda \rangle| < 1/N$, i.e. $x^* \in \ker(\Lambda)$. Por (i) hay escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ tales que $\Lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ \langle x_i, \cdot \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \, x_i, \cdot \rangle$ y sigue (ii).

(iii) En las condiciones de (iii), veremos que si Z no es w^*- denso entonces ${}^\perp Z \neq \{0\}$, en contradicción con la hipótesis. [17] Equivalentemente, supongamos ${}^\perp Z = \{0\}$, de donde $\left({}^\perp Z\right)^\perp = X^*$. Bastará ver entonces que $\left({}^\perp Z\right)^\perp = \overline{Z}^{w^*}$. En efecto, si $\{x_a^*\}_{a \in A}$ es una red convergente a x^* de elementos de $\left({}^\perp Z\right)^\perp$ y x pertenece a ${}^\perp Z$ tenemos $\langle x, x_a^* \rangle = 0$ para cada $a \in A$ y $\langle x, x^* \rangle = \lim_{a \in A} \langle x, x_a^* \rangle = 0$, o sea $x^* \in \left({}^\perp Z\right)^\perp$ y $\left({}^\perp Z\right)^\perp$ deviene w^*- cerrado. Evidentemente $Z \subseteq \left({}^\perp Z\right)^\perp$ y tenemos $\overline{Z}^{w^*} \subseteq \left({}^\perp Z\right)^\perp$. Además, si $z^* \notin \overline{Z}^{w^*}$ en X^* por el teorema de Hahn -

[17] Indicamos

$${}^\perp Z = \{x \in X : \ \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ para todo } x^* \in Z\},$$

y, si Y es un subespacio lineal de X,

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* : \ \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ para todo } x \in Y\}.$$

Banach existen escalares reales $\gamma_1,\ \gamma_2$ y un funcional $\Lambda : X^* \to \mathbb{C}\ \ w^*-$ débilmente continuo tal que

$$\operatorname{Re}\left(\langle z^*, \Lambda\rangle\right) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re}\left(\langle y^*, \Lambda\rangle\right) \tag{30}$$

para todo $y^* \in \overline{Z}^{w^*}$ (cf. [42], Th. 3.4, pág. 58). Como $\langle z^*, \Lambda\rangle \neq 0$ y, por (ii), existe $y_0 \in X$ tal que $\langle y^*, \Lambda\rangle = \langle y_0, y^*\rangle$ para $y^* \in X^*$. Por (30) deber ser $\Lambda\mid_Z = 0$ y así $z^* \notin \left({}^{\perp}Z\right)^{\perp}$.

(iv) Es claro que todo w^*- abierto es fuertemente abierto. Bastará ver que hay entornos fuertes de cero que no son w^*- abiertos. Sea F una parte finita de $X - \{0\}$, $\zeta > 0$ e indiquemos

$$\mathcal{V} = \{x^* \in X^* : \ |\langle x, x^*\rangle| < \zeta \text{ si } x \in F\}.$$

Entonces $\cap_{x\in F} \ker\left(\langle x, \cdot\rangle\right) \neq \{0\}$. En efecto, podemos suponer que F es un subconjunto linealmente independiente de X. Si S es el subespacio generado por F y $x_0 \notin S$ la aplicación

$$\varphi : S \bigoplus \mathbb{C}x_0 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(y + \lambda x_0) = \lambda \ si\ \lambda \in \mathbb{C}\ e\ y \in S$$

está bien definida, es lineal y $|\varphi(y + \lambda x_0)| \leq \|y + \lambda x_0\| / dist\,(x_0, S)$. Por el teorema de Hahn - Banach existe $x^* \in X^*$ tal que x^* extiende a φ, $\langle x_0, x^*\rangle = 1$ y $\langle x, x^*\rangle = 0$ si $x \in F$. Evidentemente $\cap_{x\in F} \ker\left(\langle x, \cdot\rangle\right) \subseteq \mathcal{V}$ y deducimos entonces que todo w^*- entorno de cero contiene, al menos, una recta. Sigue (iv).

(v) Sea A un subconjunto $w-$ acotado de X, $x_0^* \in X^*$,

$$\mathfrak{U} = \{x \in X : \ |\langle x, x_0^*\rangle| \leq 1\}.$$

Si $r > 0$ es tal que $A \subseteq r \cdot \mathfrak{U}$ y $\alpha \in \overline{D}\,(0, 1/r)$ entonces $\alpha \cdot x_0^* \in \pi\,(A)$, pues si $x \in A$ tenemos

$$|\langle x, \alpha \cdot x_0^*\rangle| = r \cdot |\alpha| \ \cdot |\langle x, x_0^*\rangle| / r \leq r \cdot |\alpha| \leq 1.$$

Recíprocamente, sea $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f\,(X^*)$,

$$\mathfrak{W} = \{x \in X : \ (\forall x^*),\ x^* \in \mathcal{F},\ |\langle x, x^*\rangle| \leq 1\}.$$

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta \cdot x^* \in \pi\,(A)$ si $x^* \in \mathcal{F}$ y $|\beta| \leq \varepsilon$. Es fácil ver que $A \subseteq (1/\varepsilon) \cdot \mathfrak{W}$ y sigue la afirmación.

(vi) Si $x_0 \in X$ probaremos que

$$\|x_0\| \leq \sup_{G \in \mathcal{P}_f(X^*)} \inf_{x^* \in G} \{\|x\| : \ |\langle x - x_0, \ x^* \rangle| \leq 1\}. \tag{31}$$

Podemos suponer $x_0 \neq 0$; si $0 < \delta < \|x_0\|$ sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$. Existe $x_n^* \in X^*$, $\|x_n^*\| \leq 1$, tal que $\delta < |\langle x_0, x_n^* \rangle|$. Dado $\overline{x} \in X$ tal que $|\langle \overline{x} - x_0, \ n \cdot x_n^* \rangle| \leq 1$ escribimos

$$1/n \geq |\langle \overline{x} - x_0, \ x_n^* \rangle|$$

$$\geq |\langle x_0, x_n^* \rangle| - |\langle \overline{x}, x_n^* \rangle| > \delta - \|\overline{x}\| \, \|x_n^*\| \geq \delta - \|\overline{x}\|,$$

$$\delta - 1/n \leq \|\overline{x}\| \leq \sup_{G \in \mathcal{P}_f(X^*)} \inf_{x^* \in G} \{\|x\| : \ |\langle x - x_0, \ x^* \rangle| \leq 1\}$$

y, como n es arbitrario,

$$\delta \leq \sup_{G \in \mathcal{P}_f(X^*)} \inf_{x^* \in G} \{\|x\| : \ |\langle x - x_0, \ x^* \rangle| \leq 1\}.$$

Como δ es arbitrario sigue (31). $\square$

3.16. Sobre clausura secuencial débil.

Sea $E = \{e^{imt} + m \ e^{int}, \ 0 \leq m < n \ en \ \mathbb{N}_0.\}$ en $L^2(-\pi, \pi)$.

(i) Determinar $\overline{E}^{wsc}$, la *clausura secuencial débil de* E, esto es, los límites débiles de sucesiones convergentes de E.

(ii) $0 \in \overline{E}^{w} - \overline{E}^{wsc}$.

(iii) $0 \in \overline{\overline{E}^{wsc}}^{wsc}$. En particular, la clausura secuencial débil de un conjunto puede no ser secuencial débilmente cerrada. (cf. [46])

Solución

(i) Evidentemente $E \subseteq \overline{E}^{wsc}$ y como para cada entero no negativo m resulta $w - \text{lím}_{n \to \infty} (e^{imt} + m \ e^{int}) = e^{imt}$ tenemos $E \cup \{e^{imt}\}_{m \in \mathbb{N}_0} \subseteq \overline{E}^{wsc}$. Por otra parte, una sucesión débilmente convergente $\{e^{im_k t} + m_k\ e^{in_k t}\}_{k\geq 1}$ ha de ser acotada por el principio de acotación uniforme. Entonces

$$\sup_{k\geq 1} \left\| e^{im_k t} + m_k\ e^{in_k t} \right\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \sup_{k\geq 1} \sqrt{1+m_k^2} < \infty,$$

i.e. $(m_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión finita y, como asumimos que la sucesión original es débilmente convergente, ésta debe ser casi constante. Si $(n_k)_{k\geq 1}$ es infinita entonces $w-\text{lím}_{k\to\infty} \left(e^{im_k t} + m_k\ e^{in_k t}\right) = e^{i\,\text{lím}_{k\to\infty} m_k t}$. Por otra parte, si $(n_k)_{k\geq 1}$ es finita como antes debe ser casi constante y $w-\text{lím}_{k\to\infty} \left(e^{im_k t} + m_k\ e^{in_k t}\right) = \text{lím}_{k\to\infty} \left(e^{im_k t} + m_k\ e^{in_k t}\right)$. En definitiva $\overline{E}^{wsc} = E \cup \{e^{imt}\}_{m\in\mathbb{N}_0}$.

(ii) Dados $\varepsilon > 0$ y $f \in L^2(-\pi,\pi)$, por la igualdad de Parseval existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle f, e^{imt}\rangle| < \varepsilon/2$. Existe también un estero positivo $n > m$ tal que $|\langle f, e^{int}\rangle| < \varepsilon/(2m)$. En consecuencia $|\langle f, e^{imt} + m\ e^{int}\rangle| < \varepsilon$. Deducimos entonces que $0 \in \overline{E}^{w}$. Por (i) tenemos (ii).

(iii) Tenemos $0 = w - \text{lím}_{n\to\infty} e^{int}$ y aplicamos (i). $\square$

3.17. Un subespacio cerrado w^*- denso de $l^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

Sea $M = \{x \in l^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) :\ m\, y(m,1) = \sum_{n=2}^{\infty} y(m,n),\ m \in \mathbb{N}\}$. Evidentemente M es un subespacio cerrado de $l^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Probar que M es w^*- denso en $l^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

Solución

Bastará ver que todo w^*- entorno de cero interseca a M. Sean F un subconjunto no vacío de $c_0(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, $\varepsilon > 0$,

$$U = \left\{ y \in l^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) :\ |\langle x, y\rangle| < \varepsilon \text{ si } x \in F \right\}.$$

Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x(m,n)| < \varepsilon/4$ si $x \in F$ y m y n son enteros tales que $m+n > K$. Escribimos $y = \{y(m,n)\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, donde

$$y(m,n) = \begin{cases} 0 & m \leq K,\ n \geq 1, \\ \frac{m}{(m+1)2^{m-K+n-1}} & m > K,\ n \geq 2, \\ 2^{K+1-m}/(m+1) & m > K,\ n = 1. \end{cases} \tag{32}$$

Si $m > K$ tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} y(m,n) = 2^{K+1-m} \ (m/(m+1)) = m \ y(m,1)$$

y, evidentemente, la igualdad anterior también se verifica si $m \leq K$. Además

$$\sum_{n\geq 1, m\geq 1} |y(m,n)| = \sum_{m=K+1}^{\infty} \left(\frac{2^{K+1-m}}{m+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m}{(m+1)\, 2^{m-K+n-1}} \right) \tag{33}$$

$$= \sum_{m=K+1}^{\infty} 2^{K+1-m} \ \left(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1} \right)$$

$$= \sum_{m=K+1}^{\infty} 2^{K+1-m} = 2$$

e $y \in M$. Ahora si $x \in F$ por (32) y (33) escribimos

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(|x(m,1) \ y(m,1)| + \sum_{n=2}^{\infty} \ |x(m,n) \ y(m,n)| \right)$$

$$= \sum_{m=K+1}^{\infty} |x(m,1) \ y(m,1)| + \sum_{m=K+1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \ |x(m,n) \ y(m,n)| \leq \varepsilon$$

y así $y \in M \cap U$. $\square$

3.18. En $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$, toda sucesión débilmente convergente es convergente. Operadores lineales sobre espacios reflexivos con valores en $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$: identidades de B. Pettis.

(i) Sea $\varepsilon > 0,\ \{z_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ una sucesión doble de números complejos tal que

$$4\ \varepsilon < \sum_{n=1}^{\infty} |z_{m,n}| < \infty \qquad (m \in \mathbb{N}), \tag{34}$$

$$\lim_{m\to\infty} z_{m,n} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Existen enteros $0 = n(0) < n(1) < n(2) < ...$ y $1 = m(1) < m(2) < ...$ tales que para $j = 1,\ 2,\ ...$ se verifican las desigualdades

$$\sum_{n=1}^{n(j-1)} \left|z_{m(j),n}\right| < \varepsilon, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1+n(j-1)}^{n(j)} \left|z_{m(j),n}\right| > 3\ \varepsilon, \tag{36}$$

$$\sum_{n=1+n(j)}^{\infty} \left|z_{m(j),n}\right| < \varepsilon. \tag{37}$$

(ii) En las condiciones de (i), hay una sucesión $(\varrho_n)_{n\geq 1}$ de complejos unitarios tal que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n\ z_{m(j),n}\right| > \varepsilon, \qquad (j \in \mathbb{N}). \tag{38}$$

(iii) En $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$, toda sucesión débilmente convergente es convergente.

(iv) (B. Pettis) Si $(E, \|\circ\|)$ es un espacio normado reflexivo entonces

$$\mathcal{L}\left[E,\ l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})\right] = \mathcal{K}\left[E,\ l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})\right],$$

$$\mathcal{K}\left[c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{C}), E\right] = \mathcal{L}\left[c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{C}), E\right].$$

Solución

(i) Por (34), existe $n(1) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n(1)} |z_{1,n}| > 3\ \varepsilon \qquad y \qquad \sum_{n=1+n(1)}^{\infty} |z_{1,n}| < \varepsilon.$$

Si $n(0) = 0$ y $m(1) = 1$, tenemos (36) y (37) para $j = 1$. Supongamos válido el resultado para $1 \leq j \leq J$ y, por (34), si $m(J+1)$ es un número natural y $m(J+1) > m(J)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{n(J)} \left| z_{m(J+1),n} \right| < \varepsilon. \tag{39}$$

También por (34), con $m = m(J+1)$, sea $n(J+1) \in \mathbb{N},\ n(J+1) > n(J)$, tal que

$$\sum_{n=1}^{n(J+1)} \left| z_{m(J+1),n} \right| > 4\ \varepsilon, \qquad \sum_{n=1+n(J+1)}^{\infty} \left| z_{m(J+1),n} \right| < \varepsilon. \tag{40}$$

Ahora, por (39) deducimos

$$\sum_{n=1+n(J)}^{n(J+1)} \left| z_{m(J+1),n} \right| > 4\ \varepsilon - \sum_{n=1}^{n(J)} \left| z_{m(J+1),n} \right| > 3\ \varepsilon. \tag{41}$$

De (39), (40) y (41) sigue (i) para $j = J+1$ y es válido el paso inductivo.

(ii) Con la notación anterior, sea $j \in \mathbb{N}$ y $(\varrho_n)_{n\geq 1}$ una sucesión arbitraria de complejos unitarios. Entonces

$$2\,\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{n(j-1)} \left|\, z_{m(j),n}\right| + \sum_{n=1+n(j)}^{\infty} \left|z_{m(j),n}\right| \tag{42}$$

$$\geq \left|\sum_{n=1}^{n(j-1)} \varrho_n\ z_{m(j),n} + \sum_{n=1+n(j)}^{\infty} \varrho_n\ z_{m(j),n}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n\ z_{m(j),n} - \sum_{n=1+n(j-1)}^{n(j)} \varrho_n\ z_{m(j),n}\right|$$

$$\geq \left|\sum_{n=1+n(j-1)}^{n(j)} \varrho_n\ z_{m(j),n}\right| - \left|\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n\ z_{m(j),n}\right|.$$

Considerando ϱ_n tal que $\varrho_n\ z_{m(j),n} = \left|z_{m(j),n}\right|$ si $n(j-1) < n \leq n(j)$, por (36) y (42) deducimos

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n\ z_{m(j),n}\right| \geq \sum_{n=1+n(j-1)}^{n(j)} \left|z_{m(j),n}\right| - 2\,\varepsilon > \varepsilon.$$

Queda así definida $(\varrho_n)_{n\geq 1}$ y sigue (ii).

(iii) Sea $\left\{z_m :\ z_m = (z_{m,n})_{n\geq 1}\right\}_{m\geq 1}$ una sucesión en $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ débilmente convergente a cero y no convergente a cero. Pasando eventualmente a una subsucesión, podemos suponer que para cierto $\varepsilon > 0$ se verifican las hipótesis de (ii). Luego existe una sucesión de complejos unitarios $\varrho = (\varrho_n)_{n\geq 1}$ y una subsucesión $\left\{z_{m(j)}\right\}_{j\geq 1}$ para las que se verifica (38). Tenemos $\varrho \in l^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ y $\left|\left\langle z_{m(j)},\, \varrho\right\rangle\right| > \varepsilon$ para todo j, lo que contradice la convergencia débil de $\{z_m\}_{m\geq 1}$ a cero.

(iv) Sea $T \in \mathcal{L}\left[E,\ l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})\right]$ y veamos que T es completamente continuo (cf. [9], Ch. VI, §3, Prop. 3.3(b), page 173). Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión débilmente convergente a f en E y $\varphi \in (l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C}))^*$ tenemos

$$\langle Tf_n - Tf, \varphi\rangle = \langle f_n - f, T^*\varphi\rangle \to 0$$

pues $T^*\varphi \in E^*$. Por lo tanto $Tf_n \ \underset{\to}{w}\ Tf$ en $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ y por (iii) $\|Tf_n - Tf\|_1 \to 0$. La otra afirmación sigue análogamente, considerando el adjunto de T y que $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C}) \approx (c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{C}))^*$. $\square$

3.19. Teorema de Banach - Orlicz - Pettis: Si E es un espacio de Banach, $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq E$ y $a \in l^{\infty}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ x_n$ converge en E.

Sea $(E,\ \|\circ\|)$ un espacio de Banach, $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq E$.

(i) $(x_n)_{n\geq 1}$ induce una serie incondicionalmente convergente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ hay un conjunto $H \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ tal que para todo $J \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ disjunto con H resulta $\left\|\sum_{n\in J}\ x_n\right\| \leq \varepsilon$. [18]

(ii) Si para toda sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\ x_{n_k}$ es convergente entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ induce una serie incondicionalmente convergente.

(iii) Si $\{x_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{i\in I} \|x_i\|_{\infty} \leq 2n \max_{J\in\mathcal{P}(I)} \left\|\sum_{i\in J}\ x_i\right\|_{\infty}. \tag{43}$$

(iv) Toda serie incondicionalmente convergente de números complejos es absolutamente convergente.

(v) Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq E$ tal que para toda sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\ x_{n_k}$ converge débilmente. La aplicación lineal

$$S : E^* \to l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C}),\ S(\rho) = \{\rho(x_n)\}_{n\geq 1},\ \rho \in E^*,$$

es acotada.

[18] En este problema $\mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ indicará las partes finitas no vacías de $\mathbb{N}$.

(vi) Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ pertenece a $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ la ecuación

$$\Omega_a(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(a_n\ x_n),\ \ \rho \in E^*,$$

define un funcional acotado sobre E^* y $\|\Omega_a\| \leq \|S\|\ \|a\|_\infty$.

(vii) Probar que $\Omega_a \in \widehat{E}$ si $a \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, donde $\widehat{E}$ es la imágen de la inmersión natural de E en E^{**}.

(viii) Si $a \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ a_n\ x_n$ converge débilmente en E.

(ix) $S \in (w^*,\ s)$.

(x) Dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n(\varepsilon)}^{\infty}\ |\rho(x_n)| \leq \varepsilon\ \ \|\rho\|$ si $\rho \in E^*$.

(xi) (Banach - Orlicz - Pettis, [5], [30], [37]) Para toda $a \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ a_n\ x_n$ converge en E.

Solución

(i) Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ para el que no se verifica (i). Si $H_1 \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ sea $H_2 \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ tal que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ y $\left\|\sum_{n\in H_2} x_n\right\| > \varepsilon$. Construídos para k entero positivo $H_1,\ ...\ , H_k \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ disjuntos sea $H_{k+1} \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ disjunto con $H_1 \cup ... \cup H_k$ tal que $\left\|\sum_{n\in H_{k+1}} x_n\right\| > \varepsilon$. Escribimos

$$H_1 = \{n_1,\ ...\ ,\ n_{h_1}\},\ H_2 = \{n_{h_1+1},\ ...\ ,\ n_{h_2}\},\ ... \qquad (44)$$

donde

$$n_1 < n_2 < ... < n_{h_1} \ \ y\ \ n_{h_{j-1}+1} < n_{h_{j-1}+2} < ... < n_{h_j}\ \ si\ \ j > 1. \quad (45)$$

Definiendo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(l) = n_l,\ l \in \mathbb{N}$ entonces σ es una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Como $\left\|\sum_{l=h_{j-1}+1}^{h_j}\ x_{\sigma(l)}\right\| > \varepsilon$ para cada j la serie $\sum_{l=1}^{\infty}\ x_{\sigma(l)}$ no converge. Recíprocamente, sean α y β biyecciones de $\mathbb{N}$, $x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\ x_{\alpha(n)}$, $x_\beta = \sum_{n=1}^{\infty}\ x_{\beta(n)}$. Por hipótesis, dado $\delta > 0$ existe $H \in \mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$ tal que $\left\|\sum_{n\in J}\ x_n\right\| \leq \delta/2$ si J es disjunto con H

en $\mathcal{P}_f^{\cdot}(\mathbb{N})$. En particular, existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(n) \notin H$ si $n \geq n_\alpha$. Luego si $p,\ q$ son no menores que n_α en $\mathbb{N}$ tenemos

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} x_{\alpha(n)} - \sum_{n=1}^{q} x_{\alpha(n)} \right\| \leq \left\| \sum_{n=n_\alpha+1}^{p} x_{\alpha(n)} \right\| + \left\| \sum_{n=n_\alpha+1}^{q} x_{\alpha(n)} \right\| \leq \delta.$$

Por ser el espacio completo y $\delta > 0$ arbitrario, x_α está bien definido, siendo el mismo razonamiento es aplicable a x_β. Más aún, con la misma notación, si $p,\ q$ son enteros positivos, $r \geq n_\alpha,\ s \geq n_\beta$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha - x_\beta\| \leq & \left\| x_\alpha - \sum_{n=1}^{r} x_{\alpha(n)} \right\| \\
& + \left\| \sum_{n=1}^{r} x_{\alpha(n)} - \sum_{n=1}^{s} x_{\beta(n)} \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{s} x_{\beta(n)} - x_\beta \right\| \\
\leq & \left\| x_\alpha - \sum_{n=1}^{r} x_{\alpha(n)} \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{s} x_{\beta(n)} - x_\beta \right\| + \delta
\end{aligned}$$

y, si $r,\ s \to \infty$ vemos que $x_\alpha = x_\beta$ y la condición es suficiente.

(ii) Con la notación y razonando como en (i), supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ no induce una serie incondicionalmente convergente. Usando (44) y (45) podemos considerar

$$\begin{aligned}
& n_1 < n_2 < ... < n_{h_1} < \\
& \quad < n_{h_{k_1}+1} < n_{h_{k_1}+2} < ... < n_{h_{k_1+1}} < \\
& \quad < n_{h_{k_2}+1} < n_{h_{k_2}+2} < ... < n_{h_{k_2+1}} < ...
\end{aligned}$$

donde $n_{h_{k_1}+1}$ es mínimo tal que $n_{h_{k_1}+1} > n_{h_1},\ n_{h_{k_2}+1}$ es mínimo tal que $n_{h_{k_2}+1} > n_{k_1+1}$, etc.. Escribiendo $\sigma(j) = n_j$ si $1 \leq j \leq h_1$, $\sigma(j+1) = n_{h_{k_1}+1},\ \sigma(j+2) = n_{h_{k_1}+2}$, etc. la sucesión $(\sigma(j))_{j\geq 1}$ es estrictamente creciente pero $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$ no converge pues, por construcción, la sucesión de sumas parciales no es fundamental.

(iii) Si $n = 1$ tenemos

$$\sum_{i\in I} |x_i| = \sum_{i\in I/x_i>0} x_i - \sum_{i\in I/x_i<0} x_i$$

$$= \left|\sum_{i\in I/x_i>0} x_i\right| + \left|\sum_{i\in I/x_i<0} x_i\right|$$

$$\leq 2 \max_{J\in\mathcal{P}(I)} \left|\sum_{i\in J} x_i\right|.$$

Suponiendo cierta (43) para $\leq n$ escribimos

$$\sum_{i\in I} \|x_i\|_{\mathbb{R}^{n+1},\|\circ\|_\infty} \leq \sum_{i\in I} \left[\|x_i\|_{\mathbb{R}^n,\|\circ\|_\infty} + \left|x_i^{n+1}\right|\right]$$

$$\leq 2n \max_{J\in\mathcal{P}(I)} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|_{\mathbb{R}^n,\|\circ\|_\infty} + 2 \max_{J\in\mathcal{P}(I)} \left|\sum_{i\in J} x_i^{n+1}\right|$$

$$\leq (2n+2) \max_{J\in\mathcal{P}(I)} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|_{\mathbb{R}^{n+1},\|\circ\|_\infty}$$

y es válido el paso inductivo.

(iv) Si una serie en $\mathbb{C}$ es incondicionalmente convergente también lo son sus partes real e imaginaria. Podemos remitirnos al caso real pues $|z| \leq |\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|$ para $z \in \mathbb{C}$. Sea entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie incondicionalmente convergente en $\mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sum_{n\in J} x_n\right| \leq \varepsilon$ si $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ y $J \cap \{1, \ldots, N\} = \emptyset$. Si $p > N,\ q \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\sum_{n=p}^{p+q} |x_n| \leq 2 \max_{J\in\mathcal{P}(\{p,\ldots,p+q\})} \left|\sum_{n\in J} x_n\right| \leq \varepsilon$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ pues sus sumas parciales son sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

(v) Por (ii) y (iv) S está bien definida y es claramente lineal. Consideremos $\{(\rho_k,\ S(\rho_k))\}_{k\geq 1}$ tal que $(\rho_k,\ S(\rho_k)) \to (\rho,\ y)$ en $E^* \times l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$. Como $S(\rho_k) \to y$ en $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$, si para $n \in \mathbb{N}$ escribimos $\delta_n = (\delta_{nm})_{m\geq 1}$ en $l^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ tenemos

$$\langle y,\ \delta_n\rangle = \lim_{k\to\infty}\ \langle S(\rho_k),\ \delta_n\rangle = \lim_{k\to\infty}\ \rho_k(x_n) = \rho(x_n)\,.$$

Por lo tanto $y = S(\rho)$ y, por el teorema del gráfico cerrado, S es acotado.

(vi) Sea $N \in \mathbb{N}$, $\rho \in E^*$, $\Omega_{a,N}(\rho) = \sum_{n=1}^{N}\ \rho(a_n\ x_n)$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{N}\ |\rho(a_n\ x_n)| = \sum_{n=1}^{N}\ |a_n\ \rho(x_n)| \leq \|a\|_\infty\ \sum_{n=1}^{\infty}\ |\rho(x_n)| < +\infty \tag{46}$$

y, por ser N arbitrario, Ω_a está bien definido y es lineal. Además $\{\Omega_{a,N}\}_{N\geq 1} \subseteq E^{**}$ pues $|\Omega_{a,N}(\rho)| \leq \|\rho\|\ \left\|\sum_{n=1}^{N}\ a_n\ x_n\right\|$ y

$$\Omega_a(\rho) = \lim_{N\to+\infty}\ \Omega_{a,N}(\rho)\,. \tag{47}$$

Por el principio de acotación uniforme la sucesión $\{\Omega_{a,N}\}_{N\geq 1}$ es acotada en norma y por (47) el operador Ω_a deviene acotado. Por (46) podemos escribir

$$|\Omega_a(\rho)| = \lim_{N\to+\infty}\ |\Omega_{a,N}(\rho)| \leq \|a\|_\infty\ \|S(\rho)\|_1 \leq \|a\|_\infty\ \|S\|\ \|\rho\|\,.$$

(vii) Supongamos que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ tiene rango finito F en $\mathbb{C}$. Si $\rho \in E^*$, como las subsucesiones estrictamente creciente inducen subseries débilmente convergentes de $\sum x_n$ deducimos

$$\begin{aligned}\Omega_a(\rho) &= \sum_{n=1}^{\infty}\ \rho(a_n\ x_n) = \sum_{z\in F}\ z\ \sum_{n:\ a_n=z}\ \rho(x_n)\\ &= \rho\left(\sum_{z\in F}\ z\ \sum_{n:\ a_n=z}\ x_n\right) = \left(\sum_{z\in F}\ z\ \sum_{n:\ a_n=z}\ x_n\right)^{\wedge}(\rho)\,.\end{aligned}$$

En el caso general, notemos que las sucesiones de rango finito son densas en $l^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$.[19] Ahora basta considerar (vi) y que $\widehat{E}$ es cerrado en E^{**}.

(viii) Dado $a \in l^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ resulta $\Omega_a = \widehat{y(a)}$, para un único $y(a) \in E$. Si $\rho \in E^*$ tenemos

$$\left\langle y(a) - \sum_{n=1}^{N}\ a_n\ x_n,\ \rho \right\rangle = \Omega_a\left(\rho\right) - \sum_{n=1}^{N}\ \rho(a_n\ x_n)$$

y así $\sum_{n=1}^{N}\ a_n\ x_n \ \underset{\rightarrow}{w}\ y(a)$.

(ix) Si $\rho_m \ \underset{\rightarrow}{w^*}\ \rho$ en E^* y $a \in l^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ por (viii) podemos escribir

$$\left\langle S\left(\rho\right),\ a \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty}\ a_n\ x_n,\ \rho \right\rangle = \lim_{m\to+\infty}\ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty}\ a_n\ x_n,\ \rho_m \right\rangle$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ a_n \left\langle\ x_n,\ \rho_m \right\rangle = \lim_{m\to+\infty}\ \left\langle S\left(\rho_m\right),\ a \right\rangle,$$

i.e. $S(\rho_m)\ \underset{\rightarrow}{w}\ S(\rho)$ en $l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ y por el Problema 1.13 (iii) sigue (ix).

(ix) Supongamos existe $\varepsilon > 0$ para el que la afirmación no se verifique. Dado $k \in \mathbb{N}$ existirá $\rho_k \in E^*$ tal que $\sum_{n=k}^{\infty}\ \left|\rho_k\left(x_n\right)\right| > \varepsilon$ y $\|\rho_k\| = 1$. Por la w^*- compacidad de la bola unitaria existe $\rho \in E^*$ y una subsucesión $\left(\rho_{k_h}\right)_{h\geq 1}$ tal que $\rho_{k_h}\ \underset{\rightarrow}{w^*}\ \rho$. Pero

$$\left\|S\left(\rho_{k_h}\right) - S\left(\rho\right)\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\ \left|\rho_{k_h}\left(x_n\right) - \rho\left(x_n\right)\right|$$

$$\geq \sum_{n=k_h}^{\infty}\ \left(\left|\rho_{k_h}\left(x_n\right)\right| - \left|\rho\left(x_n\right)\right|\right) \geq \varepsilon - \sum_{n=k_h}^{\infty}\ \left|\rho\left(x_n\right)\right|.$$

Pero $\left\{\rho\left(x_n\right)\right\}_{n\geq 1} \in l^1(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ y por (viii) deducimos que $0 \geq \varepsilon$, lo que es falso.

[19] Si $\varsigma \in l^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$ y $s > 0$, por la compacidad del círculo cerrado centrado en cero y radio $\|\varsigma\|_\infty$, hay un subconjunto finito Γ del mismo tal que $dist(\varsigma,\ \Gamma) \leq s$. Claramente, es posible construir una sucesión υ de rango finito tal que $\|\varsigma - \upsilon\|_\infty \leq s$.

(x) Sea $a \in l^{\infty}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$ y $n(\varepsilon)$ como en (ix). Si $p \geq n(\varepsilon)$, $q \geq 0$ tenemos

$$\left\| \sum_{n=p}^{p+q} a_n \ x_n \right\| = \sup \left\{ \left| \left\langle \sum_{n=p}^{p+q} a_n \ x_n, \ \rho \right\rangle \right| : \ \rho \in E^*, \ \|\rho\| \leq 1 \right\}$$

$$\leq \|a\|_{\infty} \ \sup \left\{ \sum_{n=n(\varepsilon)}^{\infty} |\rho(x_n)| : \ \rho \in E^*, \ \|\rho\| \leq 1 \right\}$$

$$\leq \|a\|_{\infty} \ \varepsilon,$$

i.e. la sucesión $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n \ x_n\right)_{m\geq 1}$ es fundamental y, por ser E completo, sigue la tesis. $\square$

3.20. Análisis espectral de un álgebra de Banach pesada de sucesiones.

Sea $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (0, +\infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 0$, $a_0 = 1$, $a_{n+m} \leq a_n \ a_m$ para cada n y m. Sea

$$A = \left\{ \eta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ |\eta_n| < \infty \right\}$$

munido de la norma $\|\eta\| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ |\eta_n|$, $\eta \in A$.

(i) $(A, \ \|\circ\|)$ admite una estructura de álgebra de Banach unitaria.

(ii) Determinar $\mathfrak{X}(A)$ y $\mathrm{rad}(A)$.

Solución

(i) Evidentemente $(A, \ \|\circ\|)$ es un espacio de Banach. Si $\eta, \ \mu \in A$ sea $\eta * \mu = \left(\sum_{m=0}^{n} \eta_m \ \mu_{n-m}\right)_{n\geq 0}$. Dado un entero positivo N podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n \ \left|(\eta * \mu)_n\right| &\leq \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{m=0}^{n} \left|\eta_m \ \mu_{n-m}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} a_{m+(n-m)} \left|\eta_m \ \mu_{n-m}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} a_m \left|\eta_m\right| \ a_{n-m} \left|\mu_{n-m}\right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{N} a_m \left|\eta_m\right| \sum_{p=0}^{N-m} a_p \left|\mu_p\right| \leq \|\eta\| \ \|\mu\|,
\end{aligned}$$

y como N es arbitrario tenemos $\eta * \mu \in A$ y $\|\eta * \mu\| \leq \|\eta\| \ \|\mu\|$, i.e. $*$ induce sobre A una estructura de álgebra de Banach. Evidentemente $e_0 = (\delta_{0n})_{n \geq 0}$ es elemento idéntico en A.

(ii) Sea $h \in \mathfrak{X}(A)$, $e_n = (\delta_{nm})_{m \geq 0}$ para $n \geq 0$. Dados enteros no negativos n y m, como $e_n * e_m = e_{n+m}$, resulta $h\left(e_{n+m}\right) = h\left(e_n * e_m\right) = h(e_n) \ h(e_m)$. Luego si n es positivo $h(e_n) = h(e_1)^n$. Observamos que si $\eta \in A$ y $N > 0$ entonces

$$\left\|\eta - \sum_{n=0}^{N} \eta_n \ e_n\right\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \eta_n \ e_n\right\| = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \ \left|\eta_n\right|,$$

de modo que haciendo $N \to +\infty$ tenemos $\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \ e_n$. Ahora $h(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \ h(e_1)^n$, y debe ser $\left|h(e_1)\right| \ \overline{\lim}_{n \to \infty} \left|\eta_n\right|^{1/n} \leq 1$ para todo $\eta \in A$. Como el elemento $\eta = (1/(2^n \ a_n))_{n \geq 0}$ pertenece a A y $\overline{\lim}_{n \to \infty} \left|\eta_n\right|^{1/n} = +\infty$ debe ser $h(e_1) = 0$ y $\mathfrak{X}\left(A\right)$ se reduce al homomorfismo idéntico. Luego $\operatorname{rad}\left(A\right) = \left\{\eta \in A : \ \eta_0 = 0\right\}$. $\square$

3.21. Análisis espectral de álgebras de Banach de funciones sobre un espacio metrizable compacto.

Sea X un espacio metrizable compacto y B una subálgebra unitaria de $C_{\mathbb{C}}(X)$ munida de una norma $\|\circ\|_B$ respecto a la que es un álgebra de Banach.

(i) Probar que $\|x\|_B \geq \|x\|$ para todo $x \in B$. Deducir que $x = 0$ es el único elemento cuasinilpotente de B.

(ii) Si $\mathfrak{X}(B)$ es el espacio ideal maximal de B la aplicación

$$\varphi : X \to \mathfrak{X}(B), \ \varphi(t)(x) = x(t), \ t \in X, \ x \in B,$$

es continua.

(iii) Si B separa puntos de X entonces φ es un homeomorfismo de X sobre un subespacio cerrado de $\mathfrak{X}(B)$.

(iv) Si $\overline{x} \in B$ cuando $x \in B$ y $x^{-1} \in B$ cuando $x(t) \neq 0$ para todo $t \in B$ entonces φ es suryectiva.

(v) Sea $A = C_{\mathbb{C}}^{(k)}([0,1])$ el álgebra de funciones complejas con derivadas continuas hasta el orden k sobre $[0,1]$, con la métrica dada por

$$[x]_k = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} \left\| x^{(h)} \right\|_\infty .$$

Entonces A es un álgebra de Banach. Determinar $\mathfrak{X}(A)$.

Solución

(i) Si $t \in X$ entonces $\varphi(t) : B \to \mathbb{C}$, $\varphi(t)(x) = x(t)$ es un homomorfismo sobre B. En consecuencia $|x(t)| \leq \|x\|_B$ y, como t es arbitrario, $\|x\|_B \geq \|x\|$. Por lo tanto si $x \in B$ es cuasinilpotente entonces deviene cuasinilpotente en $C_{\mathbb{C}}(X)$. Como $\|x^n\| = \|x\|^n$ para cada n tenemos $r_{sp}(x) = \|x\|$ y debe ser $x = 0$.

(ii) Trivial.

(iii) Si $t_1,\ t_2 \in X$ son distintos existe $x \in B$ tal que $x(t_1) \neq x\,(t_2)$ y tenemos $\varphi(t_1)(x) \neq \varphi\,(t_2)\,(x)$, i.e. $\varphi(t_1) \neq \varphi\,(t_2)$ y φ es inyectiva. Como X es metrizable entonces es T_1 y regular (cf. [23], Teorema de Metrización, pág. 149) y por ello es Hausdorff. Como además X es compacto, por (ii) y la inyectividad de φ sigue (iii).

(iv) Sea $\varkappa \in \mathfrak{X}\,(B)$, $\kappa = \ker\,(\varkappa)$. Entonces κ es un ideal maximal de B y podemos considerar el conjunto $Z = \{t \in X:\ (\forall x),\ x \in \kappa,\ x(t) = 0\}$. Si $Z = \emptyset$ entonces para cada $t \in X$ existe $x_t \in \kappa$ y un entorno U_t de t en X sobre el cual x_t no se anula. Por la compacidad de X hay un subconjunto finito F de X tal que $X = \cup_{t\in F} U_{x_t}$. Si $x = \sum_{t\in F} x_t\ \overline{x_t}$ es inmediato que $x \in \kappa$ y no se anula sobre X. Por hipótesis x es inversible en B y deducimos que $\kappa = B$, lo cual no es posible porque $\varkappa \neq 0$. Luego existe $t \in Z$ y $\varphi(t)(x) = 0$ para cada $x \in \kappa$, *i.e.* $\ker\,(\varphi(t)) \supseteq \ker\,(\varkappa)$. Como $\ker\,(\varphi(t))$ es un ideal propio de B y $\ker\,(\varkappa)$ es un ideal maximal tenemos $\ker\,(\varphi(t)) = \ker\,(\varkappa)$, i.e. $\varkappa = \varphi(t)$.

(v) Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en A. Si $t \in [0,1]$ y $0 \leq h \leq k$ tenemos

$$\left|x_n^{(h)}(t) - x_{m+n}^{(h)}(t)\right| \leq \left\|x_n^{(h)} - x_{m+n}^{(h)}\right\|_\infty \leq h!\ [x_n - x_{m+n}]_k\,,$$

$\left\{x_n^{(h)}(t)\right\}_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y existe $\widetilde{x}_h(t) = \text{lím}_{n\to\infty} x_n^{(h)}(t)$. Quedan definidas las aplicaciones $\widetilde{x}_h : [0,1] \to \mathbb{C},\ 0 \leq h \leq k$, las que son continuas por ser límite uniforme de aplicaciones continuas. Si escribimos $x = \widetilde{x}_0$ probaremos que $x \in A$ y que $x_n \to x$ en A. Como $x_n^{(1)} \xrightarrow{\circ} \widetilde{x}_1$ y $[0,1]$ es compacto dado $t \in [0,1]$ tenemos

$$\int_0^t \widetilde{x}_1(s)\ ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n^{(1)}\ ds$$

$$= \lim_{n\to\infty} [x_n(t) - x_n(0)] = x(t) - x(0).$$

Luego x es derivable y $x^{(1)}(t) = \widetilde{x}_1(t)$ para $t \in [0,1]$, i.e. $\widetilde{x}_1 = x^{(1)}$ y $x_n^{(1)} \xrightarrow{\circ} x^{(1)}$. Asumiendo que $\widetilde{x}_l = x^{(l)}$ y $x_n^{(l)} \xrightarrow{\circ} x^{(l)}$ si $0 \leq l < h$ razonamos como antes con h en lugar de 1 para deducir que x tiene derivadas hasta el orden h y que $x^{(h)} = \widetilde{x}_h$. Inductivamente deducimos entonces que $x \in A$ pues cada una de sus derivadas, al menos hasta el orden k, existen y son continuas sobre un intervalo compacto. Además, $[x_n - x]_k \to 0$ pues los límites son uniformes, i.e. $(A, [\circ]_k)$ es un espacio de Banach. Por otra parte, si $x,\ y \in A$ y $0 \leq h \leq k$, usando la regla de derivación de Leibnitz deducimos la desigualdad

$$\frac{1}{h!}\left\|(xy)^{(h)}\right\|_\infty \leq \sum_{l=0}^{h} \frac{\left\|x^{(h-l)}\right\|_\infty}{(h-l)!}\frac{\left\|y^{(l)}\right\|_\infty}{l!},$$

de modo que

$$[xy]_k = \sum_{h=0}^{k} \frac{\left\|(xy)^{(h)}\right\|_\infty}{h!} \leq \sum_{h=0}^{k}\sum_{l=0}^{h} \frac{\left\|x^{(l)}\right\|_\infty}{l!}\frac{\left\|y^{(h-l)}\right\|_\infty}{(h-l)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{\left\|x^{(l)}\right\|_\infty}{l!}\sum_{j=0}^{k-l}\frac{\left\|y^{(j)}\right\|_\infty}{j!} \leq \sum_{l=0}^{k} \frac{\left\|x^{(l)}\right\|_\infty}{l!}\sum_{j=0}^{k}\frac{\left\|y^{(j)}\right\|_\infty}{j!}$$

$$= [x]_k\ [y]_k\,.$$

Así $(A,\ [\circ]_k)$ es un álgebra de Banach. Evidentemente A está en las condiciones (iii) y (iv) de modo que $\mathfrak{X}(A) \equiv [0,1]$. $\square$

3.22. Análisis espectral de subálgebras de Banach de funciones analíticas con extensión continua al disco cerrado unitario de $\mathbb{C}$.

Sea $\mathcal{A}(D)$ el conjunto de funciones continuas en el disco unitario cerrado $\overline{D}$ que son analíticas en su interior D. Dados $x,\ y \in \mathcal{A}(D)$ escribimos

$$(x * y)(\zeta) = \zeta \int_0^1 x(\zeta - t\zeta)\ y(t\zeta)\ dt,\ \zeta \in D. \tag{48}$$

(i) $(\mathcal{A}(D)\,,\ \|\circ\|_\infty\,,\ *)$ es una subálgebra de Banach sin unidad de $C_{\mathbb{C}}\left(\overline{D}\right)$.

(ii) $\operatorname{rad}[\mathcal{A}(D)] = \mathcal{A}(D)$.

(iii) Sea B la subálgebra de $C_{\mathbb{C}}\left(\overline{D}\right)$ generada por la función $|z| : z \to |z|$ y el álgebra $\mathcal{A}(D)$. Entonces

$$\mathfrak{X}(B) \equiv \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x^2 \leq x_3^2, \; 0 \leq x_3 \leq 1\right\}.$$

Solución

(i) Sabemos que $(\mathcal{A}(D), \; \|\circ\|_\infty)$ es un subespacio de Banach de $C_{\mathbb{C}}\left(\overline{D}\right)$. Dados $x, \; y \in \mathcal{A}(D)$, evidentemente la integral en (48) es convergente y, por el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue, $x * y$ es continua sobre $\overline{D}$. Además si $|\zeta| < 1$ entonces $x * y$ es holomorfa en ζ y

$$\frac{d(x * y)}{d\zeta}(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\left[x(\zeta - z)\right]}{d\zeta} \; y(z) \; dz + x(0) \; y(\zeta).$$

(cf. [31], lema 1, pág. 82) En consecuencia (48) es una buena definición y

$$|(x * y)(\zeta)| \leq |\zeta| \; \|x\|_\infty \; \|y\|_\infty \leq \|x\|_\infty \; \|y\|_\infty$$

para cada $\zeta \in \overline{D}$ de donde $\|x * y\| \leq \|x\|_\infty \; \|y\|_\infty$. Claramente entonces $(\mathcal{A}(D), \; \|\circ\|_\infty, \; *)$ es un álgebra de Banach. Si $u \in A$ fuese una unidad tendríamos

$$(1 * u)(\zeta) = \int_0^\zeta u(z) \; dz \equiv 1 \tag{49}$$

y derivando en (49) deduciríamos que $u \equiv 0$, lo cual es imposible.

(ii) Dados un entero $n \geq 2$, $x \in A, \; \zeta \in \overline{D}$ puede verse inductivamente la relación

$$x^n(\zeta) = (x * ... * x)(\zeta) = \zeta^{n-1} \int \cdots \int_{[0,1]^{n-1}} F(x, \zeta, t) \; d^{n-1}t$$

donde

$$F(x, \zeta, t) = x(\zeta - t_1\zeta) \prod_{i=1}^{n-2} \left[t_i^{n-i-1} x\left(t_1 ... t_i (1 - t_{i+1})\zeta\right)\right] x\left(t_1 ... t_{n-1}\zeta\right).$$

En consecuencia

$$|x^n(\zeta)| \leq \|x\|^n \int \cdots \int_{[0,1]^{n-1}} t_i^{n-i-1} \; d^{n-1}t = \frac{\|x\|^n}{(n-1)!},$$

i.e. $\|x\| \leq \|x\|^n / (n-1)!$ pues ζ es arbitrario. Luego $r_{sp}(x) = 0$ para todo $x \in A$ y así $\text{rad}\left[\mathcal{A}(D)\right] = \mathcal{A}(D)$ y $\mathcal{A}(D)$ no tiene caracteres no triviales.

(iii) Si $z : \overline{D} \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión natural entonces B contiene todas las funciones del tipo $z \to g(|z|)$, donde $g \in C_{\mathbb{C}}([0,1])$. Basta observar la densidad de los polinomios en $C_{\mathbb{C}}([0,1])$, que B es cerrado en $C_{\mathbb{C}}\left(\overline{D}\right)$ y que $|z| \in B$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ tenemos $z/(|z|+\varepsilon) \in B$ y $\|z/(|z|+\varepsilon)\|_{\infty} = 1/(1+\varepsilon)$. Formalmente, podemos escribir

$$z \ (z - |z| - \varepsilon)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right)^{n+1}. \tag{50}$$

Luego

$$\left\|\sum_{n=N}^{N+P}\left(\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right)^{n+1}\right\|_{\infty} \leq \sum_{n=N}^{N+P}\left\|\left(\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right)^{n+1}\right\|_{\infty}$$

$$\leq \sum_{n=N}^{N+P}\left\|\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right\|_{\infty}^{n+1} \leq \sum_{n=N}^{N+P}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}}$$

cualesquiera sean $N,\ P \in \mathbb{N}_0$ y, como B es completo, la serie en (50) define un elemento en B. Por otra parte, $z - |z| - \varepsilon \in B$,

$$-(z - |z| - \varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right)^{n+1} =$$

$$= (|z|+\varepsilon)\left[1 - \frac{z}{|z|+\varepsilon}\right]\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right)^{n+1} = z$$

y como $z - |z| - \varepsilon$ es inversible en $C_{\mathbb{C}}\left(\overline{D}\right)$ es válida la identidad (50). Si ahora $\varkappa \in \mathfrak{X}(B)$ tenemos

$$\left|\varkappa\left(\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right)\right| \leq \left\|\frac{z}{|z|+\varepsilon}\right\|_{\infty} = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

de modo que $|\varkappa(z)| \leq |\varkappa(|z|) + \varepsilon| / (1+\varepsilon)$ y haciendo $\varepsilon \to 0^{+}$ resulta

$$|\varkappa(z)| \leq |\varkappa(|z|)|. \tag{51}$$

Notar que $\sigma_B(|z|) \subseteq [0,1]$. En efecto si $\alpha \notin [0,1]$ la función

$$t \to g(t) = \frac{t - \overline{\alpha}}{|t-\alpha|^2}$$

es continua sobre $[0,1]$. Entonces $g\left(|z|\right) \in B$, *i.e.*

$$\frac{|z|-\overline{\alpha}}{\left||z|-\alpha\right|^2} \in B \qquad y \qquad 1 = \left(|z|-\alpha\right) \frac{|z|-\overline{\alpha}}{\left||z|-\alpha\right|^2}.$$

En consecuencia, en (51) tenemos $|\varkappa(z)| \leq \varkappa(|z|)$ y sigue (iii). $\square$

3.23. Estudio espectral de espacios de Banach de funciones analíticas compatibles con productos de tipo Hadamard.

(i) Si $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$, $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ son series formales complejas en la indeterminada z denotamos $a \odot b$ a la serie formal[20]

$$(a \odot b)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\, z^n.$$

Mostrar que el producto de Hadamard define sobre el espacio de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ una estructura de álgebra de Banach, donde $\mathbb{D}$ es el disco abierto unitario del plano complejo centrado en cero.[21]

(ii) Ídem para el espacio de Bergman $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$.[22]

(iii) Sea $-1 < \alpha \leq 0$, $\mathcal{D}_\alpha$ el espacio prehilbertiano de funciones analíticas f sobre $\mathbb{D}$ tales que $\int_D |df/dz|^2 \ (1-|z|^2)^\alpha\, dA(z)/\pi < \infty$, (*espacio de Dirichlet*, v. [10], page 13). Consideramos en $\mathcal{D}_\alpha$ la métrica inducida por el producto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = f(0)\ \overline{g(0)} + \int_D df/dz\ \overline{dg/dz}\ (1-|z|^2)^\alpha\ \frac{dA(z)}{\pi},$$

definido para $f,\ g \in \mathcal{D}_\alpha$. Probar que $\left(\mathcal{D}_\alpha,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_\alpha}\right)$ es espacio de Hilbert.

[20] Se dice que $a \odot b$ es el producto de Hadamard de a y b (cf. [25]).

[21] En general, si $0 < p < \infty$, el espacio de Hardy $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$ es el espacio de funciones analíticas h sobre $\mathbb{D}$ para las que $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |h(r \exp(\mathrm{i}\,\theta))|^p\ d\theta < \infty$. A la raíz $p-$ ésima de dicha cantidad se la indica $\|h\|_{\mathrm{H}^p(\mathbb{D})}$. El espacio $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ consiste de todas las funciones h analíticas acotadas sobre $\mathbb{D}$, munido de la norma $\|h\|_{\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})} = \|h\|_\infty$.

[22] Si $0 < p < \infty$, el espacio de Berman $\mathrm{A}^p(\mathbb{D})$ consiste en todas las funciones analíticas h sobre $\mathbb{D}$ tales que $\int_{\mathbb{D}} |h(z)|^p\ dA(z)/\pi < \infty$, donde $dA(z)$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{D}$. A la raíz $p-$ ésima de dicha cantidad se la indica $\|h\|_{\mathrm{A}^p(\mathbb{D})}$.

(iv) Mostrar que $\left(\mathcal{D}_\alpha, \ \|\circ\|_{\mathcal{D}_\alpha}, \ \odot\right)$ es un álgebra de Banach abeliana no unitaria. Deducir, análogamente, que las álgebras de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ y de Bergman $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ no son unitarias.[23]

(v) Determinar los espacios ideales maximales de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ y $\mathcal{D}_\alpha$ $(-1 < \alpha \leq 0)$ respecto al producto de Hadamard. [24]

Solución

(i) Notemos que $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ se realiza como el espacio de funciones $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analíticas tales que $\left\{h^{(n)}(0)/n!\right\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathrm{l}^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$, de modo que

$$\|h\|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})} = \left\|\left\{h^{(n)}(0)/n!\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}\right\|_2$$

(cf. [10], Ch. 2, page 11). Si $f, \ g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)\right| / j!^2 \leq 1$ si $j \geq j_0$. Si $z \in \mathbb{D}$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{j=j_0}^{j_0+k} \left|\frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{j!^2} \cdot z^j\right| \leq \sum_{j=j_0}^{j_0+k} \left|\frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{j!^2}\right| \tag{52}$$

$$\leq \|f\|^2_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})} \|g\|^2_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})}$$

y, como k y z son arbitrarios, $f \odot g$ es una función bien definida. Más aún, por (52) se deduce enseguida que $f \odot g$ converge uniformemente, i.e. es analítica en cuanto se realiza como límite uniforme de funciones analíticas.[25] Si $n \in \mathbb{N}_0$ escribimos

$$\sum_{j=0}^{n} \left|\frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{j!^2}\right|^2 \leq \left(\sum_{j=0}^{n} \left|\frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{j!^2}\right|\right)^2$$

$$\leq \|f\|^2_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})} \|g\|^2_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})}$$

y, siendo n arbitrario, $\|f \odot g\|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})} \|g\|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{D})}$.

[23] Cf. [32], [33], [34], [36].

[24] Por abuso de notación, indicamos $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ y $\mathcal{D}_\alpha$ a las álgebras de Hardy, Bergman y Dirichlet, unitarizadas de la manera usual.

[25] Observar, en particular, que el producto de Hadamard establece una operación binaria y continua $\mathrm{H}^2(\mathbb{D}) \times \mathrm{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$.

(ii) $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ se realiza como el espacio de funciones analíticas $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que $\left\{ h^{(j)}(0) / \left(j!\sqrt{j+1} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in \mathrm{l}^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$, con

$$\|h\|_{\mathrm{A}^2(\mathbb{D})} = \left\| h^{(j)}(0) / \left(j!\sqrt{j+1} \right) \right\|_2$$

(cf. [10], Ch. 2, page 13). Si $0 < r < 1$ existe $j(r) \in \mathbb{N}$ tal que $(j+1) \cdot r^j \leq 1$ si $j \geq j(r)$ en $\mathbb{N}$. Si $f,\ g \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$, $z \in r \cdot \mathbb{D}$, $n,\ p \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{j=n}^{n+p} \left| \frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{j!^2} \cdot z^j \right| \leq \sum_{j=n}^{n+p} \left| \frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{\sqrt[4]{j+1} \cdot j!^2} \right|$$

$$\leq \left(\sum_{j=n}^{n+p} \frac{\left| f^{(j)}(0)/j! \right|^2}{j+1} \sum_{j=n}^{n+p} \frac{\left| g^{(j)}(0)/j! \right|^2}{j+1} \right)^{1/2}$$

$$\leq \|f\|_{\mathrm{A}^2(\mathbb{D})} \|g\|_{\mathrm{A}^2(\mathbb{D})}.$$

Como $n,\ p,\ r$ son arbitrarios el producto de Hadamard de f y g está bien definido y $f \odot g$ es analítica sobre $\mathbb{D}$. Más aún,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(0) \cdot g^{(j)}(0)}{j!^2} \right|^2}{j+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right|^2}{\sqrt{j+1}} \cdot \frac{\left| \frac{g^{(j)}(0)}{j!} \right|^2}{\sqrt{j+1}}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right|^2}{(j+1)^{1/4}} \cdot \frac{\left| \frac{g^{(j)}(0)}{j!} \right|^2}{(j+1)^{1/4}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right|}{\sqrt{j+1}} \cdot \frac{\left| \frac{g^{(j)}(0)}{j!} \right|}{\sqrt{j+1}} \right)^2$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right|^2}{j+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right|^2}{j+1} \leq \|f\|^2_{\mathrm{A}^2(\mathbb{D})} \|g\|^2_{\mathrm{A}^2(\mathbb{D})}$$

y, como n es arbitrario, sigue (ii).

(iii) Claramente $\mathcal{D}_\alpha$ es espacio vectorial complejo y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_\alpha}$ es un producto interno. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}_\alpha$, $n,\ m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\|f_n - f_m\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \geq |f_n(0) - f_m(0)|^2 + \|df_n/dz - df_m/dz\|^2_{A^2(\mathbb{D})}\,. \tag{53}$$

Si C es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, $\lambda \in C$, $0 < r < 1 - |\lambda|$ y $F \in \mathcal{D}_\alpha$ tenemos

$$|F(\lambda)| = \left|\frac{1}{\pi\ r^2}\int_{|z-\lambda|\leq r} F(z)\ dA(z)\right| \leq \frac{1}{\pi\ r^2}\int_{|z-\lambda|\leq r} |F(z)|\ dA(z)$$

$$\leq \left(\frac{1}{\pi\ r^2}\int_{\mathbb{D}} |F(z)|^2\ dA(z)\right)^{1/2} = \|F\|_{A^2(\mathbb{D})}/r,$$

i.e.

$$|F(\lambda)| \leq \|F\|_{A^2(\mathbb{D})}/(1-|\lambda|) \leq \|F\|_{A^2(\mathbb{D})}/\operatorname{dist}(C, \mathbb{C}-\mathbb{D}). \tag{54}$$

Por (53) y (54) obtenemos

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_\alpha} \geq \|df_n/dz - df_m/dz\|_{A^2(\mathbb{D})}$$

$$\geq \operatorname{dist}(C, \mathbb{C}-\mathbb{D})\ \max_C\ |df_n/dz - df_m/dz|\,.$$

Como C es arbitrario $\{df_n/dz\}_{n\geq 1}$ es una sucesión uniforme de Cauchy en $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$.[26] Puesto que $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ es espacio de Fréchet (cf. [45], Part I, Ch. 10, §5, Ex. II, page 89) existe $g \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ tal que $\{df_n/dz\}_{n\geq 1}$ converge a g in $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$. Deducimos que

$$f_n(w) - f_n(0) \to \int_0^w g(z)\ dz, \tag{55}$$

donde la convergencia en (55) también es uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Por (53) definimos

$$f(w) = \lim_{n\to\infty}\ f_n(0) + \int_0^w g(z)\ dz, \qquad w \in \mathbb{D}.$$

[26] $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ denota el espacio de funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$ con la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Entonces $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ y $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq 1$ para enteros positivos $m,\ n$ mayores que N. Si $n \geq N$ obtenemos

$$\|f_n\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|f_n - f_N\|_{\mathcal{D}_\alpha} + \|f_N\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq 1 + \|f_N\|_{\mathcal{D}_\alpha}\,,$$

i.e. $\int_{\mathbb{D}} |df_n/dz|^2\ (1-|z|^2)^\alpha\ dA(z)/\pi \leq \left(1 + \|f_N\|_{\mathcal{D}_\alpha}\right)^2 - |\ f_n(0)|$ y, por el lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2\ (1-|z|^2)^\alpha\ \frac{dA(z)}{\pi} \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{D}} \left|\frac{df_n}{dz}\right|^2\ (1-|z|^2)^\alpha\ \frac{dA(z)}{\pi}$$

$$\leq \left(1 + \|f_N\|_{\mathcal{D}_\alpha}\right)^2 - |\ f(0)|\,,$$

de donde $f \in \mathcal{D}_\alpha$. Sean ahora $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \varepsilon$ si $n,\ m$ son enteros positivos mayores que M. Si $0 < r < 1$ tenemos

$$|f_n(0) - f_m(0)|^2 + \int_{|z|\leq r} |df_n/dz - df_m/dz|^2\ (1-|z|^2)^\alpha\ \frac{dA(z)}{\pi} \leq \varepsilon^2 \tag{56}$$

y si $n \to \infty$ in (56):

$$|f(0) - f_m(0)|^2 + \int_{|z|\leq r} |df/dz - df_m/dz|^2\ (1-|z|^2)^\alpha\ \frac{dA(z)}{\pi} \leq \varepsilon^2. \tag{57}$$

Si $r \to 1^-$ en (57) resulta $\|f_m - f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \varepsilon$ cuando $m \geq M$, i.e. $f_m \to f$ en $\mathcal{D}_\alpha$.

(iv) Dados $h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ z^n$ en $\mathcal{D}_\alpha,\ 0 < r < 1$, como h' converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ escribimos

$$\int_{r\overline{\mathbb{D}}} |h'(z)|^2\,(1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} =$$

$$= \sum_{n\geq 1, m\geq 1} nc_n \; m\overline{c_m} \; \int_{r\mathbb{D}} \; z^{n-1}\overline{z}^{m-1}(1-|z|^2)^{\alpha}\frac{dA(z)}{\pi} \tag{58}$$

$$= \sum_{n\geq 1, m\geq 1} nc_n \; m\overline{c_m} \;\; 2\delta_{n,m} \; \int_0^r \; \rho^{n+m-1} \; (1-\rho^2)^{\alpha} \; d\rho$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \;\; |c_n|^2 \;\; r^{2(n+\alpha)} \;\; \mathrm{Be}(n, \alpha+1).$$

Si $r \to 1^-$, por la definición de la métrica de $\mathcal{D}_\alpha$ y (58) es

$$\|h\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \;\; |c_n|^2 \;\; \mathrm{Be}(n, \alpha+1). \tag{59}$$

En particular, $h = 0$ si y solo si $h(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por otra parte,

$$\mathrm{Be}(1, \; 1+\alpha) = 1/(1+\alpha),$$

i.e. $\mathrm{Be}(1, \; 1+\alpha) \geq 1$. Si $n^2 \; \mathrm{Be}(n, \; 1+\alpha) \geq 1$ para algún entero $n \geq 1$ tenemos

$$(n+1)^2 \;\; \mathrm{Be}(n+1, \; 1+\alpha) = \frac{(n+1)^2}{n \; (n+1+\alpha)} \; n^2 \;\; \mathrm{Be}(n, \; 1+\alpha)$$

$$\geq \frac{(n+1)^2}{n \; (n+1+\alpha)}$$

y $(n+1)^2 \;\; \mathrm{Be}(n+1, \; 1+\alpha) \geq 1$. Luego $n^2 \;\; \mathrm{Be}(n, \; 1+\alpha) \geq 1$ para todos los enteros positivos. Si $a = \sum_{n=0}^{\infty} \; a_n \; z^n$ y $b = \sum_{n=0}^{\infty} \; b_n \; z^n$ pertenecen a $\mathcal{D}_\alpha$ y $N \in \mathbb{N}$ es

$$|a_0 \; b_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} n^2 \;\; |a_n \; b_n|^2 \;\; \mathrm{Be}(n, \alpha+1) \leq$$

$$\leq \left[|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} |na_n|^2 \, \mathrm{Be}(n, \alpha+1) \right] \left[|b_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} |nb_n|^2 \, \mathrm{Be}(n, \alpha+1) \right]$$

$$\leq \|a\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \;\; \|b\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}$$

y por (59) $a \odot b \in \mathcal{D}_\alpha$ y $\|a \odot b\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|a\|_{\mathcal{D}_\alpha} \ \|b\|_{\mathcal{D}_\alpha}$. Finalmente, supongamos que $g \in \mathcal{D}_\alpha$ es una unidad. Si $f \in \mathcal{D}_\alpha$ y $w \in \mathbb{D}$ es

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=(1+w)/2} f(t) \ \left[g(\frac{w}{t}) \ \frac{1}{t} - \frac{1}{t-w} \right] \ dt \tag{60}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2|w|/(1+|w|)} f(\frac{w}{z}) \ \left[g(z) - \frac{1}{1-z} \right] \ dz.$$

Si $0 < r < 1, \ f = z^n, \ n = 1, \ 2, \ ...$ por (60) resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2|w|/(1+|w|)} \left[g(z) - \frac{1}{1-z} \right] \ \frac{dz}{z^n} = 0.$$

Pero $w \to 2\,|w|\,/(1+|w|)$ es una suryección de $\mathbb{D}$ sobre $[0,1)$ y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left[g(z) - \frac{1}{1-z} \right] \ \frac{dz}{z^n} = 0$$

cuando $0 \leq r < 1$. Luego

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[g(z) - \frac{1}{1-z} \right] \Big|_{z\,=\,0} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e. $g(z) = 1/(1-z)$. Pero la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ \mathrm{Be}(n, \alpha+1)$ diverge pues su término general es no menor que uno, i.e. $g \notin \mathcal{D}_\alpha$.[27]

(v) Los espacios ideales maximales de los espacios de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, Bergman $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ y Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ $(-1 < \alpha \leq 0)$ respecto del producto de Hadamard son coincidentes. Evaluamos, en particular, el caso Dirichlet, siendo análogos los casos restantes. Sea $f \in \mathcal{D}_\alpha$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} \ f^{(n)}(0)/n! \ z^n$ representado como elemento de $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Por (59)

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} \ f^{(n)}(0)/n! \ z^n \right\|_{\mathcal{D}_\alpha} = 0. \tag{61}$$

[27] Con un argumento análogo, es inmediato que $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ y $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ no son álgebras unitarias.

Si $\mathfrak{h}$ es un homomorfismo complejo no nulo sobre $\mathcal{D}_\alpha$ debe ser acotado y si $\zeta \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\langle (f,\zeta), \mathfrak{h} \rangle = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)/n! \ \langle (z^n, 0), \mathfrak{h} \rangle . \tag{62}$$

Como $(z^k, 0) \odot (z^h, 0) = \delta_{kh} \ (z^h, 0)$ para $k, \ h \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$\left\langle (z^k, 0), \mathfrak{h} \right\rangle \cdot \left\langle (z^h, 0), \mathfrak{h} \right\rangle = \left\langle (z^k, 0) \odot (z^h, 0), \mathfrak{h} \right\rangle = \delta_{kh} \ \left\langle (z^h, 0), \mathfrak{h} \right\rangle .$$

Como $\mathfrak{h} \neq 0$ existe un único $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\left\langle (z^k, 0), \mathfrak{h} \right\rangle = \delta_{kp}, \ k \in \mathbb{N}_0$ y podemos indicar $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_p$. En definitiva,

$$\langle (f,\zeta), \mathfrak{h}_p \rangle = \begin{cases} f^{(p)}(0)/p! + \zeta & if \quad p \in \mathbb{N}_0 , \\ \\ a & if \quad p = \infty , \end{cases}$$

y $\mathfrak{X}\left(\mathcal{D}_\alpha\right) = \{\mathfrak{h}_p\}_{p=0}^{\infty}$. $\square$

3.24. Representación $\pi : L(H) \to L\left(\mathcal{L}\left(H\right)\right)$, donde H es espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{L}\left(H\right)$ es un espacio de Hilbert construído sobre la clase de sucesiones de H que convergen débilmente a cero.

(i) Consideremos $c = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \ \exists \, \text{lím}_{n \to +\infty} x_n \right\}$ como C^* subálgebra de $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. La aplicación $\rho_0\left(x\right) = \text{lím}_{n \to +\infty} x_n, \ x \in c$, define un *estado puro*[28] de c. El mismo se extiende a algún estado puro ρ de $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

(ii) Si $x \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, existe una sucesión $\{y_k\}_{k \geq 1} \subseteq l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ de elementos de rango finito tal que $\left\| x - y_k \right\|_\infty \to 0$ si $k \to +\infty$.

(iii) Sea H espacio de Hilbert, $\mathcal{L}_0\left(H\right)$ el conjunto de sucesiones de H que convergen débilmente a cero, ρ un estado puro de $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ como en (i). Hay en $\mathcal{L}_0(H)$ una estructura de espacio vectorial complejo con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ y una correspondiente seminorma $\left\| \circ \right\|_0$.

[28]Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra con unidad e, el *espacio de estados* de $\mathcal{A}$ se define como

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{A}\right) = \{\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \ \varphi - lineal, \ \varphi \geq 0, \ \varphi\left(e\right) = 1\} .$$

Como $\mathcal{S}\left(\mathcal{A}\right)$ deviene convexo y w^* compacto, por el teorema de Krein - Milman se realiza como la cápsula convexa cerrada del conjunto de sus elementos extremales $\operatorname{ext} \mathcal{S}\left(\mathcal{A}\right)$. Se llama *estados puros* a los elementos de $\operatorname{ext} \mathcal{S}\left(\mathcal{A}\right)$.

(iv) Sea
$$\mathcal{N}_0 = \{f \in \mathcal{L}_0(H) : \ \|f\|_0 = 0\}, \ \mathcal{L}_1(H) = \mathcal{L}_0(H)/\mathcal{N}_0,$$
$p : \mathcal{L}_0(H) \to \mathcal{L}_1(H)$ la proyección al cociente. Si $f, \ g \in \mathcal{L}_0(H)$ hacemos
$$\langle p(f), p(g)\rangle_1 = \langle f, g\rangle_0, \ \|p(f)\|_1 = \|f\|_0. \tag{63}$$
Entonces $(\mathcal{L}_1(H), \ \|\circ\|_1)$ es un espacio prehilbertiano.

(v) Sea $\mathcal{L}(H)$ la completación de $\mathcal{L}_1(H)$ e indiquemos también $\langle\circ,\circ\rangle_1$ y $\|\circ\|_1$ a su producto interno y su norma. Definimos
$$\theta : L(H) \to L(\mathcal{L}_0(H)), \tag{64}$$
$$\theta(T)\{f_n\}_{n\geq 1} = \{Tf_n\}_{n\geq 1}, \ T \in L(H), \ \{f_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{L}_0(H).$$
θ está bien definida, es lineal y $\|\theta(T) f\|_0 \leq \|T\| \|f\|_0$.

(vi) Queda inducido un operador
$$\Theta : \mathcal{L}(H) \to L(\mathcal{L}_1(H)), \tag{65}$$
$$\Theta(T)(pf) = p[\theta(T)f], \ f \in \mathcal{L}_0(H), \ T \in \mathcal{L}(H).$$
Para cada $T \in L(H)$ hay una única extensión de $\Theta(T)$ a un operador $\pi(T) \in L(\mathcal{L}(H))$ de modo que $\|\pi(T)\| \leq \|T\|$. Queda definida una *representación* $\pi : L(H) \to L(\mathcal{L}(H))$ de $L(H)$.

(vii) Probar que $\ker(\pi) = \mathcal{K}(H)$, i.e. $\ker(\pi)$ es el ideal de operadores compactos sobre H.

Solución

(i) Sea $\rho_0 = s\rho_1 + (1-s)\rho_2, \ 0 < s < 1, \ \rho_1, \ \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Si $x \in c$ podemos escribir (en c)
$$x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x), \ \mathrm{Re}(x) = (\mathrm{Re}(x_n))_{n\geq 1}, \ \mathrm{Im}(x) = (\mathrm{Im}(x_n))_{n\geq 1}.$$
Por otra parte, si $x \subseteq \mathbb{R}$ también es $x = x^+ - x^-$, donde $x^+, \ x^- \in c$ y $x^+ \cdot x^- = x^- \cdot x^+ = 0$. Asumimos entonces, sin perder generalidad por la linealidad de $\rho, \ \rho_1$ y ρ_2, que $x \in c^+$, *i.e.* $x \geq 0$. Evidentemente $\rho, \ \rho_1$

y ρ_2 se anulan sobre c_0^+ y, como $c_0 = c_0^+ - c_0^+$, entonces ρ, ρ_1 y ρ_2 se anulan sobre c_0. Si $1 = (1,\ 1,\ \ldots)$ tenemos

$$\rho_i(x) - \rho_0(x) = \rho_i(x - \rho_0(x) \cdot 1) = 0,\ i = 1,\ 2,$$

y así $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2$ y ρ_0 es estado puro de c. Para la extensión de ρ_0 a un estado puro de $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ v. [21], Ch. 4, Th. 4.3.13(iv), pág. 266.

(ii) Si $x \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ entonces $x \subseteq \overline{D}(0, \|x\|_\infty)$. Por la compacidad del disco cerrado, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $F_k \in \mathcal{P}_f\left(\overline{D}(0, \|x\|_\infty)\right)$ tal que

$$x \subseteq \bigcup_{z \in F_k} D(z, 1/k).$$

Fijado k podemos definir $y_k = (y_{k,n})_{n \geq 1}$ de modo que $y_k \subseteq F_k$ y $|x_n - y_{k,n}| < 1/k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $(y_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión de elementos de rango finito de $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ y $\lim_{k \to +\infty} \|x - y_k\| = 0$.

(iii) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n \geq 1}$, $\{g_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{L}_0(H)$ definimos

$$\alpha \cdot \{f_n\}_{n \geq 1} + \{g_n\}_{n \geq 1} = \{\alpha f_n + g_n\}_{n \geq 1}, \tag{66}$$

$$\left\langle \{f_n\}_{n \geq 1}, \{g_n\}_{n \geq 1} \right\rangle_0 = \rho\left(\{\langle f_n, g_n \rangle\}_{n \geq 1}\right). \tag{67}$$

Evidentemente $\{\alpha f_n + g_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{L}_0(H)$, quedando definida mediante (66) una estructura de espacio vectorial complejo sobre $\mathcal{L}_0(H)$. Como $\{\langle f_n, g_n \rangle\}_{n \geq 1} \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ está bien definida la relación (67). Si además $\{h_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{L}_0(H)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot f + g, h \rangle_0 &= \left\langle \{\alpha f_n + g_n\}_{n \geq 1}, \{h_n\}_{n \geq 1} \right\rangle_0 \\
&= \rho\left(\{\langle \alpha f_n + g_n, h_n \rangle\}_{n \geq 1}\right) \\
&= \rho\left(\{\alpha\ \langle f_n, h_n \rangle + \langle g_n, h_n \rangle\}_{n \geq 1}\right) \\
&= \rho\left(\alpha \cdot \{\langle f_n, h_n \rangle\}_{n \geq 1} + \{\langle g_n, h_n \rangle\}_{n \geq 1}\right) \\
&= \alpha\ \rho\left(\{\langle f_n, h_n \rangle\}_{n \geq 1}\right) + \rho\left(\{\langle g_n, h_n \rangle\}_{n \geq 1}\right) \\
&= \alpha\ \langle f, h \rangle_0 + \langle g, h \rangle_0 .
\end{aligned}$$

Como ρ es un estado es $\rho(\omega^*) = \overline{\rho(\omega)}$ para cada $\omega \in l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$, de modo que

$$\langle f,g\rangle_0 = \rho\left((\langle f_n,g_n\rangle)_{n\geq 1}\right) = \rho\left(\left(\overline{\langle g_n,f_n\rangle}\right)_{n\geq 1}\right)$$

$$= \rho\left(\left((\langle g_n,f_n\rangle)_{n\geq 1}\right)^*\right) = \overline{\rho\left((\langle g_n,f_n\rangle)_{n\geq 1}\right)} = \overline{\langle g,f\rangle_0}$$

y como $\rho \geq 0$ tenemos $\langle f,f\rangle_0 = \rho\left(\left\{\|f_n\|^2\right\}_{n\geq 1}\right) \geq 0$, i.e. $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ es un producto interno. Hacemos entonces

$$\|f\|_0 = \sqrt{\langle f,f\rangle_0} = \rho\left(\{\|f_n\|\}_{n\geq 1}\right),\ f \in \mathcal{L}_0(H), \tag{68}$$

y $(\mathcal{L}_0(H), \|\circ\|_0)$ es un espacio seminormado.

(iv) Sea $\mathcal{L}_1(H)$ con la estructura vectorial natural. Por la desigualdad de Cauchy - Schwartz (63) es una definición correcta y $(\mathcal{L}_1(H),\ \|\circ\|_1)$ deviene en espacio prehilbertiano pues $\langle\circ,\circ\rangle_1$ es un producto interno no degenerado.

(v) Sea $T \in L(H)$ tal que $\|T\| = 1,\ f \in \mathcal{L}_0(H)$. Como

$$\{\|Tf_n\|\}_{n\geq 1} \leq \{\|f_n\|\}_{n\geq 1}$$

en $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ y $\rho \geq 0$ es

$$\|\theta(T)f\|_0 = \rho\left(\{\|Tf_n\|\}_{n\geq 1}\right) \leq \rho\left(\{\|f_n\|\}_{n\geq 1}\right) = \|f\|_0\,.$$

Evidentemente la desigualdad anterior es válida si $T = 0$ y, en el caso general que $T \neq 0$ consideramos $T/\|T\|$ y sigue la afirmación.

(vi) Si $T \in L(H),\ f \in \mathcal{L}_0(H)$ es

$$\|\Theta(T)(pf)\|_1 = \|\theta(T)f\|_0 \leq \|T\|\,\|f\|_0 = \|T\|\,\|p(f)\|_1\,.$$

Por la densidad de $\mathcal{L}_1(H)$ en el espacio completo $\mathcal{L}(H)$ el operador $\Theta(T)$ se extiende unívocamente a un operador $\pi(T)$ de modo que

$\|\pi(T)\| \leq \|T\|$. En particular, si $f,\ g \in \mathcal{L}_0(H)$ resulta

$$\langle \Theta(T)(pf), p(g)\rangle_1 = \langle p(\theta(T) f), p(g)\rangle_1 = \langle \theta(T) f, g\rangle_0$$

$$= \rho\left(\{\langle Tf_n, g_n\rangle\}_{n\geq 1}\right) = \rho\left(\{\langle f_n, T^* g_n\rangle\}_{n\geq 1}\right)$$

$$= \langle f, \theta(T^*) g\rangle_0 = \langle p(f), p(\theta(T^*) g)\rangle_1$$

$$= \langle p(f), \Theta(T^*)(pg)\rangle_1$$

y $\Theta(T)^* = \Theta(T^*)$. Si además $S \in L(H)$ tenemos

$$\Theta(S \circ T)(p(f)) = p[\theta(S \circ T) f] = p\left[\{(S \circ T) f_n\}_{n\geq 1}\right]$$

$$= p\left[\{S(Tf_n)\}_{n\geq 1}\right] = p\left[\theta(S)\left(\{Tf_n\}_{n\geq 1}\right)\right]$$

$$= p[\theta(S)(\theta(T) f)] = \Theta(S)[p(\theta(T) f)]$$

$$= \Theta(S)[\Theta(T)(pf)] = [\Theta(S) \circ \Theta(T)](pf)$$

y Θ es $*-$ homomorfismo. Luego $\pi : L(H) \to L(\mathcal{L}(H))$ deviene una representación de $L(H)$.

(vii) Si $T \in \ker(\pi)$ y $f \in \mathcal{L}_0(H)$, por (64) y (65) es

$$0 = \pi(T)[pf] = p\left(\{Tf_n\}_{n\geq 1}\right).$$

Por (68) tenemos

$$0 = \left\|\{Tf_n\}_{n\geq 1}\right\|_0 = \rho\left(\{\|Tf_n\|\}_{n\geq 1}\right).$$

Si $\lim_{n\to+\infty} \|Tf_n\| \neq 0$ existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión infinita $(n_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\|Tf_{n_k}\| \geq \varepsilon$ para todo k. Pero

$$\{f_{n_k}\}_{k\geq 1} \in \mathcal{L}_0(H), \{\|Tf_{n_k}\|\}_{k\geq 1} \geq \varepsilon \cdot 1$$

en $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ y ρ es un estado de modo que $\rho\left(\{\|Tf_{n_k}\|\}_{k\geq 1}\right) \geq \varepsilon > 0$, contrariamente a la observación precedente. Debe ser $\|Tf_n\| \to 0$ y, siendo $f \in \mathcal{L}_0(H)$ arbitraria, $T \in \mathcal{K}(H)$. Por otra parte, si $S \in \mathcal{K}(H)$ y $g \in \mathcal{L}_0(H)$ entonces $\|Sg_n\| \to 0$. Como ρ extiende a ρ_0 obtenemos

$$\left\|\{Sg_n\}_{n\geq 1}\right\|_0 = \rho\left(\{\|Sg_n\|\}_{n\geq 1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \|Sg_n\| = 0.$$

Entonces

$$p\left(\{Sg_n\}_{n\geq 1}\right) = \pi(S)\left[p(g)\right] = 0,$$

como g es arbitraria $\pi(S)\ |_{\mathcal{L}_1(H)} = 0$ y deducimos por densidad que $\pi(S) = 0$. □

3.25. Estudio de $\pi(W)$, con π la representación del Problema 3.24 y W el corrimiento unilateral a derecha sobre un espacio de Hilbert separable.

Sea H un espacio de Hilbert separable, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ base ortonormal de H, $W \in L(H)$ el operador definido por las relaciones $We_n = e_{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0$. Sea $\mathcal{K}(H)$ el ideal de operadores compactos de H y π la representación de $L(H)$ construída en el Problema 3.24.

(i) $\pi(W)$ es unitario en $L(\mathcal{L}(H))$.

(ii) No existe $T \in L(H)$ inversible tal que $\pi(T) = \pi(W)$.

(iii) No existe $N \in L(H)$ normal tal que $\pi(N) = \pi(W)$.

Solución

(i) Notar que $W^*W = I_H$, $WW^* = I_H - P_{\mathbb{C}\cdot e_0}$ y π es un homomorfismo cuyo núcleo es $\mathcal{K}(H)$.

(ii) Si $T \in L(H),\ K \in \mathcal{K}(H)$ y $T = W + K$ entonces $T^*W = I_H + K^*W$. Si T fuere inversible también lo sería T^*. Entonces T^*W sería inyectivo pues W es isométrica. Como $K^*W \in \mathcal{K}(H)$ y T^*W no es inversible pues W no lo es entonces $-1 \in \sigma_p(K^*W)$. Sería $\ker(T^*W) \neq \{0\}$, lo que no es posible.

(iii) Sea $N \in L(H)$ normal y supongamos existe $C \in \mathcal{K}(H)$ tal que $N = W + C$. El núcleo de N tiene dimensión finita. En efecto, sea $B_{\ker(N)} = \{f \in \ker(N) :\ \|f\| \leq 1\}$. Como $W^*N = I_H + W^*C$, dado

$f \in B_{\ker(N)}$ resulta $f = -W^*Cf$, i.e. $B_{\ker(N)} \subseteq W^*\left[\operatorname{cl} C\left(B_{\ker(N)}\right)\right]$ y $B_{\ker(N)}$ deviene compacto. Por otra parte,

$$\left(N + P_{\ker(N)}\right)^* \left(N + P_{\ker(N)}\right) = N^*N + P_{\ker(N)}N + P_{\ker(N)}, \qquad (69)$$

$$\left(N + P_{\ker(N)}\right)\left(N + P_{\ker(N)}\right)^* = NN^* + P_{\ker(N)}N^* + P_{\ker(N)}.$$

Por la normalidad de N es $\ker(N) = \ker(N^*)$, de donde

$$\ker(N) = [\operatorname{ran}(N)]^\perp, \qquad \ker(N^*) = [\operatorname{ran}(N^*)]^\perp$$

y $P_{\ker(N)}N = P_{\ker(N^*)}N^* = 0$. Por (69) $N + P_{\ker(N)}$ resulta normal. Si $g \in \ker\left(N + P_{\ker(N)}\right)$ es $P_{[\ker(N)]^\perp}g = g + Ng$. Luego $g \in \operatorname{cl}\operatorname{ran}(N)$ y

$$P_{[\ker(N)]^\perp}g = P_{[\ker(N)]^\perp}g + P_{[\ker(N)]^\perp}(Ng),$$

i.e. $P_{[\ker(N)]^\perp}(Ng) = 0$. Así $Ng = P_{\ker(N)}(Ng) = 0$, o sea $P_{\ker(N)}g = 0$ y, como $g \in \ker(N)$, $g = 0$. En consecuencia $N+P_{\ker(N)}$ es monomorfismo y podemos asumir que N es inyectiva. Veremos finalmente que N es inversible y, como $N^*W = I_H + C^*W$, contradeciremos (ii) y seguirá la tesis. En efecto, como N es normal e inyectivo $\operatorname{ran}(N)$ es denso. Si N es acotado inferiormente existe $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq H$ tal que $\|h_n\| = 1$ para cada n y $Nh_n \to 0$. Entonces $\lim_{n\to+\infty}(h_n + W^*Ch_n) = 0$. Como $C \in \mathcal{K}(H)$, pasando eventualmente a una subsucesión $(h_{n_k})_{k\geq 1}$, podemos suponer $\lim_{k\to+\infty} Ch_{n_k} = h$ para cierto $h \in H$. Luego $(h_{n_k})_{k\geq 1}$ tiene límite y $\lim_{k\to+\infty} h_{n_k} = -W^*h$. En particular, $\|W^*h\| = 1$ y

$$NW^*h = -\lim_{k\to+\infty} Nh_{n_k} = 0,$$

lo cual es absurdo siendo N inyectiva. □

3.26. Si E es espacio normado, $\mathcal{M}$ es un subespacio lineal de E^* que separa puntos de E, ρ una forma lineal sobre E y B_E es la bola cerrada unitaria centrada en el orígen de E, $\rho\mid_{B_E}$ es $\sigma(E,\ \mathcal{M})-$continua sii $\rho \in \operatorname{cl}\mathcal{M}$.

Sea $(E,\ \|\circ\|)$ un espacio normado, $\mathcal{M}$ un subespacio lineal de E^* separador de puntos de E, ρ una forma lineal sobre E.

(i) Si la restricción de ρ a la bola cerrada unitaria B_E de E es $\sigma(E,\ \mathcal{M})-$ continua entonces ρ es acotada. Además dado $\varepsilon > 0$ existe una parte finita $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que

$$|\rho(x)| \leq \varepsilon\ \|x\| + \|\rho\| \sum_{\varphi \in \mathcal{N}} |\varphi(x)|, \quad x \in E. \tag{70}$$

(ii) Por (i), dado $\varepsilon > 0$ existen $\rho_1 \in E^*,\ \rho_2 \in \mathcal{M}$ tales que $\rho = \rho_1 + \rho_2$ y $\|\rho_1\| \leq \varepsilon$.

(iii) $\rho\,|_{B_E}$ es $\sigma(E,\ \mathcal{M})-$ continua sii $\rho \in \operatorname{cl}\mathcal{M}$.

Solución

(i) Si la restricción de ρ a la bola cerrada unitaria de B_E de E es $\sigma(E,\ \mathcal{M})-$ continua y $\varepsilon > 0$, como ρ es lineal existe $\mathcal{N} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{M})$ tal que

$$\bigcap_{\varphi \in \mathcal{N}} \{x \in B_E : \ |\varphi(x)| < 1\} \subseteq \{x \in B_E : \ |\rho(x)| < \varepsilon\}. \tag{71}$$

Si $\kappa > \max_{\varphi \in \mathcal{N}} \ \|\varphi\|$ y $x \in E - \{0\}$ tenemos

$$|\varphi(x/(\kappa\|x\|))| \leq \|\varphi\|/\kappa < 1$$

para cada $\varphi \in \mathcal{N}$. Por (71) deducimos $|\rho(x)| \leq \kappa\varepsilon\ \|x\|$ y, como esta desigualdad también es válida si $x = 0$, $\varphi \in E^*$. Más aún, de (71) resulta $|\rho(x)| < \varepsilon$ toda vez que $\sum_{\varphi \in \mathcal{N}} \ |\varphi(x)| < 1$ y $\|x\| \leq 1$ y es válida (70).

(ii) Con la misma notación, sea

$$q_1(x) = \varepsilon\ \|x\|, \quad q_2(y) = \|\rho\| \sum_{\varphi \in \mathcal{N}} |\varphi(y)|, \ x,\ y \in E.$$

Entonces q_1 y q_2 son seminormas y $|\rho(x)| \leq q_1(x) + q_2(x)$. Haciendo $q(x,y) = q_1(x) + q_2(y)$ entonces q es una seminorma en $E \times E$. Además, si Δ es la diagonal en $E \times E$ y $t : \Delta \to \mathbb{C}$ es la aplicación lineal $t(x,x) = \rho(x)$ entonces $|t(x,x)| \leq q(x,x)$. Por el teorema de Hahn - Banach existe una forma lineal $T : E \times E \to \mathbb{C}$ que extiende a t

y $|T(x,y)| \leq q(x,y)$. Definiendo $\rho_1(x) = T(x,0)$ y $\rho_2(y) = T(0,y)$ tenemos

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

$$|\rho_1(x)| \leq \varepsilon \ \|x\|, \quad |\rho_2(y)| \leq \|\rho\| \sum_{\varphi \in \mathcal{N}} |\varphi(y)|.$$

Luego $\|\rho_1\| \leq \varepsilon$ y $\rho_2 \in \mathcal{M}$ (cf. [21], Ch. 1, Th. 1.3.1, pág. 29).

(iii) La condición es necesaria por (i) y (ii). Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión que converge a un punto x en $(B_E, \sigma(E, \mathcal{M}))$. Sea además $\{\rho_m\}_{m\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\|\rho_m - \rho\| \to 0$ en E^*. Dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\rho_m - \rho\| \leq \varepsilon/2$ y si $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\rho(x_n) - \rho(x)| &\leq |\rho(x_n) - \rho_{m_0}(x_n)| + \\
&\quad + |\rho_{m_0}(x_n) - \rho_{m_0}(x)| + |\rho_{m_0}(x) - \rho(x)| \\
&\leq 2 \ \|\rho_{m_0} - \rho\| + |\rho_{m_0}(x_n) - \rho_{m_0}(x)| \\
&\leq \varepsilon + |\rho_{m_0}(x_n) - \rho_{m_0}(x)|.
\end{aligned}$$

Deducimos entonces que $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\rho(x_n) - \rho(x)| \leq \varepsilon$ y, como ε es arbitrario, sigue (iii). □

3.27. Sobre proyectores.

Sea H un espacio de Hilbert complejo, P y Q proyectores.

(i) Si $A \subseteq H$ entonces $\vee A$ es la clausura de todas las combinaciones lineales de elementos de A. [29]

(ii) Si $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ es una colección de subespacios cerrados de H entonces

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i^{\perp} = \left(\bigvee_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)^{\perp}, \tag{72}$$

[29] Con $\vee A$ indicamos la intersección de todos los subespacios cerrados de H que contienen a A.

$$\bigvee_{i\in I}\mathcal{M}_i^{\perp}=\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i\right)^{\perp}. \tag{73}$$

(iii)(a) $P+Q$ es proyector sii $\operatorname{ran}(P)\perp\operatorname{ran}(Q)$.

(iii)(b) Si $P+Q$ es proyector entonces

$$\operatorname{ran}(P+Q)=\operatorname{ran}(P)+\operatorname{ran}(Q)\quad y\quad \ker(P+Q)=\ker(P)\cap\ker(Q).$$

(iii)(c) PQ es proyector sii $PQ=QP$.

(iii)(d) Si $PQ=QP$ entonces

$$\operatorname{ran}(PQ)=\operatorname{ran}(P)\cap\operatorname{ran}(Q)\quad y\quad \ker(PQ)=\ker(P)\vee\ker(Q).$$

(iv) Más generalmente, sea $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios mutuamente ortogonales de H, P_i la proyección de H sobre $\mathcal{M}_i$ $(i\in I)$, $\mathcal{M}=\vee_{i\in I}\mathcal{M}_i$ y P la proyección de H sobre M. Entonces $Ph=\sum_{i\in I}P_ih$ para cada $h\in H$.

(v)(1) Son equivalentes: (a) $P-Q$ es un proyector. (b) $\operatorname{ran}(P)\subseteq\operatorname{ran}(Q)$. (c) $PQ=Q$. (d) $QP=Q$.

(v)(2) Si $P-Q$ es proyección entonces

$$\operatorname{ran}(P-Q)=\operatorname{ran}(P)\ominus\operatorname{ran}(Q)\quad y\quad \ker(P-Q)=\ker(P)\vee\operatorname{ran}(Q).$$

(vi) Si $E=P+Q-PQ$, E es un proyector sii $PQ=QP$. En tal caso,

$$\operatorname{ran}(E)=\operatorname{ran}(P)\vee\operatorname{ran}(Q)\quad y\quad \ker(E)=\ker(P)\cap\ker(Q).$$

(vii) Si $\|P-Q\|<1$ entonces $\dim\operatorname{ran}(P)=\dim\operatorname{ran}(Q)$.

(viii) Sea K otro espacio de Hilbert complejo, $A\in\mathcal{L}(K,H)$ y $J\in\mathcal{L}(H\oplus K)$ el operador definido por la matriz

$$M_J=\begin{Vmatrix} I & A\\ 0 & 0\end{Vmatrix}. \tag{74}$$

Entonces J es idempotente. J es proyector sii $A=0$. Más generalmente, si L es un espacio de Hilber complejo y $J\in\mathcal{L}(L)$ es idempotente entonces hay una descomposición $L=H\oplus K$ respecto a la cual J admite una representación como la anterior.

Solución

(i) Si Γ es la clausura de todas las combinaciones lineales de elementos de A entonces $\vee A \subseteq \Gamma$ pues Γ es un subespacio cerrado de H que contiene a A. Si $f \in H - \vee A$ existe un subespacio cerrado L de H que contiene a A y no contiene a f. Si $g \in \Gamma$ resulta $\|f-g\| \geq \operatorname{dist}(f,\ L) > 0$ ya que $\Gamma \subseteq L$, L es cerrado y $f \notin L$, i.e. $f \notin \Gamma$ y $\Gamma \subseteq \vee A$.

(ii)(72) es inmediata. (73) sigue de (72) pues si $\mathcal{M}$ es subespacio cerrado de H entonces $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$.

(iii)(a) Si $\operatorname{ran}(P) \perp \operatorname{ran}(Q)$ y $f \in H$ entonces

$$\|(PQ+QP)\,f\|^2 = \|PQf\|^2 + \|QPf\|^2$$

$$= \langle PQf,\ Qf\rangle + \langle QPf,\ Pf\rangle = 0,$$

i.e. $PQ + QP = 0$ y $(P+Q)^2 = P + Q$. Como $P + Q$ es autoadjunto la condición es suficiente. Por otra parte, si $g \in \operatorname{ran}(P)$ y $P + Q$ es proyector tenemos

$$\|g\|^2 + \|Qg\|^2 = \langle (P+Q)g,\ g\rangle$$

$$= \left\langle (P+Q)^2 g,\ g\right\rangle$$

$$= \|(P+Q)g\|^2$$

$$= \|g\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Qg,\ g\rangle + \|Qg\|^2,$$

de donde $\operatorname{Re}\langle Qg,\ g\rangle = \langle Qg,\ g\rangle = \|Qg\|^2 = 0$. Así $g \in \ker(Q)$ y $\ker(Q) \subseteq \operatorname{ran}(Q)^{\perp}$.

(iii)(b) Evidentemente $\operatorname{ran}(P+Q) \subseteq \operatorname{ran}(P) + \operatorname{ran}(Q)$. De la prueba de (iii)(a) sigue que $\operatorname{ran}(P) \subseteq \ker(Q)$ y $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \ker(P)$, de modo que si $f_1,\ f_2 \in H$ entonces $Pf_1 + Qf_2 = (P+Q)(f_1+f_2)$, i.e. $\operatorname{ran}(P) + \operatorname{ran}(Q) \subseteq \operatorname{ran}(P+Q)$. Por otra parte, si $g \in \ker(P+Q)$ entonces

$$0 = \|(P+Q)\,g\|^2 = \|Pg\|^2 + \|Qg\|^2$$

pues los rangos de P y Q son ortogonales, i.e. $g \in \ker(P+Q)$. Así $\ker(P+Q) \subseteq \ker(P) \cap \ker(Q)$ y la otra inclusión es inmediata.

(iii)(c) Inmediata.

(iii)(d) La primer identidad es inmediata. Por (73) deducimos

$$\ker(PQ) = \operatorname{ran}(PQ)^{\perp} = [\operatorname{ran}(P) \cap \operatorname{ran}(Q)]^{\perp}$$

$$= \operatorname{ran}(P)^{\perp} \vee \operatorname{ran}(Q)^{\perp} = \ker(P) \vee \ker(Q).$$

(iv) Si $h \in H$, como $\|Ph\|^2 = \sum_{i \in I} \|P_i h\|^2$ y podemos suponer $Ph \neq 0$, si $\varepsilon > 0$ existe $J \in \mathcal{P}_f(I)$ tal que $\sum_{i \in J} \|P_i h\|^2 > \|Ph\|^2 - \varepsilon$. Si $G,\ K$ son partes finitas de I disjuntas con J tenemos

$$\left\| \sum_{i \in G} P_i h - \sum_{i \in K} P_i h \right\|^2 = \sum_{i \in G \triangle K} \|P_i h\|^2$$

$$= \sum_{i \in J \cup G \triangle K} \|P_i h\|^2 - \sum_{i \in J} \|P_i h\|^2$$

$$\leq \sum_{i \in I} \|P_i h\|^2 - \sum_{i \in J} \|P_i h\|^2 \leq \varepsilon,$$

con lo que $\left\{ \sum_{i \in F} P_i h \right\}_{F \in \mathcal{P}_f(I)}$ es una red de Cauchy en H. Por la completitud de H sigue la afirmación.

(v)(1) Asumiendo (a), si $f \in \operatorname{ran}(Q)$ escribimos

$$\|Pg\|^2 - \|g\|^2 = \langle (P-Q)g,\ g \rangle = \|(P-Q)g\|^2 = \|g\|^2 - \|Pg\|^2$$

y resulta $\|g\| = \|Pg\|$. Por la identidad pitagórica debe ser $Pg = g$ y así $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \operatorname{ran}(P)$. Evidentemente $(b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$. De la última equivalencia sigue que $(d) \Rightarrow (a)$.

(v)(2) Por (v)(1)(b) $\operatorname{ran}(P-Q) \subseteq \operatorname{ran}(P)$. Si $f_1,\ f_2 \in H$, por (v)(1)(d) resulta

$$\langle (P-Q) f_1,\ Qf_2 \rangle = \langle (QP-Q) f_1,\ f_2 \rangle = 0$$

y $\operatorname{ran}(P-Q) \subseteq \operatorname{ran}(P) \ominus \operatorname{ran}(Q)$. Dado $h \in \operatorname{ran}(P) \ominus \operatorname{ran}(Q)$ es

$$\|(I-P+Q)h\|^2 = \|Qh\|^2 = \langle Qh,\ h\rangle = 0,$$

o sea $h \in \operatorname{ran}(P-Q)$. Además, si $g_1 \in \operatorname{ran}(Q)$ y $g_2 \in \ker(P)$, por (v)(1)(c) y (v)(1)(d)

$$(P-Q)(g_1+g_2) = PQg_1 - g_1 - Qg_2 = -QPg_2 = 0,$$

i.e. $\ker(P-Q) \supseteq \ker(P) \vee \operatorname{ran}(Q)$. Finalmente, si $h \in \ker(P-Q)$ entonces

$$P(I-Q)h = Ph - PQh = Ph - Qh = 0,$$

i.e. $h = Qh + (I-Q)h$ y $h \in \ker(P) \vee \operatorname{ran}(Q)$.

(vi) Es fácil establecer la suficiencia. Recíprocamente, si E es proyector de la relación $E^2 = E$ deducimos que $PQP = PQ$ y por lo tanto

$$QP = (PQ)^* = PQP = PQ.$$

Es evidente que $\operatorname{ran}(E) \subseteq \operatorname{ran}(P) \vee \operatorname{ran}(Q)$. Dado $f \in \operatorname{ran}(P)$ resulta

$$(I-E)f = (I-P-Q+PQ)f = -Qf + QPf = 0,$$

o sea $f \in \operatorname{ran}(E)$. Así $\operatorname{ran}(P) \subseteq \operatorname{ran}(E)$ y de la misma manera $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \operatorname{ran}(E)$. Para la otra identidad, la inclusión $\supseteq$ es trivial y basta observar que $PE = P$ y $QE = Q$.

(vii) El operador $U = I - P + Q$ es inversible porque $\|P-Q\| < 1$. Si $g \in H$ sea $f \in H$ tal que $Uf = g$. Entonces

$$Pg = PUf = P(f - Pf + Qf) = PQf,$$

$\operatorname{ran}(P) \subseteq \operatorname{ran}(PQ)$ y por lo tanto $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(PQ)$. Más aún, si $h \neq 0$ y $h \in \ker(P) \cap \operatorname{ran}(Q)$ entonces $Qh = 2h$, de modo que $2 \in \sigma_p(U)$. Luego

$$2 \leq r_{sp}(U) \leq \|U\| \leq 1 + \|P-Q\| < 2$$

lo cual es absurdo. Luego $P\,|_{\operatorname{ran}(Q)}$ es monomorfismo y

$$\dim \operatorname{ran}(Q) \leq \dim \operatorname{ran}(P).$$

La otra desigualdad es trivial.

(viii) Como $M_{J^2} = M_J^2 = M_J$ entonces J es idempotente. Claramente si $A = 0$ entonces J es proyector. Ahora, si $h_1,\ h_2 \in H$ y $k_1,\ k_2 \in K$ formalmente tenemos

$$\begin{aligned}
\langle J(h_1,\ k_1),\ (h_2,\ k_2)\rangle_{H\oplus K} &= \langle (h_1 + Ak_1,\ 0),\ (h_2,\ k_2)\rangle_{H\oplus K} \\
&= \langle h_1,\ h_2\rangle_H + \langle k_1,\ A^* h_2\rangle_K \\
&= \langle (h_1,\ k_1),\ (h_2,\ A^* h_2)\rangle_{H\oplus K}\,.
\end{aligned}$$

Luego $(h_2,\ A^* h_2) = J^*(h_2,\ k_2)$. Si J es un proyector debe ser

$$(h_2,\ A^* h_2) = (h_2 + Ak_2,\ 0)$$

y, como h_2 es arbitrario, $A^* = 0$, i.e. $A = 0$. Finalmente, si J es un idempotente sobre un espacio de Hilbert L su rango es claramente cerrado. Si $\{f_r\}_{r\in R}$ es base de $\operatorname{ran}(J)$ y $\{f_s\}_{s\in S}$ es base de $\operatorname{ran}(J)^\perp$ tenemos

$$Jf_r = f_r,\ r \in R,$$

$$Jf_s = \sum_{r\in R} \langle Jf_s,\ f_r\rangle\ f_r,\ s \in S.$$

Luego la matriz de J respecto a la base $\{f_r\}_{r\in R} \cup \{f_s\}_{s\in S}$ es del tipo (74). $\square$

3.28. Operadores autoadjuntos. Puntos extremales.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.[30]

(i) Si $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador lineal acotado autoadjunto entonces

$$\|T\| = \min \{\kappa > 0 : -\kappa I \le T \le \kappa I\}\,.$$

(ii) Si $B_{\mathcal{H}} = \{f \in \mathcal{H} :\ \|f\| = 1\}$ entonces $\operatorname{ext}(B_{\mathcal{H}}) = B_{\mathcal{H}}$.

(iii) Toda isometría sobre $\mathcal{H}$ es punto extremal de $B_{L(\mathcal{H})}$.

[30] V. Problema 3.24(i).

(iv) Si X es un espacio compacto,

$$\operatorname{ext}\left(B_{C_{\mathbb{C}}(X)}\right)=\left\{f\in B_{C_{\mathbb{C}}(X)}:\ \forall x,\ x\in X,\ |f(x)|=1\right\}.$$

(v) Si X es un espacio localmente compacto de Hausdorff y μ es una medida de Borel regular, en la esfera unitaria de $L^{\infty}(X,\mu)$, son extremales los elementos *f's* tales que $|f(x)|=1$ salvo conjuntos de medida nula.

(vi) En las condiciones de (vi), si $1<p<+\infty$ entonces [31]

$$\operatorname{ext}\left(B_{L^p(X,\mu)}\right)=B_{L^p(X,\mu)}.$$

(vii) La bola B_{c_0} no tiene puntos extremales.

(viii) Probar que $\operatorname{ext}\left(B_{l^1(\mathbb{N})}\right)=\left\{a\in B_{l^1(\mathbb{N})}:\ (\exists n)\ /\ |a_n|=1\right\}.$

(ix) En un espacio de medida $\sigma-$ finita $(X,\ \Omega,\ \mu)$, si $E\in\Omega$ es un *átomo* entonces $\chi_E/\mu(E)\in\operatorname{ext}\left(B_{L^1(X,\ \Omega,\ \mu)}\right)$. [32]

Solución

(i) Dados $f,\ g\in\mathcal{H}$ y $\kappa>0$ tal que $-\kappa I\leq T\leq\kappa I$ tenemos

$$|\mathrm{Re}\,\langle Tf,\ g\rangle|=|\langle T(f+g),\ f+g\rangle-\langle T(f-g),\ f-g\rangle|/4$$

$$\leq(\kappa/2)\ \left[\|f\|^2+\|g\|^2\right].$$

Por lo tanto, si h es un vector unitario en $\mathcal{H}$ entonces

$$|\langle Th,\ h\rangle|=|\mathrm{Re}\,\langle Th,\ h\rangle|\leq\kappa,$$

de donde $\|T\|\leq\kappa$ (cf. [9], Ch. II, Prop. 2.13, page 34) y sigue la validez de $\leq$. Como $-\|T\|\,I\leq T\leq\|T\|\,I$ sigue la afirmación.

[31] En particular, $\operatorname{ext}\left(B_{L^1([0,1],dx)}\right)=\emptyset$ (cf. [9], Ch. V, §7, 7.2.(f)).

[32] Se llama *átomo* a todo conjunto $E\in\Omega$, con $\mu(E)>0$, tal que cada subconjunto medible F de él verifica $\mu(F)=0$ o $\mu(F)=\mu(E)$. En particular, por la $\sigma-$ finitud y la atomocidad de E, podemos suponer que $\mu(E)$ es finita.

(ii) Sea $f = t\ f_1 + (1-t)\ f_2$, donde $f,\ f_1,\ f_2 \in B_{\mathcal{H}}$ y $0 < t < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \|f\|^2 \\ &= 1 - t^2 - 2t(1-t)\,\mathrm{Re}\,\langle f_1,\ f_2\rangle - (1-t)^2 \\ &= 2t(1-t)\,(1 - \mathrm{Re}\,\langle f_1,\ f_2\rangle) \end{aligned}$$

y concluímos que $\mathrm{Re}\,\langle f_1,\ f_2\rangle = 1$. Así $\langle f_1,\ f_2\rangle = 1$ pues $|\langle f_1,\ f_2\rangle| \leq 1$, i.e. $\cos(f_1,\ f_2) = 1$ y $f_1 = \ f_2 = f$.

(iii) Sea T una isometría, $T = sT_1 + (1-s)T_2$, con $0 < s < 1,\ T_1,\ T_2 \in B_{L(\mathcal{H})}$. Dado $f \in B_{\mathcal{H}}$, como $T^*T = I$ obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \|Tf\|^2 \\ &= s^2\,\|T_1 f\|^2 + 2s(1-s)\,\mathrm{Re}\,\langle T_1 f, T_2 f\rangle + (1-s)^2\,\|T_2 f\|^2 . \end{aligned}$$

Si $\|T_1 f\| < 1$ sería

$$1 < s^2 + 2s(1-s) + (1-s)^2 = 1,$$

lo cual es absurdo. En consecuencia $\|T_1 f\| = 1$ y deducimos enseguida que T_1 es una isometría. Análogamente, T_2 también lo es. Además

$$\begin{aligned} 0 &= I - T^*T \\ &= \left(1 - s^2\right) I - 2s(1-s)\,\mathrm{Re}\,(T_1^* T_2) - (1-s)^2 I \\ &= 2s(1-s)\,[I - \mathrm{Re}\,(T_1^* T_2)]\,, \end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{Re}\,(T_1^* T_2) = I$. Como $\|T_1^* T_2\| \leq 1$ debe ser $T_1^* T_2 = I$. Finalmente, para todo $g \in \mathcal{H}$ obtenemos

$$\|T_1 g - T_2 g\|^2 = 2\left[\|g\|^2 - \mathrm{Re}\,\langle g, T_1^* T_2 g\rangle\right] = 0,$$

i.e. $T_1 g = T_2 g$, i.e. $T_1 = T_2$.

(iv) Sea $f \in B_{C_{\mathbb{C}}(X)}$ tal que $f^{-1}(D) \neq \emptyset$, donde D es el disco unitario. Si $u = \mathrm{Re}\,(f)$ y $v = \mathrm{Im}\,(f)$ definimos

$$g = f + i\,\frac{\sqrt{1-u^2} - |v|}{2}, \quad h = f - i\,\frac{\sqrt{1-u^2} - |v|}{2}. \tag{75}$$

Entonces $g,\ h \in B_{C_{\mathbb{C}}(X)}$ y $f = (g+h)/2$. Geométricamente, si $v(x) > 0$ para $x \in X$ consideramos el segmento vertical

$$\overline{D} \cap \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\,(z) = u(x)\},$$

con extremos $u(x) \pm i\sqrt{1-u(x)^2}$. Por construcción, $g(x)$ y $h(x)$ están en la misma vertical, por encima, por debajo y equidistantes de $f(x)$, respectivamente. Si $v \geq 0$ escribimos

$$|g|^2 = u^2 + \frac{v^2 + 2v\sqrt{1-u^2} + 1 - u^2}{4} \tag{76}$$

$$\leq u^2 + \frac{v^2 + 1 - u^2}{2} = \frac{|f|^2 + 1}{2} \leq 1.$$

Si $v \leq 0$ tenemos $\mathrm{Re}\,(g) = u,\ \mathrm{Im}\,(g) = v + (\sqrt{1-u^2} + v)/2$, de modo que $\mathrm{Im}\,(g) \leq \sqrt{1-u^2}$. Además

$$\mathrm{Im}\,(g) \geq v \geq -|v| \geq -\sqrt{1-u^2},$$

resulta $|\mathrm{Im}\,(g)| \leq \sqrt{1-u^2}$ y concluímos que $\|g\| \leq 1$. Ahora, la ecuación $u^2 + v^2 = 1$ tiene alguna solución por la continuidad de f sobre el compacto X. Si esta solución se verifica con $v \geq 0$, de (76) deducimos $\|g\| = 1$. Lo mismo sigue si la solución se da con v negativo y, de la misma manera, $\|h\| = 1$. Por (75) sigue que $g \neq f$ y $h \neq f$ porque $f^{-1}(D) \neq \emptyset$ y la condición es necesaria. Recíprocamente, supongamos $f = t\ f_1 + (1-t)\ f_2$, con $0 < t < 1,\ f,\ f_1,\ f_2 \in B_{C_{\mathbb{C}}(X)}$ y $|f| \equiv 1$. Si para algún $x_0 \in X$ es $|f_1(x_0)| < 1$ entonces

$$1 \leq t\ \ |f_1(x_0)| + (1-t)\ \ |f_2(x_0)| < 1$$

lo cual es absurdo. Debe ser entonces $|f_1| \equiv 1$ y $|f_2| \equiv 1$ y además

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - |t\ f_1 + (1-t)\ f_2|^2 \\ &= 1 - t^2 - 2t(1-t)\,\mathrm{Re}(f_1\ \overline{f_2}) - (1-t)^2 \\ &= 2t(1-t)\left[1 - \mathrm{Re}(f_1\ \overline{f_2})\right]. \end{aligned}$$

Luego $\mathrm{Re}(f_1\ \overline{f_2}) = \left|f_1\ \overline{f_2}\right| = 1$ y deducimos que $f_1\ \overline{f_2} \equiv 1$, es decir $f_1 \equiv\ f_2 \equiv f$.

(v) Sea $f \in B_{L^\infty(X,\mu)}$ tal que $\mu\left(f^{-1}\left(D\right)\right) > 0$. Existe $0 < r < 1$ tal que $\mu\left(f^{-1}\left(rD\right)\right) > 0$ y, por la regularidad de μ, un conjunto compacto C contenido en $f^{-1}\left(rD\right)$ de medida positiva. Definimos

$$g = \left(c\ \chi_C + \chi_{X-C}\right)\ f, \quad h = \left((2-c)\ \chi_C + \chi_{X-C}\right)\ f,$$

donde $c \neq 1$ y $2 - 1/r < c < 1/r$ en $\mathbb{R}$. Entonces $g,\ h \in L^\infty\left(X, \mu\right)$ y $f = (g+h)/2$. Además $|g\ |_C| = c\ \ |f| < cr < 1$ y como $g\ |_{X-C} = f$ se tiene $\|g\| \leq 1$. Dado $0 < \varepsilon < 1 - r$ tenemos $\{|f| > 1 - \varepsilon\} \cap (rD) = \emptyset$ y podemos escribir

$$\mu\left(\{|g| > 1 - \varepsilon\}\right) = \mu\left(\{|f| > 1 - \varepsilon\}\right) > 0,$$

i.e. $\|g\| = 1$. Análogamente $\|h\| = 1$ y f no es extremal. Por otra parte, con un razonamiento análogo al (iv) sigue que la condición es necesaria.

(vi) Sea $f \in B_{L^p(X,\mu)}$, $f = (g+h)/2$ con $g,\ h \in B_{L^p(X,\mu)}$. Entonces $\|g+h\|_p = \|g\|_p + \|h\|_p$ y como $1 < p < +\infty$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $g = \lambda h$ (cf. [6], Cap. V, Obs. 1.1.(b), pág. 179). Debe ser $|\lambda| = 1$ pues g y h son unitarios y, además,

$$\|g+h\|_p = |1 + \lambda| = 2,$$

de donde $\lambda = 1$ y así $f = g = h$.

(vii) Si $a \in B_{c_0}$, como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, existe n_0 tal que $|a_{n_0}| = 1$. Podemos escribir $a = (b+c)/2$, donde $a_n = b_n = c_n$ si $n \leq n_0$, $b_n = 2a_n$ y $c_n = 0$ si $n > n_0$. Como $\|b\| = \|c\| = 1$ entonces $a \notin \mathrm{ext}\left(B_{c_0}\right)$.

(viii) Sea $a = \zeta e_{n_0}$, con $n_0 \in \mathbb{N}$, $|\zeta| = 1$ en $\mathbb{C}$ y supongamos $a = (b + c)/2$, donde $\|b\|_1 = \|c\|_1 = 1$. Entonces

$$1 \geq |c_{n_0}| = |2a_{n_0} - b_{n_0}| \geq 2 - |b_{n_0}| \geq 1, \tag{77}$$

de donde $|c_{n_0}| = 1$ y, en consecuencia, $c_n = 0$ si $n \neq n_0$. Más aún, por (77) debe ser $|b_{n_0}| = 1$ y también resulta $b_n = 0$ si $n \neq n_0$. Como todo punto de la circunferencia es extremal sigue que $a = b = c$. Sean ahora $d_1,\ d_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tales que $s < 1$, donde $s = |d_1| + |d_2|$. Es posible escribir en $\mathbb{C}^2$:

$$(d_1, d_2) = \frac{1}{2}\left[(e_1, e_2) + (f_1, f_2)\right], \tag{78}$$

donde $(e_1, e_2) \neq (f_1, f_2)$ y

$$|e_1| + |e_2| = |f_1| + |f_2| = s.$$

Debería ser $|e_1 + f_1| = |e_1| + |f_1|$ y $|e_2 + f_2| = |e_2| + |f_2|$. Equivalentemente, deberían existir constantes positivas $\rho_1,\ \rho_2$ tales que

$$e_1 = \rho_1\ f_1 \quad y \quad e_2 = \rho_2\ f_2. \tag{79}$$

Así debería ser

$$|f_1| + |f_2| = \rho_1\ \ |f_1| + \rho_2\ \ |f_2| = s. \tag{80}$$

Bastará ver que (80) es soluble, ya que de (78) y (79) sigue que

$$\arg(d_1) = \arg(e_1) = \arg(f_1) \quad y \quad \arg(d_2) = \arg(e_2) = \arg(f_2).$$

Buscamos entonces $x,\ y \in (0, s)$, $\rho_1,\ \rho_2$ positivos y distintos, tales que

$$x + y = \rho_1\ x + \rho_2\ y = s. \tag{81}$$

Si $0 < \rho_2 < 1 < \rho_1$ entonces $x = s\ (1 - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2)$ es positivo y menor que s. Haciendo $y = s - x$ tenemos

$$\rho_1\ x + \rho_2\ y = \rho_1\ x + \rho_2\ (s - x) = (\rho_1 - \rho_2)\ x + \rho_2\ s = s$$

y (80) es soluble. Finalmente, si $g \in B_{l^1(\mathbb{N})}$ y $|g_n| < 1$ para todo n veremos que $g \notin \text{ext}\left(B_{l^1(\mathbb{N})}\right)$. Como $\|g\|_1 = 1$ existen $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$

tales que $g_{n_1} \neq 0$ y $g_{n_2} \neq 0$. Definimos $h,\ k \in B_{l^1(\mathbb{N})}$ de modo que $h_n = k_n = g_n$ si $n \neq n_1$. Por la observación anterior, podemos hacer

$$(g_{n_1}, g_{n_2}) = \frac{1}{2}\left[(h_{n_1}, h_{n_2}) + (k_{n_1}, k_{n_2})\right],$$

de manera que $(h_{n_1}, h_{n_2}) \neq (k_{n_1}, k_{n_2})$ en $\mathbb{C}^2$ y

$$|h_{n_1}| + |h_{n_2}| = |k_{n_1}| + |k_{n_2}| = 1 - |g_{n_1}| - |g_{n_2}|.$$

En definitiva $g = (h+k)/2$, con $h \neq k$ en $B_{l^1(\mathbb{N})}$.

(ix) Sea $E \in \Omega$ un átomo, $g,\ h \in B_{L^1(X,\Omega,\mu)}$ y $\chi_E/\mu(E) = (g+h)/2$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ es $\mu\left(g^{-1}(\{\lambda\}) \cap E\right) = 0$ o $\mu\left(g^{-1}(\{\lambda\}) \cap E\right) = \mu(E)$. Como las preimágenes de singles distintos son disjuntas, razonando análogamente con h, existirán $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ tales que $g\,|_E = \alpha$ y $h\,|_E = \beta$ salvo conjuntos de $\mu-$ medida nula. Evidentemente $g\,|_{X-E} = -h\,|_{X-E}$ a.e. μ y

$$g = \alpha\ \chi_E + g\ \chi_{X-E}, \quad h = \beta\ \chi_E - g\ \chi_{X-E}, \tag{82}$$

$$1 = |\alpha|\ \mu(E) + \int_{X-E} |g|\ d\mu = |\beta|\ \mu(E) + \int_{X-E} |g|\ d\mu.$$

Debe ser $2/\mu(E) = \alpha+\beta$, i.e. $|\alpha| = |2/\mu(E) - \alpha|$. Ya que $2/\mu(E) > 0$ sigue que $\alpha = 1/\mu(E)$ y, por (82), $g = h = \chi_E/\mu(E)$. $\square$

3.29. La cápsula convexa de un espacio compacto puede no ser cerrada. La cápsula convexa cerrada de un espacio compacto puede no ser compacta.

[33]Sea $\phi_t \in \mathbb{R}^{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$, $\phi_t = (f(t))_{f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]}$, $t \in [0,1]$.

(i) $K = \{\phi_t :\ t \in [0,1]\}$ es subespacio compacto de $\mathbb{R}^{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$.

(ii) Si $\phi(f) = \int_0^1 f,\ f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$, entonces $\phi \in \overline{\text{conv}(K)} - \text{conv}(K)$.

[33]En este problema se muestra: - que la cápsula convexa de un espacio compacto puede no ser cerrada; - que la cápsula convexa cerrada de un espacio compacto puede no ser compacta.

(iii) $\operatorname{conv}(K)$ es cerrado en el subespacio lineal S de $\mathbb{R}^{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$ generado por K. Luego $\operatorname{conv}(K)$ es la cápsula convexa cerrada de K en S pero no es compacta.

Solución

(i) Si $\{\phi_{t_i}\}_{i\in I}$ es una red infinita en K hay una subred infinita $\{t_j\}_{j\in J}$ de $\{t_i\}_{i\in I}$ convergente a algún elemento $t_0 \in [0,1]$. Si $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ entonces

$$\phi_{t_j}(f) = f(t_j) \quad \xrightarrow{j \in J} \quad f(t_0) = \phi_{t_0}(f)$$

y así $\lim_{j\in J} \phi_{t_j} = \phi_{t_0}$ en $\mathbb{R}^{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$.

(ii) Sea $F \in \mathcal{P}_f(C_{\mathbb{R}}[0,1])$, $\varepsilon > 0$,

$$U = \left\{ (x_f)_{f\in C_{\mathbb{R}}[0,1]} : \ \forall f \in F, \ |x_f - \phi(f)| < \varepsilon \right\}.$$

Si $f \in F$ existe $\delta_f > 0$ tal que $|R(f,\pi) - \phi(f)| < \varepsilon$ si $\|\pi\| < \delta_f$, donde $R(f,\pi)$ representa cualquier suma de Riemann respecto a la partición π de $[0,1]$. Sea $\delta = \min\{\delta_f : \ f \in F\}$ y π_0 una partición de $[0,1]$ tal que $\|\pi_0\| < \delta$. Si $\pi_0 = \{x_i\}_{i=1}^n$, con $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, consideramos $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$. Para cada $f \in F$ tenemos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_0^1 f \right| = \left| \sum_{i=1}^n \phi_{t_i}(f)(x_i - x_{i-1}) - \int_0^1 f \right| < \varepsilon.$$

Así $\sum_{i=1}^n \phi_{t_i} \ (x_i - x_{i-1}) \in U \cap \operatorname{conv}(K)$ pues $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 1$. Siendo U entorno arbitrario de ϕ tenemos $\phi \in \overline{\operatorname{conv}(K)}$. Por otra parte, si $\phi \in \operatorname{conv}(K)$ podemos escribir $\phi = \sum_{j=1}^r c_j \ \phi_{s_j}$, con $\sum_{j=1}^r c_j = 1$, $\{c_j\}_{j=1}^r \subseteq (0,1)$, $\{s_j\}_{j=1}^r \subseteq [0,1]$. Debe ser entonces $\int_0^1 p = 0$ toda vez que p es un polinomio que se anula en $s_1, \dots, s_r$, lo que es obviamente falso.

(iii) Sea $x \in S - \operatorname{conv}(K)$ de la forma $x = \sum_{t\in F} c_t \ \phi_t$, donde $F \in \mathcal{P}_f([0,1])$ y algún $c_{t_0} \notin [0,1]$. Sea $0 < \delta < \operatorname{dist}(c_{t_0}, \ [0,1])$, $g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ tal que $g(t) = 0$ si $t \in F - \{t_0\}$ y $g(t_0) = 1$,

$$V = \left\{ y = (y_f)_{f\in C_{\mathbb{R}}[0,1]} : \ y \in S, \ |y_g - c_{t_0}| < \delta \right\}.$$

Entonces V es entorno de x en F disjunto con $\operatorname{conv}(K)$. Por otra parte, si $c_t \in [0,1]$ para $t \in F$ y $\sum_{t\in F} c_t \neq 1$ sea $0 < \zeta < \left|1 - \sum_{t\in F} c_t\right|$. Sea $h \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ tal que $h(t) = 1$ si $t \in F$,

$$W = \left\{ y = (y_f)_{f\in C_{\mathbb{R}}[0,1]} : \ y \in S, \ \left| y_h - \sum_{t\in F} c_t \right| > \zeta \right\}.$$

Ahora W es entorno de x en F disjunto con $\operatorname{conv}(K)$. $\square$

3.30. Teorema de Milman - Pettis. Uniforme convexidad.

(i) Los espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R})$ no son *uniformemente convexos.* [34]

(ii) Todo espacio de Hilbert es uc..

(iii) Si (X,μ) es un espacio de medida entonces $L^p(X, d\mu)$ es uc. para $p \geq 2$. [35]

(iv) (Teorema de Milman - Pettis [28][38]) Todo espacio uc es reflexivo.

(v) Si X es uc, cada subconjunto convexo, cerrado y no vacío tiene un único elemento de norma mínima.

(vi) Si $x_n \underset{\rightarrow}{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $\|x_n - x\| \to 0$. [36]

Solución

(i) Existen E, F subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ tales que $\lambda(E) = \lambda(F) = 1$, donde λ indica medida de Lebesgue, disjuntos a.e.. Entonces

$$\|\varkappa_E - \varkappa_F\|_1 = 2$$
$$y$$
$$\|\varkappa_E\|_1 = \|\varkappa_F\|_1 = \|(\varkappa_E + \varkappa_F)/2\|_1 = 1.$$

[34](Cf. [7]) Un espacio de Banach $(E, \|\circ\|)$ se dice *uniformemente convexo* (uc) si: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda vez que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|(x+y)/2\| > 1 - \delta$ en E resulta $\|x - y\| < \varepsilon$.

[35]Más generalmente, $L^p(X, d\mu)$ es uc. si $1 < p < \infty$ (cf. [1], Ch. II, Corollary 2.29, page 38).

[36]V. Problema 6.13 (v).

Luego $L^1(\mathbb{R})$ no es uc pues la definición no se verifica si $0 < \varepsilon < 2$. Por otra parte, si $G,\ H$ son medibles y $\lambda(G \cap H) > 0$ entonces

$$\|\varkappa_G\|_\infty = \|\varkappa_H\|_\infty = \|(\varkappa_G + \varkappa_H)/2\|_\infty = \|\varkappa_G - \varkappa_H\|_\infty = 1.$$

Así $L^\infty(\mathbb{R})$ no es uc porque la definición no es válida si $0 < \varepsilon < 1$.

(ii) Sigue de la *ley del paralelogramo.*

(iii) Por (ii) supondremos $p > 2$. Probaremos las identidades

$$\left(|\alpha + \beta|^p + |\alpha - \beta|^p\right)^{1/p} \leq \sqrt{2}\ \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)^{1/2}, \tag{83}$$

$$2^{p/2}\ \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)^{p/2} \leq 2^{p-1}\ \left(|\alpha|^p + |\beta|^p\right) \tag{84}$$

válidas para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Podemos suponer que α y β son no nulos. Más aún, (83) es una inecuación homogénea de grado cero, por lo que bastará probar

$$\left(|1 + z|^p + |1 - z|^p\right)^{1/p} \leq \sqrt{2}\ \left(1 + |z|^2\right)^{1/2} \tag{85}$$

donde $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Escribiendo $z = r\ \exp(i\theta)$, con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, (85) equivale a

$$\left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right)^{p/2} + \left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^{p/2} \leq \sqrt{2}\ \left(1 + r^2\right)^{1/2}. \tag{86}$$

Consideremos $r > 0$ fijo y sea

$$\begin{cases} f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \\ \\ f(\theta) = (1 + 2r\cos\theta + r^2)^{p/2} + (1 - 2r\cos\theta + r^2)^{p/2}. \end{cases}$$

Como $f(2\pi - \theta) = f(\pi - \theta) = f(\theta)$ basta considerar $0 \leq \theta < \pi/2$. Entonces

$$f'(\theta) = -pr\sin\theta \left[\left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right)^{\frac{p}{2}-1} - \left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^{\frac{p}{2}-1}\right] \leq 0$$

y f alcanza el valor máximo con $\theta = 0$. Por (86) debemos ver entonces que

$$(1 + r)^{2\sigma} + (1 - r)^{2\sigma} \leq 2^\sigma\ (1 + r^2)^\sigma, \tag{87}$$

donde escribimos $\sigma = p/2$. Considerando la función

$$\begin{cases} g : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ \\ g(r) = \left[(1+r)^{2\sigma} + (1-r)^{2\sigma}\right]/(1+r^2)^{\sigma} \end{cases}$$

tenemos

$$g'(r) = 2\sigma(1-r^2)(1+r^2)^{-\sigma-1}\left[(1+r)^{2\sigma-2} - (1-r)^{2\sigma-2}\right].$$

Evidentemente $g'(r) = 0$ si y solo si $r = 1$, $g'(r) > 0$ si $0 < r < 1$ y $g'(r) < 0$ si $r > 1$. En consecuencia hay un máximo local de g en $r = 1$, siendo $g(1) = 2^{\sigma}$. Además $g(0^+) = \lim_{r\to+\infty} g(r) = 2$, i.e. g alcanza un máximo absoluto en $r = 1$ y sigue (87). Respecto a (84), que también es una inecuación homogénea de grado cero, bastará probar su forma equivalente

$$\left(1+r^2\right)^{1/2} \leq 2^{1/2-1/p} \ \left(1+r^p\right)^{1/p}, \ r > 0. \tag{88}$$

Si hacemos

$$\begin{cases} h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \\ \\ h(r) = \left(1+r^2\right)^{1/2} \ \left(1+r^p\right)^{-1/p} \end{cases}$$

resulta

$$h'(r) = r \quad \left(1+r^2\right)^{-1/2} \ \left(1+r^p\right)^{-1/p-1} \ \left(1-r^{p-2}\right),$$

i.e. $h'(r) = 0$ si y solo si $r = 1$. Analizando signos de h' sigue que $h(1) = 2^{1/2-1/p}$ es máximo absoluto y es válida (88). Ahora, por (83) y (84) tenemos

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leq 2^{p-1} \ \left(|\alpha|^p + |\beta|^p\right), \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{C}. \tag{89}$$

En consecuencia, si $F, \ H \in L^p(X, d\mu)$, por (89) escribimos

$$\|F+G\|_p^p + \|F-G\|_p^p \leq 2^{p-1} \ \left(\|F\|_p^p + \|G\|_p^p\right).$$

Si $\|F\|_p = \|G\|_p = 1$ obtenemos

$$\|F-G\|_p^p \leq 2^p - \|F+G\|_p^p = 2^p \ \left[1 - \|(F+G)/2\|_p^p\right]$$

y deducimos enseguida la uc de $L^p(X, d\mu)$.

(iv) Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que $\|x-y\| < \varepsilon$ cuando $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|(x+y)/2\| < \delta$. Si $T \in B_{X^{**}}$ y $\|T\| = 1$, sea $\varphi \in B_{X^*}$ tal que $|\langle \varphi, T\rangle| > 1-\delta$. Podemos suponer, multiplicando eventualmente φ por un escalar unitario, que $\langle \varphi, T\rangle \in \mathbb{R}$. Como la bola unitaria B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$ - densa en la bola unitaria cerrada $B_{X^{**}}$ de X^{**}, hay una red $(x_a)_{a\in A}$ de B_X que converge $\sigma(X^{**}, X^*)$ a T (cf. [9], Ch. V, §4, Prop. 4.1). Como $\lim_{a\in A} \operatorname{Re}\langle x_a, \varphi\rangle = \langle \varphi, T\rangle$ existe $a_0 \in A$ tal que $\operatorname{Re}\langle x_a, \varphi\rangle > 1-\delta$ si $a \geq a_0$ en A. Ahora, si $a_1 \geq a_0$ y $a_2 \geq a_0$ en A tenemos

$$1-\delta < \operatorname{Re}\ \langle (x_{a_1} + x_{a_2})/2, \varphi\rangle$$

$$\leq |\langle (x_{a_1} + x_{a_2})/2, \varphi\rangle| \leq \|(x_{a_1} + x_{a_2})/2\|,$$

i.e. $\|x_{a_1} - x_{a_2}\| \leq \varepsilon$, i.e. $(x_a)_{a\in A}$ es una red de Cauchy en X. [37]Existe entonces $x \in B_X$ tal que $x = \lim_{a\in A}\ x_a$ y, necesariamente, $x = T$ en X^{**}. El caso $T = 0$ es trivial y el mismo razonamiento es aplicable si $0 < \|T\| < 1$, reemplazando T por $T/\|T\|$. Identificados B_X y $B_{X^{**}}$ sigue que X es reflexivo.

(v) Sea $C \subseteq X$ convexo, cerrado y no vacío y sea $d = \operatorname{dist}(0, C)$. Podemos suponer $0 \notin C$ y, como C es cerrado, $d > 0$. Si $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq C$ es tal que $\|x_n\| \to d$ entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es acotada. Sabemos que X es reflexivo porque es uc.. En consecuencia, toda bola cerrada es débilmente compacta (cf. [9], Prop. 4.2, pág. 132). Pasando eventualmente a una subsucesión, podemos suponer que existe $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} x$. Si $\varphi \in B_{X^*}$ tenemos

$$d = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| \geq \lim_{n\to+\infty} |\langle x_n, \varphi\rangle| = |\langle x, \varphi\rangle|$$

y deducimos que $\|x\| \leq d$. Ahora, si $x \notin C$ aplicamos el teorema de Hahn - Banach a los conjuntos disjuntos $\{x\}$ y C (cf. [42], Ch. 3, Th. 3.4, page 58). Hay entonces números reales r, s y una forma lineal $\Lambda \in X^*$ tales que $\operatorname{Re}(\Lambda(x)) < r < s < \operatorname{Re}(\Lambda(y))$ para cada $y \in C$. El conjunto $U = \{z \in X :\ |\Lambda(x-z)| < (s-r)/2\}$ es un entorno débil de x. Si $y \in C$ tenemos

$$s - r < \operatorname{Re}(\Lambda(y-x)) \leq |\operatorname{Re}(\Lambda(y-x))|$$

[37]Observar como, con una pequeña modificación de la argumentación, sigue que toda forma lineal acotada de X alcanza un valor máximo sobre B_X.

y $U \cap C = \emptyset$, lo que contradice que $x \in \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$. Así $x \in C$ y $\|x\| = d$. Si $\widetilde{x} \in C$ también tuviere norma mínima, entonces $\|x/d\| = \|\widetilde{x}/d\| = 1$ y $\|(x/d + \widetilde{x}/d)/2\| = 1$. Por definición de uc deducimos que $x = \widetilde{x}$.

(vi) Podemos suponer $x \neq 0$, de modo que $\|x_n\| \neq 0$ si n es lo suficientemente grande. En tal caso, si $\varphi \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left\langle \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{x_n - x}{\|x_n\|}, \varphi \right\rangle + \left(\frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|x\|} \right) \langle x, \varphi \rangle ,$$

i.e. $x_n / \|x_n\| \underset{\rightarrow}{w} x / \|x\|$. Supondremos entonces $\|x_n\| = 1$ para todo n y $\|x\| = 1$. Aplicando el teorema de Hahn - Banach, existe $\Psi \in X^*$ tal que $\|\Psi\| = \langle x, \Psi \rangle = 1$. Entonces $\langle x_n, \Psi \rangle \to 1$ y, por la uc, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ deviene sucesión de Cauchy en X. Por la completitud de X existe $\widetilde{x}$ tal que $\|x_n - \widetilde{x}\| \to 0$. Si $x \neq \widetilde{x}$ existe $\Upsilon \in X^*$ tal que $\langle x - \widetilde{x}, \Upsilon \rangle \neq 0$. Como

$$\langle x, \Upsilon \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, \Upsilon \rangle = \langle \widetilde{x}, \Upsilon \rangle$$

llegamos a una contradicción, i.e. debe ser $\widetilde{x} = x$. $\square$

3.31. Sobre operadores compactos y completamente continuos.

(i) Sean $S, M \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}))$ los funcionales

$$S(z_0,\ z_1,\ ...) = (0,\ z_0,\ z_1,\ ...),$$

$$M(z_0,\ z_1,\ ...) = (z_0,\ z_1/2,\ z_2/3,\ ...).$$

Sea $T = M \circ S$. Entonces T es un operador compacto, no tiene autovalores y su espectro tiene un solo punto.

(ii)(a) Sea $(F,\ \|\circ\|_F)$ un espacio normado con la siguiente propiedad: Existe $c > 0$ tal que para todo $\digamma \in P_f(F)$ y cada $\varepsilon > 0$ hay subespacios cerrados $G_\digamma$ y $H_\digamma$ de modo que $F = G_\digamma \bigoplus H_\digamma$, $\dim(G_\digamma) < +\infty$, $\operatorname{dist}(g, G_\digamma) < \varepsilon$ si $g \in \digamma$ y, si $P_{G_\digamma}$ y $P_{H_\digamma}$ son las proyecciones de F sobre $G_\digamma$ y $H_\digamma$, $\left\|P_{H_\digamma}(f)\right\|_F \leq c\ \operatorname{dist}(f, G_\digamma)$ para cada $f \in F$. En estas condiciones, si $(E,\ \|\circ\|_E)$ es un espacio normado y $T \in \mathcal{B}(E, F)$

es operador compacto, entonces T es límite de operadores de rango finito. [38]

(ii)(b) Todo espacio de Hilbert verifica las condiciones de (ii)(a), así como los espacios c_0 y $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

(iii) Considérese $L^p(0, +\infty)$, $1 < p < +\infty$, relativo a la medida de Lebesgue. Si

$$Tf(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t) \, \frac{dt}{t}, \; s > 0, \; f \in L^p(0, +\infty),$$

entonces $T \in \mathcal{B}(L^p(0, +\infty))$ y no es compacto.

(iv) Un operador idempotente es compacto sii tiene rango finito.

(v) Ningún operador de multiplicación no nulo sobre $L^2(0,1)$ es compacto.

(vi) Para $n \in \mathbb{N}$ sea H_n un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H_n)$ y supongamos $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < +\infty$. Si $H = \bigoplus_{n \geq 1} H_n$, el operador $T = \bigoplus_{n \geq 1} T_n$ es compacto sii cada T_n lo es y $\|T_n\| \to 0$.

(vii) Sea T un operador compacto simétrico sobre un espacio de Hilbert H, $g \in H$, $\lambda \notin \sigma(T)$.

(vii)(a) $g \in \operatorname{ran}(T)$ sii $g \in \ker(T)^{\perp}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-2} \; |\langle g, e_n \rangle|^2 < +\infty$, donde $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ es la sucesión de autovalores no nulos de H contados con su multiplicidad.

(vii)(b) La única solución de la ecuación $(\lambda I_H - T) f = g$ es

$$f = \left[g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{\lambda - \rho_n} \; \langle g, e_n \rangle \; e_n \right] / \lambda. \tag{90}$$

(viii) Considerando $C[0,1]$ con la estructura usual de espacio de Banach, caracterizar las funciones continuas $\tau : C[0,1] \to C[0,1]$ para las que el operador lineal $C_\tau f = f \circ \tau$, $f \in C[0,1]$, es continuo.

[38] Se denomina *completamente continuos* a los operadores que son límite de operadores de rango finito. Como todo operador de rango finito es compacto y los límites de operadores compactos son compactos, la clase de operadores completamente continuos está contenida en la de operadores compactos. En (ii)(a) se dan condiciones bajo las cuales ambas clases coinciden.

(ix) Si X es espacio de Hausdorff localmente compacto la clase de operadores de rango finito es densa en $\mathcal{K}\left[C_0\left(X\right)\right]$.

Solución

(i) Es claro que los operadores S y M están bien definidos y son lineales. En particular, S es isométrica, $\|Mz\|_2 \leq \|z\|_2$ para todo $z \in l^2\left(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}\right)$ y como $\|M(1,\ 0,\ 0,\ ...)\|_2 = 1$ entonces $\|M\| = 1$. Indicando e_n al $n-$ ésimo vector canónico de $l^2\left(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$, si $z \in l^2\left(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}\right)$ escribimos

$$T\left(z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[z_{n-1}/\left(n+1\right)\right]\ e_n. \tag{91}$$

En efecto, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\left\|T\left(z\right) - \sum_{n=1}^{m} \frac{z_{n-1}}{n+1}\ e_n\right\|_2 = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{z_{n-1}}{n+1}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left|z_{n-1}\right|^2\right)^{1/2}$$

y haciendo $m \to +\infty$ resulta (91). Más aún, si $\|z\|_2 \leq 1$ obtenemos

$$\left\|\left(T - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1}\ \left\langle \circ, e_{n-1}\right\rangle\ e_n\right)(z)\right\|_2 = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{z_{n-1}}{n+1}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Como z es arbitrario deducimos la desigualdad

$$\left\|T - \sum_{n=1}^{m}\ \frac{1}{n+1}\ \left\langle \circ, e_{n-1}\right\rangle\ e_n\right\| \leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Así T deviene compacto por ser límite de operadores de rango finito. Si $\lambda \in \sigma_p\left(T\right)$ debe existir $z \neq 0$ tal que $T\left(z\right) = \lambda\ z$, i.e. $\lambda\ z_0 = 0$ y

$\lambda\, z_n = z_{n-1}/(n+1)$ si $n \in \mathbb{N}$. Si $\lambda = 0$ entonces $T(z) = 0$ y, por ser T monomorfismo, $z = 0$ lo cual es contradictorio. Entonces $\lambda \neq 0$ y deducimos nuevamente que $z = 0$. Luego $\sigma_p(T) = \emptyset$ y necesariamente $\sigma(T) = \{0\}$ (cf. [42], Ch. 4, Th. 4.18(e), pág. 98 y Th. 4.25(b), pág. 103).

(ii)(a) Sea $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números positivos convergente a cero, $T \in \mathcal{B}(E,F)$ operador compacto, B_E la bola cerrada unitaria de E. Por ser $T(B_E)$ precompacto, para cada $n \geq 1$ existe un subconjunto finito $\digamma_n$ de B_E tal que $\overline{T(B_E)} \subseteq \cup_{e\in\digamma_n} B(Te, \varepsilon_n)$. Por hipótesis, para cada $n \geq 1$ escribimos $F = G_n \bigoplus H_n$, con G_n y H_n sub-espacios cerrados, $\dim(G_n) < +\infty$, $\operatorname{dist}(Te, G_n) < \varepsilon_n$ si $e \in \digamma_n$ y $\|P_{H_n} f\|_F \leq c\ \operatorname{dist}(f, G_n)$ si $f \in F$. Bastará ver que $T = \lim_{n\to+\infty} P_{G_n} T$. En efecto, si $e \in B_E$ y $n \geq 1$ existe $\overline{e} \in \digamma_n$ tal que $\|Te - T\overline{e}\|_F < \varepsilon_n$. Sea $f \in G_n$ tal que $\|T\overline{e} - f\|_F < \varepsilon_n$. Entonces

$$\operatorname{dist}(Te, G_n) \leq \|Te - f\|_F \leq \|Te - T\overline{e}\|_F + \|T\overline{e} - f\|_F < 2\,\varepsilon_n,$$

de donde

$$\|(T - P_{G_n}T)\, e\|_F = \|P_{H_n} Te\|_F \leq c\ \operatorname{dist}(Te, G_n) < 2\, c\, \varepsilon_n.$$

Como e es arbitrario $\|T - P_{G_n}T\| \leq 2\, c\, \varepsilon_n$ y haciendo $n \to +\infty$ sigue la afirmación.

(ii)(b) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $\digamma_1 \in \mathcal{P}_f(\mathcal{H})$. Sea G_1 el subespacio generado por $\digamma_1$ y H_1 su complemento ortogonal. Las condiciones de (ii)(a) se verifican y en particular, si $h \in H_1$, $\|P_{H_1} h\| = \operatorname{dist}(h, G_1)$ y puede hacerse $c = 1$. Ahora, si $\digamma_2 \in \mathcal{P}_f(c_0)$ y $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ si $a \in \digamma_2$ y $n > n_0$. Sea $G_2 = \operatorname{gen}_{c_0}\{e_n :\ 0 \leq n \leq n_0\}$, $H_2 = \operatorname{gen}_{c_0}\{e_n :\ n > n_0\}$. Si $b \in c_0$, $b = (b_n)_{n\geq 0}$ y $c \in G_2$ entonces

$$\|b - c\| = \text{máx}\left\{\underset{0\leq n\leq n_0}{\text{máx}}\ |b_n - c_n|\,,\ \sup_{n>n_0}\ |b_n|\right\}.$$

Luego $\operatorname{dist}(b, G_2) = \sup_{n>n_0}\ |b_n| = \|P_{H_2} b\|$, $\operatorname{dist}(a, G_2) \leq \varepsilon$ si $a \in \digamma_2$ y c_0 verifica (ii)(a) si $c = 1$. Finalmente, sea $\digamma_3 \in \mathcal{P}_f(l^1(\mathbb{N},\mathbb{C}))$, $\xi > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_1} |d_n| < \xi$ si $d = (d_n)_{n\geq 1}$, $d \in \digamma_3$. Sea

$$G_3 = \left\{(f_n)_{n\geq 1} \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{C}) :\ f_n = 0 \text{ si } n > n_1\right\},$$

$$H_3 = l^1(\mathbb{N},\mathbb{C}) \ominus G_3.$$

Si $f \in G_3$ y $g \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ tenemos

$$\|f-g\|_1 = \sum_{n=1}^{n_1} |f_n - g_n| + \sum_{n>n_1} |g_n| \,.$$

Luego $\operatorname{dist}(g,G_3) = \|P_{H_3} g\|_1 = \sum_{n>n_1} |g_n|$ y $\operatorname{dist}(d,G_3) < \xi$ si $d \in F_3$. Como en los casos anteriores, puede considerarse $c = 1$.

(iii) El operador T es acotado, pues para $f \in L^p(0,+\infty)$ es válida la siguiente desigualdad de Hardy (cf. [16], Appendix B, page 234):

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \ \|f\|_p \,.$$

Por otra parte, sea $\eta = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{C}$ tal que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \ |\eta_n| > 0$ y $g_n = \eta_n \ \varkappa_{(0,1/n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $s > 0$ calculamos

$$Tg_n(s) = \begin{cases} \eta_n & si \quad 0 < s < 1/n, \\ \\ \eta_n/\left(ns\right) & si \quad s \geq 1/n. \end{cases}$$

Dada $f \in L^q(0,+\infty)$, donde $1/p + 1/q = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ resulta

$$|\langle f, g_n\rangle| = \left|\eta_n \int_0^{1/n} f\right| \leq \|\eta\|_\infty \ \|f\|_p \ n^{-q},$$

i.e. $g_n \ \underset{\rightarrow}{w} \ 0$ en $L^p(0,+\infty)$. Sin embargo, $\|Tg_n\|_p \geq |\eta_n| \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \ |\eta_n|$, i..e $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \|Tg_n\|_p \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \ |\eta_n| > 0$, y T no es compacto.

(iv) Sea $T : E \to E$ un operador idempotente compacto sobre un espacio normado E, $B_{\operatorname{ran}(T)}$ la bola cerrada unitaria de $\operatorname{ran}(T)$. Como $B_{\operatorname{ran}(T)}$ es acotado y T es compacto es $T\left(B_{\operatorname{ran}(T)}\right)$ relativamente compacto. Por ser T idempotente es $T\left(B_{\operatorname{ran}(T)}\right) = B_{\operatorname{ran}(T)}$ y, como $B_{\operatorname{ran}(T)}$ es cerrado deviene compacto, i.e. T es de rango finito. La recíproca es trivial.

(v) Sea $\phi \in L^\infty(0,1)$ no nulo, $M_\phi \in \mathcal{L}\left(L^2(0,1)\right)$ el operador de multiplicación asociado. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(S) \geq \varepsilon$, donde μ es la medida de Lebesgue en $(0,1)$ y $S = \{|\phi| \geq \varepsilon\}$. Como $L^2(S)$ tiene dimensión infinita hay una red $\{f_a\}_{a\in A}$ y una constante $\delta > 0$ tal que $\|f_a\|_{L^2(S)} = 1$

y $\|f_a - f_b\|_{L^2(S)} \geq \delta$. Dada $a \in A$ sea $g_a = f_a$ sobre S, $g_a = 0$ sobre $(0,1) - S$. Cada g_a es medible pues si $c \in \mathbb{R}$ es

$$\{g_a < c\} = \begin{cases} S \cap \{f_a < c\} \cup (0,1) - S & si \quad c > 0, \\ \\ S \cap \{f_a < c\} & si \quad c \leq 0. \end{cases}$$

Evidentemente $\{g_a\}_{a \in A} \subseteq B_{L^2(0,1)}$ y para $a,\ b \in A$ tenemos

$$\|M_\phi\ g_a - M_\phi\ g_b\|_2 \geq \varepsilon\ \ \|f_a - f_b\|_{L^2(S)} \geq \varepsilon\ \delta.$$

Así $\{M_\phi g_a\}_{a \in A}$ no tiene subsucesiones convergentes y M_ϕ no es compacto.

(vi) Si $n \in \mathbb{N}$ y P_{H_n} es la proyección de H sobre H_n es $T_n = P_{H_n} \circ T \circ P_{H_n}$, i.e. cada T_n es compacto si T lo es. Si $\|T_n\| \nrightarrow 0$ existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión infinita $(f_{n_k})_{k \geq 1} \subseteq H$ tal que $\|f_{n_k}\| = 1$, $f_{n_k} \in H_{n_k}$ y $\|T_{n_k} f_{n_k}\| \geq \varepsilon$ para cada k. Como $f_{n_k} \ \underrightarrow{w}\ 0$ y T es compacto entonces $\|T_{n_k} f_{n_k}\| \to 0$, lo que no es posible. Recíprocamente, T es acotado porque $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < +\infty$. Veamos que $T(B_H)$ es relativamente compacto, para lo que bastará probar que es totalmente acotado pues su clausura es espacio completo. Si $\xi > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n\| < \xi/4$ si $n > n_0$. En particular, el operador $T_{[n_0]} = \bigoplus_{n=1}^{n_0} T_n$ es compacto por ser suma finita de operadores compactos. Existe $\digamma \in \mathcal{P}_f(B_H)$ tal que $T_{[n_0]}(B_H) \subseteq \cup_{g \in \digamma} B\left(T_{[n_0]} g,\ \xi/2\right)$. Sea $f \in B_H$ y $g \in \digamma$ tal que $\left\|Tf - T_{[n_0]} g\right\| < \xi/2$. Entonces

$$\|Tf - Tg\| \leq \left\|T_{[n_0]}(f-g)\right\| + \left\|\left(T - T_{[n_0]}\right)(f-g)\right\|$$

$$\leq \xi/2 + \left(\sum_{n > n_0} \|T_n(f-g)\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \xi/2 + \xi/4\ \ \|f-g\| \leq \xi,$$

i.e. $T(B_H) \subseteq \cup_{g \in \digamma} B(Tg,\ \xi)$.

(vii)(a) Trivial.

(vii)(b) Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\rho_n}{\lambda-\rho_n}\ \langle g,e_n\rangle\right|^2\leq\left(\frac{r_{sp}\left(T\right)\ \|g\|}{\operatorname{dist}\left(\lambda,\ \sigma\left(T\right)\right)}\right)^2<+\infty$$

por (90) queda definido $f\in H$. Ahora

$$Tf=\left[Tg+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n^2}{\lambda-\rho_n}\ \langle g,e_n\rangle\ e_n\right]/\lambda$$

$$=\lambda^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\rho_n}{\lambda-\rho_n}\right)\ \rho_n\ \langle g,e_n\rangle\ e_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n}{\lambda-\rho_n}\ \langle g,e_n\rangle\ e_n=\lambda\ f-g.$$

(viii) Probaremos que $C_\tau\in\mathcal{K}\left(C\left[0,1\right]\right)$ sii τ es constante. Si $B_{C[0,1]}$ es la bola cerrada unitaria de $C\left[0,1\right]$, $C_\tau\left(B_{C[0,1]}\right)$ es acotado pues está contenido en $B_{C[0,1]}$. En consecuencia, por el teorema de Arzelá - Ascoli, $C_\tau\left(B_{C[0,1]}\right)$ será totalmente acotado sii es equicontinuo, como evidentemente ocurre si τ es constante. Sea $\delta_s\in C\left[0,1\right]^*$ el funcional $\langle g,\delta_s\rangle=g\left(s\right),\ g\in C\left[0,1\right],\ s\in\left[0,1\right]$. Si $s_1\neq s_2$ en $\left[0,1\right]$ es fácil ver que $\|\delta_{s_1}-\delta_{s_2}\|=2$. Asumiendo que $C_\tau\left(B_{C[0,1]}\right)$ es equicontinuo, fijados $t_0\in\left[0,1\right]$ y $0<\varepsilon\leq2$ existe $\delta_{t_0}>0$ tal que $\left|f\left(\tau\left(t\right)\right)-f\left(\tau\left(t_0\right)\right)\right|<\varepsilon$ si $f\in B_{C[0,1]}$ y $\left|t-t_0\right|<\delta_{t_0}$ en $\left[0,1\right]$. En ese caso, $\left\|\delta_{\tau(t)}-\delta_{\tau(t_0)}\right\|\leq\varepsilon$ y, en consecuencia, debe ser $\tau\left(t\right)=\tau\left(t_0\right)$ si $\left|t-t_0\right|<\delta_{t_0}$ en $\left[0,1\right]$. Definiendo $A=\left\{t\in\left[0,1\right]:\ \tau\left(t\right)=\tau\left(0\right)\right\}$ sigue, por un simple argumento de conexión, que $A=\left[0,1\right]$, deviendo τ constante.

(ix) Sea $B_{C_0(X)}$ la bola cerrada unitaria de $C_0(X)$, $T\in\mathcal{K}\left[C_0\left(X\right)\right],\ n\in\mathbb{N}$. Por el Problema 3.7(ii) existe $K_n\subseteq X$ compacto tal que $\left|Tf(x)\right|<1/n$ si $f\in B_{C_0(X)}$ y $x\in X-K_n$. Como $T\left[B_{C_0(X)}\right]$ es equicontinua, por la compacidad de K_n existe $F_n\in\mathcal{P}_f\left(K_n\right)$ y, para cada $x\in F_n$, un entorno abierto U_x de x tal que $\left|Tf(x)-Tf(y)\right|<1/n$ si $y\in U_x$, $f\in B_{C_0(X)}$ y $K_n\subseteq\cup_{x\in F_n}U_x$. Sea $\left\{\lambda_{n,x}\right\}_{x\in F_n}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_x\}_{x\in F_n}$ (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.13, page 41) y hagamos

$$T_n f = \sum_{x\in F_n} Tf(x)\ \lambda_{n,x},\ f \in C_0(X).$$

Si $\varepsilon > 0$ y $f \in C_0(X)$, $\{x \in X : |T_n f| \geq \varepsilon\}$ es compacto, por ser subconjunto cerrado del espacio compacto separado $\cup_{x\in F_n} \operatorname{supp}(\lambda_{n,x})$. En consecuencia $T_n f \in C_0(X)$ y $T_n \in \mathcal{K}[C_0(X)]$. Como para cada $y \in X$ tenemos

$$|T_n f(y) - Tf(y)| \leq \sum_{x\in F_n} |Tf(x) - Tf(y)|\ \lambda_{n,x}(y) \leq 1/n$$

deducimos que $\|T_n f - Tf\|_{C_b(X)} \leq 1/n$ y, como n y f son arbitrarios, sigue la afirmación. $\square$

3.32. Sobre operadores compactos, diagonalizables o normales.

Sea H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. [39]

(i) Sea $T \in L(H)$ *diagonalizable*,[40] digamos $T = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i\ P_i$. T es compacto sii $\alpha_i = 0$ salvo un número numerable de índices, ran $P_i < +\infty$ si $\alpha_i \neq 0$ y si $\{i_n :\ \alpha_{i_n} \neq 0\}_{n\geq 1}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha_{i_n} = 0$.

(ii) T conmuta con todo operador compacto sii es múltiplo del operador idéntico.

(iii) Sea T compacto, normal y $\operatorname{nul}(T - \lambda I_H) \leq 1$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $A \in L(H)$ conmuta con T existe $\phi \in l^\infty(\mathbb{C})$ tal que $A = \phi(T)$.

(iv) Sea T compacto, normal, tal que

$$\{A \in L(H) :\ AT = TA\} = \{\phi(T) :\ \phi \in l^\infty(\mathbb{C})\}. \tag{92}$$

Entonces $\operatorname{nul}(T - \lambda I_H) \leq 1$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

---

[39] V. Problema 3.18(iv).

[40] Decimos que $T \in L(H)$ es *diagonalizable* si es representable como $T = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i P_i$, donde $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es una familia acotada de números complejos y $\{P_i\}_{i\in I}$ una *partición de la unidad de* H, i.e. una familia ortogonal de proyectores tal que $H = \bigvee_{i\in I} \operatorname{ran} P_i$.

(v) Si $T \in L(H)$ y $\phi \in l^{\infty}(\mathbb{C})$ determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales $\phi(T)$ sea compacto.

(vi) Si $T \in L(H)$ es compacto positivo existe un único $A \in L(H)$ compacto positivo tal que $A^2 = T$.

(vii) Sea $T \in L(H)$ y sea A la única raíz cuadrada de T^*T. [41]Para todo $h \in H$ es $\|Th\| = \|Ah\|$, existe un único $U \in L(H)$ tal que U es una isometría sobre $(\ker(T))^{\perp}$, $\ker(T) \subseteq \ker(U)$ y $UA = T$.

Solución

(i) La condición es evidentemente necesaria. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_{i_n}| \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Si $m \geq n_0$ tenemos

$$\left\| T - \sum_{n=1}^{m} \alpha_{i_n} \ P_{i_n} \right\| = \sup_{f:\|f\| \leq 1} \left(\sum_{n>m} \|\alpha_{i_n} \ P_{i_n} f\|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon$$

y, siendo ε arbitrario, T se realiza como límite de operadores de rango finito.

(ii) Si $f \neq 0$ entonces $P_{\mathbb{C}f}Tf = Tf$ porque $P_{\mathbb{C}f} \in \mathcal{L}(H)$ tiene rango finito y por lo tanto conmuta con T. Como $Tf = P_{\mathbb{C}f}Tf + P_{(\mathbb{C}f)^{\perp}}Tf$ entonces $P_{(\mathbb{C}f)^{\perp}}Tf = 0$, i.e. existe una única constante $\alpha(f)$ tal que $Tf = \alpha(f) f$. Si $g \in H$ y $\{f, g\}$ es linealmente independiente, podemos escribir también $Tg = \alpha(g) g$ y $T(f-g) = \alpha(f-g)(f-g)$. Luego

$$T(f-g) = \alpha(f) f - \alpha(g) g = \alpha(f-g)(f-g),$$

de donde $(\alpha(f) - \alpha(f-g)) f + (\alpha(f-g) - \alpha(g)) g = 0$. Por la independencia lineal deducimos que $\alpha(f) = \alpha(f-g) = \alpha(g)$ y la condición es necesaria. La recíproca es evidente.

(iii) T es diagonalizable por ser compacto y normal (cf. [9], Ch. II, §7, Corollary 7.9, pág. 56). Por el teorema espectral

$$T = \bigoplus_{n \geq 1} \lambda_n \ P_{\ker(T - \lambda_n I)}, \tag{93}$$

[41]Notar que si T es compacto, por (vi) hay una descripción explícita de $(T^*T)^{1/2}$ en término de los valores espectrales de T. El caso general sigue del cálculo funcional usual (cf. [42], Ch. 12, Th. 12.34, page 314).

donde $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de autovalores no nulos de T. Dado $n \geq 1$, por hipótesis existe $f_n \in H$ tal que $\|f_n\| = 1$, $Tf_n = \lambda_n \; f_n$ y $\ker(T - \lambda_n I) = \mathbb{C} \; f_n$. Más aún, cada $\ker(T - \lambda_n I)$ reduce a cada operador que conmute con T (cf. [9], Ch. II, §7, Th. 7.5, pág. 55). Sean entonces $A,\; B \in L(H)$ operadores que conmuten con T. Para $n \geq 1$, como Af_n y Bf_n son múltiplos de f_n entonces $ABf_n = BAf_n$. En particular, A y B también conmutan sobre $\ker(T)$, invariante bajo la acción de ambos. Así A y B conmutan porque lo hacen sobre una base de H constituída por autovectores de T (cf. [9], Ch. II, §7, Prop. 7.4, pág. 54). En consecuencia sigue la tesis, pues si A conmuta con T conmuta con todo operador que conmuta con T (cf. [9], Ch. II, §7, Th. 7.12, pág. 55).

(iv) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{nul}(T - \lambda I_H) > 1$. Si $\{f,\; g\}$ es un subconjunto ortonormal de $\ker(T - \lambda I_H)$ sea $S \in L(H)$ tal que para $h \in H$ es

$$Sh = \begin{cases} Th & si \quad h \in H \ominus \operatorname{gen}_{\mathbb{C}}\{f,\; g\}, \\ \\ g & si \quad h = f, \\ \\ f & si \quad h = g. \end{cases}$$

Entonces S conmuta con T y, si $S = \phi(T)$ para alguna $\phi \in l^{\infty}(\mathbb{C})$, obtenemos $g = Sf = \phi(T)\, f = \phi(\lambda)\, f$. Luego $\phi(\lambda) = 0$ por la independencia lineal de f y g, i.e. $g = 0$, lo que no es cierto. Luego se contradice (92) y sigue (iii).

(v) Si T es compacto normal lo representamos como en (93), donde $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de autovalores no nulos de T. Si $\phi \in l^{\infty}(\mathbb{C})$ es

$$\phi(T) = \phi(0) \;\; P_{\ker(T)} \bigoplus \bigoplus_{n\geq 1} \phi(\lambda_n) \;\; P_{\ker(T-\lambda_n I)}$$

y, por (i), $\phi(T)$ será compacto sii $\lim_{n\to\infty} \phi(\lambda_n) = 0$.

(vi) Sea $T \in L(H)$ compacto positivo, el que representamos en (93), donde $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subseteq (0, +\infty)$ es la sucesión de autovalores positivos de T. Sea $\phi(z) = 0$ si $z \in \mathbb{C} - \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, $\phi(\lambda_n) = \lambda_n^{1/2}$ si $n \geq 1$. $\phi \in l^{\infty}(\mathbb{C})$ y si $A = \phi(T)$ entonces $A^2 = T$. Como $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \; P_{\ker(T-\lambda_n I)}$ por (v),

A es compacto. Sea $B \in L(H)$ también compacto, positivo y $B^2 = T$. Si $n \geq 1$ y $f_n \in H$, $\|f_n\| = 1$ y $Tf_n = \lambda_n\ f_n$ entonces $B^2 f_n = \lambda_n\ f_n$. Entonces

$$0 = \left(B^2 - \lambda_n I_H\right) f_n = \left(B + \lambda_n^{1/2} I_H\right)\left(B - \lambda_n^{1/2} I_H\right) f_n$$

y, como $-\lambda_n^{1/2} \notin \sigma(B)$ por ser $\sigma(B) \subseteq [0, +\infty)$, i.e.

$$Bf_n = \lambda_n^{1/2} f_n = Af_n$$

y sigue así que $A = B$.

(vii) Sea $T \in L(H)$ compacto y sea A la única raíz cuadrada de T^*T. Como A es autoadjunto si $h \in H$ es

$$\|Th\|^2 = \langle Th, Th\rangle = \langle T^*Th, h\rangle = \left\langle A^2 h, h\right\rangle = \langle Ah, Ah\rangle = \|Ah\|^2. \tag{94}$$

Si $VAf = Tf$, $f \in H$, V está bien definida como sigue de (94) y la linealidad de A y T. Si $g \in \operatorname{cl}\operatorname{ran} A$ definimos $Vg = \text{lím}_{n\to\infty} Tf_n$, donde $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es cualquier sucesión tal que $\{Af_n\}_{n\geq 1}$ converge a g. Precisamente, como $\|Tf_n - Tf_m\| = \|Af_n - Af_m\|$ para $n,\ m \in \mathbb{N}$ existe $\text{lím}_{n\to\infty} Tf_n$. Además, si $\left\{\widetilde{f_n}\right\}_{n\geq 1}$ fuere otra sucesión tal que $\left\{A\widetilde{f_n}\right\}_{n\geq 1}$ converge a g, como $\text{lím}_{n\to\infty}\left(Af_n - A\widetilde{f_n}\right) = 0$ y es válida (94), Vg queda bién definida. Entonces $V : \operatorname{cl}\operatorname{ran} A \to H$ es lineal y con la notación anterior

$$\|Vg\| = \lim_{n\to\infty} \|Tf_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Af_n\| = \|g\|.$$

Sea $U : H \to H$, $Uh = Vh$ si $h \in \operatorname{cl}\operatorname{ran} A$, $Uh = 0$ si $h \in (\operatorname{ran} A)^\perp$. Como $(\operatorname{ran} A)^\perp \subseteq \ker T$ es $(\ker T)^\perp \subseteq \operatorname{cl}\operatorname{ran} A$ y $U\ |_{(\ker T)^\perp}$ deviene isométrica. Más aún, $\ker A \subseteq (\operatorname{ran} A)^\perp$ pues A es simétrica, es decir $\ker T = (\operatorname{ran} A)^\perp$ y $U\ |_{\ker T} = 0$. Por construcción es $UA = T$ y, observada la descomposición $H = \ker T \bigoplus \operatorname{cl}\operatorname{ran} A$, sigue la unicidad de U. $\square$

3.33. Operadores integrales compactos.

(i) Sea μ una medida $\sigma-$ finita sobre un espacio X, $K \in L^2(X \times X, \mu\times\mu)$ y consideremos el operador

$$T_K f(s) = \int_X K(s,t) f(t)\ d\mu(t),\ f \in L^2(X,\mu),\ s \in X.$$

(i)(a) $T_K \in \mathcal{B}\left[L^2(X,\mu)\right]$.

(i)(b) Sea $a_i,\ b_i \in L^2(X,\mu)$ con $1 \leq i \leq n$ y

$$K_1(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s)\ b_i(t),\ \ (s,t) \in X \times X.$$

Entonces $\dim \operatorname{ran}(T_{K_1}) \leq n$.

(i)(c) $T_K \in \mathcal{K}\left[L^2(X,\mu)\right]$.

(i)(d) Si $T_K = (T_K)^*$, $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de autovalores de T_K repetidos tantas veces como su multiplicidad, entonces $\sum_{n\geq 1} |\mu_n|^2 < +\infty$, i.e. $T_K \in \mathcal{L}_2\left[L^2(X,\mu)\right]$ (V. Problema 3.34).

(i)(e) Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ la ecuación $T_K f - \lambda f = g$ admite una única solución para cada $g \in L^2(X,\mu)$ o hay infinitas soluciones para algún único g sin soluciones en los casos restantes.

(i)(f) Determinar $(T_K)^*$.

(ii) Si $X = [0,1]$, para $(s,t) \in X \times X$ definimos

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & si \quad 0 \leq t \leq s, \\ \\ (1-t)s & si \quad s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y consideramos el operador integral $T_K \in \mathcal{B}\left[L^2(X,\mu)\right]$ como en (i), donde ahora μ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

(ii)(a) Determinar $\sigma_p(T_K)$.

(ii)(b) Probar que las autofunciones de T_K forman una base ortogonal de $L^2(X,\mu)$.

(ii)(c) Si $g(t) = \sum_n c_n \ \sin(n\pi t)$ estudiar la ecuación $\left(T_K - \lambda I_{L^2(X,\mu)}\right) f = g$.

(ii)(d) $T_K \mid_{\left(C[0,1], \|\circ\|_\infty\right)}$ es compacto.

(iii) Sea (X,Σ,μ) espacio de medida finita, $1<p<+\infty$, $\kappa : X\times X\to\mathbb{C}$ medible tal que el número extendido

$$\eta=\sup\left\{\left(\int_X |\kappa(x,y)|^q\,d\mu(y)\right)^{1/q}\ :\ x\in X\right\}$$

es finito, donde $1/p+1/q=1$. Entonces la relación

$$T_\kappa f(x)=\int_X \kappa(x,y)\,f(y)\ d\mu(y)\,,\ \ f\in L^p(X,\Sigma,\mu)\,, \tag{95}$$

define un operador compacto entre $L^p(X,\Sigma,\mu)$ y $L^1(X,\Sigma,\mu)$. [42]

Solución

(i)(a) Si $f\in L^2(X,\mu)$, como $K\in L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ por el teorema de Fubini resulta

$$\int_X |K(s,t)|^{\ 2}d\mu(t)<+\infty\quad a.e.\ s\in X.$$

Por la desigualdad de Young deducimos entonces que $T_K f(s)$ existe a.e. $s\in X$. Por las desigualdades de Minkowski y de Young escribimos

$$\begin{aligned}\left(\int_X |T_K f(s)|^2\ \ d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_X\left(\int_X |K(s,t)f(t)|\ \ d\mu(t)\right)^2 d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \int_X |f(t)|\left(\int_X |K(s,t)|^2\ \ d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}} d\mu(t)\\ &\leq \|f\|_{L^2(X,\mu)}\ \ \|K\|_{L^2(X\times X,\mu\times\mu)}\,,\end{aligned}$$

y sigue (iii)(a) con $\|T_K\|\leq\|K\|_{L^2(X\times X,\mu\times\mu)}$.

[42]Si (X,Σ,μ) es espacio de medida σ - finita y $\int_X\left(\int_X |\kappa(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{q/p}d\mu(y)<+\infty$, una aplicación directa de la desigualdad integral de Minkowski y un razonamiento análogo al empleado en (iii) muestran que $T_\kappa\in\mathcal{K}\left[L^p(X,\Sigma,\mu)\right]$.

(i)(b) Si $f \in L^2(X,\mu)$ obtenemos

$$T_{K_1} f(\circ) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\circ) \int_X f(t) b(t) \, d\mu(t),$$

i.e. $\operatorname{ran}(T_{K_1}) \subseteq \operatorname{gen}_{L^2(X,\mu)} \{a_1, \ \ldots \ , \ a_n\}$.

(i)(c) Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ base ortonormal de $L^2(X,\mu)$ y sea

$$e_{ij}(x,y) = e_i(x) \, \overline{e_j(y)}, \ x, \ y \in X, \ i, \ j \in I.$$

Entonces $\{e_{ij}\}_{i,j \in I}$ es base ortonormal de $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. En efecto, por el teorema de Tonelli primero y la desigualdad de Young después, para $i, \ j, \ k, \ h \in I$ tenemos

$$\int_{X \times X} |e_i(x) \ e_j(y) \ e_k(x) \ e_h(y)| \, d(\mu \times \mu) =$$

$$= \int_X |e_i(x) \ e_k(x)| \ d\mu(x) \int_X |e_h(y) \ e_j(y)| \ d\mu(y) \leq 1 < +\infty.$$

Ahora, por el teorema de Fubini deducimos

$$\langle e_{ij}, e_{kh} \rangle = \int_{X \times X} e_i(x) \ \overline{e_j(y)} \ \ \overline{e_k(x)} \ e_h(y) \ d(\mu \times \mu) = \delta_{ik} \ \delta_{hj}$$

y $\{e_{ij}\}_{i,j \in I}$ es un conjunto ortonormal. Si $f \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ y fijamos $j \in I$, por la desigualdad de Minkowski podemos hacer

$$\left(\int_X \left| \int_X f(x,y) e_j(y) \ d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \int_X \left(\int_X |f(x,y)|^2 \ d\mu(x) \right)^{1/2} \ |e_j(y)| \ d\mu(y).$$

Es inmediato que $y \to \left(\int_X |f(x,y)|^2 \ d\mu(x) \right)^{1/2}$ pertenece a $L^2(X,\mu)$ y deducimos que la función $x \to \int_X f(x,y) e_j(y) \ d\mu(y)$ también pertenece a $L^2(X,\mu)$. Ahora, si $f \perp e_{ij}$ para todo $i, \ j \in I$ podemos escribir

$$0 = \langle f, e_{ij} \rangle = \left\langle \int_X f(x,y) e_j(y) \ d\mu(y), e_i(x) \right\rangle.$$

Como $i \in I$ es arbitrario $x \to \int_X f(x,y)e_j(y)\, d\mu\,(y)$ es nula en $L^2\,(X,\mu)$. En consecuencia $\left\langle \overline{f(x,y)}, e_j(y) \right\rangle = 0$ a.e. $x \in X$. Por la completitud de $\{e_i\}_{i\in I}$ deducimos que $f(x,y) = 0$ a.e. $x \in X$, $f = 0$ en $L^2\,(X \times X, \mu \times \mu)$ y $\{e_{ij}\}_{i,j\in I}$ es base. Para $F \in \mathcal{P}_f(I)$ escribiremos P_F a la proyección de $L^2(X,\mu)$ en $\mathrm{gen}_{L^2(X,\mu)}\,\{e_i :\ i \in F\}$ y

$$S_F = T_K P_F + P_F T_K - P_F T_K P_F.$$

Sea $g \in L^2(X,\mu)$, $\|g\|_2 \leq 1$, $g = \sum_{i\in I}\ \alpha_i\ e_i$ y $F \in \mathcal{P}_f(I)$. Entonces

$$\|(T_K - S_F)\, g\|_2^2 = \sum_{i\in I} |\langle (T_K - T_F)\, g,\ e_i\rangle|^2 \tag{96}$$

$$= \sum_{i\in I} \left| \sum_{j\in I} \alpha_j \,\langle (T_K - T_F)\, e_j,\ e_i\rangle \right|^2$$

$$\leq \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} |\langle (T_K - T_F)\, e_j,\ e_i\rangle|^2 .$$

Como $T_K - T_F = (I - P_F) T_K (I - P_F)$ y g es arbitraria en (96) obtenemos

$$\|T_K - S_F\|_2^2 \leq \sum_{i\in I-F}\ \sum_{j\in I-F} |\langle T_K\ e_j,\ e_i\rangle|^2 . \tag{97}$$

Por otra parte,

$$\langle T_K\ e_j,\ e_i\rangle = \int_X \int_X K(x,y) e_j(y)\ d\mu\,(y)\ \overline{e_i(x)}\ d\mu\,(x) = \langle K,\ e_{ij}\rangle \tag{98}$$

para cada $i,\ j \in I$. Como $K \in L^2\,(X \times X, \mu \times \mu)$ por (97) y (98) vemos que $T_K = \lim_{F\in\mathcal{P}_f(I)}\ S_F$, i.e. T_K es límite de operadores de rango finito y por lo tanto es compacto.

(i)(d) Por (98) y la desigualdad de Bessel - Parseval es

$$\|K\|^2_{L^2(X\times X,\mu\times\mu)} \geq \sum_{i,j\in I} |\langle K,\ e_{ij}\rangle|^2 = \sum_{i,j\in I} |\langle T_K\ e_j,\ e_i\rangle|^2 . \tag{99}$$

Si T_K es autoadjunto, $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de autovalores de T_K (cf. [9], Ch. 2, §5, Th. 5.1, Pág. 46) y $\left\{e_1^n,\ \ldots\ ,\ e_{m_n}^n\right\}$ es base ortonormal de $\ker\left(T_K - I_{L^2(X,\mu)}\right)$ para cada n, por (99) es $\sum_{n=1}^{\infty} m_n\ \ |\mu_n|^2 < +\infty$.

(i)(e) Dado un operador compacto T sobre un espacio de Banach E y $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo entonces ran $(T - \lambda I)$ es cerrado y

$$\operatorname{nul}(T - \lambda I) = \operatorname{nul}(T - \lambda I)^* < +\infty$$

(*alternativa de Fredholm,* cf. [9], Ch. VII, §7, 7.9, page 217). En consecuencia $T - \lambda I$ es epimorfismo si y solo si $T - \lambda I$ es monomorfismo.

(i)(f) Razonando como en (iii)(c), si $f \in L^2(X, \mu)$ se obtiene

$$(T_K)^* f(y) = \int_X \overline{K(x, y)}\ g(x)\ d\mu(x).$$

(ii)(a) Supongamos $T_K f = \lambda f$, con $f \in L^2(X, \mu)$ no nula y $\lambda \neq 0$. Como

$$T_K f(s) = (1 - s) \int_0^s t f(t)\ dt + s \int_s^1 (1 - t) f(t)\ dt$$

y $L^2(X, \mu) \subseteq L^1(X, \mu)$ entonces $T_K f$ es absolutamente continua y, por lo tanto, es derivable a.e. (cf. [24], Cap. VII, pág. 384 y ss). Resulta

$$\frac{d(T_K f)}{ds}(s) = \int_s^1 (1 - t) f(t)\ dt - \int_0^s t f(t)\ dt,$$

de modo que $(T_K f)'$ también es absolutamente continua y derivable a.e.. Además

$$\frac{d^2(T_K f)}{ds^2}(s) = -f(s) \qquad a.e.\ s \in X.$$

En consecuencia debe ser

$$\lambda\ \frac{d^2 f}{ds^2} + f = 0\ \ a.e.. \tag{100}$$

Notemos que, aplicando (i)(e), T_K es simétrico, luego $\sigma(T_K) \subseteq \mathbb{R}$ y deberá ser $\lambda \in \mathbb{R}$. La ecuación característica de (100) es $\lambda X^2 + 1 = 0$. Si $\lambda < 0$ la solución general de (100) será de la forma

$$f(s) = \alpha\ \exp\left(s/\sqrt{|\lambda|}\right) + \beta\ \exp\left(-s/\sqrt{|\lambda|}\right),\ \ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Como debe ser $f(0) = 0$ deducimos que $f(s) = 2\alpha\ \operatorname{senh}\left(s/\sqrt{|\lambda|}\right)$. Pero además $f(1) = 0$, i.e. $\alpha = 0$ y $f \equiv 0$ lo que no es posible. Si $\lambda > 0$ la solución general de (100) es

$$f(s) = \gamma\ \exp\left(is/\sqrt{|\lambda|}\right) + \delta\ \exp\left(-is/\sqrt{|\lambda|}\right),\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{C}.$$

Como $f(0) = 0$ entonces $f(s) = -2i\delta\ \sin\left(s/\sqrt{\lambda}\right)$ y, como $f(1) = 0$ entonces $\sin\left(1/\sqrt{\lambda}\right) = 0$ (podemos suponer $\delta \neq 0$). Si $\lambda = 0$ por (100) ha de ser $f \equiv 0$, lo que no es cierto. En consecuencia

$$\sigma_p\left(T_K\right) = \left\{(n\pi)^{-2},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

con $T_K\left(\sin\left(sn\pi\right)\right) = \sin\left(sn\pi\right) / \left(n\pi\right)^2,\ n \in \mathbb{N}$.

(ii)(b) $\int_0^1 \exp\left[i\left(n-m\right)\pi s\right]\ ds = 0$ cuando $n \neq m$ en $\mathbb{N}$. Luego

$$\int_0^1 \cos\left(\left(n-m\right)\pi s\right)\ ds = 0,$$

de donde por integración por partes resulta

$$\int_0^1 \sin\left(n\pi s\right)\ \sin\left(m\pi s\right)\ ds = -\int_0^1 \cos\left(n\pi s\right)\ \cos\left(m\pi s\right)\ ds$$

$$= -\frac{n}{m}\int_0^1 \sin\left(n\pi s\right)\ \sin\left(m\pi s\right)\ ds,$$

i.e. $\langle\sin\left(n\pi s\right),\ \sin\left(m\pi s\right)\rangle = 0$ y el conjunto $\left\{\sin\left(sn\pi\right) / \left(n\pi\right)^2\right\}_{n\geq 1}$ es ortogonal. Este conjunto es base por el teorema de Hilbert - Schmidt, el que es aplicable pues T_K es compacto y simétrico. (cf. [40], Ch. VI, Th. VI. 16, Page 203).

(ii)(c) Sea $\lambda \notin \sigma\left(T\right)$ y $\left(T_K - \lambda I_{L^2(X,\mu)}\right) f = g$, con $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ \sin\left(n\pi t\right)$.

Si $n \in \mathbb{N}$ debe ser

$$c_n/2 = c_n \ \|\sin(n\pi s)\|^2 = \langle g,\ \sin(n\pi s)\rangle \tag{101}$$

$$= \left\langle \left(T_K - \lambda I_{L^2(X,\mu)}\right) f,\ \sin(n\pi s)\right\rangle$$

$$= \left\langle f,\ \sin(n\pi s)\ \ (n\pi)^{-2}\right\rangle - \langle \lambda f,\ \sin(n\pi s)\rangle$$

$$= \left((n\pi)^{-2} - \lambda\right)\langle f,\ \sin(n\pi s)\rangle$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_n}{\left((n\pi)^{-2}-\lambda\right)}\right|^2 \leq 2\ \ [\operatorname{dist}(\lambda,\ \sigma(T_K))]^{-2}\ \ \|g\|_2^2 < +\infty$$

obtenemos en $L^2(X,\mu)$:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{4\left((n\pi)^{-2}-\lambda\right)}\ \sin(n\pi s)\,.$$

Si $\lambda = 0$, por (101) vemos que

$$\operatorname{ran}(T_K) = \left\{ g(t) = \sum_n c_n\ \sin(n\pi t):\ \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |c_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Finalmente, para $n \in \mathbb{N}$ es

$$\operatorname{ran}\left(T_K - (n\pi)^{-2}\right) = \left\{ g \in L^2(X,\mu):\ \langle g(t),\ \sin(n\pi t)\rangle = 0 \right\}.$$

(ii)(d) Es inmediato que $T_K(C(X)) \subseteq C(X)$ pues K deviene uniformemente continua sobre $X \times X$. Además, si $B_{C(X)}$ es la bola cerrada unitaria de $C(X)$, $T_K\left(B_{C(X)}\right) \subseteq B_{C(X)}$ pues $|K(s,t)| \leq 1$ si $s,\ t \in X$. En particular, $\|T_K\| \leq 1$, $T_K \in \mathcal{B}(C(X),\ \|\circ\|_\infty)$ y $T_K\left(B_{C(X)}\right)$ es equiacotado. Ahora, si $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|K(s,t) - K(s',t')| \leq \epsilon$ si $|s-s'| + |t-t'| \leq \delta$, (s,t), $(s',t') \in X \times X$. Si $f \in B_{C(X)}$ y $|s-s'| \leq \delta$ en X tenemos

$$|Tf(s) - Tf(s')| \leq \int_0^1 |(K(s,t) - K(s',t))\ \ f(t)|\ dt \leq \varepsilon,$$

i.e. $T_K\left(B_{C(X)}\right)$ es equicontinuo. Por el teorema de Arzelá $T_K\left(B_{C(X)}\right)$ es relativamente compacto y sigue (ii)(d).

(iii) La función $|\kappa|^q$ es medible sobre $X\times X$ y por el teorema de Tonelli tenemos

$$\int_{X\times X}|\kappa(x,y)|^q\,d(\mu\times\mu)\leq\eta^q\;\mu(X)<+\infty.$$

Por el teorema de Fubini deducimos que $x\to\int_X|\kappa(x,y)|^q\,d\mu(y)$ es medible sobre X. Si $f\in L^p(X,\Sigma,\mu)$, por el teorema de Tonelli y la desigualdad de Cauchy - Schwartz es

$$\int_{X\times X}|\kappa(x,y)\,f(y)|\,d(\mu\times\mu)=\int_X\left(\int_X|\kappa(x,y)\,f(y)|\,d\mu(y)\right)d\mu(x)$$

$$\leq\|f\|_p\int_X\left(\int_X|\kappa(x,y)|^q\,d\mu(y)\right)^{1/q}d\mu(x)\tag{102}$$

$$\leq\|f\|_p\;\eta\;\mu(X)<+\infty.$$

Por el teorema de Fubini (95) define una función integrable $T_\kappa f$ sobre X. Además por (102) es $\|T_\kappa f\|_1\leq\|f\|_p\;\eta\;\mu(X)$ y, como f es arbitraria, $\|T_\kappa\|\leq\eta\;\mu(X)$. Como $L^p(X,\Sigma,\mu)$ es espacio reflexivo, probando que T_κ es completamente continuo deduciremos su compacidad (cf. [9], Ch. VI, §3, Prop. 3.3(b), page 173). Sea entonces $\{g_n\}_{n\geq1}$ una sucesión convergente débilmente a una función g en $L^p(X,\Sigma,\mu)$ y veamos que $\|T_\kappa(g_n-g)\|_1\to0$. En efecto, si $x\in X$ entonces

$$\int_X\kappa(x,y)\,(g_n(y)-g(y))\,d\mu(y)\to0$$

pues por hipótesis $y\to\kappa(x,y)\,,\;y\in X$, pertenece a $L^q(X,\Sigma,\mu)$. Por el teorema de acotación uniforme existe $r>0$ tal que$\|g_n\|_p\leq r$ para todo n. Si $n\in\mathbb{N}$ obtenemos

$$\left|\int_X\kappa(x,y)\,(g_n(y)-g(y))\,d\mu(y)\right|\leq\eta\;\;\|g_n-g\|_p\leq\eta\;\left(r+\|g\|_p\right)$$

y, como X tiene medida finita, basta aplicar el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue. □

3.34. Operadores de Hilbert - Schmidt. Operadores nucleares.

Sea H un espacio de Hilbert separable.

(i) Mostrar que *el álgebra de operadores de Hilbert - Schmidt* $\mathcal{L}_2(H)$ sobre H no es cerrada en $L(H)$ y que, en general, hay operadores compactos no pertenecientes a ella[43]. (V. Problemas 3.44(ii) y 3.33(i)(d)).

(ii) Si $T \in L(H)$ es compacto, T es operador de Hilbert - Schmidt sii $|T|$ lo es, donde $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

(iii) Indicamos $\mathcal{L}_2^{\cdot}(H)$ al álgebra de Banach que resulta al adjuntar una unidad a $\mathcal{L}_2(H)$. Dado $T \in \mathcal{L}_2(H)$ es $\sigma_{L(H)}(T) = \sigma_{\mathcal{L}_2^{\cdot}(H)}(T)$.

(iv) Si $T \in \mathcal{L}_2(H)$, $f \in \mathfrak{X}(T)$ y $f(0) = 0$ entonces $f(T) \in \mathcal{L}_2(H)$. [44]

(v) Si T es un *operador nuclear*[45] sobre H y $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base ortonormal de H entonces $\{\langle Te_n, e_n\rangle\}_{n\geq 1} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n\rangle$ es independiente de la elección de la base ortonormal.[46]

(vi) Si T es un operador lineal acotado son equivalentes: (a) T es nuclear; (b) $|T|$ es nuclear; (c) $|T|^{1/2} \in \mathcal{L}_2(H)$; (d) $\operatorname{tr}|T| < +\infty$.

(vii) Si $T \in \mathcal{L}_1(H)$, $S \in L(H)$ entonces $ST, TS \in \mathcal{L}_1(H)$ y

$$\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS).$$

(viii) Si T es nuclear, positivo y $\operatorname{tr}(T) = 0$ entonces $T = 0$.

(ix) Si $T \in \mathcal{L}_1(H)$, $S \in L(H)$ es $|\operatorname{tr}(ST)| \leq \|S\| \, \|T\|_1$, donde escribimos $\|T\|_1 = \operatorname{tr}(|T|)$.

---

[43]Indicamos $\mathcal{L}_2(H)$ a la subclase de operadores $T \in L(H)$ para los que existe una base ortonormal $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de H tal que $\{\|Tf_n\|\}_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. En particular, puede definirse $\|T\|_2 = \left\| \{\|Tf_n\|\}_{n\geq 1} \right\|_2$, ya que dicha cantidad es independiente de la base considerada. Con las operaciones inducidas por el álgebra $L(H)$ y la norma precedente, $\mathcal{L}_2(H)$ deviene en un álgebra de Banach involutiva no unitaria (cf. [39], Ch. 1, § 1.4, page 54).

[44]V. Problema 3.37.

[45]La clase de *operadores nucleares (o traza),* que denotamos $\mathcal{L}_1(H)$, la forman todos los operadores del tipo BC, con B, $C \in \mathcal{L}_2(H)$.

[46]Por (v) queda definida la *traza* para $A \in \mathcal{L}_1(H)$ mediante $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle$.

(x) Si $T \in \mathcal{L}_1(H)$ entonces $T^* \in \mathcal{L}_1(H)$ y $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$. [47]

(xi) Si $T \in \mathcal{L}_1(H)$, $S \in L(H)$ entonces

$$\|ST\|_1 \leq \|S\| \, \|T\|_1 \quad y \quad \|TS\|_1 \leq \|S\| \, \|T\|_1 .$$

(xii) La clase $R_f(H)$ de operadores de rango finito está contenida en $\mathcal{L}_1(H)$.

Solución

(i) Si T es un operador compacto autoadjunto sobre H, por el teorema espectral es inmediato que $T \in \mathcal{L}_2(H)$ sii la sucesión de autovalores no nulos de T, contados tantas veces como su multiplicidad, pertenece a $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

(ii) Como $\mathcal{L}_2(H)$ es un ideal en $L(H)$ la condición es suficiente (cf. [11], Ch. XV, (15.4.8), page 335). Por otra parte, si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es base ortonormal de H tenemos

$$\|Tf_n\|^2 = \langle Tf_n, Tf_n\rangle = \langle T^*Tf_n, f_n\rangle = \left\langle |T|^2 f_n, f_n\right\rangle = \||T| f_n\|^2 ,$$

de donde sigue la necesidad y, en particular, que $\|T\|_2 = \||T|\|_2$.

(iii) Dado $\lambda \in \rho_{\mathcal{L}_2^{\cdot}(H)}(T)$ existen únicos $S \in \mathcal{L}_2(H)$ y $\mu \in \mathbb{C}$ tales que

$$(S, \mu) \cdot (T, -\lambda) = (T, -\lambda) \cdot (S, \mu) = (0, Id_H).$$

En consecuencia $\lambda \neq 0$, $\mu = -\lambda^{-1}$ y

$$ST - \lambda S - \lambda^{-1}T = TS - \lambda^{-1}T - \lambda S = 0.$$

Escribiendo $V = S - \lambda^{-1} Id_H$ tenemos

$$(T - \lambda Id_H) V = TS - \lambda^{-1}T - \lambda S + Id_H = Id_H,$$

$$V (T - \lambda Id_H) = ST - \lambda S - \lambda^{-1}T + Id_H = Id_H.$$

[47] Si $\mathcal{O}$ es la clase de bases ortonormales de H y $T \in \mathcal{L}_1(H)$,

$$\|T\|_1 = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Tf_n, g_n\rangle| : \ \{f_n\}_{n\geq 1}, \ \{g_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{O}\right\}.$$

Luego $(\mathcal{L}_1(H), \|\circ\|_1)$ es un espacio normado. Más aún, $(\mathcal{L}_1(H), \|\circ\|_1)$ es espacio de Banach en el que el subespacio de operadores de rango finito es denso (V. [17], Ch. I, §2.4, page 47).

Por otra parte, como $\mathcal{L}_2(H)$ es un sub-ideal de $\mathcal{K}(H)$, $0 \notin \rho_{L(H)}(T)$. Dado $\nu \in \rho_{L(H)}(T)$ escribimos $U = \nu^{-1} Id_H + (T - \nu Id_H)^{-1}$. Pero

$$U (T - \nu Id_H) = \nu^{-1} T \Rightarrow U = \nu^{-1} T (T - \nu Id_H)^{-1},$$

i.e. U es operador de Hilbert - Schmidt pues $\mathcal{L}_2(H)$ es un ideal que contiene a T. Así obtenemos

$$(T, -\nu) \cdot \left(U, -\nu^{-1}\right) = \left(U, -\nu^{-1}\right) \cdot (T, -\nu) = (0, 1),$$

i.e. $\nu \in \rho_{\mathcal{L}_2^{\cdot}(H)}$.

(iv) Sea $T \in \mathcal{L}_2(H)$, $f \in \mathfrak{X}(T)$, γ un contorno de Cauchy que contiene al espectro de T en su interior. En (x) hemos observado que

$$z^{-1} Id_H + (T - z Id_H)^{-1} \in \mathcal{L}_2(H)$$

si $z \in \rho_{L(H)}(T)$. Podemos escribir

$$f(T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[f(z) (T - z Id_H)^{-1} + z^{-1} Id_H \right] dz + f(0) Id_H.$$

Si $f(0) = 0$, como $\mathcal{L}_2(H)$ es cerrado, sigue la afirmación.

(v) Sea $A \in \mathcal{L}_1(H)$, $A = C^* \circ B$, con B y C operadores de Hilbert - Schmidt. En primer lugar, si $\{e_n\}_{n \geq 1}$ es base ortonormal de H basta observar para cada n la desigualdad

$$|\langle A e_n, e_n \rangle| = |\langle B e_n, C e_n \rangle| \leq \|B e_n\| \|C e_n\| \leq \left(\|B e_n\|^2 + \|C e_n\|^2 \right)/2.$$

Además

$$\|(B - C) e_n\|^2 = \|B e_n\|^2 + \|C e_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle A e_n, e_n \rangle,$$

de donde

$$\|B - C\|_2^2 = \|B\|_2^2 + \|C\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle,$$

es decir $\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle$ es independiente de la base. Como $-iA$ es también operador traza y

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \langle (-iA)(i e_n), i e_n \rangle = \operatorname{Re} \left(-i \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle \right) = \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle$$

entonces $\operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle$ tampoco depende de la base.

(vi) Si $T \in L(H)$ escribimos $T = U|T|$, donde U es una isometría sobre $(\ker(T))^{\perp}$ y $\ker(T) \subseteq \ker(U)$ (V. Problema 3.32(vii)). Dado $g \in H$, como $H = (\operatorname{ran}|T|)^{\perp} \bigoplus \operatorname{cl}\operatorname{ran}|T|$, hay una sucesión $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq H$ y $\widetilde{g} \in (\operatorname{ran}|T|)^{\perp}$ tales que $g = \widetilde{g} + \text{lím}_{n\to+\infty} |T| g_n$. Si $f \in H$ obtenemos

$$\langle U^*Tf, g\rangle = \langle Tf, Ug\rangle \tag{103}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \langle Tf, Tg_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle |T|^2 f, g_n\right\rangle$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \langle |T| f, |T| g_n\rangle = \langle |T| f, g - \widetilde{g}\rangle = \langle |T| f, g\rangle,$$

y como $f,\ g$ son arbitrarios tenemos $|T| = U^*T$. Si $T \in \mathcal{L}_1(T)$ escribimos $T = AB,\ A,\ B \in \mathcal{L}_2(H)$. En consecuencia

$$|T| = U^*(AB) = (U^*A)B,\ U^*A,\ B \in \mathcal{L}_2(H)$$

y $(a) \Rightarrow (b)$. Ahora, sea $|T| = D^*C,\ C,\ D$ operadores de Hilbert - Schmidt, $\{e_n\}_{n\geq 1}$ base ortonormal de H. Para cada n es

$$\left\| |T|^{1/2} e_n \right\|^2 = \langle |T| e_n, e_n\rangle = \langle Ce_n, De_n\rangle \tag{104}$$

$$\leq \|Ce_n\| \, \|De_n\| \leq \left(\|Ce_n\|^2 + \|De_n\|^2\right)/2,$$

i.e. $\left\{\left\| |T|^{1/2} e_n \right\|\right\}_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ y $(b) \Rightarrow (c)$. Claramente $(c) \Rightarrow (b)$ y de las igualdades en (104) sigue $(c) \Leftrightarrow (d)$. Finalmente, de la representación polar de T se deduce $(b) \Rightarrow (a)$.

(vii) V. [17], Ch. I, §2.3, Lemma 4, page 41.

(viii) Sigue del teorema de representación espectral de T.

(ix) Sean $S \in L(H)$, T nuclear. Como $|T|$ es compacto positivo existe $\{e_n\}_{n\geq 1}$ base ortonormal de H y $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ sucesión de autovalores de $|T|$ (repetidos tantas veces como su multiplicidad) tal que $|T| e_n = \rho_n e_n$ para cada n (cf. [42], Ch. 12, Th. 12.29, page 312). Como $T = U|T|$, donde U es una isometría sobre $(\ker(T))^{\perp}$ y $\ker(T) \subseteq \ker(U)$, tenemos

$$|\operatorname{tr}(ST)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle STe_n, e_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle |T| e_n, (SU)^* e_n\rangle|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\langle e_n, (SU)^* e_n\rangle| \leq \|SU\| \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \leq \|S\| \|T\|_1 .$$

(x) Claramente T^* es nuclear si T lo es, en cuyo caso $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$. En efecto, por (103) es $\langle U^*U|T|f, g\rangle = \langle |T| f, g\rangle$ para cualesquiera $f, \ g \in H$, i.e. $U^*U = P_{\operatorname{ran}|T|}$. En consecuencia $(U|T|U^*)^2 = TT^*$, i.e. $U|T|U^* = |T^*|$. Si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base ortonormal de H obtenemos

$$\|T^*\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T| U^*e_n, U^*e_n\rangle \leq \|T\|_1$$

y, por simetría, sigue la afirmación.

(xi) Sean $T \in \mathcal{L}_1(H)$, $S \in L(H)$, U, V isometrías parciales tales que $ST = U|ST|$ y $T = V|T|$. Como $|T|$ es compacto positivo hay una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ asociada a la sucesión de autovalores $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ del mismo. Razonando como en (vi) obtenemos

$$\|ST\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |ST| e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle U^*STe_n, e_n\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle SV|T| e_n, Ue_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \ \langle SVe_n, Ue_n\rangle \leq \|S\| \|T\|_1 .$$

Ahora por (x) es $\|TS\|_1 = \|S^*T^*\|_1 \leq \|S^*\| \|T^*\|_1 = \|S\| \|T\|_1$.

(xii) Dados $g, h \in H$ sea $\left(g \bigotimes h\right) f = \langle f, h\rangle g, \ f \in H$. Bastará ver que $g \bigotimes h \in \mathcal{L}_1(H)$. Como $(g \bigotimes h)^* = h \bigotimes g$ es

$$\left|g \bigotimes h\right|^2 = \|g\|^2 \cdot h \bigotimes h$$

y los autovalores de este operador compacto positivo son cero y $\|g\|^2\|h\|^2$ de modo que $\left|g\bigotimes h\right| = \|g\|\,\|h\|\,P_{\mathbb{C}h}$, i.e. tr $\left(g\bigotimes h\right) = \|g\|\,\|h\|$ y sigue la afirmación. $\square$

3.35. Propiedades espectrales de límites de operadores compactos.

Sea E espacio de Banach complejo de infinitas dimensiones, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de operadores compactos que converge en $\mathcal{L}(E)$ a un operador u.

(i) Para cada subconjunto acotado A de E el conjunto $\widetilde{A} = \bigcup_{n\geq 1} u_n(A)$ es relativamente compacto.

(ii) Si $\lambda \notin \sigma(u)$ existe $r > 0$ y un entero positivo n_0 tal que para $n \geq n_0$ es $\overline{D}(\lambda, r) \cap \sigma(u_n) = \emptyset$ y $(u_n - \zeta I_E)^{-1} \overset{\circ}{\to} (u - \zeta I_E)^{-1}$ sobre $\overline{D}(\lambda, r)$.

(iii) Sea $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $\lambda_n \in \sigma(u_n)$ para cada n. Si λ es punto adherente de $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ entonces $\lambda \in \sigma(u)$.

(iv) Si $\lambda \in \sigma(u) - \{0\}$ existe $s > 0$ tal que $\overline{D}(\lambda, s) \cap \sigma(u) = \{\lambda\}$ y para toda sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\geq 1}$ de enteros positivos es $\overline{D}(\lambda, s) \cap \sigma\left(u_{n_j}\right) \neq \emptyset$ salvo un número finito de $j's$.

(v) Si $\lambda \in \sigma(u) - \{0\}$ existen $t > 0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\overline{D}(\lambda, t) \cap \sigma(u) = \{\lambda\}$ y $\partial\overline{D}(\lambda, t) \cap \sigma(u_n) = \emptyset$ si $n \geq n_1$.

Solución

(i) Sea $\varepsilon > 0$, $R > 0$ tal que $A \subseteq B(0, R)$ y $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon/(3R) \quad si \quad n,\ m \geq \widehat{n}.$$

Como $u(A)$ es totalmente acotado sea $F \in \mathcal{P}_f(A)$ tal que

$$u(A) \subseteq \bigcup_{f\in F} B\left(u(f), \varepsilon/3\right).$$

Dado $g \in A$ sea $f \in F$ tal que $\|u(f) - u(g)\| < \varepsilon/3$. Si $n > \widehat{n}$ escribimos

$$\|u_{\widehat{n}}(f) - u_n(g)\| \leq \|(u_{\widehat{n}} - u)(f)\| + \|u(f - g)\| + \|(u - u_n)(g)\|$$

$$\leq \|u_{\widehat{n}} - u\|\,\|f\| + \varepsilon/3 + \|u - u_n\|\,\|g\| \leq \varepsilon,$$

i.e. $\bigcup_{n>\widehat{n}} u_n(A) \subseteq \bigcup_{f\in F} B\left(u_{\widehat{n}}(f), \varepsilon/3\right)$. Como $\bigcup_{n=1}^{\widehat{n}} u_n\left(A\right)$ es totalmente acotado concluímos que $\widetilde{A}$ también lo es. Por la completitud de E sigue (i).

(ii) Como $u_\lambda = u - \lambda I_E$ es inversible existe $r > 0$ tal que

$$\overline{B}\left(u_\lambda,\ 2r\right) \subseteq \mathrm{U}\left(\mathcal{L}\left(E\right)\right).$$

Sea $n_{00} \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u_n\| \leq r$ para $n \geq n_{00}$. Si $|\lambda - \zeta| \leq r$ y $n \geq n_{00}$ tenemos

$$\|u_{n,\zeta} - u_\lambda\| \leq \|u - u_n\| + |\lambda - \zeta| \leq 2r,$$

i.e. $\overline{D}\left(\lambda, r\right) \cap \sigma\left(u_n\right) = \emptyset$. Puesto que

$$u_{n,\zeta}^{-1} - u_\zeta^{-1} = u_{n,\zeta}^{-1} \circ \left(u - u_n\right) \circ u_\zeta^{-1}$$

obtenemos

$$\left\|u_{n,\zeta}^{-1} - u_\zeta^{-1}\right\| \leq \left\|u_{n,\zeta}^{-1}\right\| \|u - u_n\| \left\|u_\zeta^{-1}\right\|. \tag{105}$$

Por la continuidad de la aplicación resolvente

$$R_u : \rho\left(u\right) \to \mathrm{U}\left(\mathcal{L}\left(E\right)\right),\ R_u\left(\zeta\right) = u_\zeta^{-1},\ \zeta \in \rho\left(u\right),$$

y por la compacidad de $\overline{D}\left(\lambda, r\right)$ existe $K > 0$ tal que $\left\|u_\zeta^{-1}\right\| \leq K$ si $|\zeta - \lambda| \leq r$. Sea $0 < \theta < 1$ y $n_0 \geq n_{00}$ tal que $\|u_n - u\| < \theta/K$ para $n \geq n_0$. En tal caso escribimos

$$\begin{aligned}
\left\|u_{n,\zeta}^{-1}\right\| &= \left\|u_\zeta^{-1} \circ \left(\left(u_n - u\right) \circ u_\zeta^{-1} + I_E\right)^{-1}\right\| \qquad (106)\\
&\leq \left\|u_\zeta^{-1}\right\| \left\|\left(\left(u_n - u\right) \circ u_\zeta^{-1} + I_E\right)^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|u_\zeta^{-1}\right\| \sum_{m=0}^{\infty} \left\|\left(\left(u_n - u\right) \circ u_\zeta^{-1}\right)^m\right\| \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|u_n - u\|^m \left\|u_\zeta^{-1}\right\|^{m+1} \leq K/\left(1 - \theta\right).
\end{aligned}$$

Por (105) y (106), para $n \geq n_0$ y $|\zeta - \lambda| \leq r$ tenemos

$$\left\| u_{n,\zeta}^{-1} - u_{\zeta}^{-1} \right\| \leq K^2 / (1-\theta) \ \| u - u_n \|$$

y sigue (ii).

(iii) Podemos suponer $\lambda \neq 0$ y $\lambda = \text{lím}_{n\to\infty} \lambda_n$. Más aún, para cada n existe $f_n \in E$ unitario tal que $u_n(f_n) = \lambda_n \ f_n$. Por (i), hay una subsucesión $\{u_{n_k}(f_{n_k})\}_{k\geq 1}$ de $\{u_n(f_n)\}_{n\geq 1}$ convergente a un elemento $g \in \text{cl}\left[\bigcup_{n\geq 1} u_n(B_E)\right]$, donde B_E es la bola cerrada unitaria de E. Luego $g/\lambda = \text{lím}_{k\to\infty}\left[u_{n_k}(f_{n_k})/\lambda_{n_k}\right]$, i.e. $f_{n_k} \to g/\lambda$. Por lo tanto $u(g)/\lambda = g$ y λ es autovalor de u.

(iv) Escribiremos $E = F(\lambda) \bigoplus N(\lambda)$, donde $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ son subespacios cerrados $u-$ invariantes y sea $\kappa = \kappa(u,\lambda)$ entero positivo mínimo tal que $u_\lambda^\kappa \mid_{N(\lambda)} = 0$ (cf. [12], Cap. XI, §4, (11.4.1), pág. 316). Indicaremos u_1 y u_2 a las restricciones de u a $F(\lambda)$ y $N(\lambda)$ respectivamente. En particular, $u_{1,\lambda} \in \mathrm{U}(F(\lambda))$ y, para $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\zeta - \lambda| < \left\| u_{1,\lambda}^{-1} \right\|^{-1}$, se puede escribir

$$u_\zeta^{-1} = u_{1,\zeta}^{-1} + u_{2,\zeta}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1,\lambda}^{-n-1} \ (\zeta - \lambda)^n - \sum_{n=1}^{\kappa} \frac{u_{2,\lambda}^{n-1}}{(\zeta-\lambda)^n}. \tag{107}$$

Sea $\lambda \in \sigma(u) - \{0\}$, $0 < s < \left\| u_{1,\lambda}^{-1} \right\|^{-1}$ tal que

$$\overline{D}(\lambda, s) \cap \sigma(u) = \{\lambda\}.$$

Supongamos existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\geq 1}$ de enteros positivos tal que $\overline{D}(\lambda, s) \cap \sigma(u_{n_j}) = \emptyset$ para cada j. Dado $j \geq 1$ resulta

$$\int_{|\zeta-\lambda|=s} \left(u_{n_j} - \zeta I_E\right)^{-1} \ (\zeta-\lambda)^{\kappa-1} \ d\zeta = 0. \tag{108}$$

Por otra parte, reemplazando n por n_j en (105) y $\overline{D}(\lambda, r)$ por $\partial\overline{D}(\lambda, s)$ en (106) tenemos $\left(u_{n_j} - \zeta I_E\right)^{-1} \overset{\circ}{\to} (u - \zeta I_E)^{-1}$ sobre $\partial\overline{D}(\lambda, s)$. Haciendo $j \to +\infty$ en (108) resulta

$$0 = \int_{|\zeta-\lambda|=s} (u - \zeta I_E)^{-1} \ (\zeta - \lambda)^{\kappa-1} \ d\zeta \tag{109}$$

Por (107) y (109) obtenemos

$$0 = -\sum_{n=1}^{\kappa} u_{2,\lambda}^{n-1} \int_{|\zeta-\lambda|=s} (\zeta-\lambda)^{\kappa-n-1} \; d\zeta = -2\pi i \; u_{2,\lambda}^{\kappa-1}.$$

Pero $u_{2,\lambda}^{\kappa-1} \neq 0$ por el carácter mínimo de κ y sigue la afirmación.

(v) Si $\lambda \in \sigma(u) - \{0\}$ sea $t > 0$ tal que $\overline{D}(\lambda, t) \cap \sigma(u) = \{\lambda\}$. Si para infinitos $n's$ fuere $\partial\overline{D}(\lambda, t) \cap \sigma(u_n) \neq \emptyset$ habría una sucesión estrictamente creciente $(n_p)_{p\geq 1}$ de enteros positivos tal que $u_{n_p}(f_p) = \mu_p \; f_p$, con $|\lambda - \mu_p| = t$ y $\|f_p\| = 1$ para cada p. Por la compacidad de la circunferencia, pasando eventualmente a una subsucesión de $(n_p)_{p\geq 1}$, podemos suponer que existe $\mu = \lim_{p\to\infty} \mu_p$. Por (iii) resulta $\mu \in \sigma(u)$ y $|\lambda - \mu| = t$, lo que no es posible. $\square$

3.36. Puntos y operadores de Riesz.

Sea E espacio de Banach complejo, $u \in \mathcal{L}(E)$.

(i) Si $\lambda_1,\ \lambda_2$ son *puntos de Riesz*[48] distintos de u entonces $N(\lambda_1) \subseteq F(\lambda_2)$ y $F(\lambda_2) = N(\lambda_1) \bigoplus (F(\lambda_1) \cap F(\lambda_2))$.

(ii) Sea u es *operador de Riesz*[49], $\varepsilon > 0$. Entonces $F_\varepsilon = \{\lambda \in \sigma(u) : \ |\lambda| \geq \varepsilon\}$ es finito. Sea p_λ la proyección de E sobre $N(\lambda)$, $\lambda \in F_\varepsilon$. Si

$$v_\varepsilon = u \circ \left(I_E - \sum_{\lambda \in F_\varepsilon} p_\lambda \right)$$

entonces $\sigma(v_\varepsilon) \subseteq \overline{D}(0, \varepsilon)$ y, en consecuencia, $r_{sp}(v_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

(iii) Si $\mathcal{K}(E)$ es la clase de operadores compactos sobre E y u es un operador de Riesz sobre E entonces $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(u^n, \mathcal{K}(E))^{1/n} = 0$.

Solución

[48] Un *punto de Riesz* de u es un elemento aislado $\lambda \in \sigma(u)$ tal que: es posible representar E como suma directa de subespacios $N(\lambda)$ y $F(\lambda)$, ambos $u-$ invariantes. Además $F(\lambda)$ es cerrado, $N(\lambda)$ es finito dimensional y, si $u_\lambda = u - \lambda I_E$, entonces $u_\lambda \mid_{N(\lambda)}$ es nilpotente y $u_\lambda \mid_{F(\lambda)}$ es homeomorfismo.

[49] *Operador de Riesz* es todo elemento de $\mathcal{L}(E)$ tal que todo elemento no nulo de su espectro es punto de Riesz.

(i) Sean $\lambda_1,\ \lambda_2$ puntos de Riesz distintos de u, $f \in N(\lambda_1)$. Hay únicos $f_1 \in N(\lambda_2)$, $f_2 \in F(\lambda_2)$ tales que $f = f_1 + f_2$. Existe un entero positivo κ_{λ_2} tal que $u_{\lambda_2}^{\kappa_{\lambda_2}} \mid_{N(\lambda_2)} = 0$, de modo que $u_{\lambda_2}^{\kappa_{\lambda_2}} f = u_{\lambda_2}^{\kappa_{\lambda_2}} f_2$ en $F(\lambda_2)$. Como $u_{\lambda_2} \mid_{F(\lambda_2)}$es homeomorfismo $f = f_2$ y $f \in F(\lambda_2)$, o sea $N(\lambda_1) \subseteq F(\lambda_2)$. Luego (i) sigue enseguida.

(ii) De (i) sigue que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son puntos de Riesz distintos de u entonces

$$E = \left(N(\lambda_1) \bigoplus \ldots \bigoplus N(\lambda_n)\right) \bigoplus \bigcap_{j=1}^{n} F(\lambda_j).$$

Si $\varepsilon > 0$ podemos escribir entonces $v_\varepsilon = u \circ P_{\mathcal{F}_\varepsilon}$, donde $\mathcal{F}_\varepsilon = \cap_{\lambda \in F_\varepsilon} F(\lambda)$. Sea $|\zeta| > \varepsilon$, $h \in E$ y consideremos la ecuación $v_{\varepsilon,\zeta} g = h$. *A fortiori* debe ser $g = P_{\mathcal{N}_\varepsilon} g + P_{\mathcal{F}_\varepsilon} g$, con $\mathcal{N}_\varepsilon = \bigoplus_{\lambda \in F_\varepsilon} N(\lambda)$. En consecuencia

$$h = (u - \zeta I_{\mathcal{F}_\varepsilon}) P_{\mathcal{F}_\varepsilon} g - \zeta P_{\mathcal{N}_\varepsilon} g,$$

y deberá ser $P_{\mathcal{N}_\varepsilon} g = -\zeta^{-1} P_{\mathcal{N}_\varepsilon} h$. Notando que $u_\zeta \mid_{\mathcal{F}_\varepsilon} \mathrm{U}(\mathcal{L}(\mathcal{F}_\varepsilon))$ obtenemos $v_{\varepsilon,\zeta} \in \mathrm{U}(\mathcal{L}(E))$ y $v_{\varepsilon,\zeta}^{-1} = (u_\zeta \mid_{\mathcal{F}_\varepsilon})^{-1} P_{\mathcal{F}_\varepsilon} - \zeta^{-1} P_{\mathcal{N}_\varepsilon}$.

(iii) Dado $\varepsilon > 0$, por (ii) podemos escribir $u = v_\varepsilon + w_\varepsilon$, donde w_ε es un operador de rango finito y $r_{sp}(v_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Entonces para cada entero positivo n es $u^n = v_\varepsilon^n + w(\varepsilon, n)$, con $w(\varepsilon, n) \in \mathcal{K}(E)$ y

$$\operatorname{dist}(u^n, \mathcal{K}(E)) \leq \|u^n - w(\varepsilon, n)\| \leq \|v_\varepsilon^n\|.$$

Luego

$$\overline{\text{lím}}_{n\to\infty} \operatorname{dist}(u^n, \mathcal{K}(E))^{1/n} \leq r_{sp}(v_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

y por ser ε arbitrario sigue la afirmación. □

3.37. Sobre el cálculo funcional de Dunford - Riesz.

(i) Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach unitaria, $b \in \mathcal{B}$ nilpotente. Caracterizar las funciones $f \in \mathfrak{X}(b)$ tales que $f(b) = 0$. [50]

(ii) Sea $d \in \mathbb{N}$, $T \in L(\mathbb{C}^d)$. Caracterizar los elementos $f \in \mathfrak{X}(T)$ tales que $f(T) = 0$.

[50] En este problema, $\mathfrak{X}(b)$ es la clase de funciones analíticas en un entorno de $\sigma(b)$. Si $g \in \mathfrak{X}(b)$, $g(b)$ es el elemento de $\mathcal{B}$ asociado por el cálculo funcional de Riesz (también conocido como cálculo de Dunford, v. [15]) a b y g.

(iii) Con la notación de (i), si $f \in \mathfrak{X}(b)$ y $g \in \mathfrak{X}(f(b))$ entonces $g \circ f \in \mathfrak{X}(b)$ y $(g \circ f)(b) = g(f(b))$.

(iv) Sea X espacio compacto y consideremos el espacio de funciones continuas complejas sobre X, $C(X)$, con la estructura de espacio de Banach usual. Si $f \in C(X)$, $F \in \mathfrak{X}(f)$, entonces $F(f) = F \circ f$ en $C(X)$.

(v) Si E es un espacio de Banach, $T \in L(E)$ y $f \in \mathfrak{X}(T)$ entonces

$$f(T)^* = \widetilde{f}(T^*),$$

donde $\widetilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para cada z tal que $\overline{z}$ pertenece al dominio de f.

(vi) Si H es espacio de Hilbert y $A \in L(H)$ es normal entonces $f(A)$ es normal para todo $f \in \mathfrak{X}(A)$.

(vii) Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra con unidad e, p, $q \in \mathcal{A}$ proyectores tales que $p + q = e$, a, $b \in \mathbb{C}$, $n = ap + bq$. Entonces n es normal y si $f \in \mathfrak{X}(n)$ es $f(n) = f(a)p + f(b)q$.

Solución

(i) Sea $b \in \mathcal{B}$ nilpotente, $f \in \mathfrak{X}(b)$ tal que $f(b) = 0$. Entonces $\sigma(b) = \{0\}$ y, por el teorema espectral,

$$\{0\} = \sigma(0) = \sigma(f(b)) = f(\sigma(b)) = f(\{0\}) = \{f(0)\},$$

i.e. $f(0) = 0$. Si 0 tiene multiplicidad $m \in \mathbb{N}$ como raíz de f se puede escribir $f(z) = z^m\ g(z)$, con g analítica en una vecindad de cero y $g(0) \neq 0$. Ahora $0 = f(b) = b^m\ g(b)$. Si $g(b) = 0$ sería, por el mismo razonamiento anterior, $g(0) = 0$, lo que no es cierto. Entonces $g(b) \neq 0$ y $\sigma(g(b)) = g(\sigma(b)) = \{g(0)\}$, i.e. $g(b) \in \mathrm{U}(\mathcal{B})$. Luego $b^m = 0$ y, en consecuencia, m es no menor que el índice de nilpotencia de b. En definitiva, si n denota tal índice y $f \in \mathfrak{X}(b)$, podemos concluir que $f(b) = 0$ sii f tiene en cero una raíz de multiplicidad $\geq n$.

(ii) Consideremos la forma de Jordan de T (cf. [27], Cap. 10, pág. 226). Esta forma es una entre un número finito de posibles representaciones matriciales diagonales por bloques de T, digamos

$$J_\nu(T) = [J_{\nu,1}\ ,\ \dots\ ,\ J_{\nu,s_\nu}],$$

donde $\nu \in \mathbb{N}$ está determinado por T. Fijemos una tal representación, es decir, una posible forma canónica de Jordan. Cada $J_{\nu,l}$ es una matriz cuadrada con un escalar fijo en la diagonal y unos en la diagonal superior paralela a la diagonal principal. Luego podemos escribir $J_{\nu,l} = \lambda_{\nu,l} I + \mathfrak{N}_{\nu,l}$, con $\lambda_{\nu,l} \in \mathbb{C}$ y $\mathfrak{N}_{\nu,l}$ una matriz idempotente (bloque de Jordan correspondiente al valor propio $\lambda_{\nu,l}$ de T). Si $f \in \mathfrak{X}(T)$ tenemos

$$f\left(\left[J_{\nu,1}\ ,\ \ldots\ ,\ J_{\nu,s_\nu}\right]\right) = \left[f\left(J_{\nu,1}\right)\ ,\ \ldots\ ,\ f\left(J_{\nu,s_\nu}\right)\right].$$

En consecuencia, si $f(T) = 0$ ha de ser $f\left(J_{\nu,l}\right) = 0,\ 1 \leq l \leq s_\nu$. Más generalmente, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{N}$ es un idempotente con índice de nilpotencia κ y $F : U \to \mathbb{C}$ es una función analítica en un entorno de λ, $F(\lambda I + \mathfrak{N}) = 0$ sii F tiene en λ un cero de multiplicidad $\geq \kappa$. En efecto, es inmediato que la condición es suficiente. Además, si $\mu \neq 0$,

$$(\mathfrak{N} - \mu I)^{-1} = -\sum_{j=0}^{\kappa-1} \mu^{-j-1} \mathfrak{N}^j$$

y, por el teorema espectral, $\sigma(\lambda I + \mathfrak{N}) = \{\lambda\}$. Si $\varepsilon > 0$ es tal que $\overline{D}(\lambda, \varepsilon) \subseteq U$ obtenemos

$$F(\lambda I + \mathfrak{N}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=\varepsilon} F(z)\left(zI - (\lambda I + \mathfrak{N})\right)^{-1}\ dz$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=\varepsilon} \frac{F(z)}{(z-\lambda)^{j+1}}\ dz\right) \mathfrak{N}^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{F^{(j)}(\lambda)}{j!}\ \mathfrak{N}^j = T_{\kappa-1}(F, \lambda)(\mathfrak{N}),$$

donde $T_{\kappa-1}(F, \lambda)$ es el polinomio de Taylor de F en λ de grado $\kappa - 1$. En consecuencia, si $F(\lambda I + \mathfrak{N}) = 0$ entonces $\mathfrak{N}$ es anulado por $T_{\kappa-1}(F, \lambda)$. Como el polinomio minimal de $\mathfrak{N}$ tiene grado κ debe ser $T_{\kappa-1}(F, \lambda) = 0$ y sigue la necesidad. Concluímos entonces: si $f \in \mathfrak{X}(T)$, $f(T) = 0$ sii los autovalores de T son ceros de f, cuya multiplicidad es no menor que la de cada autovalor como raíz del polinomio minimal de T.

(iii) Sean $f \in \mathfrak{X}(b)$, $g \in \mathfrak{X}(f(b))$, V entorno de $\sigma(b)$ y W entorno de $\sigma(f(b))$ sobre los que f y g son analíticas respectivamente. Entonces $g \circ f : V \cap f^{-1}(W) \to \mathbb{C}$ es analítica y $V \cap f^{-1}(W)$ es entorno de $\sigma(b)$, i.e. $g \circ f \in \mathfrak{X}(b)$. Sea $\Omega = \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *un sistema positivamente orientado de curvas rectificables infinitamente diferenciables* (*spocrid*) en $W - \sigma(f(b))$ tal que $n(\Omega, w) = 1$ si $w \in \sigma(f(b))$ y $n(\Omega, w) = 0$ si $w \notin W$ (cf. [8], page 195).[51]Entonces

$$g(f(b)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega g(w) (we - f(b))^{-1} \, dw, \tag{110}$$

donde e es el elemento neutro de $\mathcal{B}$. Análogamente, sea $\Gamma = \{\gamma_j\}_{1 \leq j \leq m}$ un spocrid en $V \cap f^{-1}(W - \cup\Omega)$ tal que $n(\Gamma, z) = 1$ si $z \in \sigma(b)$ y $n(\Gamma, z) = 0$ si $z \notin V \cap f^{-1}(W - \cup\Omega)$. Para cada $w \in \cup\Omega$ es

$$(we - f(b))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (w - f(z))^{-1} (ze - b)^{-1} \, dz. \tag{111}$$

Notando que $z \to (ze - b)^{-1}$ es continua sobre $V \cap f^{-1}(W - \cup\Omega) - \sigma(b)$ y que $\cup\Gamma \times \cup\Omega$ es compacto la función continua

$$(z, w) \to g(w) (w - f(z))^{-1} (ze - b)^{-1}$$

deviene uniformemente acotada para $(z, w) \in \cup\Gamma \times \cup\Omega$. Finalmente, por (110), (111), el teorema de Fubini y la fórmula integral de Cauchy

[51]Como es usual, $n(\gamma, w)$ indica el índice de una curva γ respecto a un punto $w \notin \gamma$, dado por la integral

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - w}.$$

Con la notación de (ii) se define

$$n(\Omega, w) = \sum_{j=1}^{n} n(\omega_j, w), \; w \notin \cup_{j=1}^{n} \omega_j,$$

y Ω se dice que es *un sistema positivamente orientado* si $n(\Omega, w) = 0$ o 1 para cada w.

obtenemos

$$g(f(b)) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Omega g(w)\int_\Gamma (w - f(z))^{-1}(ze-b)^{-1}\ dz\ dw$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma (ze-b)^{-1}\int_\Omega g(w)(w-f(z))^{-1}\ dw\ dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (ze-b)^{-1} g(f(z))\ dz = (g\circ f)(b).$$

(iv) Sea $f \in C(X),\ F \in \mathfrak{X}(f),\ x \in X$. Notamos que $\sigma(f) = f(X)$ y, para $z \notin \sigma(f),\ (z\,1 - f)^{-1}(x) = (z - f(x))^{-1}$, donde 1 indica la función constante $\equiv 1$. Si Ψ es un spocrid respecto al dominio de F y a $\sigma(f)$ sigue (iii):

$$F(f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Psi F(z)(z\,1-f)^{-1}\ dz\right)(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Psi F(z)(z-f(x))^{-1}\ dz = F(f(x)).$$

(v) Si $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ indicaremos $\Delta^* = \{\overline{z}:\ z\in\Delta\}$. Como $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$, dada $f \in \mathfrak{X}(T)$ es fácil ver que $\widetilde{f} \in \mathfrak{X}(T^*)$. Ahora, si $\Xi = \{\eta_s\}_{1\le s\le l}$ es un spocrid respecto al dominio de f y a $\sigma(T)$, digamos $\Xi^* = \{\eta_s^*\}_{1\le s\le l}$, entonces

$$\widetilde{f}(T^*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi^*}\overline{f(\overline{z})}(zI_{E^*} - T^*)^{-1}\ dz$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi^*} f(\overline{z})(\overline{z}I_E - T)^{-1}\ d(-\overline{z})\right)^*$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi} f(w)(wI_E - T)^{-1}\ dw\right)^* = f(T)^*.$$

(vi) Sea $A \in L(H)$ normal, $f \in \mathfrak{X}(A)$. Si $\Phi = \{\phi_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es un spocrid respecto al dominio de f y a $\sigma(A)$ entonces $f(A) = f_1(A) + ... + f_n(A)$, donde

$$f_k(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_k} f(z) \ (zI_H - A)^{-1} dz, \ 1 \leq k \leq n.$$

Podemos suponer que $f_1(A)$, ... , $f_n(A)$ conmutan entre sí y probar que cada uno de estos operadores es normal. [52]Sea

$$F(z) = f(z) \ (zI_H - A)^{-1}, \ z \in \phi_k$$

y $a_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una parametrización de ϕ_k, $1 \leq k \leq n$. Fijados k y $x \in H$ es

$$\|f_k(A)x\|^2 = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 F(a_k(t))\, x \ da_k(t) \right\|^2 \tag{112}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{|\pi| \to 0} \|S_\pi((F \circ a_k)\, x, a_k)\|^2,$$

donde $S_\pi((F \circ a_k)\, x, a_k)$ indica sumas de Stieltjes respecto a una partición π de $[0,1]$. Fijada $\pi = \{t_j\}_{0 \leq j \leq n_\pi}$ podemos escribir

$$S_\pi((F \circ a_k)\, x, a_k) = \sum_{j=1}^{n_\pi} F(a_k(\tau_j))\, x \ (a_k(t_j) - a_k(t_{j-1})),$$

con $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$, $1 \leq j \leq n_\pi$. Indicando para tales índices

$$\Delta z_j = a_k(t_j) - a_k(t_{j-1}), \ \xi_j = a_k(\tau_j)$$

tenemos

$$\|S_\pi((F \circ a_k)\, x, a_k)\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n_\pi} f(\xi_i) \ \overline{f(\xi_j)} \ \Delta z_i \ \Delta \overline{z_j} \ \left\langle A_{\xi_i}^{-1} x, A_{\xi_j}^{-1} x \right\rangle. \tag{113}$$

[52]Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad $e \in \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$ y $\sigma(a) = F_1 \cup F_2$, con F_1, F_2 partes cerradas, disjuntas y no vacías. Hay entonces un idempotente $b \in \mathcal{A}$ tal que si $a_1 = ab$ y $a_2 = a(e - b)$ entonces $a = a_1 + a_2$ y $a_1 \ a_2 = a_2 \ a_1$ (cf. [9], Ch. VII, §4, Prop. 4.11(b), page 204).

Para cada par $i,\ j$, por la normalidad de A podemos escribir

$$\left\langle A_{\xi_i}^{-1}x, A_{\xi_j}^{-1}x\right\rangle = \left\langle A_{\overline{\xi_j}}^{*-1}A_{\xi_i}^{-1}x, x\right\rangle \tag{114}$$

$$= \left\langle \left(A_{\xi_i}\ A_{\overline{\xi_j}}^{*}\right)^{-1} x, x\right\rangle = \left\langle \left(A_{\overline{\xi_j}}^{*}\ A_{\xi_i}\right)^{-1} x, x\right\rangle$$

$$= \left\langle A_{\xi_i}^{-1}\ A_{\overline{\xi_j}}^{*-1}x, x\right\rangle = \left\langle A_{\overline{\xi_j}}^{*-1}x, A_{\overline{\xi_i}}^{*-1}x\right\rangle.$$

Por (113) y (114) es

$$\left\|S_\pi\left(\left(F\circ a_k\right)x, a_k\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n_\pi}\overline{f(\xi_j)}\ \Delta\overline{z_j}\ A_{\overline{\xi_j}}^{*-1}x\right\|^2 \tag{115}$$

y por (112) y (115) obtenemos

$$\left\|f_k(A)x\right\|^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\left\|\int_{\phi_k^*}\overline{f\left(\overline{z}\right)}\ \left(zI_H - A^*\right)^{-1}x\ dz\right\|^2$$

$$= \left\|\widetilde{f}_k(A^*)x\right\|^2 = \left\|f_k(A)^*x\right\|^2.$$

Luego $f_k(A)$ deviene normal y sigue la afirmación.

(vii) Como $pq = qp = 0$ obtenemos $n^*n = |a|^2\ p + |b|^2\ q = nn^*$. Suponiendo que p y q son proyectores no triviales y $p+q=e$ es

$$\sigma\left(p\right) = \sigma\left(q\right) = \left\{0,1\right\}.$$

Escribiendo $n = b\ e + (a-b)\ p$, por el teorema espectral $\sigma\left(n\right) = \left\{a,b\right\}$. Para $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z-a| > |a-b|$ es válido el desarrollo de Laurent

$$\left(ze-n\right)^{-1} = \left(z-a\right)^{-1}\left[e + q\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{a-b}{z-a}\right)^j\right].$$

Dada entonces $f\in\mathfrak{X}\left(n\right)$, si γ es una curva suave cerrada simple que contiene a a y b es su interior, tenemos

$$f(n)\left(e-q\right) = f(n)\ p = \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left(ze-n\right)^{-1}\ dz\right]\ p = f(a)\ p.$$

Análogamente $f\left(n\right)\ q = f\left(b\right)\ q$ y sigue la afirmación. $\square$

3.38. Representación de operadores acotados sobre espacios de Banach con espectros desconexos. Contornos de Cauchy. Proyectores espectrales.

Sea $(E, \|\circ\|)$ un espacio de Banach complejo.

(i)(a) Si $B \in L(E)$ y $\sigma(B) = F_1 \cup F_2$, con F_1, F_2 cerrados, disjuntos y no vacíos, hay subespacios topológicamente complementarios E_1, E_2 de E invariantes por todo operador que conmute con B.

(i)(b) $\sigma(B\mid_{E_i}) = F_i$, $i = 1, 2$.

(i)(c) Hay un operador inversible $C : E \to E_1 \bigoplus E_2$ tal que

$$C \circ B \circ C^{-1} = B\mid_{E_1} \bigoplus B\mid_{E_2}.$$

(ii) Sea $T \in L(E)$, C un *contorno de Cauchy*[53] contenido en $\rho(T)$.

(ii)(a) Si $\sigma(T) \subseteq \mathrm{int}(C)$ entonces $\int_C (T - zI_E)^{-1}\, dz = -2\pi i\, I_E$.

(ii)(b) Si $\sigma(T) \subseteq \mathrm{ext}(C)$ y $z_0 \in \mathrm{int}(C)$ entonces

$$(T - z_0 I_E)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C (z - z_0)^{-1} (T - zI_E)^{-1}\, dz.$$

(iii) Sea λ punto aislado en el espectro de un operador $T \in L(E)$, $P(T, \{\lambda\})$ el *proyector espectral*[54] asociado a T y a $\{\lambda\}$. Entonces

$$\mathrm{ran}(P(T, \{\lambda\})) = \left\{ f \in E : \ \overline{\lim}_{n\to\infty} \|(T - \lambda I_E)^n f\|^{1/n} = 0 \right\}.$$

---

[53] Un *contorno C de Cauchy* es el conjunto de curvas que conforman la frontera de un *dominio D de Cauchy*, orientadas de manera que los puntos de D quedan a la izquierda de estas curvas conforme son recorridas. D es una unión finita de *dominios elementales de Cauchy* cuyas clausuras son disjuntas. Además cada *dominio elemental de Cauchy* es un dominio acotado cuya frontera es la unión disjunta de un número finito de curvas de Jordan (i.e. cerradas, simples, rectificables). Se define $\mathrm{int}(C) = D$ y $\mathrm{ext}(C) = \mathbb{C} - (D \cup C)$.

[54] Se llama *conjunto espectral* de un operador T a todo subconjunto Λ del espectro que es clopen en $\mathbb{C}$. Si C es un contorno de Cauchy que separa a Λ, i.e. $\sigma(T) \cap \mathrm{int}(C) = \Lambda$, se define el *proyector espectral* asociado a T en Λ como

$$P(T, \Lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C (T - zI_E)^{-1}\, dz.$$

(iv) Sea Λ conjunto espectral de un operador $T \in L(E)$, $\lambda \in \Lambda$, $j \in \mathbb{N}$. Entonces $\ker\left[(T - \lambda I_E)^j\right] \subseteq \operatorname{ran} P(T, \Lambda)$.

Solución

(i)(a) Sea $B \in L(E)$ tal que $\sigma(B) = F_1 \cup F_2$, con F_1, F_2 cerrados, disjuntos y no vacíos. Sean G_1, G_2 abiertos disjuntos tales que $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ y sea Θ un spocrid asociado a F_1 y G_1. Entonces $\varkappa_{G_1} \in \mathfrak{X}(B)$ y, como $\varkappa_{G_1}^2 = \varkappa_{G_1}$ entonces $\varkappa_{G_1}(B)$ es idempotente. Luego basta hacer $E_1 = \operatorname{ran}(\varkappa_{G_1}(B))$ y $E_2 = \operatorname{ran}(I_E - \varkappa_{G_1}(B))$. Sea $C \in L(E)$ tal que $BC = CB$ y veamos que $C(E_i) \subseteq E_i$, $i = 1, 2$. En efecto,

$$\varkappa_{G_1}(B) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Theta \varkappa_{G_1}(z) (zI_E - B)^{-1} \, dz,$$

el operador $T \to C \circ T$ en $L(E)$ es continuo y como C conmuta con B también conmuta con $(zI_E - B)^{-1}$ si $z \in \rho(B)$. Luego

$$C \circ \varkappa_{G_1}(B) = \varkappa_{G_1}(B) \circ C$$

y E_1 es $C-$ invariante. La conclusión sobre E_2 es ahora inmediata.

(i)(b) Podemos considerar $B|_{E_i} \in L(E_i)$, $i = 1, 2$. Como

$$B|_{E_1} = B \circ \varkappa_{G_1}(B), \quad B|_{E_2} = B \circ (I_E - \varkappa_{G_1}(B))$$

por el teorema espectral es

$$\sigma(B|_{E_1}) = [z\varkappa_{G_1}(z)](\sigma(B)) = F_1,$$

$$\sigma(B|_{E_2}) = [z(1 - \varkappa_{G_1}(z))](\sigma(B)) = F_2.$$

(i)(c) Sea $C : E \to E_1 \bigoplus E_2$, $C(x) = \varkappa_{G_1}(B)x \bigoplus (x - \varkappa_{G_1}(B)x)$, $x \in E$. Entonces C es lineal, acotado e inversible, con inverso

$$C^{-1}\left(y \bigoplus z\right) = y + z, \; y \in E_1, \; z \in E_2.$$

Con esta notación tenemos

$$\begin{aligned}\left(C \circ B \circ C^{-1}\right)\left(y \bigoplus z\right) &= (C \circ B)(y+z) \\ &= C\left(\left(B \mid_{E_1}\right) y + \left(B \mid_{E_2}\right) z\right) \\ &= \left(B \mid_{E_1}\right) y \bigoplus \left(B \mid_{E_2}\right) z \\ &= \left(B \mid_{E_1} \bigoplus B \mid_{E_2}\right)\left(y \bigoplus z\right).\end{aligned}$$

(ii)(a) Sea C un contorno de Cauchy contenido en la resolvente de un operador $T \in L(E)$. Supondremos sin perder generalidad $C = \partial D$, donde D es un dominio de Cauchy elemental. Si $\sigma(T) \subseteq \operatorname{int}(C)$ entonces C se realiza como un número finito n de curvas cerradas simples contenidas en $\rho(T)$. Si $n = 1$ entonces C es homotópicamente equi-valente, en $\rho(T)$, a cualquier curva cerrada simple que la contenga en su interior. Para $|z| > \rho(T)$ es válido el desarrollo de Laurent $(T - zI_E)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}\, T^k$ (cf. [2], Ch. 1, Th. 1.13 (d), page 16). Por la analiticidad de la resolvente, si $r > 0$ es lo suficientemente grande podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_C (T - zI_E)^{-1}\ dz &= \int_{|z|=r} (T - zI_E)^{-1}\ dz \\ &= -2\pi i\ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res}\left[z^{-k-1},\ z=0\right]\ T^k = -2\pi i\ I_E.\end{aligned}$$

Podemos suponer $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, con $n > 1$. Entonces

$$\int_C (T - zI_E)^{-1}\ dz = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \int_{C_j} (T - zI_E)^{-1}\ dz,$$

donde $\varepsilon_j = \pm 1$ según sea la orientación de C_j. Las integrales sobre curvas cuyo interior es disjunto con $\sigma(T)$ son cero por la analiticidad del integrando. Precisamente, tales curvas constituyen las fronteras internas de D, el cual es un dominio acotado con $n-1$ agujeros. Por ello, nos remitimos al caso anterior y sigue la tesis.

(ii)(b) Sigue por la fórmula integral de Cauchy.

(iii) Sea $T \in L(E)$, $\lambda \in \sigma(T)$ punto aislado, $f \in E$ tal que
$$\overline{\text{lím}}_{n \to \infty} \|(T - \lambda I_E)^n f\|^{1/n} = 0.$$
Si $r > 0$ es tal que $\overline{D}(\lambda, r) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ y $|z - \lambda| = r$ escribimos
$$(T - zI_E)^{-1} f = -(z-\lambda)^{-1} \left(I_E - (z-\lambda)^{-1}(T - \lambda I_E)\right)^{-1} f$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-\lambda)^{-n-1} \ (T - \lambda I_E)^n f.$$
Por el criterio de la raíz la serie anterior es absolutamente convergente y podemos escribir
$$P(T, \{\lambda\}) f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=r} (T - zI_E)^{-1} \ dz$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \text{res}\left[(z-\lambda)^{-n-1}, \ z = 0\right] (T - \lambda I_E)^n f = f.$$
Por otra parte, si $g \in E$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos
$$(T - \lambda I_E)^n P(T, \{\lambda\}) g = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=r} (z-\lambda)^n \ (T - zI_E)^{-1} g \ dz. \tag{116}$$
Es válido el desarrollo de Laurent
$$(T - zI_E)^{-1} g = \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_m g \ (z-\lambda)^m, \ 0 < |z - \lambda| \leq r,$$
donde para $0 < s \leq r$ y $m \in \mathbb{Z}$ escribimos
$$S_m g = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=s} (T - zI_E)^{-1} \ (z-\lambda)^{-m-1} g \ dz \tag{117}$$
Fijado $m \in \mathbb{Z}$ negativo y $0 < s \leq r$ obtenemos
$$\|S_m g\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T - (\lambda + s\exp(i\varphi)) I_E)^{-1} g \ \ (s\exp(i\varphi))^{-m} \ d\varphi \right\|$$
$$\leq \max_{|z-\lambda|=s} \left\|(T - zI_E)^{-1} g\right\| \ s^{-m}.$$

Por (116) y (117) es

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left\| (T-\lambda I_E)^n P(T,\{\lambda\}) g \right\|^{1/n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left\| S_{-n-1} g \right\|^{1/n}$$

$$\leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\max_{|z-\lambda|=s} \left\| (T-zI_E)^{-1} g \right\| \ s^{n+1} \right)^{1/n} = s.$$

Como s es arbitrariamente pequeño sigue (iii).

(iv) Como $\mathfrak{U}_j = \ker\left[(T-\lambda I_E)^j\right]$ es $T-$ invariante bastará que

$$\sigma\left(T\mid_{\mathfrak{U}_j,\mathfrak{U}_j}\right) \subseteq \Lambda$$

(cf. [2], Ch. 1, Prop. 1.28, page 31). Pero $(T-\lambda I_E)^j \mid_{\mathfrak{U}_j,\mathfrak{U}_j} = 0$ y, por el teorema espectral,

$$\{0\} = \sigma\left((T-\lambda I_E)\mid_{\mathfrak{U}_j,\mathfrak{U}_j}\right) = \left\{\mu-\lambda,\ \mu\in\sigma\left(T\mid_{\mathfrak{U}_j,\mathfrak{U}_j}\right)\right\},$$

o sea $\sigma\left(T\mid_{\mathfrak{U}_j,\mathfrak{U}_j}\right) = \{\lambda\}$ y $\lambda\in\Lambda$. $\square$

3.39. Medidas espectrales y operadores de multiplicación.

Si $\mathcal{T}$ es un espacio topológico, indicaremos $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ a la $\sigma-$ álgebra de Borel de $\mathcal{T}$. Si $\mu\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ es regular con soporte compacto sobre $\mathbb{C}$ escribiremos $\mathfrak{N}_\mu f(z) = zf(z),\ z\in\mathbb{C},\ f\in\mathcal{L}\left[L^2(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mu)\right]$, de modo que $\mathfrak{N}_\mu$ es un operador normal sobre $L^2(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mu)$ y $\sigma(\mathfrak{N}_\mu) = \operatorname{supp}(\mu)$. Sea (X,Σ,μ) espacio de medida $\sigma-$ finita, $\phi\in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$, $M_\phi\in\mathcal{L}\left[L^2(X,\Sigma,\mu)\right]$ el operador $M_\phi f = \phi\cdot f,\ f\in L^2(X,\Sigma,\mu)$.

(i) $\sigma(\mathfrak{N}_\mu) = \operatorname{supp}(\mu)$.

(ii) $\phi(\mathfrak{N}_\mu) = M_\phi$.

(iii) Si $E(M_\phi)$ es la *medida espectral*[55] de M_ϕ es $E(M_\phi) = E(\mathfrak{N}_\mu)\circ\phi^{-1}$.

---

[55] Sea Y espacio compacto Hausdorff, H espacio de Hilbert, $\rho: C(Y)\to L(H)$ una representación. Hay una única extensión de ρ a una representación $\varrho:\mathfrak{B}(Y)\to L(H)$, donde $\mathfrak{B}(Y)$ es el álgebra de funciones borelianas acotadas sobre Y. Si $\Lambda\in\mathcal{B}(Y)$, la relación $E(\Lambda) = \varrho(\varkappa_\Lambda)$ define una *medida espectral* sobre la $\sigma-$ álgebra de Borel de Y

(iv) Para $\Delta \in \mathcal{B}(\sigma(M_\phi))$ es $E(M_\phi)(\Delta) = M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}}$.

Solución

(i) Si $\alpha \in \rho(\mathfrak{N}_\mu)$ sea $c > 0$ cota inferior de $\mathfrak{N}_\mu - \alpha I_{L^2(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mu)}$. Veamos que existe un entorno abierto V de α tal que μ es nula sobre subconjuntos compactos de V. Sino para cada $n \in \mathbb{N}$ existe K_n subconjunto compacto de $D(\alpha, 1/n)$ de $\mu-$ medida positiva. Sea $0 < r_n < 1/n$ tal que

$$K_n \subseteq \overline{D}(\alpha, r_n), \ f_n = \mu\left(\overline{D}(\alpha, r_n)\right)^{-1/2} \ \varkappa_{\overline{D}(\alpha,r_n)}.$$

Para todo n resulta $\|f_n\|_2 = 1$ y

$$0 < c \leq \|\mathfrak{N}_\mu f_n - \alpha f_n\|_2 \leq r_n < 1/n,$$

lo que es imposible, i.e. $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \sigma(\mathfrak{N}_\mu)$. Ahora, si $\beta \notin \operatorname{supp}(\mu)$ existe $r > 0$ tal que μ es nula sobre subconjuntos compactos del disco $D(\beta, r)$. Por la regularidad de μ es $\mu(D(\beta, r)) = 0$. La relación $Sg(z) = g(z) / (z - \beta)$, $g \in L^2(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mu)$, $z \in \mathbb{C}$, define un elemento $\mu-$ medible tal que

$$\int_{\mathbb{C}} |Sg(z)|^2 \ d\mu(z) = \int_{|z-\beta|\geq r} \left|\frac{g(z)}{z-\beta}\right|^2 \ d\mu(z) \leq r^{-2} \|g\|_2^2,$$

i.e. $Sg \in L^2(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mu)$. Deducimos que $g \to Sg$ es funcional lineal acotado y $S \circ \mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}_\mu \circ S = I_{L^2(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mu)}$.

(ii) Dados $g,\ h \in L^2(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mu)$ tenemos

$$\langle \phi(\mathfrak{N}_\mu) g, h\rangle = \int_{\sigma(\mathfrak{N}_\mu)} \phi \ d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h},$$

$$\langle M_\phi g, h\rangle = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \phi(z) \cdot g(z) \cdot \overline{h(z)} \ d\mu(z).$$

de modo que $\rho(u) = \int_Y u \ dE$ para cada $u \in C(Y)$. En particular, si $g,\ h \in H$ escribimos $E_{g,h}(\Lambda) = \langle E(\Lambda)g, h\rangle$ y $\{E_{g,h}\}_{g,h\in H}$ es una familia de medidas complejas de variación acotada. Sea N operador normal sobre H, $C^*(N)$ la C^*- álgebra unitaria generada por N, $\widehat{\cdot} : C^*(N) \to C(\mathfrak{X}(N))$ la transformada de Gelfand de $C^*(N)$, donde $\mathfrak{X}(N)$ es el espacio ideal maximal correspondiente. En particular, $\widehat{\cdot} = \widehat{\cdot}(N)$ y $\widehat{\cdot}$ es un isomorfismo isométrico. Queda inducida la aplicación $\rho_N(v) = \widehat{\cdot}^{-1}\left[v \circ \widehat{N}\right]$, $v \in C(\sigma(N))$. ρ_N define una representación de $C(\sigma(N))$ en $L(H)$ a la cual hay asociada una única medida espectral E_N de manera que $\rho_N(v) = \int_{\sigma(N)} v \ dE_N$ para cada v. Se escribe $\rho_N(v) = v(N)$ y, en particular, $N = \int_{\sigma(N)} z \ dE_N(z)$ (cf. [9], Ch. IX, §2, 262).

Por (i) bastará ver que

$$d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h} = g\left(z\right)\cdot\overline{h(z)}\ d\mu\left(z\right). \tag{118}$$

Evidentemente tanto $\mathfrak{N}_\mu$ como M_ϕ son operadores normales. Sabemos que $d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h}$ es la única medida tal que

$$\left\langle\rho_{\mathfrak{N}_\mu}\left(u\right)g,h\right\rangle = \int_{\sigma(\mathfrak{N}_\mu)} u\ d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h},\ u\in C\left(\sigma\left(\mathfrak{N}_\mu\right)\right), \tag{119}$$

donde $\rho_{\mathfrak{N}_\mu}\left(u\right) = \widehat{\cdot}^{-1}\left(u\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right)$ para cada u. Fijada u probaremos entonces que $\rho_{\mathfrak{N}_\mu}\left(u\right)g = u\cdot g$. Tendremos luego

$$\int_{\mathrm{supp}(\mu)} u\left(z\right)\cdot g\left(z\right)\cdot\overline{h(z)}d\mu\left(z\right) = \int_{\mathrm{supp}(\mu)}\widehat{\cdot}^{-1}\left(u\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right)g\cdot\overline{h(z)}d\mu\left(z\right)$$

$$= \left\langle\rho_{\mathfrak{N}_\mu}\left(u\right)g,h\right\rangle$$

y, por (119), seguirá la afirmación. Ahora, si $v\left(z\right) = z^k,\ k\in\mathbb{N}_0$,

$$\widehat{\cdot}^{-1}\left(v\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right)g = \widehat{\cdot}^{-1}\left(\widehat{\mathfrak{N}_\mu}^{\,k}\right)g = \widehat{\cdot}^{-1}\left(\widehat{\mathfrak{N}_\mu^k}\right)g = \mathfrak{N}_\mu^k g = z^k\cdot g = v\cdot g.$$

Análogamente, si $w\left(z\right) = \overline{z}^h,\ h\in\mathbb{N}_0$,

$$\widehat{\cdot}^{-1}\left(w\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right) = \widehat{\cdot}^{-1}\left(\overline{\widehat{\mathfrak{N}_\mu}}^{\,h}\right) = \widehat{\cdot}^{-1}\widehat{\left(\mathfrak{N}_\mu^*\right)^h}g = \left(\mathfrak{N}_\mu^*\right)^h,$$

i.e. $\widehat{\cdot}^{-1}\left(v\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right)g = \overline{z}^h\cdot g = w\cdot g$. Como $\mathrm{supp}\left(\mu\right)$ es compacto $\mathbb{C}\left[z,\overline{z}\right]$ es denso en $C\left(\mathrm{supp}\left(\mu\right)\right)$. Si $u\in C\left(\mathrm{supp}\left(\mu\right)\right)$ es límite uniforme de una sucesión de polinomios complejos $\left\{p_n\right\}_{n\geq1}$ escribimos

$$\left\|\widehat{\cdot}^{-1}\left(u\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right)g - u\cdot g\right\|_2 \leq \left\|\left(p_n-u\right)\cdot g\right\|_2 +$$

$$+\left\|\widehat{\cdot}^{-1}\left(\left(p_n-u\right)\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right)g\right\|_2$$

$$\leq\left[\left\|p_n-u\right\|_\infty + \left\|\left(p_n-u\right)\circ\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right\|\right]\left\|g\right\|_2$$

$$\leq\left\|p_n-u\right\|_\infty\left(1+\left\|\widehat{\mathfrak{N}_\mu}\right\|_\infty\right)\left\|g\right\|_2$$

y, al hacer $n \to +\infty$, sigue la afirmación.

(iii) Si $k \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\widehat{\cdot}^{-1}\left(z^k \circ \widehat{M_\phi}\right) = (M_\phi)^k = M_{\phi^k},\ \widehat{\cdot}^{-1}\left(\overline{z}^k \circ \widehat{M_\phi}\right) = \left(M_{\overline{\phi}}\right)^k = M_{\overline{\phi}^k}.$$

Luego $\widehat{\cdot}^{-1}\left(p \circ \widehat{M_\phi}\right) = M_{p\circ\phi}$ para todo polinomio p y por ello

$$\widehat{\cdot}^{-1}\left(u \circ \widehat{M_\phi}\right) = M_{u\circ\phi}$$

si $u \in C\left(\sigma\left(\phi\right)\right)$. Si

$$\Delta \in \mathcal{B}\left(\sigma\left(M_\phi\right)\right),\ v \in C\left(\sigma\left(M_\phi\right)\right),\ g,\ h \in L^2\left(\mathbb{C}, \mathcal{B}\left(\mathbb{C}\right), \mu\right),$$

observando que $\sigma\left(\phi\right)$ es el rango $\mu-$ esencial de ϕ (v. Problema 3.7(v) - (vi)), el cual es también el espectro de M_ϕ, por (118) resulta

$$\int_{\operatorname{supp}(\mu)} \rho_{M_\phi}\left(v\right) g \cdot \overline{h}\ d\mu = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \left(v \circ \phi\right) \cdot g \cdot \overline{h}\ d\mu$$

$$= \int_{\operatorname{supp}(\mu)} v \circ \phi\ d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h}$$

$$= \int_{\sigma\left(M_\phi\right)} v\ d\left(\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h} \circ \phi^{-1}\right).$$

Como v, g, h son arbitrarios (iii) es consecuencia de la unicidad de la medida espectral asociada a M_ϕ.

(iv) Si $\Delta \in \mathcal{B}\left(\sigma\left(M_\phi\right)\right)$ es

$$\operatorname{ran}\left(M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}}\right) = \left\{f \in L^2\left(X, \Sigma, \mu\right) :\ f\mid_{X-\phi^{-1}(\Delta)} = 0\ a.e.\ [\mu]\right\}.$$

Sea $g,\ h \in L^2(X, \Sigma, \mu)$, $g \in \operatorname{ran}\left(M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}}\right)$. Por (iii) escribimos

$$\begin{aligned}
\langle E(M_\phi)(\Delta)\, g, h\rangle &= \int_{\sigma\left(M_\phi\right)} \varkappa_\Delta\ dE(M_\phi)_{g,h} \\
&= \int_{\sigma\left(M_\phi\right)} \varkappa_\Delta\ d\left(\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h} \circ \phi^{-1}\right) \\
&= \int_{\sigma(\mathfrak{N}_\mu)} \varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}\ d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{g,h} \\
&= \left\langle E_{\mathfrak{N}_\mu}(X)\, g, h\right\rangle = \langle g, h\rangle
\end{aligned}$$

y siendo h arbitrario $E(M_\phi)(\Delta)\, g = g$, i.e.

$$\operatorname{ran}\left(M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}}\right) \subseteq \operatorname{ran} E(M_\phi)(\Delta).$$

Si $f \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ también tenemos

$$\left\langle E(M_\phi)(\Delta)\, f, \varkappa_{X-\phi^{-1}(\Delta)} h\right\rangle = \int_{\sigma(\mathfrak{N}_\mu)} \varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)} d\left(E_{\mathfrak{N}_\mu}\right)_{f, \varkappa_{X-\phi^{-1}(\Delta)} h} = 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\langle M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}} E(M_\phi)(\Delta)\, f, h\right\rangle &= \left\langle E(M_\phi)(\Delta)\, f, M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}} h\right\rangle \\
&= \langle E(M_\phi)(\Delta)\, f, h\rangle.
\end{aligned}$$

Como h es arbitraria $M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}} E(M_\phi)(\Delta)\, f = f$. Como f es arbitraria $\operatorname{ran}\left(M_{\varkappa_{\phi^{-1}(\Delta)}}\right) \supseteq \operatorname{ran} E(M_\phi)(\Delta)$ y tenemos (iv). $\square$

3.40. Sumas de operadores normales y medidas espectrales.

Sea $\{H_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de espacios de Hilbert, $H = \bigoplus_{k\geq 1} H_k$. Para cada k sea $N_k \in \mathcal{L}(H_k)$ normal, E_k la medida espectral asociada a N_k. Si

$\sup_{k\geq 1} \|N_k\| < +\infty$ y $N = \bigoplus_{k\geq 1} N_k$ resulta[56]:

(i) $\sigma(N) = \mathrm{cl} \cup_{k\geq 1} \sigma(N_k)$.

(ii) $E(\Delta) = \bigoplus_{k\geq 1} E_k(\Delta \cap \sigma(N_k))$ para cada subconjunto de Borel Δ del espectro de N, i.e. si $\Delta \in \mathcal{B}(\sigma(N))$.

Solución

(i) Sea $a \notin \sigma(N)$ y $c > 0$ cota inferior de $N - aI_H$. Fijados $k \in \mathbb{N}$, $f \in H_k$, como

$$\|(N_k - aI_{H_k}) f\| = \|(N - aI_H) f\| \geq c \|f\|$$

también $N_k - aI_{H_k}$ es acotado inferiormente. Además, si $\varepsilon > 0$ existe $g \in H$ tal que

$$\varepsilon \geq \|f - (N - aI_H) g\| \geq \|f - (N_k - aI_{H_k}) P_{H_k} g\|,$$

i.e. $\operatorname{ran}(N_k - aI_{H_k})$ es denso en H_k y $a \notin \sigma(N_k)$. Como $\sigma(N)$ es cerrado deducimos que $\mathrm{cl} \cup_{k\geq 1} \sigma(N_k) \subseteq \sigma(N)$. Sea ahora $b \notin \mathrm{cl} \cup_{k\geq 1} \sigma(N_k)$ e indiquemos $N_{k,b} = N_k - bI_{H_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Por la normalidad de estos operadores y el teorema espectral (cf. [9], Ch. VII, Th. 4.10, page 204) para cada k tenemos

$$\left\|N_{k,b}^{-1}\right\| = r_{sp}\left(N_{k,b}^{-1}\right)$$

$$= \sup_{\beta \in \sigma(N_k)} |b - \beta|^{-1} \leq \left[\operatorname{dist}\left(b, \mathrm{cl} \cup_{k\geq 1} \sigma(N_k)\right)\right]^{-1},$$

con lo cual $\sup_{k\geq 1} \left\|N_{k,b}^{-1}\right\| < +\infty$ y $\bigoplus_{k\geq 1} N_{k,b}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Como

$$\left(\bigoplus_{k\geq 1} N_{k,b}^{-1}\right) \circ (N - bI_H) = (N - bI_H) \circ \left(\bigoplus_{k\geq 1} N_{k,b}^{-1}\right) = I_H$$

obtenemos $b \notin \sigma(N)$.

[56]Por supuesto, si para cada k es $f_k \in H_k$ y $f = \sum_{k\geq 1} f_k$ es un elemento de H la relación $Nf = \sum_{k\geq 1} N_k f_k$ define un elemento $Nf \in H$. Esta definición es correcta si $\sup_{k\geq 1} \|N_k\| < +\infty$ y además $N \in \mathcal{L}(H)$.

(ii) Si $\Sigma = \{S \in \mathcal{P}(\sigma(N)) : \ \forall k, \ S \cap \sigma(N_k) \in \sigma(N_k)\}$ es fácil ver que (a) Σ es una $\sigma-$ álgebra, (b) $\mathcal{B}(\sigma(N)) \subseteq \Sigma$, (c) $\cup_{k\geq 1}\mathcal{B}(\sigma(N_k)) \subseteq \mathcal{B}(\sigma(N))$. Fijado $k \in \mathbb{N}$ por el teorema espectral hay una única medida espectral $E(N_k)$ tal que $N_k = \int_{\sigma(N_k)} z \ dE(N_k)$. Como $N_k = N \mid_{H_k}$ si $g, \ h \in H_k$ tenemos

$$\int_{\sigma(N_k)} z \ dE(N_k)_{g,h} = \int_{\sigma(N)} z \ dE(N)_{g,h},$$

donde $E(N)$ es la medida espectral asociada a N. Más aún, si $p \in \mathbb{C}[z]$ es

$$\int_{\sigma(N_k)} p(z) \ dE(N_k)_{g,h} = \int_{\sigma(N)} p(z) \ dE(N)_{g,h}$$

de modo que

$$\int_{\sigma(N_k)} u(z) \ dE(N_k)_{g,h} = \int_{\sigma(N)} u(z) \ dE(N)_{g,h}$$

cuando $u \in C(\sigma(N_k))$. En consecuencia $E(N_k) = E(N) \mid_{\mathcal{B}(\sigma(N_k))}$. Dado entonces $\Delta \in \mathcal{B}(\sigma(N))$ obtenemos

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k(\Delta \cap \sigma(N_k)) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E(\Delta \cap \sigma(N_k))$$

$$= E(\Delta) \circ \bigoplus_{k=1}^{\infty} E(\sigma(N_k))$$

$$= E(\Delta) \circ \bigoplus_{k=1}^{\infty} E(\sigma(N_k)) = E(\Delta). \ \square$$

3.41. Cálculo funcional de operadores hermíticos.

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermitiano, E su medida espectral. Para $t \in \mathbb{R}$ definimos $P(t) = E[(-\infty, t) \cap \sigma(A)]$.

(i) Si $s \leq t$ en $\mathbb{R}$ entonces $P(s) \leq P(t)$.

(ii) Si $t_n \uparrow t$ en $\mathbb{R}$ entonces $P(t_n) \to P(t)$ puntualmente.

(iii) Salvo un número numerable de puntos t, $P(t_n) \to P(t)$ si $t_n \to t$.

(iv) Si $f \in C(\sigma(A))$ es $f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ dP(t)$, donde la integral es del tipo Riemann - Stieltjes.

Solución

(i) Como E es una medida espectral si $s \leq t$ en $\mathbb{R}$ basta observar que

$$P(t) - P(s) = E[(-\infty, t) \cap \sigma(A)] - E[(-\infty, s) \cap \sigma(A)]$$

$$= E[[s,t) \cap \sigma(A)] \geq 0.$$

(ii) Si $t_n \uparrow t$ en $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathcal{H}$ escribimos

$$\|P(t_n)h - P(t)h\|^2 = \|(P(t_n) - P(t))h\|^2 = \int_{\sigma(A)} \varkappa_{[t_n,t)}\ dE_{h,h}.$$

Basta observar que $\varkappa_{[t_n,t)} \to 0$ puntualmente, $\varkappa_{[t_n,t)} \leq 1$ para todo n y $\int_{\sigma(A)} dE_{h,h} = \|h\|^2 < +\infty$, con lo cual es aplicable el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue y $P(t_n)h \to P(t)h$.

(iii) Sea $\Xi = \left\{t \in \sigma(A) :\ \exists (t_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ t_n \to t,\ P(t_n) \nrightarrow P(t)\ \text{(SOT)}\right\}$, donde SOT es la topología fuerte de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (cf. [9], Ch. IX, §1, 1.2, page 256). Como $\mathcal{H}$ es separable bastará ver que $\Xi \subseteq \sigma_p(A)$. En efecto, si $t \notin \sigma_p(A)$ es $E(\{t\}) = 0$ (cf. [42], Ch. 12, Th. 12.29, page 312). Si $(t_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente a t en $\mathbb{R}$ probaremos que $P(t_n) \to P(t)$ puntualmente. Si $n \in \mathbb{N}$ resulta

$$P(t) - P(t_n) = \begin{cases} E([t_n,t) \cap \sigma(A)) & si \quad t_n < t, \\ \\ -E([t,t_n) \cap \sigma(A)) & si \quad t \leq t_n. \end{cases}$$

Dado $h \in \mathcal{H}$ razonando como en (ii) obtenemos

$$\lim_{t_n \uparrow t} \|P(t_n)h - P(t)h\|^2 = \lim_{t_n \uparrow t} \int_{\sigma(A)} \varkappa_{[t_n,t)}\ dE_{h,h} = 0.$$

Si $t \leq t_n$, como $\varkappa_{[t,t_n)} \to \varkappa_{\{t\}}$ y

$$\|P(t_n)h - P(t)h\|^2 = \int_{\sigma(A)} \varkappa_{[t,t_n)}\ dE_{h,h}$$

aplicando el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue

$$\lim_{t_n \downarrow t} \|P(t_n) h - P(t) h\|^2 = \int_{\sigma(A)} \varkappa_{\{t\}} \, dE_{h,h} = \langle E(\{t\}) h, h \rangle = 0.$$

(iv) Si $g,\ h \in \mathcal{H}$, $dE_{g,h}(t)$ y $d\langle P(t) g, h\rangle$ definen la misma medida sobre $\mathcal{B}(\sigma(A))$. Precisamente, por la definición de P ambas medidas coinciden sobre semirrectas $(-\infty, t)$, $t \in \mathbb{R}$, de modo que coinciden en intervalos del tipo $[s,t)$, $s < t$. Luego coinciden sobre subconjuntos abiertos del espectro de A y, por lo tanto, sobre $\mathcal{B}(\sigma(A))$. Notemos que $d\langle P(t) g, h\rangle$ está concentrada en el espectro de A ya que $P(t) \equiv 0$ si $t \leq \min \sigma(A)$ y $P(t) \equiv Id_H$ si $t \geq \max \sigma(A)$. Luego si $f \in C(\sigma(A))$ resulta

$$\begin{aligned}
\langle f(A) g, h\rangle &= \int_{\sigma(A)} f(t) dE_{g,h}(t) \\
&= \int_{\sigma(A)} f(t) d\langle P(t) g, h\rangle \\
&= \left\langle \left(\int_{\sigma(A)} f(t) dP(t) \right) g, h \right\rangle = \left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) dP(t) \right) g, h \right\rangle
\end{aligned}$$

y sigue (iv). □

3.42. Operadores hermitianos, positivos o unitarios y proyectores espectrales.

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador normal, E la medida espectral asociada a T sobre la clase $\mathcal{B}(\sigma(T))$ de subconjuntos borelianos de $\sigma(T)$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \sigma_p(T)$ sii $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

(ii) Todo punto aislado del espectro de T es un autovalor de T.

(iii) Si $\sigma(T) = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\}$ entonces $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \ker(T_{\lambda_n})$, donde para cada n es $T_{\lambda_n} = T - \lambda_n\, Id_{\mathcal{H}}$ y $\ker(T_{\lambda_n}) \perp \ker(T_{\lambda_m})$ si $n \neq m$ en $\mathbb{N}$.

(iv) T es hermitiano sii $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(v) $T \geq 0$ sii $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$.

(vi) T es unitario sii $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}^1$.

Solución

(i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ la función $f(z) = z - \lambda,\ z \in \sigma(T)$ es continua y

$$\ker(T_\lambda) = \ker f(T).$$

Bastará ver que $\ker f(T) = \operatorname{ran} E(\{\lambda\})$. Efectivamente, como la función boreliana $f \cdot \varkappa_{\{\lambda\}}$ es nula $f(T) \circ \varkappa_{\{\lambda\}}(T) = 0$. Pero

$$\varkappa_{\{\lambda\}}(T) = \int_{\sigma(T)} \varkappa_{\{\lambda\}}\, dE = E(\{\lambda\})$$

y $\operatorname{ran} E(\{\lambda\}) \subseteq \ker f(T)$. Por otra parte, si $h \in \ker f(T)$ veremos que $E(\{\lambda\})\, h = h$. Para ello, $\sigma(T) - \{\lambda\} = \{z \in \sigma(T) :\ f(z) \neq 0\}$, por lo que podemos escribir

$$\sigma(T) - \{\lambda\} = \cup_{n=1}^{\infty} W_n, \tag{120}$$

donde para cada n es

$$W_n = \{z \in \sigma(T) :\ 1/(n+1) \leq |f(z)| < 1/n\}.$$

Sea $f_n(z) = \varkappa_{W_n}(z)/f(z),\ n \in \mathbb{N},\ z \in \sigma(T)$. Así $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones borelianas acotadas sobre el espectro de T y si $n \in \mathbb{N}$ resulta $f_n(T) \circ f(T) = E(W_n)$ por lo que $E(W_n)\, h = 0$. Como la unión en (120) es disjunta por la $\sigma-$ aditividad de E resulta $E(\sigma(T) - \{\lambda\})\, h = 0$, de donde sigue la afirmación.

(ii) Si λ es punto aislado del espectro de T el conjunto $\{\lambda\}$ es abierto relativo de $\sigma(T)$, por lo que $E(\{\lambda\}) \neq 0$ (cf. [9], Ch. IX, §2, Th. 2.2(b), page 263) y basta aplicar (i).

(iii) $Id_{\mathcal{H}} = E(\sigma(T)) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\{\lambda_n\})$.

(iv) Si T es hermitiano $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (cf. [13], Ch. 4, Prop. 4.15, page 78). Recíprocamente, si T es normal y tiene espectro real tenemos

$$T^* = \int_{\sigma(T)} \overline{z}\, dE = \int_{\sigma(T)} z\, dE = T.$$

(v) Si $T \geq 0$ entonces es hermitiano. Por (iv) bastará ver que T_η es inversible si $\eta < 0$. Precisamente, si $h \in \mathcal{H}$ podemos escribir

$$\|T_\eta h\|^2 = \|Th\|^2 - 2\eta \cdot \langle Th, h\rangle + \eta^2 \|h\|^2 \geq \eta^2 \|h\|^2,$$

y siendo T_η hermitiano y acotado inferiormente resulta inversible (cf. [13], Ch. 4, Corollary 4.9, page 76). Recíprocamente, si $h \in \mathcal{H}$, T es normal y $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$ tenemos $\langle Th, h\rangle = \int_{\sigma(T)} t\ dE_{h,h}(t)$. Como $dE_{h,h}$ es una medida no negativa $\langle Th, h\rangle \geq 0$ y h es arbitrario.

(vi) Si T es unitario $1 = \|T^*T\| = \|T\|^2$ y $\sigma(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$. Si $|\alpha| < 1$ en $\mathbb{C}$ resulta $T_\alpha = T \circ (Id_{\mathcal{H}} - \alpha T^*)$, T es inversible e $Id_{\mathcal{H}} - \alpha T^*$ también lo es pues $\|\alpha T^*\| = |\alpha| < 1$. Luego T_α es inversible y $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}^1$. Recíprocamente, sea T normal, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}^1$ y $g,\ h \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\langle TT^*g, h\rangle = \int_{\sigma(T)} |z|^2\ dE_{g,h}(z) = \int_{\sigma(T)} 1\ dE_{g,h}(z) = \langle g, h\rangle,$$

i.e. $TT^* = T^*T = Id_{\mathcal{H}}$ y T es unitario. $\square$

3.43. Sobre ideales de $\mathbb{C}^{n\times n}$. Monomorfismos reticulares entre estructuras asociadas a un espacio localmente compacto separado. Ideales w^*- cerrados en espacios de funciones esencialmente acotadas. Ideales modulares.

(i) Dado $n \in \mathbb{N}$ no hay ideales biláteros no triviales en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(ii) Determinar los ideales a izquierda de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(iii) (V. Problema 3.7) Sea X espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean $\mathcal{T}(X)$ el reticulado de abiertos de X, $\mathfrak{I}(X)$ el reticulado de ideales cerrados de $C_0(X)$, ambos respecto del orden parcial de inclusión. La aplicación $U \to I(U)$, donde $I(U) = \{\phi \in C_0(X) :\ \mathrm{supp}(\phi) \subseteq U\}$ para $U \in \mathcal{T}(X)$, es un monomorfismo reticular.

(iv) Sea (X, Σ, μ) espacio de medida $\sigma-$ finita. Exhibir ejemplos de ideales w^*- cerrados de $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$.

(v) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach no unitaria.

(v)(1) Si u es *unidad modular a derecha* [57] de un ideal a izquierda I y $u \in I$ entonces $\mathcal{A} = I$.

(v)(2) Ideales modulares maximales a izquierda son ideales maximales a izquierda.

(v)(3) Todo ideal modular a izquierda propio está contenido en un ideal a izquierda maximal.

(v)(4) Si I es ideal modular a izquierda propio, u es unidad modular a derecha de I y existe $a_0 \in I$ tal que $\|u - a\| < 1$ entonces I es denso.

(v)(5) Si u es unidad modular a derecha y v es unidad modular a izquierda de un ideal I entonces $u - v \in I$.

(v)(6) Si I es ideal cerrado, $\mathcal{A}/I$ es unitario sii I es ideal modular unitario a dereche e izquierda, esto es, *un ideal modular*.

(vi) Sea H espacio de Hilbert, P un proyector sobre H. $\mathcal{K}(H)P$ es ideal cerrado a izquierda en $\mathcal{K}(H)$, siendo modular unitario a izquierda sii $\operatorname{nul}(P) < +\infty$.

Solución

(i) La afirmación es evidente si $n = 1$ por lo que supondremos $n > 1$. Sea $\mathcal{J}$ ideal bilátero no nulo de $\mathbb{C}^{n\times n}$, $A \in \mathcal{J} - \{0\}$, $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Sea $\{E_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n}$ la base canónica de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y fijados $1 \leq i < j \leq n$ sea $E_{(i,j)}$ la matriz que resulta al intercambiar las filas i y j de la matriz idéntica. Entonces $A \cdot E_{(i,j)}$ es la matriz que resulta al intercambiar las columnas i y j de A, mientras que $E_{(i,j)} \cdot A$ es la matriz que resulta al intercambiar

[57] Si I es ideal a izquierda (resp. a derecha), un elemento $u \in \mathcal{A}$ es *unidad modular a derecha de* I (resp. unidad modular a izquierda de I) si $\{a - a \cdot u : \ a \in \mathcal{A}\} \subseteq I$ (resp. si $\{a - u \cdot a : \ a \in \mathcal{A}\} \subseteq I$). I se dice *ideal modular a izquierda* (resp. *a derecha*) cuando posee una unidad modular a derecha (resp. a izquierda).

las filas i y j de A. Si $\operatorname{ran}(A) = 1$ podemos suponer entonces que la primer columna de A es no nula. Hay escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tales que

$$A = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & \lambda_1 \cdot a_{1,1} & \ldots & \lambda_{n-1} \cdot a_{1,1} \\ a_{2,1} & \lambda_1 \cdot a_{2,1} & \ldots & \lambda_{n-1} \cdot a_{2,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \lambda_1 \cdot a_{n,1} & \ldots & \lambda_{n-1} \cdot a_{n,1} \end{Vmatrix}$$

y también podemos asumir que $a_{1,1} \neq 0$. Como

$$\left(a_{1,1}^{-1} \cdot E_{1,1}\right) \cdot A \cdot E_{1,1} = E_{1,1}$$

obtenemos $E_{1,1} \in \mathcal{J}$. Dadas $B, \ C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es

$$B \cdot E_{1,1} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,1} \cdot E_{i,1}, \quad E_{1,1} \cdot C = \sum_{j=1}^{n} c_{1,j} \cdot E_{1,j},$$

de modo que $\mathcal{J}$ contiene a toda matriz D tal que $d_{i,j} = 0$ si $2 \leq i, j \leq n$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ \beta_1, \ldots, \beta_n$ son escalares la matriz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot E_{i,1}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot E_{1,j}\right) = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \cdot \beta_1 & \alpha_1 \cdot \beta_2 & \ldots & \alpha_1 \cdot \beta_n \\ \alpha_2 \cdot \beta_1 & \alpha_2 \cdot \beta_2 & \ldots & \alpha_2 \cdot \beta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n \cdot \beta_1 & \alpha_n \cdot \beta_2 & \ldots & \alpha_n \cdot \beta_n \end{Vmatrix}$$

pertenece a $\mathcal{J}$ y como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ \beta_1, \ldots, \beta_n$ son arbitrarias $\mathcal{J} = \mathbb{C}^{n \times n}$. En el caso general, sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ mínimo tal que la $k-$ ésima columna de A es no nula. La matriz $A \cdot E_{k,1}$ pertenece a $\mathcal{J}$, su primer columna coincide con la $k-$ ésima de A y tiene las restantes columnas nulas. Por el caso anterior, $\mathcal{J} = \mathbb{C}^{n \times n}$.

(ii) Con la notación anterior, fijados $1 \leq i, j \leq n$ la matriz $E_{i,j} \cdot A$ es nula salvo su fila $i-$ ésima, igual a la $j-$ ésima fila de A. Sean

$$A_l = \left(a_{k,h}^{l}\right)_{1 \leq k,h \leq n}, \ l = 1, \ 2,$$

matrices no nulas y veamos que existe $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $\mathbb{C}^{n \times n} \cdot A_0 = \mathcal{I}$, donde

$$\mathcal{I} = \mathbb{C}^{n \times n} \cdot A_1 + \mathbb{C}^{n \times n} \cdot A_2,$$

i.e. todo ideal a izquierda es cíclico. Podemos suponer que A_1 y A_2 no son inversibles a izquierda y que $\mathcal{I} \subsetneqq \mathbb{C}^{n\times n}$. Consideremos las filas de A_1 y A_2 y sea d la dimensión del subespacio de $\mathbb{C}^n$ generado por ellas. Si $d = n$ existe $r \in \mathbb{N}$, $r < n$, e índices

$$1 \leq k_1 < ... < k_r \leq n, \ 1 \leq h_1 < ... < h_{n-r} \leq n$$

tales que la matriz

$$B = \left\| \begin{matrix} a^1_{k_1,1} & ... & a^1_{k_1,n} \\ ... & ... & ... \\ a^1_{k_r,1} & ... & a^1_{k_r,n} \\ a^2_{h_1,1} & ... & a^2_{h_1,n} \\ ... & ... & ... \\ a^2_{h_{n-r},1} & ... & a^2_{h_{n-r},n} \end{matrix} \right\|$$

es inversible. Pero

$$B = \left(\sum_{\alpha=1}^{r} E_{\alpha,k_\alpha} \right) \cdot A_1 + \left(\sum_{\beta=1}^{n-r} E_{\beta,h_\beta} \right) \cdot A_2$$

y se contradice que $\mathcal{I}$ es propio, de modo que $d < n$. Supongamos que existe $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s < d$, e índices

$$1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, \ 1 \leq j_1 < ... < j_{d-s} \leq n$$

tales que las filas $i_1, \ ... \ , \ i_s$ de A_1 y $j_1, \ ... \ , \ j_{d-s}$ de A_2 son linealmente independientes. Si

$$A_0 = \left\| \begin{matrix} a^1_{i_1,1} & ... & a^1_{i_1,n} \\ ... & ... & ... \\ a^1_{i_s,1} & ... & a^1_{i_s,n} \\ a^2_{j_1,1} & ... & a^2_{j_1,n} \\ ... & ... & ... \\ a^2_{j_{d-s},1} & ... & a^2_{j_{d-s},n} \\ 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{matrix} \right\| \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

tenemos

$$A_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^{s} E_{\alpha,i_\alpha} \right) \cdot A_1 + \left(\sum_{\beta=1}^{d-s} E_{s+\beta,j_\beta} \right) \cdot A_2$$

y $\mathbb{C}\cdot A_0 \subseteq \mathcal{I}$. Sea $F_l\left(A_m\right)$ la $l-$ ésima fila de $A_m,\ 1 \leq l \leq n,\ m = 1,\, 2.$ Fijados m y $\gamma \in \{1,\ \ldots\ ,n\}$ habrá únicas constantes $c^m_{\gamma,\alpha}$ ´s, $1 \leq \alpha \leq s$ y $d^m_{\gamma,\beta}$ ´s, $1 \leq \beta \leq d-s$, tales que

$$F_\gamma\left(A_m\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} c^m_{\gamma,\alpha} \cdot F_{i_\alpha}\left(A_1\right) + \sum_{\beta=1}^{d-s} d^m_{\gamma,\beta} \cdot F_{j_\beta}\left(A_2\right),$$

i.e.

$$a^m_{\gamma,\delta} = \sum_{\alpha=1}^{s} c^m_{\gamma,\alpha} \cdot a^1_{i_\alpha,\delta} + \sum_{\beta=1}^{d-s} d^m_{\gamma,\beta} \cdot a^2_{j_\beta,\delta},\ 1 \leq \delta \leq n.$$

Para $m = 1,\ 2$ hacemos

$$B_m = \left\Vert \begin{array}{lllllllll} c^m_{1,1} & \ldots & c^m_{1,s} & d^m_{1,1} & \ldots & d^m_{1,d-s} & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^m_{n,1}\ldots & \ldots & c^m_{n,s} & d^m_{n,1} & \ldots & d^m_{n,d-s} & * & \ldots & * \end{array} \right\Vert \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

resulta $A_m = B_m \cdot A_0$ y $\mathbb{C}\cdot A_0 \supseteq \mathcal{I}$. Finalmente, si p. ej. cada fila de A_2 es combinación lineal de d filas linealmente independientes de A_1 los coeficientes $d^2_{\gamma,\beta}$ ´s son nulos y, análogamente, si cada fila de A_1 es combinación lineal de d filas linealmente independientes de A_2 los coeficientes $c^1_{\gamma,\alpha}$´ s son nulos. Ambos casos son asimilables al anterior. En definitiva, los ideales a izquierda son cíclicos.

(iii) Si U es abierto en X, claramente $I(U)$ es subespacio vectorial de $C_0\left(X\right)$. Si $f \in C_0\left(X\right)$ y $\phi \in I(U)$ entonces $\operatorname{supp}\left(f\cdot\phi\right) \subseteq \operatorname{supp}\left(\phi\right) \subseteq U$ y $f\cdot\phi \in C_0\left(X\right)$, i.e. $f\cdot\phi \in I(U)$ e $I(U)$ es un ideal. Por la continuidad de las evaluaciones $I(U)$ es cerrado. Así la aplicación I está bien definida. Sean $V_1,\ V_2 \in \mathcal{T}\left(X\right)$, $x_0 \in V_1 - V_2$. Sea V_0 entorno relativamente compacto de x_0 cuya clausura esté contenida en V_1 (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.7, page 38). Como X es es localmente compacto y separado deviene completamente regular (cf. [23], pág. 170). Existe entonces $\varrho \in C_{[0,1]}\left(X\right)$ tal que $\varrho\left(x_0\right) = 1$ y $\operatorname{supp}\left(\varrho\right) \subseteq V_0$. Si $\varepsilon > 0$ el conjunto cerrado $\{x \in X:\ \left|\varrho\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\}$ está contenido en el conjunto compacto $\operatorname{cl}\left(V_0\right)$ y, siendo X separado, el mismo es compacto. Luego $\varrho \in C_0\left(X\right)$, más aún, $\varrho \in I(V_1)$ y $\varrho \notin I(V_2)$ porque $\varrho\mid_{X-V_2}$ no es la función nula. Si $W_1,\ W_2$ son abiertos es inmediato que $I(W_1 \cap W_2) = I\left(W_1\right) \cap I\left(W_2\right)$. Bastará ver que

$$I(W_1 \cup W_2) = \operatorname{cl}\left(I\left(W_1\right) + I\left(W_2\right)\right). \qquad (121)$$

Como $W_i \subseteq W_1 \cup W_2$ entonces $I(W_i) \subseteq I(W_1 \cup W_2)$ si $i = 1,\ 2$, de donde sigue la inclusión $\supseteq$. Finalmente, si $\varphi \in I(W_1 \cup W_2)$, $s > 0$, probaremos que existen $\varphi_1 \in I(W_1)$, $\varphi_2 \in I(W_2)$ tales que $\|\varphi - \varphi_1 - \varphi_2\| \leq s$. El conjunto $K = \{x \in X : \ |\varphi(x)| \geq s/3\}$ es compacto y está contenido en $W_1 \cup W_2$, por lo que hay funciones $\psi_1,\ \psi_2 \in C_{[0,1]}(X)$ tales que $\psi_1 + \psi_2 \equiv 1$ sobre K y $\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq W_i$, $i = 1,\ 2$ (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.13, page 41). Basta definir $\varphi_i = \varphi \cdot \psi_i$, $i = 1,\ 2$, y en particular $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ sobre K y si $x \notin K$ es $|(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)(x)| < s$, por lo que $\|\varphi - \varphi_1 - \varphi_2\| \leq s$, de donde sigue (121).

(iv) Si $\Delta \in \Sigma$ el conjunto

$$\mathcal{J}_\Delta = \{\phi \in L^\infty(X, \Sigma, \mu) : \ \phi\mid_\Delta = 0 \ \ a.e. \ [\mu]\}$$

es claramente ideal de $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. Sea $\psi \in L^\infty(X, \Sigma, \mu) - \mathcal{J}_\Delta$, H subconjunto medible de medida positiva de Δ sobre el cual ψ no se anula. Por la $\sigma-$ finitud de la medida existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $\Lambda = \{|\psi| \geq \varepsilon\} \cap H$ tiene medida finita y positiva. Observando que $\left(\overline{\psi}/|\psi|\right) \cdot \varkappa_\Lambda \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ el w^*- entorno de ψ

$$\mathcal{V} = \left\{\phi \in L^\infty(X, \Sigma, \mu) : \left|\int_\Lambda (\phi - \psi) \cdot \frac{\overline{\psi}}{|\psi|} \ d\mu\right| < \varepsilon \ \mu(\Lambda)\right\}$$

es disjunto con $\mathcal{J}_\Delta$, pues si $\phi \in \mathcal{V} \cap \mathcal{J}_\Delta$ sería

$$1 > \left|\int_\Lambda (\phi - \psi) \cdot \frac{\overline{\psi}}{|\psi|} \ \frac{d\mu}{\varepsilon \ \mu(\Lambda)}\right| = \int_\Lambda |\psi| \ \ \frac{d\mu}{\varepsilon \ \mu(\Lambda)} \geq 1,$$

lo cual es absurdo.

(v)(1) Trivial.

(v)(2) Basta notar que si I es ideal modular a izquierda también lo es todo ideal a izquierda que lo contenga.

(v)(3) Sea I ideal propio modular a izquierda, $u \in \mathcal{A}$ unidad modular a derecha de I. La clase $\mathcal{F}$ de ideales propios a izquierda que contienen a I es no vacía, pues contiene a I. Considerando $\mathcal{F}$ con el orden parcial de inclusión, si $\{I_j\}_{j\in J}$ es cadena filtrante superiormente en $\mathcal{F}$ entonces $\cup_{j\in J} I_j$ es ideal a izquierda, contiene a I y por (v)(1) no contiene a u, i.e. $\cup_{j\in J} I_j \in \mathcal{F}$. Por el lema de Zorn existe $I_0 \in \mathcal{F}$ maximal y es inmediato que I_0 es ideal a izquierda maximal con la propiedad de contener a I.

(v)(4) Sea I ideal propio modular a izquierda, $u \in \mathcal{A}$ unidad modular a derecha de I, $a_0 \in I$. Si $a \in \mathcal{A}$ entonces $a - a \cdot (u - a_0) \in I$ porque $a - a \cdot u \in I$ y $a \cdot a_0 \in I$. Como a es arbitrario $u - a_0$ es unidad modular a derecha de I. Más aún, como

$$a - a \cdot (u - a_0) \in I,$$

$$a \cdot (u - a_0) - a \cdot (u - a_0)^2 \in I, \ \ldots$$

Inductivamente, $\left\{a \cdot (u - a_0)^{n-1} - a \cdot (u - a_0)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$. Por lo tanto si $m \in \mathbb{N}$ el elemento

$$\sum_{n=1}^{m} \left[a \cdot (u - a_0)^{n-1} - a \cdot (u - a_0)^n\right] = a - a \cdot (u - a_0)^m$$

pertenece a I. Si fuere $\|u - a_0\| < 1$ al hacer $m \to +\infty$ resultaría $a \in \operatorname{cl} I$, y como a es arbitrario I deviene denso.

(v)(5) Por hipótesis, $a - a \cdot u \in I$ y $a - v \cdot a \in I$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Haciendo $a = v$ en el primer caso, $a = u$ en el segundo caso y restando, $v - u \in I$.

(v)(6) Inmediato, por (v)(5).

(vi) Si $\{K_n P\}_{n \geq 1}$ es una sucesión convergente a K en $\mathcal{K}(H)$, como

$$\|K_n P - KP\| = \|(K_n P - K) P\| \leq \|K_n P - K\|$$

para cada n entonces $\|K_n P - KP\| \to 0$ si $n \to +\infty$. Luego $\mathcal{K}(H) P$ es cerrado en $\mathcal{K}(H)$ porque debe ser $K = KP$ y, evidentemente, es ideal a izquierda. Si $\operatorname{nul}(P) < +\infty$ y $C = Id_H - P$ entonces C es compacto porque es operador de rango finito con $\operatorname{ran}(C) = \ker(P)$ y, si $E \in \mathcal{K}(H)$, $E - EC = EP$, i.e. $E - EC \in \mathcal{K}(H) P$. Recíprocamente, sea C_0 unidad a derecha de $\mathcal{K}(H) P$ y sea $\{e_i\}_{i \in I}$ base ortonormal de H. Para cada $i \in I$ el operador $e_i^* \bigotimes e_i$ es compacto pues tiene rango finito, donde $(e_i^* \bigotimes e_i) f = \langle f, e_i \rangle e_i$. Luego existe $E_i \in \mathcal{K}(H)$ tal que $(e_i^* \bigotimes e_i)(Id_H - C_0) = E_i P$, de modo que $(e_i^* \bigotimes e_i)(f - C_0 f) = 0$ si $f \in \ker(P)$. Como $f - C_0 f = \sum_{i \in I} \langle f - C_0, e_i \rangle \ e_i$ obtenemos $C_0 f = f$ si $f \in \ker(P)$. Como C_0 es compacto P tiene nulidad finita. $\square$

3.44. Sobre C^*- álgebras.

(i) Sea $\mathcal{A}$ el espacio de funciones analíticas sobre el interior del disco unitario complejo D que son continuas sobre ∂D, con la estructura algebraica usual. Si $f \in \mathcal{A}$ definimos $f^* \in \mathcal{A}$ mediante $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \operatorname{cl} D$, y $\|f\| = \sup_{z \in \operatorname{cl} D} |f(z)|$. Entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach involutiva unitaria, pero no es C^* álgebra.

(ii) El álgebra $\mathcal{L}_2(H)$ de operadores de Hilbert - Schmidt sobre un espacio de Hilbert separable H no es una C^*- álgebra (V. Problema 3.34).

(iii) Sea $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ una colección de C^* álgebras,

$$^{\infty}\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} : \ x \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i, \ \sup_{i \in I} \|x_i\| < +\infty \right\}.$$

Entonces $^{\infty}\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ admite una estructura de C^* álgebra.

(iv) Sea X un espacio localmente compacto, $\mathcal{A}$ una C^* álgebra, $C_b(X, \mathcal{A})$ el espacio de funciones continuas acotadas de X en $\mathcal{A}$ y $C_0(X, \mathcal{A})$ el subespacio de $C_b(X, \mathcal{A})$ de funciones $f : X \to \mathcal{A}$ tal que $\{\|f\| \geq \varepsilon\}$ es compacto para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $C_b(X, \mathcal{A})$ y $C_0(X, \mathcal{A})$ tienen estructuras de C^* álgebras.

(v) Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra con un número finito de generadores $a_1, \ \dots \ , a_n$. Hay un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C}^n$ y un isomorfismo $*-$ isométrico $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}(K)$ tal que $\rho(a_k) = \pi_k$, donde

$$\pi_k(z_1, \ \dots \ , z_n) = z_k, \ 1 \leq k \leq n.$$

(vi) Sea $\mathbb{D}$ el disco cerrado unitario en $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \partial \mathbb{D}$ y

$$\mathbb{S} = \{\exp(i\theta) : \ \pi/4 \leq |\theta| \leq 3\pi/4\}.$$

Considerar los homomorfismos de C^* álgebras

$$\Theta : C(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T}), \ \Theta(f) = f|_{\mathbb{T}}, \ f \in C(\mathbb{D}),$$

$$\Phi : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{S}), \ \Phi(g) = g|_{\mathbb{S}}, \ g \in C(\mathbb{T}).$$

Hallar (i) un elemento unitario $u \in C(\mathbb{T})$ tal que $u \neq \Theta(f)$ para todo $f \in C(\mathbb{D})$ inversible y (ii) un proyector $q \in C(\mathbb{S})$ tal que $q \neq \Phi(p)$ para todo proyector $p \in C(\mathbb{T})$.

(vii) Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra, $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ y c son elementos de $\mathcal{A}$ tales que $0 \leq a_1 \leq b_1$ y $0 \leq a_2 \leq b_2$, resulta $\left\| a_1^{1/2}\ c \right\| \leq \left\| b_1^{1/2}\ c \right\|$. Luego $\left\| a_1^{1/2}\ c\ a_2^{1/2} \right\| \leq \left\| b_1^{1/2}\ c\ b_2^{1/2} \right\|$.

Solución

(i) Sabemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach involutiva unitaria. Definiendo $f(z) = z - i,\ z \in \operatorname{cl} D$ entonces $f \in \mathcal{A}$ y

$$\|f^* \cdot f\| = \sup_{z \in \operatorname{cl} D} |(z+i)(z-i)| = \sup_{z \in \operatorname{cl} D} \left|z^2 + 1\right| = 2 < 4 = \|f\|^2,$$

i.e. $\mathcal{A}$ no es C^* álgebra.

(ii) Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal de H. Si P es el proyector sobre el subespacio generado por f_1 y f_2 entonces $\|P\|_2 = \|P^*P\|_2 = \sqrt{2}$.

(iii) Sea ${}^\infty \bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ con la estructura algebraica natural. Si $x = (x_i)_{i \in I}$ basta hacer $x^* = (x_i^*)_{i \in I}$ y $\|x\| = \sup_{i \in I} \|x_i\|$.

(iv) Sea $C_b(X, \mathcal{A})$ munido de la estructura algebraica natural de C^* álgebra y consideremos $C_0(X, \mathcal{A})$ como subespacio de $C_b(X, \mathcal{A})$. Como la involución es isométrica para cada $\varepsilon > 0$ y $f \in C_0(X, \mathcal{A})$ es $\{\|f^*\| \geq \varepsilon\} = \{\|f\| \geq \varepsilon\}$, de modo que $f^* \in C_0(X, \mathcal{A})$. Así $C_0(X, \mathcal{A})$ es C^* subálgebra de $C_b(X, \mathcal{A})$.

(v) Notemos que $\mathcal{A} = \operatorname{cl}\{p(a_1, \ldots, a_n),\ p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]\}$. Si $\mathfrak{X}[\mathcal{A}]$ es el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$ sea

$$\tau : \mathfrak{X}[\mathcal{A}] \to \mathbb{C}^n,$$

$$\tau(h) = (h(a_1), \ldots, h(a_n)),\ h \in \mathfrak{X}[\mathcal{A}].$$

τ es continua e inyectiva, de modo que el conjunto $K = \tau(\mathfrak{X}[\mathcal{A}])$ es compacto en $\mathbb{C}^n$ y $\tau : \mathfrak{X}[\mathcal{A}] \to K$ es homeomorfismo. Quedan inducidos los isomorfismos $*-$ isométricos recíprocos

$$\tau^\sharp : C(K) \to C(\mathfrak{X}[\mathcal{A}]),\ \tau^\sharp f = f \circ \tau,$$

$$\left(\tau^{-1}\right)^\sharp : C(\mathfrak{X}[\mathcal{A}]) \to C(K),\ \left(\tau^{-1}\right)^\sharp g = g \circ \tau^{-1},$$

donde $f \in C(K)$ y $g \in C(\mathfrak{X})$ respectivamente. Sea $G : \mathcal{A} \to C(\mathfrak{X}[\mathcal{A}])$ la transformada de Gelfand de $\mathcal{A}$, $1 \leq k \leq n,\ z \in K$. Si $\rho = (\tau^{-1})^{\sharp} \circ G$ tenemos

$$\rho(a_k)(z) = \left(\tau^{-1}\right)^{\sharp}(G(a_k)(z)) = G(a_k)\left(\tau^{-1}(z)\right) = \tau^{-1}(z)(a_k),$$

$$z = \tau\left(\tau^{-1}(z)\right) = \left(\tau^{-1}(z)(a_1), \ \dots\ , \tau^{-1}(z)(a_n)\right)$$

y deducimos que $\rho(a_k)(z) = z_k$, siguiendo la tesis.

(vi) Sea $u : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $u(z) = z,\ z \in \mathbb{T}$. Entonces u es unitaria y, si existiese $f \in \mathrm{U}(C(\mathbb{D}))$ tal que $f\ |_{\mathbb{T}} = u$, definimos $F : \mathbb{D} \to \mathbb{T},\ F = \ f/|f|$. F está bien definida porque f no tiene ceros y $F\ |_{\mathbb{T}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{T}}$, lo cual no es posible ya que $\mathbb{T}$ no es retracto de $\mathbb{D}$ (cf. [14], Ch. XVI, §3, L. Brouwer´s Corollary 2.2, page 341). Por otra parte, sea $q \in C(\mathbb{S})$ la aplicación $q = \varkappa_{\{\exp(i\theta):\ \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4\}}$. Como todo proyector de $C(\mathbb{T})$ es trivial entonces q no es la restricción a $\mathbb{S}$ de proyector alguno sobre $\mathbb{T}$.

(vii) Como

$$\left\|a_1^{1/2}\ c\right\|^2 = \left\|\left(a_1^{1/2}\ c\right)^*\left(a_1^{1/2}\ c\right)\right\| = \|c^*\ a_1\ c\|,$$

$$\left\|b_1^{1/2}\ c\right\|^2 = \left\|\left(b_1^{1/2}\ c\right)^*\left(b_1^{1/2}\ c\right)\right\| = \|c^*\ b_1\ c\|,$$

bastará ver que $\|c^*\ a_1\ c\| \leq \|c^*\ b_1\ c\|$. Notemos que $c^*\ a_1\ c$ y $c^*\ b_1\ c$ son elementos positivos (cf. [21], Ch. 4, Corollary 4.2.7, page 249). Además $c^*\ a_1\ c \leq c^*\ b_1\ c$ pues también $c^*\ (b_1 - a_1)\ c \geq 0$. Tenemos entonces $0 \leq a \leq b$, donde $a = c^*\ a_1\ c$ y $b = c^*\ b_1\ c$. En consecuencia, si 1 es el elemento idéntico de $\mathcal{A}$, tenemos $0 \leq a \leq b \leq \|b\| \cdot 1$. Por el teorema espectral $\sigma(\|b\| \cdot 1 - a) = \|b\| - \sigma(a)$ y resulta $\|b\| - \sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Entonces $\sigma(a) \subseteq [0, \|b\|]$, *i.e.* $r_{sp}(a) = \|a\| \leq \|b\|$. □

3.45. Elementos unitarios y exponenciales en una C^*- álgebra.

(i) Dar ejemplo de una C^* álgebra $\mathcal{A}$ y de un elemento unitario u no perteneciente a $\exp(i\mathcal{A}_h)$.

(ii) Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra, $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ el grupo multiplicativo de elementos unitarios de $\mathcal{A}$ y $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Si $\|e-u\| < 2$ existe $v \in \mathcal{A}_h$ tal que $u = \exp(iv)$.

(iii) Si $u_1,\ u_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ y $\|u_1 - u_2\| < 2$ entonces $u_2 \in u_1 \cdot \exp(i\mathcal{A}_h)$.

(iv) Sea $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ el siguiente subconjunto de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \left\{ \prod_{j=1}^{n} \exp(ih_j) :\ h_j \in \mathcal{A}_h \ \ si \ \ 1 \le j \le n,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ es abierto, cerrado y arco conexo en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$.

(v) Determinar la componente conexa de la identidad en $\mathcal{U}$.

(vi) En general, el producto de exponenciales unitarios no es un exponencial.

Solución

(i) Si $\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ y $u(z) = z,\ z \in \mathbb{T}$, entonces $u \in \mathcal{A}$ es unitario. Supongamos $u = \exp(iv)$ para cierto $v \in \mathcal{A}_h$. Entonces v es real - valuada y $z = \exp(iv(z))$ para $z \in \mathbb{T}$. Podemos escribir $z = \exp[i \arg(z)]$, con $0 \le \arg(z) < 2\pi$. Para cada z existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $v(z) = \arg(z) + 2k\pi$. Como el rango de la aplicación continua

$$\mathbb{T} \to (2\pi)\mathbb{Z},\ z \to v(z) - \arg(z),$$

ha de ser conexo, existe $\overline{k} \in \mathbb{Z}$ único tal que $v(z) \equiv \arg(z) + 2\overline{k}\pi$. Pero $v(1) = 2\overline{k}\pi$, $\lim_{\theta \to 0^+} v[\exp(i(2\pi - \theta))] = 2\pi\left(\overline{k}+1\right)$ y se contradice la continuidad de v en $z = 1$.

(ii) Dado $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ tal que $\|e-u\| < 2$, aplicando el teorema espectral es

$$1 - \sigma(u) = \sigma(e-u) \subseteq \overline{D}(0, \|e-u\|) \subseteq D(0,2).$$

Por lo tanto $-1 \notin \sigma(u)$ y hay un $\varepsilon > 0$ tal que $\Lambda \supseteq \sigma(u)$, donde Λ es el sector angular $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} :\ |\arg(z)| > \pi - \varepsilon\}$. La aplicación

$$\log\ z = \ln\ |z| + i\arg(z),\ \ |\arg(z)| < \pi,$$

definida sobre $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, es continua sobre Λ. Por el cálculo funcional aplicado a u (cf. [21], Ch. 4, Th. 4.4.5, page 271), como $\log|_{\sigma(u)} = i\arg$ entonces $-i\ \log\ u \in \mathcal{A}_h$ y

$$u = \exp\log\ u = \exp[i\ (-i\ \log\ u)]$$

(cf. [21], Ch. 4, Th. 4.4.8, page 273).

(iii) Sean $u_1,\ u_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, $\|u_1 - u_2\| < 2$. Como $\|u_1^*\| = 1$ tenemos

$$2 > \|u_1^*\| \, \|u_1 - u_2\| \geq \|e - u_1^* \, u_2\|$$

y basta aplicar (ii).

(iv) Dado $u \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$, por (iii) $B(u,2) \cap \mathcal{U}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Dado $v \in \mathrm{cl}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} \mathcal{V}(\mathcal{A})$ sea $w \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$ tal que $\|v - w\| < 2$. Por (iii) es $v \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$ y este conjunto deviene cerrado. Ahora, si $a,\ b \in \mathcal{A}_h$ sea $\varrho_{a,b} : [0,1] \to \mathcal{V}(\mathcal{A})$, $\varrho_{a,b}(t) = \exp[i(a + t(b - a))]$, $0 \leq t \leq 1$. La aplicación $\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es Fréchet diferenciable (por lo tanto continua) y, para $c \in \mathcal{A}$, es $[D \exp]_c = \exp(c) \ \Phi(C_c)$, donde Φ es la función entera $\Phi(z) = (\exp(z) - 1)/z$ y $C_c(d) = dc - cd$ para cada $d \in \mathcal{A}$ (cf. [42], Ch. 10, 10.43(b), page 257). En consecuencia $\varrho_{a,b}$ es continua. Si $\{h_1,\ \ldots,\ h_n,\ k_1,\ \ldots,\ k_{n+m}\} \subseteq \mathcal{A}_h$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\varrho : [0,1] \to \mathcal{V}(\mathcal{A}),$$

$$\varrho(t) = \prod_{j=1}^{n} \varrho_{h_j,k_j}(t) \prod_{l=1}^{m} \varrho_{e,k_{l+n}}(t), \ 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces ϱ es continua,

$$\varrho(0) = \prod_{j=1}^{n} \exp(ih_j) \quad y \quad \varrho(1) = \prod_{l=1}^{n+m} \exp(ik_l).$$

(v) Si $\mathcal{U}_e$ es la componente conexa de la identidad en $\mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U}_e$ es el subgrupo generado por $\exp(\mathcal{A}_h)$, es decir, $\mathcal{U}_e = \mathcal{V}(\mathcal{A})$. Precisamente, como $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ es conexo y contiene a e es $\mathcal{V}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{U}_e$. Además $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ es abierto y cerrado en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ y sigue (v).

(vi) Sea $\mathcal{A} = C(\mathbb{T},\ \mathbb{C}^{2\times 2})$ con la estructura canónica de álgebra C^*. Definimos $p,\ q \in \mathcal{A}$ como

$$p(z) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \ q(z) = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 1 - \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ -\operatorname{Im}(z) & 1 + \operatorname{Re}(z) \end{matrix} \right\|, \ z \in \mathbb{T},$$

y $u = \exp(i\pi p)\exp(i\pi q)$. Como p y q son hermitianos u es unitario. Más aún, como p y q son proyectores obtenemos $\exp(i\pi p) = I_{2\times 2} - 2p$ y $\exp(i\pi q) = I_{2\times 2} - 2q$. Entonces $u = I_{2\times 2} - 2p - 2q + 4pq$, i.e.

$$u(z) = \left\| \begin{array}{cc} \mathrm{Re}\,(z) & \mathrm{Im}\,(z) \\ & \\ -\,\mathrm{Im}\,(z) & \mathrm{Re}\,(z) \end{array} \right\| \tag{122}$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} z + \overline{z} & -i\,(z - \overline{z}) \\ & \\ i\,(z - \overline{z}) & z + \overline{z} \end{array} \right\| = z\ P + \overline{z}\ Q,$$

donde P y Q son los proyectores siguientes

$$P = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -i \\ & \\ i & 1 \end{array} \right\|,\ Q = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} 1 & i \\ & \\ -i & 1 \end{array} \right\|$$

en $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Si $z \in \mathbb{T}$ y $f \in \mathfrak{X}\,(u(z))$ por el Problema 3.37(vii) es

$$f\,(u(z)) = f(z)\ P + f\,(\overline{z})\ Q.$$

Si fuere $u = \exp(iv)$ para cierto $v \in C\,(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ hermitiano tendríamos $f\,[\exp(iv(z))] = f(z)\ P + f\,(\overline{z})\ Q$. Pero si $u(z) \equiv \exp(iv(z))$ hay entonces una determinación continua del argumento tal que

$$v(z) \equiv [\arg(z) + 2k\pi]\ P + [\arg(z) + (2k-1)\,\pi]\ Q,$$

donde k es algún entero unívocamente determinado y $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. Luego, si $\theta\,(z) \equiv \arg(z) + 2k\pi$ tenemos

$$v = \theta\ I_{2\times 2} - \pi\ Q,$$

$$u\,(z) = \exp(iv\,(z)) = \exp(i\theta\,(z)\ I_{2\times 2})\ \exp(-i\pi\ Q)$$

$$= z\ (I_{2\times 2} - 2\ Q) = z\ (P - Q) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -iz \\ & \\ iz & 0 \end{array} \right\|,$$

en contradicción con (122). □

4. Sobre Variable compleja

4.1. Mayorantes radiales para ciertas funciones analíticas.

Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f(0) = i$ e $\operatorname{Im} f(z) > 0$ para todo z. Entonces
$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|},\ z \in D(0,1).$$

Solución

La función analítica $g(z) = i\ (1+z)/(1-z),\ |z| < 1$, transforma el disco $D(0,1)$ en el semiplano $\{z \in C :\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Además

$$g^{-1}(w) = (1+iw)/(1-iw),\ \operatorname{Im}(w) > 0,$$

función también analítica. Entonces la función $g^{-1} \circ f : D(0,1) \to D(0,1)$ es analítica y $(g^{-1} \circ f)(0) = 0$. Por el lema de Schwartz se tiene

$$\left|(g^{-1} \circ f)(z)\right| < |z| \qquad si \qquad 0 < |z| < 1$$

o existe $\mu \in S^1$ tal que $(g^{-1} \circ f)(z) = \mu\ z$ si $|z| < 1$. Pero

$$\left|(g^{-1} \circ f)(z)\right| < |z| \Leftrightarrow (1-|z|^2)\ (1-|f(z)|^2) + 2\ \operatorname{Im}(f(z))\ (1+|z|^2) < 0$$

lo cual no es posible si $\operatorname{Im} f(z) > 0$ y $0 < |z| < 1$. Luego

$$\frac{1+i\ f(z)}{1-i\ f(z)} = \mu\ z$$

de modo que $f(z) = -i\ (\mu\ z - 1)/(\mu\ z + 1)$ y sigue enseguida la desigualdad buscada. □

4.2. Sobre inversión de ciertas funciones analíticas y propiedades de mínima.

Si $\alpha > 0$ indicamos Δ_α al disco en el plano complejo centrado en cero de radio α. Sea $f : \Delta_R \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq M$ para $|z| < R$, donde M es una constante positiva fija. Supongamos que está definida $f^{-1} : \Delta_r \to \Delta_R$. Entonces:

(i) $|f^{-1}(z)| \leq (|z|/r)\ R,\ z \in \Delta_r$.

(ii) $|f(z)| < r$ si $|z| < (rR)/M$.

(iii) $f^{-1}(f(z)) = z, \ z \in \Delta_{(rR)/M}$. En particular, f es $1-1$ sobre $\Delta_{(rR)/M}$.

(iv) $\min_{|z|=(rR)/M} \ |f(z)| \geq r^2/M$.

Solución

(i) Podemos suponer $M > r$. Veamos que $f^{-1}(\Delta_r)$ es una región. En efecto, es abierta por la continuidad de f. Supongamos que Λ es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de $f^{-1}(\Delta_r)$. En particular, Λ es abierto en el plano complejo y, como f es $1-1$ sobre Λ, entonces su derivada no se anula en punto alguno de Λ (cf. [43], Th. 10.33, pág. 233). Por lo tanto, $f(\Lambda)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y $f(\Lambda) \subseteq \Delta_r$. Como f^{-1} está definida sobre Δ_r entonces $f\ |_{f^{-1}(\Delta_r)}$: $f^{-1}(\Delta_r) \to \Delta_r$ es biyectiva y $f(\Lambda)$ debe ser cerrado. Como Λ_r es conexo y $f(\Lambda) \neq \emptyset$ entonces $f(\Lambda) = \Delta_r$, o sea $\Lambda = f^{-1}(\Delta_r)$. Podemos afirmar entonces que $f\ |_{f^{-1}(\Delta_r)}$ tiene derivada no nula en todo punto e inversa analítica. Indicando $\mathfrak{h}_\alpha$ a la aplicación $\mathfrak{h}_\alpha(z) = \alpha\ z, \ z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\Delta_1 \ \xrightarrow{\mathfrak{h}_r} \ \Delta_r \ \xrightarrow{f^{-1}} \ \Delta_R \ \xrightarrow{\mathfrak{h}_{1/R}} \ \Delta_1.$$

La función $\mathfrak{h}_{1/R} \circ f^{-1} \circ \mathfrak{h}_1$ aplica Δ_1 en Δ_1, cero en cero y es analítica. Por el lema de Schwartz sigue entonces (i).

(ii) La función $\mathfrak{h}_{1/M} \circ f \circ \mathfrak{h}_R : \Delta_1 \to \Delta_1$ es analítica y aplica cero en cero. Por el lema de Schwartz resulta $|f(Rz)| \leq M\ \ |z|, \ z \in \Delta_1$. Como $r/M < 1$ tenemos entonces $|f\,[(R\ r\ z)/M]| \leq |r\ z|, \ z \in \Delta_1$, de donde sigue (ii).

(iii) Basta observar que, por (ii), $\Delta_{(rR)/M} \subseteq f^{-1}(\Delta_r)$.

(iv) Dado $z \in \Delta_{(rR)/M}$, aplicando (i) y (iii) tenemos

$$|z| = \left|f^{-1}(f(z))\right| \leq (R/r)\ \ |f(z)|\,. \tag{123}$$

Entonces $|f(z)| \geq (r/R)\ \ |z|$. Además, por el principio del módulo mínimo, la continuidad de f y la compacidad de la circunferencia existe z_0 tal que $|z_0| = (rR)/M$ y

$$\min_{|z|=(rR)/M} \ |f(z)| = \min_{z \in \Delta_{(rR)/M}} \ |f(z)| = |f(z_0)|\,.$$

Sea $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de puntos de $\Delta_{(rR)/M}$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Por (123) tenemos $|z_n| \leq (R/r)\ |f(z_n)|$ para cada n y, si $n \to \infty$,

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| \geq r^2/M$$

toda vez que $|z| = (rR)/M$ y sigue (iv). □

4.3. Sobre algunos productos analíticos.

(i) Sean $a_1, \ldots, a_n$ puntos del disco abierto Δ de centro cero y radio uno en $\mathbb{C}$, no necesariamente distintos. Consideremos la función compleja

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}\ z}.$$

B es analítica sobre Δ y $|B(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

(ii) Si $|\alpha| < 1$ entonces B asume n veces el valor α sobre Δ, i.e. es una aplicación $n - 1$ sobre Δ.

(iii) Sea f una función analítica y acotada por una constante M sobre Δ. Si $a_1, \ldots, a_n$ son ceros de f (repetidos tantas veces como sea su multiplicidad) entonces $|f(z)| \leq M\ |B(z)|$, donde B es como en el problema anterior. -¿Bajo qué circunstancias se da la igualdad?-

(iv) Supongamos que f tiene un cero de orden $k \geq 0$ en cero. Definiendo $f_1(z) = f(z)/z^k$ cuando $z \neq 0$ y $f_1(0) = f^{(k)}(0)/k!$ entonces f_1 es acotada por M sobre Δ.

(v) Sea $a_1,\ a_2, \ldots$ la sucesión de ceros no nulos de f (considerados tantas veces como su multiplicidad). Probar que $\beta = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} |a_k|$ existe.

(vi) $\beta \neq 0$.

(vii) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\ |a_k| > -\infty$.

Solución

(i) Es trivial.

(ii) Si $|\alpha| < 1$ entonces $|\alpha| < |B(z)|$ si $|z| = 1$ y, por el teorema de Rouché, las funciones B y $B - \alpha$ tienen el mismo número de ceros sobre Δ.

(iii) La función f/B es analítica sobre Δ y aplicando el principio del módulo máximo, si $0 < r < 1$ tenemos

$$\max_{|z|\le r} \left|\frac{f(z)}{B(z)}\right| = \max_{|z|=r} \left|\frac{f(z)}{B(z)}\right| \le M \ \max_{|z|=r} \ |B(z)|^{-1}.$$

Si $r \to 1^-$ tenemos la desigualdad buscada. Por otra parte, si para algún $z \in \Delta$ resulta $|f(z)| = M \ |B(z)|$ entonces f/B debe ser constante por el mismo principio. Existirá entonces $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu| = 1$ y $f \equiv \mu \ M \ B$.

(iv) Sigue en particular del problema anterior.

(v) $\{\prod_{k=1}^n \ |a_k|\}_{n\ge 1}$ es una sucesión decreciente de números positivos.

(vi) Si $B_n(z) = \prod_{k=1}^n [(z-a_k)/(1-\overline{a_k}\ z)]$, $n \ge 1$, por el problema anterior tenemos

$$|f_1(0)| \le M \ |B_n(0)| = M \prod_{k=1}^n |a_k|$$

y deducimos que $\beta \ge \left|f^{(k)}(0)\right|/(M \ k!) > 0$.

(vii) Podemos escribir

$$\sum_{k=1}^\infty \ln \ |a_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \ln \ |a_k| = \ln\beta \ge \ln \ \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{M \ k!} > -\infty. \qquad \square$$

4.4. La fórmula de Jensen.

Sea f analítica en Δ y continua en $\mathrm{cl}\ \Delta$.

(i) Si f es no nula entonces tiene un número finito de ceros.

(ii) Si f no tiene ceros y $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$ existe θ tal que $f \equiv \exp(i\theta)$.

(iii) Si f tiene n ceros y $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$ entonces es de la forma $f = \exp(i\theta) \ B$.

(iv) En las condiciones anteriores, existe F analítica sin ceros en Δ tal que $|F(z)| = 1$ si $|z| = 1$ y $f = F \ B$.

(v) Si $f(0) \neq 0$, como F no se anula sobre Δ, es posible considerar una rama analítica de $\log F$. Entonces

$$\log\ F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \log F(z)\ \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log F(\exp(i\theta))\ d\theta. \quad (124)$$

En particular,

$$\ln\ |F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \ln\ |F(\exp(i\theta))|\ d\theta. \quad (125)$$

Además, si $a_1,\ \dots,a_n$ son los ceros de f contados con su multiplicidad entonces es válida la fórmula de Jensen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\ |f(\exp(i\theta))|\ d\theta = \ln\ |f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \ln\ |a_k|. \quad (126)$$

Solución

(i) Si f tuviera una sucesión infinita de ceros en $cl\ \Delta$, como este conjunto es compacto dicha sucesión tendría un punto de acumulación. Por el principio de prolongación analítica deducimos entonces que $f \equiv 0$.

(ii) Si f no tiene ceros, como

$$\max_{|z|\leq 1}\ |1/f(z)| = \max_{|z|=1}\ |1/f(z)| = 1$$

tenemos $|f(z)| \geq 1$ para $z \in cl\ \Delta$. Por el principio del módulo máximo $|f(z)| \leq 1$ para $z \in cl\ \Delta$, i.e. $|f|$ es constante. Por la holomorfía de f y la conexidad del disco, f debe ser constante. Como $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$ sigue (ii).

(iii) Sea $B(z) = \prod_{k=1}^{n} [(z-a_k)/(1-\overline{a_k}\ z)]$, donde $a_1,\ \dots,a_n$ son los ceros de f. Ahora basta aplicar (ii) a f/B.

(iv) Precisamente, $F = f/B$.

(v) En (124) tenemos la fórmula de Cauchy; (125) sigue igualando partes reales en (124) y

$$\ln\ |F(0)| = \ln\ \left|\frac{f(0)}{B(0)}\right| = \ln\ |f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \ln\ |a_k|$$

y como $B(z) = 1$ para $|z| = 1$ por (125) sigue (126). □

4.5. Sobre automorfismos analíticos del círculo abierto unitario centrado en cero $\mathbb{D}$ del plano complejo. Métrica de Poincaré. No densidad del espacio orbital en $\mathbb{D}^{\mathbb{N}_0}$. Sobre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}$ vs. $A_a(\mathbb{D})$.

(i) Clasificar los automorfismos analíticos del círculo abierto unitario $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$.

(ii) Sean $z_1,\ z_2$ y $w_1,\ w_2$ pares de puntos diferentes del disco abierto unitario $\mathbb{D}$ tales que

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\ z_2}\right| = \left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1}\ w_2}\right|$$

Existe un único automorfismo analítico φ de $\mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_1) = w_1$ y $\varphi(z_2) = w_2$.

(iii) Consideramos en $\mathbb{D}$ la métrica de Poincaré (cf. [47], Ch. 2, Section 7) de forma que si $z,\ w \in \mathbb{D}$ se define

$$d_P(z,w) = \frac{1}{2}\ \ln \frac{1 + \frac{|w-z|}{|1-\overline{z}\ w|}}{1 - \frac{|w-z|}{|1-\overline{z}\ w|}} = \arg\tanh \frac{|w-z|}{|1-\overline{z}\ w|}.$$

Dados $a \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ determinar $D_P(a,r) = \{z \in \mathbb{D} :\ d_P(a,z) < r\}$.

(iv) Si $z,\ w \in \mathbb{D}$ y $z \neq w$ entonces

$$\frac{|w-z|}{|1-\overline{z}\ w|} < d_P(z,w).$$

(v) El conjunto

$$\mathcal{O} = \{(z,\ \varphi(z),\ \varphi(\varphi(z)),\ \ldots\ ) :\ z \in \mathbb{D},\ \varphi \in A_a(\mathbb{D})\}$$

no es denso en $\mathbb{D}^{\mathbb{N}_0}$, donde $A_a(\mathbb{D})$ es el grupo de automorfismos analíticos de $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}$ se considera con la métrica de Poincaré (cf. [35]).

(vi) Sea $\mathcal{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}$ el producto del círculo unitario con la topología heredada de $\mathbb{C}$ y del disco abierto unitario con la métrica de Poincaré. Para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{S}^1$ y $a,\ b \in \mathbb{D}$ definimos

$$(\alpha, a) \cdot (\beta, b) = \left(\overline{\alpha}\ \beta\ \frac{\alpha + \overline{a}\ b}{\overline{\alpha + \overline{a}\ b}}, \frac{a\ \alpha + b}{\alpha + \overline{a}\ b}\right). \tag{127}$$

Entonces $(\mathcal{A},\ \cdot)$ es grupo topológico respecto a la topología producto. Se induce entonces una única topología sobre $A_a(\mathbb{D})$ respecto a la que $A_a(\mathbb{D})$ deviene en grupo topológico homeomorfo a $(\mathcal{A},\ \cdot)$. Esta topología en $A_a(\mathbb{D})$ es la topología cociente inducida por la aplicación

$$\Phi : \mathcal{A} \to A_a(\mathbb{D}), \quad \Phi(\alpha, a)(z) = \alpha\ \frac{z-a}{1-\overline{a}\ z}, \ (z \in \mathbb{D}), \tag{128}$$

y *a fortiori* Φ deviene isomorfismo isométrico.

(vii) La aplicación

$$\Theta : \mathbb{D} \times A_a(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}^{\mathbb{N}_0},$$

$$\Theta(z,\ \Phi(\alpha,a)) = (z,\ \Phi(\alpha,a)(z),\ \Phi(\alpha,a)(\Phi(\alpha,a)(z)),\ \dots)$$

es continua.

(viii) Dado $z \in \mathbb{D}$ determinar el *estabilizador* de z. [58]

(ix) Mostrar que $\Theta(z,\varphi) = \Theta(w,\psi)$ si y solo si $z = w$ y además $\varphi = \psi$ o $\varphi(z) = \psi(z) = z$, con $z,\ w \in \mathbb{D},\ \varphi,\ \psi \in A_a(\mathbb{D})$.

Solución

(i) Todo automorfismo analítico sobre $\mathbb{D}$ es del tipo

$$f(z) = \lambda\ \frac{z-a}{1-\overline{a}\ z},$$

donde $|\lambda| = 1$ y $|a| < 1$ (cf. [47], Th. 6.1, pág. 63). Si $f(z) = z$ entonces

$$\overline{a}\ z^2 - (1-\lambda)\ z - \lambda\ a = 0. \tag{129}$$

Si $a \neq 0$ entonces (129) es equivalente a la ecuación

$$\left(z - \frac{1-\lambda}{2\ \overline{a}}\right)^2 = \frac{4\ \lambda\ |a|^2 + (1-\lambda)^2}{4\ \overline{a}^2}. \tag{130}$$

[58] Indicaremos al estabilizador de z mediante

$$E_z[A_a(\mathbb{D})] = \{f \in A_a(\mathbb{D}) :\ f(z) = z\}.$$

Si $4\lambda \ |a|^2 + (1-\lambda)^2 = 0$ entonces

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 1 - 2\,|a|^2 \quad y \quad |\operatorname{Im}(\lambda)| = 2\ |a|\ \sqrt{1-|a|^2}.$$

En cada caso $z = (1-\lambda)/(2\,\overline{a})$ es punto fijo en $\partial\mathbb{D}$ de multiplicidad 2 (f deviene *parabólica*). Si $4\lambda\ |a|^2 + (1-\lambda)^2 \neq 0$ por (130) tenemos

$$z = z_{\pm} = \frac{1-\lambda \pm \sqrt{4\ \lambda\ |a|^2 + (1-\lambda)^2}}{2\ \overline{a}}.$$

Como $|z_+\ z_-| = 1$ entonces hay un punto fijo en $\mathbb{D}$ y otro en $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ (f deviene *elíptica*) o hay dos puntos fijos diferentes en $\partial\mathbb{D}$ (f deviene *hiperbólica).* Finalmente, si $a = 0$ entonces f es una rotación; si $\lambda \neq 1$ entonces f es elíptica; si $f(z) = z$ tenemos la identidad del grupo de automorfismos analíticos, que no clasificamos en ninguno de los grupos anteriores.

(ii) Sea $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tal que

$$\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}\ z_2} = \overline{\lambda}\ \frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1}\ w_2}.$$

Para los automorfismos analíticos del disco

$$\alpha(z) = \lambda\ \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}\ z}, \qquad \beta(w) = \frac{w - w_1}{1 - \overline{w_1}\ w}$$

tenemos $\alpha(z_1) = \beta(w_1) = 0$ y $\alpha(z_2) = \beta(w_2) = \lambda\ (z_2 - z_1)/(1 - \overline{z_1}\ z_2)$. Por lo tanto si $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha$ tenemos $\varphi(z_1) = w_1$ y $\varphi(z_2) = w_2$. Si hubiese otro automorfismo analítico ψ en las condiciones de φ entonces $\psi^{-1} \circ \varphi$ sería un automorfismo analítico del disco con dos puntos fijos, y por (i) $\varphi = \psi$. [59]

[59] En particular, si $z_1 \neq z_2$ en $\mathbb{D}$ existe un único $f \in A_a(\mathbb{D})$ tal que $f(z_1) = z_2$ y $f(z_2) = z_1$. Para ello se deben hallar $a \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{S}^1$ únicos tales que

$$\lambda\ \frac{z_1 - a}{1 - \overline{a}\ z_1} = z_2 \qquad y \qquad \lambda\ \frac{z_2 - a}{1 - \overline{a}\ z_2} = z_1. \tag{131}$$

Si $z_1 \neq 0$ deberá ser $a \neq z_2$ y de (131) obtenemos

$$\frac{1 - \overline{a}\ z_2}{z_2 - a} \cdot \frac{z_1 - a}{1 - \overline{a}\ z_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

(iii) Tenemos

$$D_P(a,r) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \ \frac{|a-z|}{|1-\overline{a}\ z|} < \tanh(r) \right\}.$$

Ahora, haciendo $\tau = \tanh(r)$ tendremos $z \in \partial D_P(a,r)$ si y solo si resulta

$$\left(1-\tau^2\ |a|^2\right)\ |z|^2 - 2\left(1-\tau^2\right)\operatorname{Re}(\overline{a}\ z) + |a|^2 - \tau^2 < 0. \tag{134}$$

Podemos escribir

$$c^2 = 1-\tau^2\ |a|^2,\ a = \alpha + i\beta,$$

$$z = x + iy,$$

$$A = -2\left(1-\tau^2\right),\ B = |a|^2 - \tau^2.$$

Entonces (134) es equivalente a

$$c^2\left(x^2+y^2\right) + A\left(\alpha x + \beta y\right) + B < 0 \tag{135}$$

---

o, equivalentemente,

$$a + \overline{a}\ z_1\ z_2 = z_1 + z_2. \tag{132}$$

Formalmente, como

$$\begin{Vmatrix} 1 & z_1\ z_2 \\ \overline{z_1}\ \overline{z_2} & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a \\ \overline{a} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} z_1 + z_2 \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{Vmatrix}$$

y $1 - |z_1\ z_2|^2 > 0$ deducimos que (132) tiene una única solución

$$a = \frac{z_1 + z_2 - |z_1|^2\ z_2 - z_1\ |z_2|^2}{1 - |z_1\ z_2|^2}. \tag{133}$$

Notemos que

$$|a|^2 < 1 \Leftrightarrow 2\ \operatorname{Re}\left(z_1\ \overline{z_2}\right) < 1 + |z_1\ z_2|^2.$$

Precisamente,

$$2\ \operatorname{Re}\left(z_1\ \overline{z_2}\right) \le 2\ |z_1\ z_2| < 1 + |z_1\ z_2|^2$$

y $a \in \mathbb{D}$. Ahora, por (131) el valor λ queda determinado unívocamente. Más aún, como $(z_1 - a)/(1-\overline{a}\ z_1) = -z_2$ debe ser $\lambda = -1$. Finalmente, si $z_1 = 0$ necesariamente $a = z_2$ y nuevamente λ queda determinado por (131). En particular, por (133) este último caso es asimilable al primero.

o bien, como $\tau \ |a| < \tau < 1$, (135) equivale a

$$\left(x+\frac{A\alpha}{2c^2}\right)^2+\left(y+\frac{A\beta}{2c^2}\right)^2<\frac{A^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)-4Bc^2}{4c^4}. \tag{136}$$

Pero

$$A^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)-4Bc^2=4\tau^2\left(1-|a|^2\right)^2$$

y si $\kappa=(1-\tau^2)/(1-\tau^2\ |a|^2)$ entonces (136) define un disco centrado en κa de radio $\tau\left(1-|a|^2\right)/\left(1-\tau^2\ |a|^2\right)$. Notemos que

$$D\left(\kappa a,\ \frac{\tau(1-|a|^2)}{1-\tau^2\ |a|^2}\right)\subseteq\mathbb{D}\ \Leftrightarrow 1-\kappa\ |a|\geq\frac{\tau(1-|a|^2)}{1-\tau^2\ |a|^2}. \tag{137}$$

Es fácil ver que la desigualdad (137) se verifica cualesquiera sean a y r de modo que

$$D_P(a,r)=D\left(\kappa a,\ \frac{\tau(1-|a|^2)}{1-\tau^2\ |a|^2}\right).$$

(iv) Basta ver que si $z\neq w$ en $\mathbb{D}$ entonces

$$\tanh\frac{|w-z|}{|1-\overline{z}\ w|}<\frac{|w-z|}{|1-\overline{z}\ w|}.$$

En efecto, si $r>0$, $s\in\mathbb{R}$ tenemos

$$\frac{d\left[\left(\tanh r\right)/r\right]}{dr}=\frac{2r-\sinh(2r)}{2r^2\cosh^2 r},\quad \frac{d\left(s-\sinh s\right)}{ds}=1-\cosh s\leq 0, \tag{138}$$

de modo que $s\to s-\sinh s$ es decreciente y se anula en cero. Más aún, como $\sinh s<s$ si $s>0$ por (138) la función $r\to\left(\tanh r\right)/r$ es estrictamente decreciente en $(0,+\infty)$ y $\lim_{r\to 0^+}\left[\left(\tanh r\right)/r\right]=1$, es decir $\tanh r<r$ si $r>0$.

(v) Sean $z_0,\ z_1\in\mathbb{D},\ r_0>0,\ r_1>0$. Veamos que existen $z_2\in\mathbb{D},\ s>0$ de modo que para toda $\varphi\in A_a(\mathbb{D})$ no existe $z\in\mathbb{D}$ tal que

$$d_P(z,\ z_0)<r_0,\ d_P(\varphi(z),\ z_1)<r_1\quad y\quad d_P(\varphi(\varphi(z)),\ z_2)<s.$$

El conjunto $\mathcal{P}=\{\varphi\in A_a(\mathbb{D}):\ D_P\left(\varphi\left(z_0\right),\ r_0\right)\cap D_P(z_1,\ r_1)\neq\emptyset\}$ es evidentemente no vacío. Dado $\varphi\in\mathcal{P}$ escribiremos

$$J_\varphi=D_P\left(\varphi\left(z_0\right),\ r_0\right)\cap D_P(z_1,\ r_1). \tag{139}$$

Si $z \in \mathbb{D}$ y $t > 0$ es evidente que

$$\varphi(J_\varphi) \cap D_P(z,\ t) \neq \emptyset \Leftrightarrow dist_P(z,\ \varphi(J_\varphi)) < t \tag{140}$$

Si z y t están en las condiciones anteriores y $w \in \varphi(J_\varphi) \cap D_P(z,\ t)$ tenemos

$$d_P(\varphi^{-2}(w),\ z_0) = d_P(w,\ \varphi^2(z_0)) < r_0,$$

$$d_P(\varphi(\varphi^{-2}(w)),\ z_1) = d_P(w,\ \varphi(z_1)) < r_1,$$

$$d_P(\varphi^2(\varphi^{-2}(w)),\ z) = d_P(w,\ z) < t,$$

i.e.

$$\mathcal{O} \cap \left[D_P(z_0,\ r_0) \times D_P(z_1,\ r_1) \times D_P(z,\ t) \times \mathbb{D}^{\mathbb{N}_0 - \{0,1,2\}}\right] \neq \emptyset. \tag{141}$$

Asimismo, es fácil ver que (141) $\Rightarrow$ (140). Bastará ver entonces que es posible hallar z y t para los que (141) no se verifica, haciendo entonces $z_2 = z$ y $s = t$. Notemos que

$$\cup_{\varphi \in \mathcal{P}} D_P(\varphi(z_0),\ r_0) \subseteq D_P(z_1,\ 2r_0 + r_1) \tag{142}$$

y si $t = \text{máx}\,\{3r_0 + r_1 + d_P(z_0,\ z_1),\ 4r_0 + 2r_1\}$ entonces

$$\text{diam}\,[D_P(\varphi(z_0),\ r_0) \cup D_P(z_1,\ 2r_0 + r_1)] = t. \tag{143}$$

Dados $\varphi \in \mathcal{P},\ w_1,\ w_2 \in J_\varphi$ por (139) existe $w_3 \in D_P(z_0,\ r_0)$ tal que $w_1 = \varphi(w_3)$ y, como $J_\varphi \subseteq D_P(\varphi(z_0),\ r_0) \subseteq D_P(z_1,\ 2r_0 + r_1)$ como sigue de (139) y (142), por (143) deducimos que

$$d_P(w_1,\ \varphi(w_2)) = d_P(\varphi(w_3),\ \varphi(w_2)) = d_P(w_2,\ w_3) \leq t.$$

En consecuencia

$$\sup\{d_P(w_1,\ \varphi(w_2)) : \quad \varphi \in \mathcal{P}, \quad w_1,\ w_2 \in J_\varphi\} \leq t. \tag{144}$$

Finalmente, sea $z \in \mathbb{D}$ tal que $dist_P(z,\ D_P(z_1,\ 2r_0 + r_1)) \geq 2t$. Dados $\varphi \in \mathcal{P},\ w \in J_\varphi$ por (144) escribimos

$$\begin{aligned} d_P(z,\ \varphi(w)) &\geq |d_P(z,\ w) - d_P(w,\ \varphi(w))| \\ &\geq d_P(z,\ w) - d_P(w,\ \varphi(w)) \\ &\geq dist_P(z,\ D_P(z_1,\ 2r_0 + r_1)) - t \geq t, \end{aligned}$$

i.e. $dist_P(z,\ \varphi(J_\varphi)) \geq t$ para cada $\varphi \in \mathcal{P}$.

(vi) Notemos que la definición (127) es correcta. Además la aplicación Φ introducida en (128) es biyectiva y $\Phi\left[(\alpha, a)\cdot(\beta, b)\right] = \Phi\left(\beta, b\right) \circ \Phi\left(\alpha, a\right)$ si $(\alpha, a)\,,\ (\beta, b) \in \mathcal{A}$ de modo que el producto (127) resulta asociativo. Además $(1, 0) \in \mathcal{A}$ es elemento neutro y si $(\alpha, a) \in \mathcal{A}$ entonces

$$(\alpha, a)\cdot(\overline{\alpha}, -\alpha\ a) = (\overline{\alpha}, -\alpha\ a)\cdot(\alpha, a) = (1, 0)$$

y podemos escribir $(\alpha, a)^{-1} = (\overline{\alpha}, -\alpha\ a)$ con lo que $(\mathcal{A},\ \cdot)$ es un grupo. Sean $\left\{(\alpha_i,\ a_i)\right\}_{i\in I}$, $\left\{(\beta_i,\ b_i)\right\}_{i\in I}$ redes en $\mathcal{A}$ convergentes a (α, a) y (β, b) respectivamente. Para $i \in I$ escribimos

$$(\alpha_i,\ a_i)\cdot(\beta_i,\ b_i)^{-1} = (\alpha_i,\ a_i)\cdot\left(\overline{\beta_i},\ -\beta_i\ b_i\right) \tag{145}$$

$$= \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\ \frac{1 - a_i\ \overline{b_i}}{\overline{1 - a_i\ \overline{b_i}}},\ \beta_i\ \frac{a_i - b_i}{1 - a_i\ \overline{b_i}}\right).$$

Tenemos

$$0 = \lim_{i\in I} \tanh d_P\left(a_i, a\right) = \lim_{i\in I} \left|\frac{a_i - a}{1 - \overline{a}\ a_i}\right|$$

pues $\lim_{i\in I} d_P\left(a_i, a\right) = 0$. Además $\left|a_i - a\right| / \left|1 - \overline{a}\ a_i\right| \geq \left|a_i - a\right|/2$ para cada $i \in I$ de modo que $\lim_{i\in I}\left|a_i - a\right| = 0$. Análogamente

$$\lim_{i\in I}\left|b_i - b\right| = 0$$

y obtenemos

$$\lim_{i\in I}\frac{\alpha_i}{\beta_i}\ \frac{1 - a_i\ \overline{b_i}}{\overline{1 - a_i\ \overline{b_i}}} = \frac{\alpha}{\beta}\ \frac{1 - a\ \overline{b}}{\overline{1 - a\ \overline{b}}}.$$

Finalmente

$$d_P\left(\beta_i\ \frac{a_i - b_i}{1 - a_i\ \overline{b_i}},\ \beta\ \frac{a - b}{1 - a\ \overline{b}}\right) = \arg\tanh\left|\frac{\beta_i\ \frac{a_i - b_i}{1 - a_i\ \overline{b_i}} - \beta\ \frac{a - b}{1 - a\ \overline{b}}}{1 - \beta\ \frac{a - b}{1 - a\ \overline{b}}\left(\beta_i \frac{a_i - b_i}{1 - a_i\ \overline{b_i}}\right)^{-}}\right|$$

de donde

$$\lim_{i\in I} d_P\left(\beta_i\ \frac{a_i - b_i}{1 - a_i\ \overline{b_i}},\ \beta\ \frac{a - b}{1 - a\ \overline{b}}\right) = 0.$$

Por (145)

$$\lim_{i\in I}\left[(\alpha_i,\ a_i)\cdot(\beta_i,\ b_i)^{-1}\right]=(\alpha,\ a)\cdot(\beta,\ b)^{-1}$$

y sigue (vi).

(vii) Sea $\{(z_l,\ \Phi(\alpha_l,a_l))\}_{l\in L}$ una red convergente a $(z,\Phi(\alpha,a))$ y n un entero no negativo. Podemos escribir

$$d_P\left[\Phi^n(\alpha_l,a_l)(z_l),\Phi^n(\alpha,a)(z)\right]\leq$$

$$\leq d_P\left[\Phi^n(\alpha_l,a_l)(z_l),\Phi^n(\alpha_l,a_l)(z)\right]+d_P\left[\Phi^n(\alpha_l,a_l)(z),\Phi^n(\alpha,a)(z)\right]$$

$$=d_P(z_l,z)+d_P\left[\Phi^n(\alpha_l,a_l)(z),\Phi^n(\alpha,a)(z)\right].$$

Bastará ver que

$$\lim_{l\in L}d_P\left[\Phi^n(\alpha_l,a_l)(z),\Phi^n(\alpha,a)(z)\right]=0 \tag{146}$$

para cada n. El caso $n=0$ es trivial y además

$$d_P\left[\Phi(\alpha_l,a_l)(z),\Phi(\alpha,a)(z)\right]=d_P\left[\left(\Phi(\alpha,a)^{-1}\circ\Phi(\alpha_l,a_l)\right)(z),z\right]$$

$$=\arg\tanh\left|\frac{\Phi(\alpha,a)^{-1}\left(\Phi(\alpha_l,a_l)(z)\right)-z}{1-\overline{z}\ \Phi(\alpha,a)^{-1}\left(\Phi(\alpha_l,a_l)(z)\right)}\right|$$

$$=\arg\tanh\left|\frac{\Phi\left(\overline{\alpha\ \alpha_l}\ \frac{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}{\overline{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}},\ \frac{\alpha_l\ a_l-\alpha\ a}{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}\right)(z)-z}{1-\overline{z}\ \Phi\left(\overline{\alpha\ \alpha_l}\ \frac{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}{\overline{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}},\ \frac{\alpha_l\ a_l-\alpha\ a}{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}\right)(z)}\right|$$

$$=\arg\tanh\left|\frac{\overline{\alpha\ \alpha_l}\ \frac{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}{\overline{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}}\ \frac{z-\frac{\alpha_l\ a_l-\alpha\ a}{\overline{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}}}{1-\left(\frac{\alpha_l\ a_l-\alpha\ a}{\overline{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}}\right)^{-}\ z}-z}{1-\overline{\alpha\ \alpha_l}\ \frac{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}{\overline{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}}\ \frac{z-\frac{\alpha_l\ a_l-\alpha\ a}{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}}{1-\left(\frac{\alpha_l\ a_l-\alpha\ a}{\alpha_l-\alpha\ a\ \overline{a_l}}\right)^{-}\ z}\ \overline{z}}\right|.$$

Como $\text{lím}_{l\in L}\ \ \alpha_l = \alpha$ en $\mathbb{S}^1$ y $\text{lím}_{l\in L}\ \ |a_l - a| = 0$ en $\mathbb{D}$ obtenemos $\text{lím}_{l\in L}\, d_P\left[\Phi\left(\alpha_l, a_l\right)(z), \Phi\left(\alpha, a\right)(z)\right] = 0$. Ahora, asumiendo cierta (146) para $\leq n$ con $n \in \mathbb{N}$, sea $w_l = \Phi^n\left(\alpha_l, a_l\right)(z)$ si $l \in L$ y $w = \Phi^n\left(\alpha, a\right)(z)$. Así

$$d_P\left[\Phi^{n+1}\left(\alpha_l, a_l\right)(z), \Phi^{n+1}\left(\alpha, a\right)(z)\right] = d_P\left[\Phi\left(\alpha_l, a_l\right)(w_l), \Phi\left(\alpha, a\right)(w)\right]. \tag{147}$$

Como $\text{lím}_{l\in L}\, d_P\left(w_l, w\right) = 0$ por hipótesis inductiva, del caso $n = 1$ y de (147) vale el paso inductivo.

(viii) Determinemos los valores $a \in \mathbb{D}$ tales que $|z - a| / |1 - \overline{a}\ z| = |z|$. Equivalentemente, debe ser

$$|a|^2\ \ (1 - |z|^4) - 2\ \ \text{Re}(\overline{a}\ z)\ \ (1 - |z|^2) = 0$$

o bien

$$|a|^2\ \ (1 + |z|^2) = 2\ \ \text{Re}(\overline{a}\ z). \tag{148}$$

De la ecuación anterior y la desigualdad de Cauchy Schwartz sigue que $|a|^2\ \ (1 + |z|^2) \leq 2\ \ |\overline{a}\ z|$ y, si $a \neq 0$, $|a| \leq (2\ \ |z|)/(1 + |z|^2)$. Esta última desigualdad es también cierta si $a = 0$ y, como $z \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{D}$. En particular, si $a = 0$ tendremos la aplicación idéntica o alguna rotación, y deberemos descartar rotaciones a menos que $z = 0$. Considerando en la ecuación (148) las partes real e imaginaria de a y z y completando cuadrados vemos que las soluciones son

$$a = a_\theta = \frac{z + |z|\ \ \exp\left(i\theta\right)}{1 + |z|^2},\quad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{149}$$

Haciendo

$$u_\theta = \frac{z\ \ |z|\ \ - \exp\left(i\theta\right)}{1 - z\ \ |z|\ \ \exp\left(-i\theta\right)}$$

tenemos $|u_\theta| = 1$ y $\left(z - a_\theta\right)/(1 - \overline{a_\theta}\ z) = |z|\ \ u_\theta$. En definitiva los automorfismos que fijan z son

$$E_z\left[A_a\left(\mathbb{D}\right)\right] = \{Id_{\mathbb{D}}\} \cup \left\{f_\theta\left(w\right) = \alpha_\theta\ \frac{w - a_\theta}{1 - \overline{a_\theta}\ w},\quad w \in \mathbb{D},\ 0 \leq \theta < 2\pi\right\},$$

donde

$$\alpha = \alpha_\theta = \exp\left[i \arg(z/u_\theta)\right] = \frac{|z|^2 - \exp\left[i\left(\arg\left(z\right) - \theta\right)\right]}{1 - |z|^2\ \ \exp\left[i\left(\theta - \arg\left(z\right)\right)\right]}$$

y a_θ es el definido en (149). [60]

(ix) Evidentemente la condición es suficiente. Si $\Theta(z,\varphi) = \Theta(w,\psi)$ debe ser $z = w$ y podemos escribir

$$u = \varphi(z) = \psi(z), \qquad v = \varphi(u) = \psi(u).$$

Si $u \neq z$ y $v = z$, haciendo $z_1 = z,\ z_2 = u,\ w_1 = u,\ w_2 = v$ tenemos

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\ \overline{z_2}}\right| = \left|\frac{z-u}{1-\overline{u}\ z}\right| = \left|\frac{w_1 - w_2}{1 - z_1\ \overline{z_2}}\right|$$

y, por (ii), $\varphi = \psi$. Si $u \neq z$ y $v = u$ no existe $\zeta \in A_a(\mathbb{D})$ tal que $\zeta(z) = u = \zeta(u)$. En efecto, si escribimos $\zeta(s) = c\ (s-a)/(1-\overline{a}\ s)$, donde $c \in \mathbb{S}^1,\ a,\ s \in \mathbb{D}$ deberá ser

$$c\ \frac{z-a}{1-\overline{a}\ z} = c\ \frac{u-a}{1-\overline{a}\ u} = u. \tag{150}$$

Como $u \neq z$ resulta $u \neq 0$. De la primer igualdad en (150) sigue que $z - u = (z-u)\ |a|^2$, lo que no es posible. Finalmente, si $z,\ u$ y v son distintos en $\mathbb{D}$ sea $t \in \mathbb{D}$ el valor común de φ^3 y ψ^3 en z. Si $t \notin \{u,v\}$ entonces $\varphi = \psi$ pues hay una única aplicación lineal fraccionaria que aplica z en u, u en v y v en t. [61]Precisamente, por la inyectividad $t \neq u$ porque $z \neq v$ y $t \neq v$ porque $u \neq v$. □

---

[60]P. ej.

$$E_{1/2}[A_a(\mathbb{D})] = \left\{ f_\theta(w) = \exp(-i\theta)\ \frac{2\ (1+\exp(i\theta)) - 5w}{5 - 2(1+\exp(-i\theta))\ w},\ w \in \mathbb{D},\ 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

[61]Notar que

$$\left|\frac{z-u}{1-\overline{u}\ z}\right| = \left|\frac{\varphi(z)-\varphi(u)}{1-\overline{\varphi(u)}\ \varphi(z)}\right| = \left|\frac{u-v}{1-\overline{u}\ v}\right|.$$

4.6. Sobre aplicaciones lineales fraccionarias. Automorfismos del semiplano superior que fijan 0 y ∞. Sobre automorfismos hiperbólicos del disco. Teorema de Denjoy - Wolff. Sobre automorfismos del semiplano superior con solo un punto fijo en ∞ y automorfismos parabólicos.

Si $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ son cuatro números complejos distintos escribimos

$$(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} . \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

(i) Si $T(z) = (z,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ entonces $T(z_2) = 0,\ T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

(ii) Extender la definición anterior al caso en que alguno de los números complejos es infinito.

(iii) Determinar $T^{-1}(\mathbb{R})$.

(iv) Si S es una aplicación lineal fraccionaria entonces

$$(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = (Sz_1,\ Sz_2,\ Sz_3,\ Sz_4).$$

(v) Sea ψ un automorfismo del semiplano superior $\prod^+$ que fija solamente 0 y ∞. Probar que $\psi(w) = t\ w$ para algún $t > 0,\ t \neq 1$.

(vi) Todo automorfismo hiperbólico del disco es conformemente equivalente a una dilatación de $\prod^+$.

(vii) (Teorema de Denjoy - Wolff) Sea h un automorfismo hiperbólico del disco y, para cada entero positivo n, $h_n = h \circ \ldots \circ h$ ($n-$ veces). Existe un único $a \in \partial D$ tal que la sucesión $(h_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a la función constante a.

(viii) Sea ψ un automorfismo del semiplano superior con solo un punto fijo en ∞. Entonces $\psi(w) = w + b,\ w \in \prod^+$, para cierta $b \neq 0$.

(ix) Ídem al (vii) para automorfismos parabólicos.

Solución

(i) Trivial.

(ii) Hacemos

$$(z,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = \begin{cases} (z_3 - z_4) \,/\, (z - z_4) & si \quad z_2 = \infty, \\[2ex] (z - z_2) \,/\, (z - z_4) & si \quad z_3 = \infty, \\[2ex] (z - z_2) \,/\, (z_3 - z_2) & si \quad z_4 = \infty. \end{cases}$$

(iii) Supongamos que $z_2,\ z_3,\ z_4$ son finitos. Entonces T es una aplicación lineal fraccionaria y por (i) el conjunto $T^{-1}(\mathbb{R})$ es el único círculo o recta que contiene a $z_2,\ z_3$ y z_4 (cf. [47], Lemma 4.4, pág. 56). La misma conclusión es aplicable si $z_2,\ z_3$ o z_4 no son finitos.

(iv) Si $S(z) = (az+b)/(cz+d)$, donde $ad - bc \neq 0$, basta notar la identidad

$$S(z) - S(w) = \frac{(ad - bc)\ (z - w)}{(cz + d)\ (cw + d)}.$$

(v) Sea $\psi(w) = (aw+b)/(cw+d)$, con $ad - bc \neq 0$ en $\mathbb{C}$. Como ψ transforma el eje real en si mismo resulta

$$(a\ w + b)\left(\overline{c}\ w + \overline{d}\right) = \left(\overline{a}\ w + \overline{b}\right)(c\ w + d)\,,\ w \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, de la identidad polinomial

$$(a\ X + b)\left(\overline{c}\ X + \overline{d}\right) = \left(\overline{a}\ X + \overline{b}\right)(c\ X + d)$$

deducimos que $\left\{a\ \overline{c},\ a\ \overline{d} + b\ \overline{c},\ b\ \overline{d}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Además $b = c = 0$ pues $\psi(0) = 0$ y $\psi(\infty) = \infty$, i.e. si $w \in \prod^{+}$ tenemos

$$\psi(w) = \frac{a}{d}\ w = \frac{a\ \overline{d}}{|d|^2}\ w$$

y, si $t = (a\ \overline{d})/\left|d\right|^2$, entonces $t > 0$ porque ψ es una biyección del semiplano superior y $t \neq 1$ pues ψ solo tiene dos puntos fijos.

(vi) Sea h un automorfismo hiperbólico del disco D y $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ la aplicación analítica $T(z) = i(1+z)/(1-z)$, $z \in \mathbb{C}_\infty$. Como la expresión

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\,\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

es positiva si $z \in D$ entonces $T(cl\ D) = \prod^+$. Es fácil ver que T es inversible, $T^{-1}(w) = (iw+1)/(iw-1)$ si $w \in \mathbb{C}_\infty$, resultando T isomorfismo analítico. Si h tiene puntos fijos en 1 y -1 el automorfismo analítico del semiplano superior $T \circ h \circ T^{-1}$ tiene puntos fijos en 0 y ∞, deviniendo una dilatación Δ. Luego $h = T^{-1} \circ \Delta \circ T$ y h es conformemente equivalente a Δ. En el caso general, supongamos que h tiene dos puntos fijos λ y μ en ∂D y sea $\tau \in \partial D - \{\lambda,\ \mu\}$. Podemos determinar $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $S(\tau) \in \mathbb{R}$ si $S(z) = c\ (z-\lambda)/(z-\mu)$, $z \in \mathbb{C}_\infty$. S es una aplicación lineal fraccionaria, $S(\lambda) = 0$, $S(\mu) = \infty$ y $S(\partial D) = \mathbb{R}$ ([47], Ch. 2, Th. 4.2, pág. 56). Más aún, podemos determinar c tal que $S(D) = \prod^+$. Ahora el automorfismo analítico del semiplano superior $S \circ h \circ S^{-1}$ es una dilatación pues tiene puntos fijos en 0 y ∞.

(vii) Por el lema de Wolff (cf. [10], Th. 2.48, Ch. 2, pág. 56) existe un único punto fijo $a \in \partial D$ tal que $d(a) \leq 1$, donde escribimos

$$d(\zeta) = \underline{\lim}_{z\to\zeta,\ z\in D}\ \frac{1-|h(z)|}{1-|z|},\ \zeta \in D.$$

Por el teorema de Carathéodory - Julia (cf. [10], Th. 2.44, pág. 51) se deduce que

$$h'(a) = \lim_{r\to 1^-} h'(ra) = d(a)\ \overline{a}\ \lim_{r\to 1^-} h(ra),$$

i.e. $|h'(a)| \leq 1$. Por (vi) existe una aplicación conforme T inversible, con inversa continua y una dilatación $\Delta(w) = s\ w$ del semiplano superior, con solo dos puntos fijos, de modo que $h = T^{-1} \circ \Delta \circ T$. Si $z \in D$ tenemos $T(h(z)) = s\ T(z)$, i.e. $T'(h(z))\ \ h'(z) = s\ T'(z)$. En particular,$T'(a)\ h'(a) = s\ T'(a)$ y, como T tiene derivada no nula en todo punto, $s = h'(a)$ y $0 < s < 1$. Ahora si $n \geq 1$ y $z \in D$ tenemos $h_n(z) = T^{-1}(s^n\ T(z))$, de donde es inmediato que h_n converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a un único punto fijo de h. [62]

(viii) Sea $\psi(w) = (Aw + B)/(Cw + D)$, con $AD - BC \neq 0$ en $\mathbb{C}$. Como $\psi(\infty) = \infty$ es $C = 0$, o sea ψ es de la forma $\psi(w) = aw + b$, con $a,\ b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. Escribiendo $a = |a|\ \exp(i\alpha)\,,\ w = |w|\ \exp(i\theta)\,,$ con $0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \alpha < 2\pi$, resulta

$$\operatorname{Im}[\psi(w)] = |aw|\ \sin[i(\alpha + \theta)] + \operatorname{Im}(b)\,.$$

Como $\psi\left(\prod^+\right) = \prod^+$, α debe ser tal que $0 \leq \alpha + \theta \leq \pi \bmod (2\pi)\,.$ Luego $\alpha = 0$ y podemos suponer que a es una constante positiva. Como $\operatorname{Re}(b) \geq 0$ pues $b = \psi(0)$, si $0 < a < 1$ entonces $w = b/(1-a)$ es punto fijo de ψ, lo cual no ocurre por hipótesis. Debe ser $a \geq 1$ y, como $\psi^{-1}(w) = (w - b)/a$, $w \in \prod^+$, también $a \leq 1$. En definitiva $a = 1$ y $b \neq 0$ ya que ψ no es la aplicación idéntica.

(ix) Sea h un automorfismo parabólico del disco con un punto fijo doble en $\gamma \in \partial D,\ \alpha,\ \beta$ dos elementos de $\partial D - \{\gamma\}$. Consideremos una aplicación fraccionaria S tal que $S(0) = \alpha,\ S(1) = \beta, S(\infty) = \gamma$ y $S\left(\prod^+\right) = \mathrm{cl}\ D$. Entonces $S^{-1} \circ h \circ S$ es un automorfismo analítico de $\prod^+$ con un solo punto fijo en ∞, i.e. existe $\omega \in \prod^+ - \{0\}$ tal que $h(z) = S\left(S^{-1}(z) + \omega\right),\ z \in D$. En consecuencia

$$h_n(z) = S\left(S^{-1}(z) + n\ \omega\right),\ z \in D,\ n \geq 1$$

y, como $\omega \neq 0$, de la continuidad de S y su inversa sigue enseguida (ix). $\square$

[62] Con la notación de (vi), asumiendo sin perder generalidad que $a = \mu$,

$$\left(g^{-1} \circ T^{-1}\right)[s^n\ T(g(z))]\ \underset{\rightarrow}{\kappa}\ g^{-1}\left(T^{-1}(0)\right)$$

y $g^{-1}\left(T^{-1}(0)\right) = g^{-1}(-1) = \mu$, donde $\underset{\rightarrow}{\kappa}$ denota convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de D.

5. Sobre Topología y Álgebra

5.1. Sobre el teorema de Baire.

(i) El espacio de Lebesgue $L^2(0,1)$ es de primera categoría en $L^1(0,1)$.

(ii) En el espacio de Banach $C_{\mathbb{C}}[0,1]$, el conjunto $\mathfrak{Q}$ de funciones que tienen derivada a derecha finita en algún punto de $[0,1)$ es de primera categoría.[63]

(iii) Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) espacios métricos, A un subespacio denso de X_1, $f : A \to X_2$ una función continua. Si (X_2, d_2) es completo, el conjunto $\mathfrak{D}$ de puntos de X_1 para los que f no tiene límite relativo a A es magro[64].

(iv) Con la notación de (iii), si $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq C(X_1, X_2)$ y existe el límite puntual $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ hay un subconjunto magro de X_1 al exterior del cual f es continua. Luego, si (X_1, d_1) es completo, f es continua sobre un conjunto denso.

Solución

(i) Bastará ver que para cada $r > 0$ el conjunto

$$\mathcal{B}_r = \left\{ f \in L^2(0,1) : \ \|f\|_2 \leq r \right\}$$

es cerrado en $L^1(0,1)$ y de interior vacío. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{B}_r$ convergente a f en $L^1(0,1)$. Como $\|f_n - f\|_1 \to 0$ hay una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que $f_{n_k} \to f$ a.e.. Ahora, por el lema de Fatou, sigue que $\mathcal{B}_r$ es cerrado. Supongamos que f_0 es un punto interior de $\mathcal{B}_r$ en $L^1(0,1)$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\{ f \in L^1(0,1) : \ \|f - f_0\|_1 \right\} \subseteq \mathcal{B}_r.$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $g \in L^2(0,1) - \{0\}$ es $\|(f_0 + \lambda\, g) - f_0\|_1 = |\lambda| \ \|g\|_1 < \varepsilon$ si y solo si $|\lambda| < \varepsilon / \|g\|_1$, de modo que

$$r \geq \left\| f_0 + \frac{\varepsilon}{2\,\|g\|_1}\, g \right\|_2 \geq \frac{\varepsilon}{2\,\|g\|_1} \ \|g\|_2 - \|f_0\|_2$$

[63]Observar que, en consecuencia, hay una función continua sobre $[0,1]$ no derivable en ningún punto.

[64]Dado $x \in X_1$, *f tiene límite en x_1 relativo a A* sii hay una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq A$ convergente a x para la que existe $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

y, por lo tanto, $\|g\|_2 \leq 4r \ \|g\|_1 / \varepsilon$, desigualdad válida aún si $g = 0$. Como $\|g\|_1 \leq \|g\|_2$ para cada $g \in L^2(0,1)$ deducimos que la norma de $L^2(0,1)$ es equivalente a la inducida por $L^1(0,1)$. Sin embargo,

$$\|n\ x^n\|_2 = \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \qquad y \qquad \|n\ x^n\|_1 = \frac{n}{n+1} \leq 1$$

si $n \in \mathbb{N}$, i.e. $(L^2(0,1), \|\circ\|_1) \nrightarrow (L^2(0,1), \|\circ\|_2)$. [65]

(ii) Dada $g \in \mathfrak{Q}$ existen $x_0 \in [0,1)$ y $m \in \mathbb{N}$ de modo que $g'_+(x_0)$ está definida y $|g'_+(x_0)| < m$. En consecuencia existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g(x) - g(x_0)| < m(x - x_0)$ si $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$. Si $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathfrak{Q}_n$ el conjunto de funciones $f \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$ para las que existe $t_0 \in [0, 1-1/n]$ de manera que $|f(t) - f(t_0)| \leq n(t - t_0)$ si $t_0 < t \leq t_0 + 1/n$. Entonces $\mathfrak{Q} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_n$ y bastará ver que cada $\mathfrak{Q}_n$ es conjunto nunca denso. Fijemos n y veamos que $\mathfrak{Q}_n$ es cerrado. En efecto, sea $\{h_l\}_{l\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathfrak{Q}_n$ convergente a $h \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$. Para cada l sea $y_l \in [0, 1-1/n]$ tal que $|h_l(y) - h_l(y_l)| \leq n(y - y_l)$ si $y_l < y < y_l + 1/n$. Por la compacidad de $[0, 1-1/n]$ hay una subsucesión $\{y_{l_r}\}_{r\geq 1}$ de Cauchy de $\{y_l\}_{l\geq 1}$. Existe entonces $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_{l_r} - y_{l_t}| < 1/n$ si $r \geq r_0,\ t \geq r_0$. Ahora, la familia $\mathfrak{F} = \{[y_{l_r},\ y_{l_r} + 1/n]\}_{r\geq r_0}$ de subconjuntos cerrados de $[0,1]$ tiene la propiedad de intersección finita. Para la prueba de esta afirmación, si $s \in \mathbb{N}$ consideremos índices $(r_i)_{1\leq i\leq s}$ tales que $y_{l_{r_1}} < y_{l_{r_2}} < \ldots < y_{l_{r_s}}$ y veamos que $\cap_{i=1}^{s} \left[y_{l_{r_i}},\ y_{l_{r_i}} + 1/n\right] \neq \emptyset$. Podemos suponer $s > 1$ e, inductivamente, el resultado cierto para intersecciones de menos de s elementos de $\mathfrak{F}$. Por hipótesis inductiva

[65] Sea $\Lambda_n : L^1(0,1) \to \mathbb{C}$, $\Lambda_n f = n \int_0^{n^{-3}} f(x)\, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $|\Lambda_n f| \leq n^{-1/2}\ \|f\|_2$ cuando $f \in L^1(0,1)$ y $n \geq 1$, i.e. $\Lambda_n f \to 0$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n x^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2-3\alpha}}{1+\alpha} = +\infty$$

si $-1 < \alpha < -2/3$, en cuyo caso $x^{\alpha} \in L^1(0,1) - L^2(0,1)$. Por lo tanto, el conjunto

$$C = \left\{ f \in L^1(0,1) :\ \{\Lambda_n f\}_{n\geq 1} \text{ es sucesión de Cauchy} \right\}$$

está propiamente incluído en $L^1(0,1)$. Necesariamente C es de primera categoría (cf. [42], Ch. 2, Th. 2.7). Como $L^2(0,1) \subseteq C$ tenemos que C resulta de primera categoría.

tenemos

$$\bigcap_{i=1}^{s-1}\left[y_{l_{r_i}},\ y_{l_{r_i}}+1/n\right]=\left[y_{l_{r_{s-1}}},\ y_{l_{r_1}}+1/n\right]\neq\emptyset.$$

Pero $y_{l_{r_1}}+1/n\geq y_{l_{r_s}}$, i.e. $y_{l_{r_s}}\in\left[y_{l_{r_{s-1}}},\ y_{l_{r_1}}+1/n\right]\cap\left[y_{l_{r_s}},y_{l_{r_s}}+1/n\right]$ y es válido el paso inductivo. Existe entonces $y_0\in[0,1]\cap\mathfrak{F}$ pues $[0,1]$ es compacto. Más aún, como $y_0=\text{lím}_{r\to+\infty}\,y_{l_r}$ es $0\leq y_0\leq 1-1/n$. Sea ahora $y_0<y<y_0+1/n$, sea $\widetilde{r}$ tal que $y_{l_r}<y<y_{l_r}+1/n$ si $r\geq\widetilde{r}$ y escribamos

$$\begin{aligned}|h\left(y\right)-h\left(y_0\right)| &\leq |h\left(y\right)-h_{l_r}\left(y\right)|+|h_{l_r}\left(y\right)-h_{l_r}\left(y_{l_r}\right)|\\ &+|h_{l_r}\left(y_{l_r}\right)-h_{l_r}\left(y_0\right)|+|h_{l_r}\left(y_0\right)-h\left(y_0\right)|\\ &\leq 2\left\|h-h_{l_r}\right\|_\infty+n\left(y-y_{l_r}\right)+n\left(y_{l_r}-y_0\right).\end{aligned}$$

Haciendo $r\to+\infty$ obtenemos $|h\left(y\right)-h\left(y_0\right)|\leq n\left(y-y_0\right)$ y, en consecuencia, $h\in\mathfrak{Q}_n$, quedando probado que $\mathfrak{Q}_n$ es cerrado pues h es arbitraria. Para ver que $\mathfrak{Q}_n^o=\emptyset$ sean $F\in C_{\mathbb{C}}\left[0,1\right]$ y $\xi>0$. Por la continuidad uniforme de F existe $\delta>0$ tal que $|F(s)-F(t)|\leq\xi/4$ si $|s-t|\leq\delta$ en $[0,1]$. Sea $k\in\mathbb{N}$ tal que $1/k<\delta$ y, para $0\leq x\leq 1$,

$$G(x)=F(1)\ \varkappa_{\{1\}}(x)+\sum_{j=1}^{k}G_j\left(x\right),$$

donde para $1\leq j\leq k$ escribimos

$$G_j(x)=\left\{(kx-j+1)\left[F(\frac{j}{k})-F(\frac{j-1}{k})\right]+F(\frac{j-1}{k})\right\}\chi_{\left[\frac{j-1}{k},\frac{j}{k}\right)}(x). \tag{151}$$

Por construcción G es continua y $\|F-G\|_\infty\leq\xi/2$. Para cada j la gráfica de G_j es un segmento en el plano con una pendiente θ_j determinada. Veremos que podemos definir una poligonal continua H del tipo $H=\sum_{j=1}^{k}H_j$, de modo que cada H_j está soportada en $[(j-1)/k,j/k)$, $|H'_+(x)|\geq n$ para todo $x\in[0,1)$ y $\|G-H\|_\infty\leq\xi/2$. Más generalmente, sean $z_0,\ w\in\mathbb{C},\ z_0\neq w$, digamos

$$w-z_0=\rho\ \exp\left(i\theta\right),\ \rho>0,\ 0\leq\theta<2\pi.$$

Desde luego podemos suponer $|\tan\theta| < n$, más aún, supondremos que $0 \leq \theta < \arctan(n)$ pues otros casos siguen en forma análoga. Sea $\zeta > 0$ y fijemos $\arctan(n) \leq \alpha < \pi/2$. Escribiendo

$$\mu_1 = z_0 + \zeta \operatorname{cosec}(\alpha - \theta)\ \exp(i\alpha),\ \eta_1 = z_0 + \zeta \frac{w - z_0}{|w - z_0|} \cot(\alpha - \theta),$$

el triángulo $\triangle(z_0, \mu_1, \eta_1)$ es rectángulo en η_1, $|\mu_1 - \eta_1| = \zeta$ y el lado $[z_0,\eta_1]$ tiene la dirección del segmento $[z_0, w]$. Además la hipotenusa $[z_0, \mu_1]$ tiene pendiente α y la distancia máxima entre puntos de la misma y de $[z_0, w]$ es ζ. Si $|w - z_0|$ es mayor que la longitud del lado $[z_0, \eta_1]$ consideramos $z_1 \in (z_0, \eta_1)$ tal que el segmento $[\mu_1, z_1]$ sea vertical. Repetimos la construcción anterior en $[z_1, w]$, reemplazando z_0 por z_1, haciendo

$$\mu_2 = z_1 + \zeta \operatorname{cosec}(\alpha - \theta)\ \exp(i\alpha),\ \eta_2 = z_1 + \zeta \frac{w - z_1}{|w - z_1|} \cot(\alpha - \theta).$$

Tenemos otro triángulo $\triangle(z_1, \mu_2, \eta_2)$ rectángulo en η_2, en el que todo punto de la hipotenusa $[z_1, \mu_2]$, que tiene pendiente α, está a distancia no mayor que ζ de $[z_0, w]$. Si $|w - z_0|$ es mayor que la longitud del lado $[z_0, \eta_2]$ consideramos $z_2 \in (z_1, \eta_2)$ de forma que el segmento $[\mu_2, z_2]$ sea vertical. Es claro que este proceso ha de terminar después de un número finito de repeticiones, quedando definida una poligonal P con vértices $P:\ z_0,\ \mu_1,\ z_1,\ \mu_2,\ \ldots$ En todo caso, los segmentos $[\mu_l, z_l]$ son verticales, los segmentos $[z_l, \mu_{l+1}]$ tienen pendiente α y la distancia máxima entre puntos de P y de $[z_0, w]$ no supera ζ. Ahora, con $\zeta = \xi/2$, esta construcción es aplicable a las gráficas de las funciones definidas en (151) resultando la existencia de la función poligonal continua H con las propiedades antes requeridas. En definitiva,

$$\|F - H\|_\infty \leq \|F - G\|_\infty + \|G - H\|_\infty \leq \xi$$

y $H \notin \mathfrak{Q}_n$ y, como F, ξ son arbitrarios, sigue la tesis.

(iii) Si $x \in X_1$ indicamos la oscilación de f en x relativa a A mediante

$$\operatorname{osc}_A(f, x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \operatorname{diam}\ f(U \cap A),$$

donde $\mathcal{U}_x$ denota la clase de entornos abiertos de x en X_1. Notemos que $\mathfrak{D} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}_n$, donde $\mathfrak{D}_n = \{x \in X_1 :\ \operatorname{osc}_A(f, x) \geq 1/n\}$ (cf. [12], Capítulo 3, (3.14.6), pág. 59). Fijado n, veamos entonces que $\mathfrak{D}_n$ es nunca denso. Si $x \notin \mathfrak{D}_n$ existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que diam $f(U \cap A) < 1/n$. Si $y \in U$ tenemos

$$\operatorname{osc}_A(f, y) \leq \text{diam } f(U \cap A) < 1/n,$$

i.e. $U \cap \mathfrak{D}_n = \emptyset$ y $\mathfrak{D}_n$ es cerrado. Ahora, dados $z \in X_1$, $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta \leq \varepsilon$ tal que $B_{X_1}(z, \delta) \subseteq f^{-1}[B_{X_2}(f(z), 1/(3n))]$. Si $w \in X_1$ y $d_1(z, w) < \delta$ y $a_1, a_2 \in A \cap B_{X_1}(z, \delta)$ escribimos

$$\operatorname{osc}_A(f, w) \leq \text{diam} f[A \cap B_{X_1}(z, \delta)] \leq d_2(f(a_1), f(a_2))$$

$$\leq d_2(f(a_1), f(z)) + d_2(f(z), f(a_2)) < 2/(3n) < 1/n$$

y $w \notin \mathfrak{D}_n$, i.e. $B(z, \varepsilon) \nsubseteq \mathfrak{D}_n$. En particular, si $B_{X_1}(z, \delta) = \{z\}$ debe ser $z \in A$ ya que A es denso, y entonces $\operatorname{osc}_A(f, z) = 0$, i.e. $z \notin \mathfrak{D}_n$. En todo caso, $\mathfrak{D}_n^o = \emptyset$.

(iv) Dados $n, m \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_{n,m} = \{x \in X_1 : (\forall k), k \geq n, d_2(f_n(x), f_k(x)) \geq 1/m\},$$

y hacemos $E = \cup_{n,m}\left(E_{n,m} - E_{n,m}^o\right)$. Como $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq C(X_1, X_2)$ cada $E_{n,m}$ es cerrado. Más aún, es claro que cada $E_{n,m} - E_{n,m}^o$ es cerrado nunca denso y E deviene magro. Sobre $X_1 - E$ es $d_2(f_n, f) \leq 1/m$ para cualesquiera n, m, i.e. $f\,|_{X_1-E} = \text{lím unif}_{n\to+\infty} f_n\,|_{X_1-E}$, i.e. f es continua al exterior de E. Si (X_1, d_1) es completo, por el teorema de Baire $X_1 - E$ resulta denso, ya que se realiza como intersección numerable de abiertos densos. □

5.2. Acerca de subrecubrimientos numerables en $\mathbb{R}$.

Si Ω es una familia arbitraria de intervalos en $\mathbb{R}$ con más de un punto entonces hay una subfamilia numerable Θ de Ω tal que $\cup\, \Theta = \cup\, \Omega$.

Solución

Sea $\partial\Omega = \{x \in \cup \nleq : x \notin A^o \text{ si } A \in \Omega\}$. Dado $x \in \partial\Omega$ sea $A \in \Omega$ tal que $x \in A$. Como x no es punto interior de A entonces $x = \text{máx } A$ o $x = \text{mín } A$. Además, como A no se reduce a un punto, se da una y solo una de dichas posibilidades. Escribiremos

$$\partial_i \Omega = \{x \in \partial\Omega : \ \exists A \in \Omega \ / \ x = \text{mín } \ A\},$$

$$\partial_s \Omega = \{x \in \partial\Omega : \exists A \in \Omega \ / \ x = \text{máx } \ A\}.$$

Si $x \in \partial_i \Omega$ sea

$$s(x) = \sup \{\sup \ A : \ A \in \Omega, \ \text{mín } \ A = x\}.$$

Sean $x, \ y \in \partial_i \Omega, \ x < y, \ s(x) < +\infty$. Si $y < s(x)$ existe $A \in \Omega$ tal que $x = \text{mín } \ A < y < \sup \ A$, i.e. $y \in A^o$ lo que no es posible. Luego $s(x) \leq y$ y tenemos $(x, s(x)) \cap (y, s(y)) = \emptyset$ (podría ser $s(y) = +\infty$). En consecuencia, $\partial_i \Omega$ es numerable y, en forma análoga, $\partial_s \Omega$ también lo es. Por lo tanto $\partial\Omega$ es numerable, es decir, salvo un conjunto numerable $\cup \ \Omega$ consiste de puntos interiores de miembros de Ω. Sea $\widetilde{x} = \cup_{A \in \Omega / x \in A} A, \ x \in \cup \ \Omega$. Si además $y \in \cup \ \Omega$, escribiremos $x \sim y$ si y solo si $\widetilde{x} = \widetilde{y}$. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia la cual induce una partición de $\cup \ \Omega$, necesariamente numerable, porque cada clase de equivalencia es un intervalo con más de un punto. Más aún, si $x \in \partial\Omega$ y $\widetilde{x} \cap \partial\Omega = \{x\}$ entonces Ω contiene conjuntos de la forma $(z, x]$ o $[x, w)$ donde $x > z \geq -\infty$ o bien $x < w \leq +\infty$. Supongamos que Ω contiene una subfamilia $\{(z_i, x]\}_{i \in I}$ tal que $\gamma = \inf_{i \in I} \ z_i$ es finito. Dado $n \geq 1$ existe $i_n \in I$ tal que $z_{i_n} < \gamma + 1/n$ y tenemos $\cup \ \widetilde{x} = \cup_{i \in I} (z_i, x] = \cup_{n=1}^{\infty} (z_{i_n}, x]$. Si $\gamma = -\infty$ podemos razonar análogamente o considerar $\cup \ \widetilde{x} = (-\infty, x]$ si $(-\infty, x] \in \Omega$ (las demás alternativas siguen en forma análoga). Por otra parte, si x e y son dos elementos distintos de $\partial\Omega$ tales que $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ deducimos que $[x, y] \in \Omega$ y si $A \in \Omega$ entonces $A \cap \{x, y\} = \emptyset$ o $A \subsetneq [x, y]$ (notar que $\widetilde{x} \cap \partial\Omega$ tiene a lo sumo dos elementos). En definitiva, clasificando los elementos $x \in \partial\Omega$ según $\widetilde{x} \cap \partial\Omega$ tenga uno o dos elementos, queda asociada a x una subfamilia numerable $\Theta(x)$ de Ω tal que $\widetilde{x} = \cup \ \Theta(x)$. Haciendo $\Theta = \cup_{x \in \partial\Omega} \Theta(x)$ sigue la tesis. $\square$

5.3. Normalidad de la recta real, munida de la topología de intervalos semiabiertos.

El espacio $\mathbb{R}$ de los números reales, con la topología de intervalos semiabiertos, es normal.

Solución

Sean A, B subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Si $a \in A$ existe $\alpha(a) > 0$ tal que $[a,\ a+\alpha(a)) \cap B = \emptyset$. En efecto, hay un abierto básico del tipo $\cap_{j=1}^{n} [x_j,\ y_j)$ que contiene a a y es disjunto con B y podemos hacer $\alpha(a) = \text{mín}_{1\leq j\leq n}\ y_j$. Análogamente si $b \in B$ existe $\beta(b) > 0$ tal que $[b,\ b+\beta(b)) \cap A = \emptyset$. Indicaremos

$$I(a) = [a,\ a+\alpha(a))\,,\ J(b) = [b,\ b+\beta(b))\,.$$

En general, si $I(a) \cap J(b) \neq \emptyset$ entonces

$$I(a) \cap J(b) = [\text{máx}\,\{a, b\}\,,\ \text{mín}\,\{a+\alpha(a), b+\beta(b)\})\,.$$

Pero $I(a) \cap J(b) \subseteq \mathbb{R} - (A \cup B)$ y debe ser $I(a) \cap J(b) = \emptyset$. Por otra parte, $\{I(a)\}_{a\in A}$ es un cubrimiento de A. Como por el problema anterior $\mathbb{R}$ es espacio de Lindelöf y A es cerrado entonces A es espacio de Lindelöf y hay una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1} \subseteq A$ tal que el abierto $U = \cup_{n=1}^{\infty} I(a_n)$ contiene a A. Análogamente hay una sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1} \subseteq B$ de modo que el abierto $V = \cup_{n=1}^{\infty} J(b_n)$ contiene a B. Como U y V son disjuntos sigue la tesis. □

5.4. Intersecciones de espacios compactos. Compacidad en espacios métricos.

(i) En general, la intersección de conjuntos compactos puede no ser compacta.

(ii) Probar que en un espacio métrico (E, d) son equivalentes:

(a) E es compacto.

(b) Cada recubrimiento abierto numerable de E contiene un subrecubrimiento finito.

(c) Cada sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos tiene intersección no vacía.

(d) Para cada recubrimiento abierto infinito $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E existe un subconjunto propio B de A tal que $(U_\alpha)_{\alpha\in B}$ es cubrimiento de E.

(e) Cada cubrimiento abierto de E finito por puntos contiene un subrecubrimiento finito.

(f) Cada subespacio infinito y discreto de E es no cerrado.

Solución

(i) Se sabe que en espacios de Hausdorff la intersección de conjuntos compactos es compacta. Consideremos el espacio producto $X = \mathbb{R}\times \{a, b\}$, donde $\{a, b\}$ tiene la topología indiscreta. X no es espacio de Hausdorff, p. ej. $(0, a)$ y $(0, b)$ no pueden separarse. Escribimos

$$C_1 = [0, 1) \times \{a\} \cup \{(1, b)\}, \qquad C_2 = (0, 1] \times \{a\} \cup \{(0, b)\}.$$

Entonces $C_1 \cap C_2 = (0, 1) \times \{a\}$ no es compacto y tanto C_1 como C_2 lo son.

(ii) Evidentemente (a) $\Rightarrow$ (d) y (e) y (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). Sea F un subconjunto infinito y discreto de E. Si F es cerrado, como para cada $x \in F$ hay un abierto U_x de E tal que $\{x\} = F \cap U_x$, la familia $\Gamma = \{U_x\}_{x\in F} \cup \{E - F\}$ es un cubrimiento abierto de E. Asumiendo (d) podemos hallar un subrecubrimiento propio de E en Γ. Fijados x e y en F, $x \neq y$, tenemos $x \notin U_y$. Luego $\Gamma - \{U_x\}$ no es cubrimiento de E. Entonces $\Gamma - \{E - F\}$ debe ser cubrimiento de E. Pero ahora (d) no es aplicable, llegando así a una contradicción, o sea (d) y (e) $\Rightarrow$ (f). Veamos que (f) $\Rightarrow$ (a): sea F un conjunto infinito. Si existe $y \in F$ tal que $d(y,\ F - \{y\}) = 0$ entonces y es punto de acumulación de F. Podemos suponer que para cada $x \in F$ el número $\delta_x = d(x,\ F - \{x\})$ es positivo, de modo que $\{x\} = B(x,\ \delta_x/2) \cap F$ y F deviene discreto. Por (f) tenemos $F \subsetneq \mathrm{cl}\ F$ y por lo tanto F tiene algún punto de acumulación. Así E resulta compacto y sigue (a). Finalmente, (c) $\Rightarrow$ (a) ya que si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión infinita y $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}\,\{x_n,\ x_{n+1},\ \dots\}$ entonces x es punto de acumulación de $\{x_n\}_{n\geq 1}$. $\square$

5.5. Sobre espacios métricos de Hausdorff. Completitud, precompacidad, compacidad.

Dados un espacio métrico (E, d) un espacio métrico, un subconjunto C de E y un número positivo s escribiremos $V_s(C) = \{x \in E :\ d(x, C) < s\}$. En particular, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la distancia

d es acotada. Definiremos la distancia de Hausdorff sobre la familia $\mathfrak{F}(E)$ de subconjuntos cerrados no vacíos de E como

$$\delta(A,B) = \inf\ \{r>0 : A \subseteq V_r(B) \ \ y \ \ B \subseteq V_r(A)\ \},\ \ A,\ B \in \mathfrak{F}(E).$$

Probar:

(i) $(\mathfrak{F}(E),\ \delta)$ es un espacio métrico, el cual es completo si (E,d) lo es.

(ii) Si (E,d) es precompacto entonces $(\mathfrak{F}(E),\ \delta)$ también lo es. Luego si (E,d) es compacto $(\mathfrak{F}(E),\ \delta)$ también lo es.

Solución

(i) Es fácil ver que δ define una distancia sobre $\mathfrak{F}(E)$. Supongamos que E es completo y sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{F}(E)$. Sea $(n_p)_{p\geq 1}$ una sucesión estrictamente creciente tal que $\delta(A_{n_p},\ A_{n_{p+q}}) < 2^{-p}$ si $p \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}_0$. Si $x_1 \in A_{n_1}$ sea $x_2 \in A_{n_2}$ tal que $d(x_1,\ x_2) < 2^{-1}$. Como $\delta(A_{n_2},\ A_{n_3}) < 2^{-2}$ tenemos $A_{n_2} \subseteq V_{2^{-2}}(A_{n_3})$ y existe $x_3 \in A_{n_3}$ tal que $d(x_2,\ x_3) < 2^{-2}$. Inductivamente, podemos construir una sucesión $\{x_p\}_{p\geq 1}$ tal que $x_p \in A_{n_p}$ y $d(x_p,\ x_{p+1}) < 2^{-p}$ para cada p. Por lo tanto si $p,\ q \in \mathbb{N}$ tenemos

$$d(x_p,\ x_{p+q}) \leq \sum_{j=0}^{q-1}\ d(x_{p+j},\ x_{p+j+1}) < \sum_{j=0}^{q-1}\ 2^{-p-j}, \tag{152}$$

o sea $\{x_p\}_{p\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E. Sea $x = \lim_{p\to\infty}\ x_p$. Escribiendo $B_q = \mathrm{cl}\ \cup_{p=q}^{\infty} A_{n_p},\ \ q \in \mathbb{N}$, debe ser $x \in \cap_{q=1}^{\infty} B_q$. En caso contrario, sea q tal que $x \notin B_q$. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \cap \cup_{p=q}^{\infty} A_{n_p} = \emptyset$, lo cual no es posible. Así $A = \cap_{q=1}^{\infty} B_q$ pertenece a $\mathfrak{F}(E)$. Veamos que $\delta(A_n, A) \to 0$. Como $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión fundamental bastará ver que $\delta(A_{n_p}, A) \to 0$. Notemos que para todo q resulta $\cup_{p=q}^{\infty} A_{n_p} \subseteq V_{2^{-q}}(A_{n_q})$, de donde

$$B_q \subseteq cl\ V_{2^{-q}}(A_{n_q}) = \left\{y \in E :\ d(y, A_{n_q}) \leq 2^{-q}\right\}.$$

Entonces $A \subseteq \cap_{q=1}^{\infty} \left\{y \in E :\ d(y, A_{n_q}) \leq 2^{-q}\right\}$. Sea entonces $\zeta > 0$ y $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-q_0} < \zeta$. Si $q \geq q_0$ entonces

$$A \subseteq \left\{y \in E :\ d(y, A_{n_q}) \leq 2^{-q}\right\} \subseteq V_\zeta(A_{n_q}).$$

Por otra parte, si hacemos $q \to \infty$ en (152) vemos que $d(x_p,\ x) \leq 2^{-p+1}$, $x_p \in A_{n_p},\ x \in A$, cualquiera sea el entero positivo p. Este proceso es general, de manera que si $y \in A_{n_q},\ q \geq q_0$, razonando como antes se obtiene, mediante una construcción inductiva, un elemento $y_0 \in A$ tal que $d(y,\ y_0) < \zeta$. Así $A_{n_q} \subseteq V_\zeta(A)$ si $q \geq q_0$ y tenemos (i).

(ii) Dado $\varepsilon > 0$ sea F un subconjunto finito de E tal que $d(x, F) < \varepsilon$ para todo $x \in F$. Entonces $\mathcal{P}(F) - \{\emptyset\}$ es un subconjunto finito de $\mathfrak{F}(E)$ y, si $A \in \mathfrak{F}(E)$ entonces $\delta\,(A,\ \{x \in F :\ d(x, A) < \varepsilon\}) \leq \varepsilon$ y $\{x \in F :\ d(x, A) < \varepsilon\}$ es una parte no vacía de F. $\square$

5.6. Generadores de la $\sigma-$ álgebra de subconjuntos de Baire en un espacio separado localmente compacto. Caracterización del subespacio $C_0\,(X)$ de $C(X)$ de límites uniformes de elementos de $C_c\,(X)$. Determinación de $C_0(X)$ bajo la compactación de Alexandroff. Determinación de $C\,(Y^*)$, $C_c\,(Y)$, $C_0(Y)$ y de subconjuntos de Baire de Y e Y^*, donde Y es conjunto no numerable con la topología discreta e Y^* es el compactado de Alexandroff de Y. Existencia de subconjuntos compactos de Y^* que no son de Baire. Existencia de medidas de probabilidad de Baire sobre Y nulas sobre $C_0(Y)$. Acerca de las clases de Baire y de Borel en espacios métricos separables localmente compactos. Sobre la $\sigma-$ álgebra de Baire del producto de espacios separados localmente compactos.

(i) Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, K un subconjunto compacto de X. Hay un abierto O con clausura compacta que le contiene y una función continua $f : X \to [0, 1]$ soportada en O tal que $f\ |_K \equiv 1$. Si K es además de clase G_δ puede ser también $f < 1$ sobre

$X - K$. [66]

(ii) Caracterizar el subespacio $C_0(X)$ de $C(X)$ de límites uniformes de elementos de $C_c(X)$.

(iii) Si X^* es la compactación de alexandroff de X,

$$C_0(X) = \{f|_X \colon\ f \in C(X^*),\ f(\infty) = 0\}.$$

(iv) Sea Y un conjunto no numerable con la topología discreta.

(iv)(1) Determinar $C_c(Y)$ y $C_0(Y)$.

(iv)(2) Determinar los subconjuntos de Baire de Y.

(iv)(3) Determinar $C(Y^*)$.

(iv)(4) Determinar los subconjuntos de Baire de Y^*.

(iv)(5) Mostrar que Y^* tiene un subconjunto compacto que no es de Baire.

(iv)(6) Hay una medida de Baire μ sobre Y tal que $\mu(Y) = 1$ y $\int_Y f\ d\mu = 0$ si $f \in C_0(Y)$.

(v) En todo espacio métrico separable localmente compacto las clases de Baire y de Borel son iguales.

(vi) Sean X e Y espacios separados localmente compactos

(vi)(1) Si $f \in C_c(X \times Y)$, $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y funciones

$$\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \in C_c(X),\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_n \in C_c(Y)$$

tales que $\left|f(x,y) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)\,\psi_j(y)\right| \leq \varepsilon$ para todo $(x,y) \in X \times Y$.

(vi)(2) Si $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}(Y)$, $\mathcal{B}(X \times Y)$ son las σ - álgebras de Baire de X, Y y $X \times Y$ entonces $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$.

Solución

[66] En consecuencia, la $\sigma-$ álgebra de subconjuntos de Baire de X, i.e. la menor $\sigma-$ álgebra respecto a la que toda función continua con soporte compacto es medible, está generada por la clase de conjuntos compactos y G_δ.

(i) Para cada $x \in K$ sea O_x un conjunto abierto de clausura compacta que le contiene. Por la compacidad de K hay un subconjunto finito F de K tal que el conjunto abierto $O = \cup_{xF} O_x$ contiene a K y tiene clausura compacta. Basta aplicar ahora el lema de Urysohn. Si K es compacto G_δ podemos escribir $K = \cap_{n=1}^{\infty} O_n$, donde $\{O_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos abiertos. Para cada n, como $K \subseteq O_n$, hay un abierto U_n con clausura compacta tal que $K \subseteq U_n \subseteq \operatorname{cl} U_n \subseteq O_n$ (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.7, page 38). Como $K = \cup_{n=1}^{\infty} U_n$, podemos asumir que cada O_n tiene clausura compacta. Para $n \in \mathbb{N}$ existe entonces $f_n : X \to [0,1]$ continua de soporte compacto contenido en O_n tal que $f_n \mid_K = 1$. La afirmación sigue considerando $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$.

(ii) Para que una función $f \in C(X)$ pertenezca a $C_0(X)$ es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{|f| \geq \varepsilon\}$ sea compacto. En efecto, si $f \in C_0(X)$ y $\varepsilon > 0$ sea $\{x_a\}_{a\in A}$ una red tal que $|f(x_a)| \geq \varepsilon$ para todo a. Sea $g \in C_c(X)$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/2$ para todo $x \in X$. Si $a \in A$, como

$$\varepsilon/2 \geq |f(x_a) - g(x_a)| \geq ||f(x_a)| - |g(x_a)|| \geq |f(x_a)| - |g(x_a)|$$

deducimos que $|g(x_a)| \geq \varepsilon/2$ y $\{x_a\}_{a\in A} \subseteq \operatorname{supp}(g)$. Por la compacidad de $\operatorname{supp}(g)$ la red $\{x_a\}_{a\in A}$ tiene una subred convergente y, siendo esta arbitraria, la condición es necesaria. Recíprocamente, si $\eta > 0$ por (i) y la hipótesis hay un abierto con clausura compacta O que contiene al conjunto compacto $\{|f| \geq \eta\}$. Por el lema de Urysohn existe una función continua $h : X \to [0,1]$, con soporte compacto contenido en O, tal que $h \mid_{\{|f|\geq\eta\}} \equiv 1$. Por lo tanto $fh \in C_0(X)$ y $|f - fh| \leq \eta$ uniformemente sobre X.

(iii) Si $f \in C_0(X)$ extendemos f a X^* haciendo $f(\infty) = 0$. Si $\varepsilon > 0$, como $f^{-1}[D(0,\varepsilon)] \supseteq X^* - \{|f| \geq \varepsilon\}$ sigue que $f \in C(X^*)$. Por otra parte, si $g \in C(X^*)$ entonces $g \mid_X \in C(X)$ y para $\rho > 0$ el conjunto $\{|g \mid_X| \geq \rho\} = X^* - g^{-1}[D(0,\rho)]$ es cerrado en X^*. Luego dicho conjunto es subconjunto compacto de X^* pues X^* es separado y, como es subespacio de X y todo abierto de X es abierto en X^*, sigue (iii).

(iv)(1) Si $f \in C(Y)$,

$$f \in C_c(Y) \Leftrightarrow \sharp\,[\mathrm{supp}\,(f)] < +\infty,$$

$$f \in C_0\,(X) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon)\,,\ \varepsilon > 0,\ \sharp\,\{|f| \geq \varepsilon\} < +\infty.$$

(iv)(2) Sea $\mathcal{N}$ la $\sigma-$ álgebra generada por la clase de subconjuntos numerables de Y e indiquemos $\mathcal{B}\,(Y)$ a la clase de subconjuntos de Baire de Y. Como $\mathcal{N}$ contiene a la clase de conjuntos compactos y G_δ's tenemos $\mathcal{B}\,(Y) \subseteq \mathcal{N}$. Como toda parte finita es compacta, abierta, contenida en $\mathcal{B}\,(Y)$ y $\mathcal{B}\,(Y)$ es $\sigma-$ álgebra $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}\,(Y)$.

(iv)(3) Como Y tiene la topología discreta, $C(Y^*)$ consiste de todas las funciones de Y^* en $\mathbb{C}$ continuas en ∞.

(iv)(4) Un subconjunto C de Y^* es compacto G_δ sii es una parte finita de Y o $Y^* - C$ es numerable en Y. En efecto, la afirmación es inmediata si $C \in \mathcal{P}_f\,(Y)$. Si $Y^* - C = \{y_n\}_{n \geq 1}$ en Y entonces $C = \cap_{n=1}^{\infty} Y^* - \{y_n\}$, i.e. C es G_δ y es compacto pues se realiza como intersección de cerrados en un espacio separado. Por otra parte, si C es compacto G_δ y no contiene a ∞, es compacto en Y y, necesariamente, finito. Si C es compacto G_δ y contiene a ∞, como cada abierto en Y^* es complemento de una parte finita de Y la condición es necesaria. Definimos

$$\Xi = \{A \in \mathcal{P}\,(Y^*) : Y \ \ o \ \ Y^* - A \text{ son subconjuntos numerables de } Y\}\,.$$

Entonces Ξ es una $\sigma-$ álgebra que contiene a todo subconjunto compacto G_δ de Y^* y, por lo tanto, también a la $\sigma-$ álgebra de Baire $\mathcal{B}\,(Y^*)$. Claramente podemos concluir que $\mathcal{B}\,(Y^*) = \Xi$.

(iv)(5) El conjunto compacto $\{\infty\}$ no es de Baire.

(iv)(6) Dado $A \in \mathcal{P}\,(Y)$ escribimos $\mu^*\,(A) = 0$ si A es numerable, $\mu^*\,(A) = 1$ si A es no numerable. μ^* es una medida exterior y, si Θ es la $\sigma-$ álgebra que sigue al aplicar a μ^* el proceso de Carathéodory es

$$\Theta = \{A \in \mathcal{P}\,(Y) :\ A \text{ es numerable o } Y - A \text{ es numerable}\}\,.$$

Por (iv)(2) obtenemos $\mathcal{B}\,(Y) \subseteq \Theta$ y, si $\widetilde{\mu} = \mu^* \,|_\Theta$y $\mu = \widetilde{\mu}\,|_{\mathcal{B}(Y)}$ entonces μ es una medida nula sobre subconjuntos compactos de Y (i.e. sobre subconjuntos finitos de Y). Luego μ es medida de Baire sobre Y, $\mu\,(Y) = 1$ y sigue la afirmación.

(v) Sea (X, d) un espacio métrico separable localmente compacto. Todo subconjunto cerrado C de X es de clase G_δ pues

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ d(x, C) < 1/n\}.$$

Por otra parte, si $x \in X$, como X es separado por ser espacio métrico y por la compacidad local, existe un abierto precompacto O_x que contiene a x. Existe además $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq O_x$ y, por lo tanto, $B(x, r_x)$ es precompacta. Si D es un subconjunto numerable denso de X y U es abierto, como la $\sigma-$ álgebra de Baire está generada por la clase de partes compactas y G_δ de X bastará ver que

$$U = \bigcup \left\{ \operatorname{cl} B(y,r) : \begin{array}{l} y \in D, \ r \in \mathbb{Q}^+, \\ B(y,r) \text{ precompacto,} \\ \operatorname{cl} B(y,r) \subseteq U. \end{array} \right\}.$$

En efecto, sea $z \in U, \ s \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\operatorname{cl} B(z, s) \subseteq U$. Podemos suponer que $B(z, s)$ es precompacto, que $z \notin D$ y considerar $y \in D$ tal que $d(y, z) < s/2$. Sea $r \in \mathbb{Q}$ tal que $d(y, z) < r < s - d(y, z)$. En estas condiciones, $z \in B(y, r)$, $B(y, r) \subseteq B(z, s)$ y $\operatorname{cl} B(y, r)$ es una parte compacta de U, como debíamos probar.

(vi)(1) Sean p_X y p_Y las proyecciones de $X \times Y$ sobre X e Y y $S = \operatorname{supp}(f)$. Como S es compacto y las proyecciones son continuas $p_X(S)$ y $p_Y(S)$ son compactos. Luego $C = p_X(S) \times p_Y(S)$ es compacto y contiene a S. Si $(\varphi, \mu) \in C_{\mathbb{C}}(p_X(S)) \times C_{\mathbb{C}}(p_Y(S))$ entonces $\varphi \cdot \psi \in C_{\mathbb{C}}(C)$. En efecto, si $\{(x_l, y_l)\}_{l \in L}$ es una red que converge a (x, y) en C entonces $\{x_l\}_{l \in L}$, $\{y_l\}_{l \in L}$ son redes en $p_X(S)$ y $p_Y(S)$ convergentes a x e y respectivamente. Luego $\varphi(x_l) \to \varphi(x)$, $\psi(y_l) \to \psi(y)$ y por lo tanto

$$\lim_{l \in L} (\varphi \cdot \psi)(x_l, y_l) = \lim_{l \in L} [\varphi(x_l) \psi(y_l)] = (\varphi \cdot \psi)(x, y).$$

Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra de $C_{\mathbb{C}}(C)$ generada productos de elementos de $C_{\mathbb{C}}(p_X(S))$ y $C_{\mathbb{C}}(p_Y(S))$. Como $\mathcal{A}$ contiene las funciones constantes, es cerrada por conjugación y tanto $C_{\mathbb{C}}(p_X(S))$ como $C_{\mathbb{C}}(p_Y(S))$ separan puntos de $p_X(S)$ y $p_Y(S)$, el resultado sigue del teorema de Stone - Wierstrass.

(vi)(2) El producto de conjuntos compactos de clase G_δ es compacto de clase G_δ, de modo que $\mathcal{B}(X \times Y) \supseteq \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Si $\varphi \in C_c(X)$

entonces $\varphi \circ p_X$ es $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ medible, ya que si $B \subseteq \mathbb{C}$ es boreliano $(\varphi \circ p_X)^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B) \times Y$, $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ e $Y \in \mathcal{B}(Y)$. Análogamente, si $\psi \in C_c(Y)$ entonces $\psi \circ p_Y$ es $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ medible. Como $\varphi \cdot \psi = (\varphi \circ p_X) \cdot (\psi \circ p_Y)$ resulta $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ medible. Por (vi)(1) sigue que toda función continua con soporte compacto sobre $X \times Y$ ha de ser $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ medible, i.e. $\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. $\square$

5.7. Ciertas propiedades topológicas de los ordinales menores que el primer ordinal no numerable, munidos con la topología del orden.

Sea $[0, \Omega]$ el conjunto de números ordinales menores o iguales que el primer ordinal no numerable Ω munido de la topología del orden. Entonces:

(i) Ω es punto de acumulación de $[0, \Omega)$.

(ii) Ninguna sucesión de puntos de $[0, \Omega)$ converge a Ω.

(iii) El conjunto de ordinales no mayores al primer ordinal infinito ω es discreto y satisface (II) (2do. axioma de numerabilidad).

(iv) $[0, \Omega)$ satisface N_I (1er. axioma de numerabilidad) pero no N_{II} (2do. axioma de numerabilidad).

(v) $[0, \Omega]$ no satisface N_I ni N_{II}.

(vi) Toda parte separable de $[0, \Omega]$ es numerable.

(vii) Si $(x_n)_{n\in\omega}, (y_n)_{n\in\omega} \in [0, \Omega)^{\omega}$ y $x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$ para cada n entonces ambas convergen a un mismo punto de $[0, \Omega)$.

(viii) Si A y B son partes cerradas disjuntas de $[0, \Omega)$ entonces Ω no es punto de acumulación de A y B simultáneamente.

(ix) $[0, \Omega)$ y $[0, \Omega]$ son espacios normales.

(x) Si una función $f : [0, \Omega) \to [0, \Omega)$ verifica $f(x) > x$ para todo x entonces existe $x \in [0, \Omega)$ tal que (x, x) es punto de acumulación del gráfico de f.

(xi) $[0, \Omega) \times [0, \Omega]$ no es normal.

(xii) $[0,\Omega]$ es el compactado de Stone - Čech de $[0,\Omega)$.

(xiii) $[0,\Omega)$ es localmente compacto.

(xiv) $[0,\Omega)$ es secuencialmente compacto.

(xv) $[0,\Omega)$ no es compacto.

Solución

(i) Dado $\alpha \in [0,\Omega)$ el conjunto $(\alpha,\Omega]$ es entorno abierto de Ω. Entonces $(\alpha,\Omega) \neq \emptyset$ pues α tiene un número numerable de predecesores.

(ii) Si $S \in [0,\Omega)^\omega$, $\mathrm{Rg}(S)$ es subconjunto numerable de $[0,\Omega)$. En consecuencia $\sup\ \mathrm{Rg}(S) < \Omega$ (cf. [23], Teorema 23, pág. 42). Haciendo $\alpha_S = \sup\ \mathrm{Rg}(S)$ entonces $(\alpha_S,\Omega]$ es entorno abierto de Ω en $[0,\Omega]$ y $\sharp\ S^{-1}([0,\alpha_S])$ es infinito.

(iii) Dado $n \in \omega$ resulta

$$\{n\} = \begin{cases} \omega \cap \{\alpha \in [0,\Omega] : \quad \alpha < 1\} & si \quad n = 0, \\ \omega \cap \{\alpha \in [0,\Omega] : \quad n-1 < \alpha < n+1\} & si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Además ω es numerable.

(iv) Dado $\beta \in [0,\Omega)$ existe $\min\{\gamma \in [0,\Omega) : \ \beta < \gamma\}$, ordinal al que podemos indicar $\beta+1$. Por otra parte, el conjunto de predecesores menores que β es un subconjunto numerable de $[0,\Omega)$. Es fácil ver ahora que $\{(\alpha,\beta+1) : \ \alpha < \beta\}$ es base de abiertos de β. Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es base numerable de $[0,\Omega)$. Necesariamente existe $U \in \mathcal{B}$ no numerable. Como para todo $\alpha \in X$ resulta $(\alpha,\Omega) = \cup_{\beta>\alpha}(\alpha,\beta+1)$ podemos suponer que U no es una semirrecta. Sea $\mathcal{M}(U)$ la clase de subconjuntos abiertos maximales de U. Cada elemento de $\mathcal{M}(U)$ es numerable porque U no es una semirrecta. Por lo tanto $\mathcal{M}(U)$ es no numerable, es decir, hay una cantidad no numerable de abiertos disjuntos, lo cual no es posible si $[0,\Omega)$ satisface N_{II}.

(v) Como los axiomas de numerabilidad son propiedades hereditarias basta ver que Ω no tiene una base numerable de abiertos. $\{\Omega\}$ no es abierto, sino existiría $\gamma \in [0,\Omega)$ tal que $(\gamma,\Omega] \subseteq \{\Omega\}$ lo cual es absurdo. En general, si V es un abierto que contiene a Ω existe $\alpha \in [0, \Omega)$ tal que $(\alpha, \Omega] \subseteq V$, i.e. $[\alpha + 1, \Omega] \subseteq V$. Podemos considerar

$$\beta_V = \text{mín}\{\beta \in [0, \Omega) : \ [\beta, \Omega] \subseteq V\}.$$

Si $\{V_n\}_{n \geq 1}$ fuere una base de abiertos de Ω consideramos para cada entero no negativo n el elemento β_{V_n}. Así $\{\beta_{V_n}\}_{n \geq 1} \subseteq [0, \Omega)$ y $\beta_{V_n} \to \Omega$, en contradicción con (ii).

(vi) Sea S una parte separable de $[0, \Omega]$, D un subconjunto denso numerable de S. Notemos que Ω no es punto de acumulación de S. En efecto, sea $(x_i)_{i \in I} \subseteq [0, \Omega)$ tal que $\{(x_i, \Omega]\}_{i \in I}$ es base de abiertos, necesariamente no numerable, de Ω. Fijado $i \in I$ sean

$$y_i = \text{mín } (x_i, \Omega) \cap S,$$

$$x_{i+1} = \text{mín } \{x_j : \ x_j > y_i\},$$

$$d_i = \text{mín } D \cap (x_i, x_{i+1}) \cap S.$$

Si $i \neq j$ en I, digamos $x_i < x_j$, tenemos $d_i < x_{i+1} \leq x_j < d_j$, i.e. $d_i \neq d_j$. Pero D es numerable, lo que es contradictorio. Por lo tanto, existe $x < \Omega$ tal que $(x, \Omega] \cap S = \{\Omega\}$ y S resulta numerable.

(vii) Haciendo $x = \sup_{n \in \omega} \ x_n$ e $y = \sup_{n \in \omega} \ y_n$ por (ii) se tiene $x, \ y \in [0, \Omega)$. Evidentemente $x = y$.

(viii) Supongamos que Ω es punto de acumulación de A y B. Sea

$$x_0 = \text{mín } [0, \Omega) \cap A, \qquad y_0 = \text{mín } [x_0, \Omega) \cap B,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \text{mín } [y_{n-1}, \Omega) \cap A, \qquad y_n = \text{mín } [x_n, \Omega) \cap B,$$

donde $n \in \omega$. Por (vii) se deduce que $A \cap B \neq \emptyset$.

(ix) Ver [14], Chap. VII, sec. 3, 144, ex. 2.

(x) Si $x_1 \in [0,\Omega)$ definimos $x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ \ldots$ Así para cada $n \in \omega$ tenemos $x_n < f(x_n) \leq x_{n+1}$ y por (ii) existe

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Si U es un abierto que contiene a (x,x) sean $a,\ b \in [0,\Omega)$ tales que $a < x < b$ y $(a,b)\times(a,b) \subseteq U$. En particular, como $x = \sup_{n\in\omega} f(x_n)$ existe n_0 tal que

$$a < x_{n_0} < f(x_{n_0}) \leq x < b \ \ y \ \ (x_{n_0},\ f(x_{n_0})) \in U - \{(x,x)\}\,.$$

(xi) Sea $A = \{(x,x):\ x \in [0,\Omega)\}$, $B = [0,\Omega)\times\{\Omega\}$. A es subespacio cerrado de $[0,\Omega)\times[0,\Omega]$ pues si $x < y \leq \Omega$ entonces $[0,x+1)\times(x,\Omega]$ es entorno abierto de (x,y) disjunto con A. También B es cerrado pues si $x,\ y \in [0,\Omega)$ entonces $[0,\Omega)\times[0,y+1)$ es entorno abierto de (x,y) disjunto con B. Evidentemente $A\cap B = \emptyset$. Si $[0,\Omega)\times[0,\Omega]$ fuese normal sea U abierto tal que $A \subseteq U,\ U\cap B = \emptyset$. Consideramos la función $f : [0,\Omega) \to [0,\Omega)$, $f(x) = \text{mín}\ \{y:\ x < y < \Omega,\ (x,y) \notin U\}$. En particular, $f(x) > x$ para todo x y por (x) existe un punto $(z,z) \in A$ de acumulación del gráfico de f. Pero si $(x, f(x)) \in U - \{(z,z)\}$ se contradice la definición misma de f y sigue (xi).

(xii) $[0,\Omega]$ es compacto (cf. [14], VIII, **2**, Ex. 2). Sea Y espacio compacto de Hausdorff, $f : [0,\Omega) \to Y$ una función continua. Bastará ver que f puede extenderse a una función continua de $[0,\Omega]$ en Y ([23], Teorema 24, pág. 176). Si $\alpha < \Omega$ por (i) existe x_α tal que $\alpha < x_\alpha < \Omega$. La red $(f(x_\alpha))_{\alpha<\Omega}$ tiene una subred $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ convergente a un elemento $y \in Y$. Si consideramos otra red $(f(\widetilde{x}_\alpha))_{\alpha<\Omega}$ generada de esta manera, sea $(f(\widetilde{x}_\alpha))_{\alpha\in\widetilde{A}}$ una subred de esta convergente a $\widetilde{y} \in Y$. Si $y \neq \widetilde{y}$ sean $U,\ \widetilde{U}$ entornos abiertos disjuntos de y e $\widetilde{y}$ respectivamente. En particular, Y es localmente compacto y existen abiertos V y $\widetilde{V}$ con clausuras compactas tales que

$$y \in V,\ \widetilde{y} \in \widetilde{V},\ V \subseteq \text{cl}\ V \subseteq U \ \ y \ \ \widetilde{V} \subseteq \text{cl}\ \widetilde{V} \subseteq U.$$

Notemos que $f^{-1}(\text{cl}\ V)$ y $f^{-1}(\text{cl}\ \widetilde{V})$ son entonces partes cerradas disjuntas de $[0,\Omega)$ de las que Ω es punto de acumulación, lo cual contradice (viii). Por abuso de notación, escribimos $f(\Omega) = y$. Claramente la aplicación $f : [0,\Omega] \to Y$ es continua y extiende a f.

(xiii) $[0,1)$ es entorno de cero en $[0,\Omega)$ y cl $[0,1) = [0,1) = \{0\}$. Sea $\alpha_0 > 0$ en $[0,\Omega)$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de $(0,\alpha_0]$. Existe $i_1 \in I$ tal que $\alpha_0 \in U_{i_1}$. Por (iv) existe $\alpha_1 \in [0,\Omega)$ tal que $\alpha_1 < \alpha_0$ y $(\alpha_1,\alpha_0] \subseteq U_{i_1}$. Si $\alpha_1 > 0$ podemos repetir este argumento y generar una sucesión $\alpha_0 > \alpha_1 > ...$ Este proceso debe terminar al cabo de un número finito de pasos, pues $[0,\Omega)$ está bien ordenado. Existe entonces $n \in \omega$ tal que $\alpha_n = 0$ y tenemos $(0,\alpha_0] = \cup_{j=0}^{n-1} \ (\alpha_{j+1},\alpha_j] \subseteq \cup_{j=0}^{n-1} U_{i_{j+1}}$.

(xiv) Sea $S = (\alpha_n)_{n\in\omega}$ una sucesión infinita. Sea $n_1 \in \omega \ / \ \alpha_{n_1} = \text{mín}\, S$. Determinados $n_1, \ ... \ n_k$ sea $n_{k+1} \in \omega$ tal que

$$\alpha_{n_{k+1}} = \text{mín} \ \ S - \{\alpha_{n_1}, \ ... \ ,\alpha_{n_k}\}.$$

Por construcción, $\alpha_{n_{k+1}} > \alpha_{n_k}$ para todo k. Si $\alpha = \sup_{k\in\omega} \ \alpha_{n_k}$ entonces $\alpha = \text{lím}_{k\in\omega} \ \alpha_{n_k}$ y, por (ii), $\alpha < \Omega$.

(xv) Notemos que $\{[0,\alpha)\}_{0\leq\alpha<\Omega}$ es un cubrimiento abierto de $[0,\Omega)$ del que no es posible extraer subcubrimiento finito alguno, porque cada uno de sus miembros es numerable. $\square$

5.8. Espacios puerta separados y puntos de acumulación. Sucesiones convergentes en un conjunto numerable con la topología formada por el conjunto vacío y todos los conjuntos de complemento finito.

(i) Sea X un conjunto numerable, con la topología formada por el conjunto vacío y todos los conjuntos de complemento finito. -¿Qué sucesiones convergen a qué puntos?-

(ii) Un espacio puerta[67] de Hausdorff X tiene no más de un punto de acumulación.

Solución

(i) Fijada $S \in X^\omega$ sea $L_S = \{x \in X : \ \text{lím}_{n\to\infty} \ S(n) = x\}$. Entonces $x \in L_S$ sii $\forall y, \ y \neq x, \ \sharp \ S^{-1}(\{y\}) < \infty$. En efecto, si $x \in L_S$ e $y \neq x$ entonces

[67]Espacio puerta es todo espacio topológico en el que cada parte es abierta o cerrada.

$\sharp\ \{n \in \omega :\ S(n) = y\} < \infty$ ya que existe n_1 tal que $S(n) \in X - \{y\}$ si $n \geq n_1$. Recíprocamente, si U es un entorno de x sea

$$n_2 = \text{máx}\ \ S^{-1}(X - U).$$

Si $n > n_2$ entonces $S(n) \in U$ y $x \in L_S$. Entonces $L_S \neq \emptyset$ sii

$$\sharp \left\{x \in X :\ \sharp\ S^{-1}\left(\{x\}\right) = \infty\right\} \leq 1.$$

En particular, $L_S = X$ si $\sharp\ S^{-1}\left(\{x\}\right) < \infty$ para todo $x \in X$.

(ii) Sean $x,\ y$ puntos de acumulación distintos de $X, U,\ V$ entornos abiertos disjuntos de x e y respectivamente. Sean $\mathcal{U}_{x,U}$ y $\mathcal{U}_{y,V}$ las clases de entornos de x e y contenidos en U y V respectivamente. Consideramos el espacio $Y = \{y\} \cup \{x_W :\ W \in \mathcal{U}_x,\ x_W \in W - \{x\}\}$. Ahora, Y no es cerrado porque $x_W \to x$ y $x \notin Y$. Además, si $y_T \in T - \{y\}$ para cada $T \in \mathcal{U}_{y,V}$ entonces $y_T \to y$. Pero $\{y_T\}_{T \in \mathcal{U}_{y,V}} \subseteq X - Y$, es decir $y \notin \text{cl}\ (X - Y)$. Como $X - Y$ no es cerrado entonces Y no es abierto y se contradice la propiedad puerta de X. $\square$

5.9. Un problema de Arens acerca de un espacio de Hausdorff - Lindelöf y cuestiones de convergencia.

(cf. [3]) Sea $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ con la mínima topología τ que tiene la siguientes propiedades: (a) si $(m,n) \neq (0,0)$ el conjunto $\{(m,n)\}$ es abierto. (b) Un conjunto U que contiene a $(0,0)$ es abierto sii

$$\sharp \{m :\ \sharp \{n : (m,n) \notin U\} = \infty\} < \infty.$$

(i) La topología anterior está bien definida.

(ii) (X,τ) deviene espacio de Hausdorff.

(iii) Cada subconjunto $\{(m,n)\}$ de X es intersección de una familia numerable de entornos cerrados.

(iv) X es espacio de Lindelöf.

(v) Ninguna sucesión en $X - \{(0,0)\}$ converge a $(0,0)$.

(vi) Hay una sucesión S en $X - \{(0,0)\}$ de la que $(0,0)$ es punto de aglomeración y S, restringida a cualquier conjunto cofinal de enteros, no converge.

Solución

(i) Claramente $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau$. Si $U, V \in \tau$ y $(0,0) \notin U \cap V$ es

$$U \cap V = \bigcup_{(m,n) \in U \cap V} \{(m,n)\},$$

i.e. $U \cap V \in \tau$. Si $(0,0) \in U \cap V$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\{n : (m,n) \notin U \cap V\} \subseteq \{n : (m,n) \notin U\} \cup \{n : (m,n) \notin V\}.$$

Luego $\sharp \{m : \ \sharp \{n : (m,n) \notin U \cap V\} = \infty\} \leq$

$$\leq \sharp \{m : \sharp \{n : (m,n) \notin U\} = \infty\} + \sharp \{m : \sharp \{n : (m,n) \notin V\} = \infty\}$$

y esta última cantidad es finita pues U y V son abiertos, con lo que $U \cap V$ es abierto. Sea $\{W_j\}_{j \in J}$ una familia de abiertos y $W = \cup_{j \in J} W_j$. Si $(0,0) \notin W$ entonces $W \in \tau$ porque $W = \cup_{(m,n) \in W} \{(m,n)\}$. Si $m \in \mathbb{N}_0$ es

$$\{n : (m,n) \notin W\} \subseteq \bigcap_{j \in J} \{n : (m,n) \notin W_j\},$$

con lo que para cada j es

$$\{m : \ \sharp \{n : (m,n) \notin W\} = \infty\} \subseteq \{m : \ \sharp \{n : (m,n) \notin W_j\} = \infty\}.$$

Como $\cap_{j \in J} \{m : \ \sharp \{n : (m,n) \notin W_j\} = \infty\}$ es finito W es abierto.

(ii) Si $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ en X y $\{(0,0)\} \cap \{(m_1, n_1), (m_2, n_2)\} = \emptyset$, $\{(m_1, n_1)\}$ y $\{(m_2, n_2)\}$ son entornos disjuntos de (m_1, n_1) y (m_2, n_2) respectivamente. Si $(m,n) \neq (0,0)$ en X $\{(m,n)\}$ y $X - \{(m,n)\}$ son entornos disjuntos de (m,n) y $(0,0)$ respectivamente.

(iii) Por (ii) $\{(m,n)\}$ es cerrado cuando $(m,n) \neq (0,0)$. Además

$$\{(0,0)\} = \bigcap_{(m,n) \neq (0,0)} X - \{(m,n)\}$$

y cada $X - \{(m,n)\}$ es cerrado.

(iv) Trivial.

(v) Fijado $l \in \mathbb{N}$ sea $U_l = (\mathbb{N}_0 - \{l\}) \times \mathbb{N}_0$. Si $m \in \mathbb{N}_0$ notamos que

$$\{n : (m,n) \notin U_l\} \neq \emptyset \Leftrightarrow m = l, \ \{n : (l,n) \notin U_l\} = \mathbb{N}_0$$

y por ello U_l es abierto. Sea S una sucesión en $X - \{(0,0)\}$ que converge a $(0,0)$. Para cada $l \in \mathbb{N}$ el abierto U_l contiene a $(0,0)$ y como S converge a $(0,0)$ la columna $\{l\} \times \mathbb{N}_0$ contiene un número finito de elementos de S. Deducimos que $X - S$ es abierto, pues contiene a $(0,0)$ y si $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{n : (m,n) \notin X - S\}$ es finito. Evidentemente S es no finita y, como $S - (X - S) = S$ se contradice que S converge a $(0,0)$ y sigue (v).

(vi) Si $n \in \mathbb{N}$ definimos[68]

$$S(n) = \begin{cases} \left(n - [\sqrt{n}]^2, [\sqrt{n}]\right) & si \quad n \leq [\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}], \\ \\ \left([\sqrt{n}], 2[\sqrt{n}] - n + [\sqrt{n}]^2\right) & si \quad [\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}] < n. \end{cases}$$

Por construcción S es una sucesión con valores en $X - \{(0,0)\}$. Si U es un entorno de $(0,0)$ hay, eventualmente, un número finito de columnas que intersecan $X - U$ en conjuntos infinitos. Por la suryectividad de S para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \geq k$ tal que $S(n_k) \in U$ y el punto $(0,0)$ es de aglomeración de S. Por (v) es claro que la restricción de S a cualquier subconjunto cofinal de enteros positivos no converge. $\square$

[68]Para cada $j \in \mathbb{N}$ numeramos cada una de las poligonales

$$\begin{array}{cccc} (0,j) & (1,j) & \dots & (j,j) \\ & & & (j,j-1) \\ & & & \dots \\ & & & (j,0) \end{array}$$

de modo que $S(1) = (0,1)$, $S(2) = (1,1)$, $S(3) = (1,0)$, $S(4) = (0,2)$, etc..

5.10. Con la topología del orden y el orden lexicográfico $[0,1]^2$ es separado, satisface el primer axioma de numerabilidad, es compacto, conexo, no es separable ni metrizable.

Sea $X = I \times I$ el producto cartesiano del intervalo $I = [0,1]$ ordenado lexicográficamente con la topología del orden.

(i) X es compacto.

(ii) X es conexo.

(iii) X es espacio de Hausdorff.

(iv) $X \in N_I$.

(v) X no es separable.

(vi) X no es metrizable.

Solución

(i) Sea $P_\alpha = (x_\alpha,\ y_\alpha),\ \alpha \in A$, una red infinita de puntos de X. Si el conjunto $B = \{\alpha \in A:\ x_\alpha = 0\}$ es infinito sea $y_1 \in I$ y $C \subseteq B$ subconjunto dirigido tal que $y_\alpha \to y_1,\ \alpha \in C$. Entonces $P_\alpha \to (0, y_1),\ \alpha \in C$. En efecto, si $(a_1, b_1) < (0, y_1)$ entonces $a_1 = 0$ y $b_1 < y_1$. Luego existe $\alpha_1 \in C$ tal que $b_1 < y_\alpha$ si $\alpha \geq \alpha_1,\ \alpha \in C$, en cuyo caso $(a_1, b_1) < P_\alpha$. Si $(0, y_1) < (c_1, d_1)$ y $c_1 > 0$ entonces $P_\alpha < (c_1, d_1)$ si $\alpha \in C$. Si $c_1 = 0$ e $y_1 < d_1$ existe $\alpha_2 \in C$ tal que $y_\alpha < d_1$ si $\alpha \geq \alpha_2,\ \alpha \in C$, en cuyo caso $P_\alpha < (c_1, d_1)$. Si B es finito sea $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \subseteq A$ una sucesión infinita tal que $x_{\alpha_n} \downarrow x$. Pasando eventualmente a una subsucesión de $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ podemos suponer que $y_{\alpha_n} \to y_2$ para cierto $y_2 \in I$. Ahora $P_{\alpha_n} \to (x, y_2)$. Como antes, sea $(a_2, b_2) < (x, y_2)$. Si $a_2 < x$ entonces $(a_2, b_2) < P_{\alpha_n}$ para todo n. Si $a_2 = x$ y $b_2 < y_2$ existe n_1 tal que $b_2 < y_{\alpha_n}$ si $n \geq n_1$. En tal caso, como además $x \leq x_{\alpha_n}$ resulta $(a_2, b_2) < P_{\alpha_n}$. Finalmente, si $(x, y_2) < (c_2, d_2)$ se razona en forma análoga.

(ii) Sea A un subconjunto no vacío de X abierto y cerrado. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(0,0) \in A$. Como A es abierto existe $(\alpha, \beta) \in X$ tal que $(x, y) \in A$ si $(x, y) < (\alpha, \beta)$. Supongamos que

$\alpha = 0,\ 0 < \beta \leq 1$. La aplicación $\varphi : I \to X,\ \varphi(t) = (0,t),\ t \in I$, es continua. En efecto, sea $0 < a \leq 1$ y $(t_n)_{n\geq 1} \subseteq I$ tal que $t_n \to 0$. Existe n_1 tal que $t_n < a$ si $n \geq n_1$ y entonces $\varphi(t) < (0,a)$. Si $0 < \tau < 1$ y $(0,b) < \varphi(\tau) < (c,d)$ entonces $b < \tau$ y existe n_2 tal que $b < t_n$ si $n \geq n_2$. Además $c > 0$, en cuyo caso $\varphi(t_n) < (c,d)$ para todo n, o $c = 0$ y $\tau < d$. En este último caso existe n_3 tal que $t_n < d$ si $n \geq n_3$. Por otra parte, si $0 \leq e < 1,\ 0 < f \leq 1,\ g \in I$ tenemos $(0,e) < \varphi(1) < (f,g)$. Existe n_4 tal que $e < t_n$ si $n \geq n_4$ y entonces $(0,e) < \varphi(t_n) < (f,g)$. En consecuencia, $\{0\} \times I \subseteq A$. En particular, si $U = \{x,y) \in X :\ (h,i) < (x,y)\}$, $U \subseteq A$ y $(0,1) \in U$ entonces $h = 0,\ i < 1$ y, puesto que $\{0\} \times I \subseteq A$, resulta $A = X$. Además, si $V = \{x,y) \in X : (x,y) < (j,k)\}$, $V \subseteq A$ y $(0,1) \in V$ entonces $j > 0$ y nuevamente $A = X$. Finalmente, si $\alpha > 0$ y $0 < \zeta < \alpha$ tenemos $[0,\zeta] \times I \subseteq A$ y, razonando como antes con $(\zeta, 1)$, sigue que $A = X$.

(iii) Trivial.

(iv) Si $(x,y) \in X$ indicamos $\mathcal{U}_{(x,y)}$ a las bases numerables de abiertos que se indícan:

$$\mathcal{U}_{(0,0)} = \left\{ \left\{ (s,t) : \ (s,t) < (0, \frac{1}{n}) \right\}, \ n \in \omega \right\},$$

$$\mathcal{U}_{(0,y)} = \left\{ \left\{ (s,t) : \ (0, y - \frac{1}{n}) < (s,t) < (0, y + \frac{1}{n}) \right\}, n \in \omega \right\}, 0 < y < 1,$$

$$\mathcal{U}_{(x,0)} = \left\{ \left\{ (s,t) : \ (x - \frac{1}{n}, 1) < (s,t) < (x, \frac{1}{n}) \right\}, \ n \in \omega \right\}, 0 < x < 1,$$

$$\mathcal{U}_{(x,1)} = \left\{ \left\{ (s,t) : \ (x, 1 - \frac{1}{n}) < (s,t) < (x + \frac{1}{n}, 1) \right\}, \ n \in \omega \right\}, 0 \leq x < 1,$$

$$\mathcal{U}_{(1,y)} = \left\{ \left\{ (s,t) : \ (1, y - \frac{1}{n}) < (s,t) < (1, y + \frac{1}{n}) \right\}, n \in \omega \right\}, 0 < y < 1,$$

$$\mathcal{U}_{(1,0)} = \left\{ \left\{ (s,t) : \ (1 - \frac{1}{n}, 0) < (s,t) < (1, \frac{1}{n}) \right\}, \ n \in \omega \right\},$$

$$\mathcal{U}_{(1,1)} = \{ \{ (s,t) : \ (1, 1 - 1/n) < (s,t) \}, \ n \in \omega \},$$

$$\mathcal{U}_{(x,y)} = \left\{ \left\{ (s,t) : (x - \frac{1}{n}, y) < (s,t) < (x + \frac{1}{n}, y) \right\}, n \in \omega \right\}, x, y \in (0,1).$$

(v) Si D es un subconjunto denso de X asociamos a cada $x \in I$ un elemento $(x, y_x) \in D \cap \{(s,t) : (x,0) < (s,t) < (x,1)\}$. Luego D no es numerable.

(vi) Sigue de (i) y (v). □

5.11. Sobre el espacio de Helly.

El *espacio H de Helly* es la familia de todas las funciones decrecientes del intervalo unitario cerrado I en si mismo, con la topología inducida por I^I.

(i) H es compacto de Hausdorff.

(ii) $H \in N_I$.

(iii) H es secuencialmente compacto.

(iv) H es separable.

(v) H no es metrizable.

Solución

(i) Como $I^I - H = \cup_{s,t \in I,\ s<t} \{f \in I^I:\ f(s) < f(t)\}$ es abierto entonces H es cerrado en I^I. Puesto que I^I es compacto Hausdorff H deviene compacto Hausdorff.

(ii) Si $h \in H$ entonces el conjunto D_h de puntos de discontinuidad de h es numerable porque h es monótona e I es acotado. Si $s \notin D_h$, $\varepsilon > 0$, existen $r_1,\ r_2 \in I \cap \mathbb{Q},\ \rho_1,\ \rho_2 \in \mathbb{Q}^+$ tales que

$$\left\{ f \in H: \begin{array}{c} f(r_1) < h(r_1) + \rho_1, \\ \\ h(r_2) < f(r_2) + \rho_2 \end{array} \right\} \subseteq \{f \in H:\ |f(s) - h(s)| < \varepsilon\}. \tag{153}$$

En efecto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $h(t) < h(s) + \varepsilon$ si $s - \delta_1 < t < s$. Sean $r_1 \in I \cap \mathbb{Q} \cap (s - \delta_1, s),\ \rho_1 \in \mathbb{Q}^+$ tal que $h(r_1) + \rho_1 < h(s) + \varepsilon$. Análogamente existe $\delta_2 > 0$ tal que $h(t) > h(s) - \varepsilon$ si $s < t < s + \delta_2$. Sean $r_2 \in I \cap \mathbb{Q} \cap (s, s + \delta_2),\ \ \rho_2 \in \mathbb{Q}^+$ tal que $h(s) - \varepsilon < h(r_2) - \rho_2$. Ahora, si $f \in H,\ f(r_1) < h(r_1) + \rho_1$ y $h(r_2) < f(r_2) + \rho_2$ tenemos

$$h(s) + \varepsilon > h(r_1) + \rho_1 > f(r_1) \geq f(s) \geq f(r_2) > h(r_2) - \rho_2 > h(s) - \varepsilon$$

y sigue (153). Como los conjuntos $\{f \in H:\ |f(s) - h(s)| < \varepsilon\}$ donde $s \in I$ y $\varepsilon > 0$ constituyen una subbase de entornos de h en H, por la densidad de los racionales en I, la numerabilidad de los puntos de discontinuidad de h y la observación anterior sigue la tesis.

(iii) Ver [23], Teorema 5, pág. 161.

(iv) Sea $U = \cap_{i=1}^n \{f \in H:\ f(s_i) \in I_i\}$ un abierto no vacío de H, donde $\{s_1,\ \ldots, s_n\} \subseteq I$ e $I_1,\ \ldots, I_n$ son abiertos en I. Podemos suponer

$$I_i = (\alpha_i, \beta_i) \cap I,\ 1 \leq i \leq n.$$

Si $f \in U$, como $\alpha_i < f(s_i) < \beta_i$ para cada i podemos hallar racionales a_i, b_i tales que $\alpha_i \leq a_i < f(s_s) < b_i \leq \beta_i$. Por ello, supondremos sin perder generalidad que los abiertos $I_1, \dots, I_n$ tienen extremos racionales y que $s_1 < \dots < s_n$. Por otra parte, $\alpha_{i+1} < f(s_{i+1}) \leq f(s_j) < \beta_j$ si $1 \leq j \leq i+1 \leq n$. Luego $\beta_j > \alpha_j \vee \dots \vee \alpha_n$ si $1 \leq j \leq n$. Sean $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n < q_1 < \beta_1,$$

$$\alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n < q_2 < q_1 \wedge \beta_2,$$

$$\alpha_3 \vee \dots \vee \alpha_n < q_3 < q_2 \wedge \beta_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n < q_n < q_{n-1} \wedge \beta_n.$$

Ahora, si s_i no fuere racional entonces $1 < i < n$ y podemos hallar un racional r_i tal que $s_{i-1} < r_{i-1} < s_i$. Si s_i es racional escribiremos $r_i = s_i$. Definimos ahora $g : I \to I$ a saber

$$g(s) = \begin{cases} q_1 & si \quad 0 \leq s \leq r_1 \\ q_i & si \quad r_{i-1} < s \leq r_i, \ 1 < i \leq n, \\ q_n & si \quad r_n < s \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $g \in U$. En efecto, $g \in H$ pues $q_1 > \dots > q_n$. Además, si $s_i \in \mathbb{Q}$ entonces $g(s_i) = g(r_i) = q_i \in I_i$; si $s_i \notin \mathbb{Q}$ entonces

$$r_{i-1} < s_i < r_i \qquad y \qquad g(s_i) = q_i \in I_i.$$

Por lo tanto, la clase de funciones escalera - decrecientes soportadas en subintervalos de I de extremos racionales es un subconjunto denso numerable de H.

(v) Dado $t \in I$ sea $f_t(s) = 1$ si $s < t$, $f_t(t) = 1/2$, $f_t(s) = 0$ si $t < s$. Ningún elemento de la subfamilia $\mathcal{F} = \{f_t\}_{t \in I}$ de H es de acumulación de $\mathcal{F}$. En efecto, si $u \in I$ y $U = \{f \in H : \ 1/4 < f(u) < 2/3\}$ entonces $f_u \in U$ pero $(U - \{f_u\}) \cap \mathcal{F} = \emptyset$. En consecuencia $\mathcal{F}$ tiene, como subespacio de H, la topología discreta. Como $\mathcal{F}$ es no numerable es no separable. Si H fuera espacio métrico, por (i) todo subespacio sería separable. $\square$

5.12. Sobre el espacio de Cantor.

Sea T el *ternario o discontinuo de Cantor* en el intervalo $I = [0,1]$, esto es, el conjunto de números de I en los que el dígito uno no aparece en su desarrollo en base tres. Consideramos T como subespacio de I. Se llama *espacio de Cantor* a todo espacio producto 2^A, i.e. al conjunto de funciones de un conjunto A con valores en el espacio discreto $\{0,1\}$.

(i) T es homeomorfo a 2^ω.

(ii) Todo punto de T con expansión triádica infinita [69] es de acumulación y el complemento del discontinuo es un abierto denso en I.

(iii) Si A es un cerrado no vacío en 2^ω hay una función continua $r : 2^\omega \to A$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in A$.

(iv) Todo espacio compacto de Hausdorff es la imagen continua de un subconjunto cerrado de algún espacio de Cantor.

Solución

(i) Sea $f : 2^\omega \to T$, $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)/3^n$. Evidentemente f está bién definida y es suryectiva. Si $x \neq y$ en 2^ω sea $m \in \omega$ mínimo tal que $x(m) \neq y(m)$. Podemos suponer $x(m) = 0$, $y(m) = 1$. Entonces

$$f(y) - f(x) = \frac{2}{3^m} + 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{y(n)-x(n)}{3^n} \geq \frac{2}{3^m} - 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \geq \frac{1}{3^m}$$

y f es inyectiva. Sea ahora $U = f^{-1}[(\alpha,\beta)\cap T]$, $x \in U$. Supongamos que $x(n) \neq 0$ para infinitos n's. Sea $p \in \omega$ tal que $\alpha < 2\sum_{n=1}^{p} x(n)/3^n$ y sea $q > p$ mínimo tal que $x(q) = 1$. Sea

$$V = \left\{ y \in 2^\omega : \begin{array}{ll} y(n) = x(n) & si \quad 1 \leq n \leq p, \\ \\ y(n) = 0 & si \quad p < n \leq q \end{array} \right\}.$$

[69] Expansiones triádicas infinitas (o irracionales) son aquellas no idénticamente nulas a partir de determinado estadio del desarrollo.

Dado $y \in V$ tenemos

$$\alpha < 2\sum_{n=1}^{p} \frac{x(n)}{3^n} \leq f(y) = 2\sum_{n=1}^{p} \frac{x(n)}{3^n} + 2\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{y(n)}{3^n}$$

$$= f(x) - 2\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{x(n)}{3^n} - \frac{2}{3^q} + 2\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{y(n)}{3^n}$$

$$\leq f(x) - 2\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{x(n)}{3^n} - \frac{1}{3^q} < f(x) < \beta$$

de modo que $V \subseteq U$. Si $x(n) = 0$ salvo un número finito de n's y

$$W = \cap_{n\in\omega} \{y \in 2^\omega : \; y(n) = x(n)\}$$

entonces W es abierto en 2^ω y $W \subseteq U$, y deducimos así la continuidad de f. Como 2^ω es compacto Hausdorff entonces f es homeomorfismo.

(ii) Por (i) todo punto del ternario con expansión triádica infinita es de acumulación de T. Por otra parte, podemos escribir $T = \cap_{n=1}^{\infty} T^n$ donde cada T^n es un subconjunto cerrado de I de medida $(2/3)^n$. Para ello, escribimos $T^n = \cup_{\sigma\in 2^n} T_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$. Definimos

$$T^1 = T_0 \cup T_1, \; T_0 = [0, 1/3]\,, \; T_1 = [2/3, 1]\,.$$

Construído $T_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$, removiendo el tercio abierto centrado en su punto medio se define $T_{0\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$ y $T_{1\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$ como los subintervalos cerrados de $T_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$ ubicados a izquierda y derecha del tercio removido. Ahora, dados $a < b$ en $\mathbb{R}$ tales que $(a, b) \cap I \neq \emptyset$ sea n tal que $(2/3)^n < b - a$. Luego $((a, b) \cap I) - T^n \neq \emptyset$, o sea $((a, b) \cap I) - T \neq \emptyset$ y tenemos (ii).

(iii) Sea $A \subseteq T$ no vacío. Como f es un homeomorfismo, T tiene la topología inducida por $\mathbb{R}$ (ya que es cerrado en I) y siendo A cerrado podemos escribir $T - f(A) = \cup_{\lambda\in L} T \cap (f(a_\lambda), f(b_\lambda))$, donde la unión es disjunta y $\{a_\lambda, \; b_\lambda\}_{\lambda\in L} \subseteq A$. Notemos que para cada $\lambda \in L$, como $f(a_\lambda) < f(b_\lambda)$, existe un mínimo entero positivo n_λ tal que $a_\lambda(n_\lambda) = 0, \; b_\lambda(n_\lambda) = 1$.

Definimos entonces $r : 2^\omega \to A$ como

$$r(x) = \begin{cases} x & si \qquad\qquad\quad x \in A, \\ a_\lambda & si \quad f(a_\lambda) < f(x) < f(b_\lambda),\ x(n_\lambda) = 0, \\ b_\lambda & si \quad f(a_\lambda) < f(x) < f(b_\lambda),\ x(n_\lambda) = 1. \end{cases}$$

Sean $I,\ J$ partes finitas de ω y escribamos

$$U_{IJ} = \{x \in A :\ x(i) = 0 \ \ si \ \ i \in I,\ x(j) = 1 \ si \ j \in J\}.$$

Sea $x \in r^{-1}(U_{IJ})$. Si $x \in A$, como $U_{IJ} \subseteq r^{-1}(U_{IJ})$ y $x \in U_{IJ}$ entonces r es continua en x y, por lo tanto, sobre A, ya que x es arbitrario. Supongamos $x \in r^{-1}(U_{IJ}) - A$, digamos $r(x) = a_\lambda$ para cierto $\lambda \in L$. Como $x \in f^{-1}\left[T \cap (f(a_\lambda), f(b_\lambda))\right]$ existe una parte finita K de ω tal que

$$\{y \in 2^\omega :\ y(k) = x(k) \ si \ k \in K\} \subseteq f^{-1}\left[T \cap (f(a_\lambda), f(b_\lambda))\right].$$

En consecuencia

$$\{y \in 2^\omega :\ y(n_\lambda) = 0 \ \ e \ \ y(k) = x(k) \ si \ k \in K\} \subseteq r^{-1}(U_{IJ}).$$

Si $r(x) = b_\lambda$ se procede en forma análoga, con lo que r es continua.

(iv) Sea

$$\mathcal{F} = \{f : 2 \to \mathcal{P}(X) :\ f(0) \ \ y \ \ f(1) \text{ son cerrados y } X = f(0) \cup f(1)\}.$$

Si $x \in 2^{\mathcal{F}}$ escribiremos $\Delta_x = \cap_{f \in \mathcal{F}} f(x_f)$. Supongamos $p \in \Delta_x,\ q \neq p$ en X. Existen abiertos disjuntos U y V de p y q respectivamente, de modo que $X = (X - U) \cup (X - V)$. Sea $f : 2 \to \mathcal{P}(X)$ la función $f(0) = X - U,\ f(1) = X - V$. Entonces $f \in \mathcal{F}$ y como $p \in f(x_f)$ debe ser $x_f = 1$. Pero $q \notin f(1)$, i.e. $q \notin \Delta_x$. En consecuencia, si Δ_x es no vacío indicaremos $\phi(x)$ al único elemento de Δ_x. Consideremos el conjunto $\Delta = \{x \in 2^{\mathcal{F}} :\ \Delta_x \neq \emptyset\}$. Entonces Δ es cerrado. Efectivamente, sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en Δ convergente a x. Como X es compacto la red $(\phi(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ tiene una subred $(\phi(x_\beta))_{\beta \in B}$ convergente a un punto $r \in X$. Sea W un entorno abierto de r y $g \in \mathcal{F}$. Como $x_{\beta g} \to x_g$ en el espacio discreto 2 y $r \in W$ existe $\beta_0 \in B$ tal que $x_{\beta g} = x_g$ y $\phi(x_\beta) \in W$ si $\beta \geq \beta_0$ en B. Entonces $\phi(x_\beta) \in W \cap g(x_{\beta g})$ pues cada x_β pertenece a Δ, o sea $W \cap g(x_g) \neq \emptyset$ y, como W es arbitrario y $g(x_g)$ es cerrado entonces $r \in g(x_g)$. Así $r \in \Delta_x$ y $x \in \Delta$. Queda definida entonces la aplicación $\phi : \Delta \to X$, $\phi(x) \in \Delta_x$ para cada $x \in \Delta$. Sea ahora $s \in X$ y para cada $f \in \mathcal{F}$ indiquemos $y_f = \text{mín } \{i \in 2 : \ s \in f(i)\}$. Si $y = (y_f)_{f \in \mathcal{F}}$ tenemos $y \in 2^{\mathcal{F}}$ y $s = \phi(y)$. Finalmente, si C es un subconjunto cerrado de X entonces $\phi^{-1}(C)$ es cerrado en Δ, de lo que seguirá la continuidad de ϕ. Para ello, sea $(z_\sigma)_{\sigma \in \Gamma} \subseteq \phi^{-1}(C)$ una red convergente a $z \in \Delta$. La red $(\phi(z_\sigma))_{\sigma \in \Gamma}$ tiene una subred $(\phi(z_\sigma))_{\sigma \in \Lambda}$ convergente a un elemento $t \in C$. Fijados $f \in \mathcal{F}$ y un entorno T de t en X existe $\sigma_0 \in \Lambda$ tal que $\phi(z_\sigma) \in T$ y $z_{\sigma f} = z_f$ si $\sigma \geq \sigma_0$ en Λ. Así $T \cap f(z_f) \neq \emptyset$ y como T es arbitrario y $f(z_f)$ cerrado tenemos $t \in f(z_f)$. Como f es arbitraria $t = \phi(z)$, o sea $z \in \phi^{-1}(C)$. $\square$

5.13. Sobre la compactación de Stone - Čech.

Sea (φ, Y) una compactación de Hausdorff de un espacio topológico X tal que para toda función real continua y acotada g de X la función $g \circ \varphi^{-1}$ tiene una extensión continua. Entonces (φ, Y) es topológicamente equivalente a la compactación de Stone - Čech $(e, \beta(X))$.

Solución

Como $\varphi : X \to Y$ es continua e Y es espacio compacto de Hausdorff existe una única aplicación $F : \beta(X) \to Y$ tal que $\varphi = F \circ e$ ([14], Th. 8.2, page 243). Sea $\mathfrak{F}(X)$ la clase de funciones continuas de X en el intervalo $I = [0,1]$ y $\{p_f\}_{f \in \mathfrak{F}(X)}$ es la clase de las proyecciones de $I^{\mathfrak{F}(X)}$ en I. Por hipótesis, para cada $f \in \mathfrak{F}(X)$ hay una aplicación continua $G_f : Y \to I$ tal que $G_f \circ \varphi = p_f \mid_{\beta(X)} \circ e$. Definimos $G : Y \to I^{\mathfrak{F}(X)}$, $G(y) = (G_f(y))_{f \in \mathfrak{F}(X)}$, $y \in Y$. Entonces G es continua pues $p_f \circ G = G_f$ para cada $f \in \mathfrak{F}(X)$. Además $G \circ \varphi = e$ y *a fortiori* $G : Y \to \beta(X)$. Tenemos entonces

$$\varphi = F \circ e = F \circ (G \circ \varphi) = (F \circ G) \circ \varphi,$$

o sea $F \circ G = Id_Y$ porque $F \circ G$ y Id_Y son continuas e iguales sobre el subconjunto denso $\varphi(X)$ de Y. Análogamente

$$e = G \circ \varphi = G \circ (F \circ e) = (G \circ F) \circ e$$

y $G \circ F = Id_{\beta(X)}$ porque $G \circ F$ y $Id_{\beta(X)}$ son continuas e iguales sobre el subconjunto denso $e(X)$ de $\beta(X)$. $\square$

5.14. Sobre la compactación de Wallman.

Sea X un espacio T_1, $\mathcal{F}$ la familia de todos los cerrados de X y $w(X)$ la colección de todas las subfamilias $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ que son maximales en $\mathcal{F}$ respecto a la propiedad de intersección finita.

(i) Si $\mathcal{A} \in w(X)$ entonces $\mathcal{A}$ es cerrado por intersecciones finitas y $\mathcal{F} - \mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas.

(ii) Dado $x \in X$ sea $\phi(x) = \{ A \in \mathcal{F} : \ x \in \mathcal{A}\}$. Entonces $\phi : X \to w(X)$ es inyectiva.

(iii) Si U es abierto en X escribiremos $U^* = \{\mathcal{A} \in \mathcal{F} : \ \exists\, A \in \mathcal{A} \ / \ A \subseteq U\}$. Entonces $w(X) - U^* = \{\mathcal{A} \in w(X) : \ X - U \in \mathcal{A}\}$.

(iv) Si U, V son abiertos entonces $(U \cup V)^* = U^* \cup V^*$ y $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$.

(v) Consideramos en $w(X)$ la topología en la cual los conjuntos del tipo U^*, en los que U es abierto en X, forman una base. Entonces $w(X)$ es compacto.

(vi) ϕ es continua, $\phi(X)$ es denso en $w(X)$ y ϕ es un homeomorfismo entre X y $\phi(X)$ [70].

(vii) Si X es normal entonces $w(X)$ es de Hausdorff.

(viii) Si $w(X)$ es de Hausdorff la compactación de Wallman es topológicamente equivalente a la compactación de Stone - Čech.

Solución

(i) Sean $\mathcal{A} \in w(X)$, A, B elementos de $\mathcal{A}$. Entonces $A \cap B$ es cerrado y $\mathcal{A} \cup \{A \cap B\}$ tiene la propiedad de intersección finita, con lo cual $A \cap B \in \mathcal{A}$ por el carácter maximal de $\mathcal{A}$. Por otra parte, sean C, D elementos de $\mathcal{F}$ tales que $C \cup D \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{F} - \mathcal{A}$. Veremos que $D \in \mathcal{A}$, para lo cual bastará probar que $D \cap F \neq \emptyset$ si $F \in \mathcal{A}$. Existe entonces $E \in \mathcal{A}$ tal que $C \cap E = \emptyset$. Dado $F \in \mathcal{A}$ tenemos

$$D \cap F \supseteq D \cap E \cap F \supseteq (C \cup D) \cap E \cap F$$

y $(C \cup D) \cap E \cap F \neq \emptyset$ por la propiedad de intersección finita de $\mathcal{A}$.

[70] El par $(w(X), \phi)$ constituye la compactación de Wallman de X (cf. [48]).

(ii) Notemos que ϕ está bien definida, pues si $x \in A$ es inmediato que $\phi(x)$ tiene la propiedad de intersección finita en $\mathcal{A}$. Además, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \cap B \neq \emptyset$ para todo miembro B de $\phi(x)$ entonces $x \in A$ ya que $X \in T_1$. En consecuencia $\phi(x)$ tiene la maximalidad requerida y $\phi(x) \in w(X)$. Como $\{x\} \in \phi(x)$ sigue (ii).

(iii) Sea $\mathcal{A} \in w(X)$. Si $X - U \notin \mathcal{A}$ existiría $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \cap (X - U) = \emptyset$, i.e. $B \subseteq U$ y $\mathcal{A} \in U^*$. Además si $X - U \in \mathcal{A}$ entonces $(X - U) \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y por ello $\mathcal{A} \notin U^*$.

(iv) Evidentemente $(U \cup V)^* \supseteq U^* \cup V^*$ y $(U \cap V)^* \subseteq U^* \cap V^*$. Ahora, dado $\mathcal{A} \in (U \cup V)^*$ sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq U \cup V$. Si $\mathcal{A} \notin U^*$ entonces $A \cap (X - U) \neq \emptyset$. Como $X - U \in \mathcal{A}$ por (iii) tenemos $A \cap (X - U) \in \mathcal{A}$ y $A \cap (X - U) \subseteq V$ con lo que $\mathcal{A} \in V^*$. Por otra parte, como los elementos de $w(X)$ son cerrados por intersecciones finitas tenemos (iv).

(v) Por (iv) la familia de conjuntos U^* en los que U es abierto en X es base de una topología de $w(X)$ ([23], Teorema 11, pág. 60). Sea $\{U_i^*\}_{i \in I}$ una base de esta topología y veamos que $\{U_i\}_{i \in I}$ es base de la topología de X. Para ello, si U es abierto en X hay un subconjunto J de I tal que $U^* = \cup_{j \in J} U_j^*$. Si $V = \cup_{j \in J} U_j$ tenemos $U^* \subseteq V^*$ y, por lo tanto, $U \subseteq V$. En efecto, si $x \in U$, como $\{x\} \subseteq U$ resulta $\phi(x) \in U^*$. Luego $\phi(x) \in V^*$ y, necesariamente, $x \in V$. Además, si $y \in V$, digamos $y \in U_{j_0}$ para $j_0 \in J$, entonces $\phi(y) \in U_{j_0}^*$. O sea $\phi(y) \in U^*$ y, en consecuencia, $y \in U$ ya que todo miembro de $\phi(y)$ contiene a y. En definitiva, $U = V$. Mostraremos que de cada base de abiertos $\{U_i^*\}_{i \in I}$ de $w(X)$ podemos extraer un subcubrimiento finito, para concluir luego la compacidad de $w(X)$ del teorema de Alexander ([23], Teorema 6, pág. 162). Supongamos que para una base $\{U_i^*\}_{i \in I}$ no fuere así. Si $F \in \mathcal{P}_f(I)$ sea $\mathcal{A}_F \in w(X) - \cup_{i \in F} U_i^*$. Como por (iv) $\mathcal{A}_F \in w(X) - (\cup_{i \in F} U_i)^*$, por (iii) el conjunto $C_F = X - \cup_{i \in F} U_i$ pertenece a $\mathcal{A}_F$. Notemos que la subclase $\mathcal{B} = \{C_F : \ F \in \mathcal{P}_f(I)\}$ de $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita, pues si $F, \ G \in \mathcal{P}_f(I)$ entonces $C_F \cap C_G = C_{F \cup G}$ y $C_{F \cup G} \neq \emptyset$ por ser miembro de $\mathcal{A}_{F \cup G}$. En consecuencia $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{F}$ porque $X \in T_1$. Más aún, si $B \in \mathcal{F} - \mathcal{B}$ existe $K \subseteq I$, necesariamente infinito, tal que $X - B = \cup_{k \in K} U_k$ y $C_F \cap (X - B) = \emptyset$ si F es cualquier subconjunto finito no vacío de K. En consecuencia $\mathcal{B} \in w(X)$. Sean entonces $i_0 \in I$ tal que $\mathcal{B} \in U_{i_0}^*$ y $F_0 \in \mathcal{P}_f(I)$ tal que $C_{F_0} \subseteq U_{i_0}$. Si $F \in \mathcal{P}_f(I)$ y $F \supseteq F_0$ entonces $C_F \subseteq C_{F_0} \subseteq U_{i_0}$ y $\mathcal{A}_F \in U_{i_0}^*$. Como $\{U_i^*\}_{i \in I}$ es base de $w(X)$

deducimos que la red $\{\mathcal{A}_F\}_{F\in\mathcal{P}_f(I)}$ converge a $\mathcal{B}$. Sin embargo, si $F \supseteq F_0$ tenemos $X - U_{i_0} \notin \mathcal{A}_F$ y existe $A_F \in \mathcal{A}_F$ tal que $(X - U_{i_0}) \cap A_F = \emptyset$. Pero entonces

$$C_{F_0\cup\{i_0\}} \cap A_{F_0\cup\{i_0\}} \subseteq (X - U_{i_0}) \cap A_{F_0\cup\{i_0\}}$$

y $C_{F_0\cup\{i_0\}} \cap A_{F_0\cup\{i_0\}} = \emptyset$ no verificándose la propiedad de intersección finita en $\mathcal{A}_{F_0\cup\{i_0\}}$.

(vi) Basta notar que si U es abierto en X entonces $\phi^{-1}(U^*) = U$. Más aún, $\phi^{-1}(U^* \cap \phi(X)) = U$ y $\phi^{-1} : \phi(X) \to X$ es abierta.

(vii) Trivial.

(viii) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Probaremos que $f \circ \phi^{-1}$ puede extenderse con continuidad a $w(X)$. Dado $\mathcal{A} \in w(X)$ sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una red tal que $\lim_{i\in I} \phi(x_i) = \mathcal{A}$. Existirá una subred $\{x_j\}_{j\in J}$ de esta e $y \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{j\in J} f(x_j) = y$. Sería razonable definir el valor de la extensión buscada en $\mathcal{A}$ como y. Si $f \circ \phi^{-1}$ no fuera extendible con continuidad a $w(X)$ podemos suponer que hay otra red $\{\widetilde{x}_i\}_{i\in\widetilde{I}}$, una subred $\{\widetilde{x}_j\}_{j\in\widetilde{J}}$ e $\widetilde{y} \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{i\in\widetilde{I}} \phi(\widetilde{x}_i) = \mathcal{A}$, $\lim_{j\in\widetilde{J}} f(\widetilde{x}_j) = \widetilde{y}$ e $y \neq \widetilde{y}$. Si $y < \widetilde{y}$ sean r_1, r_2, racionales tales que $y < r_1 < r_2 < \widetilde{y}$ y escribamos $A = f^{-1}\{(-\infty, r_1]\}$, $B = f^{-1}\{[r_2, +\infty)\}$. Entonces A y B son cerrados disjuntos en X y $\mathcal{A} \in cl\ \phi(A) \cap cl\ \phi(B)$. El conjunto $\widetilde{A} = \{\mathcal{C} \in w(X) :\ A \in \mathcal{C}\}$ es cerrado. En efecto, si $\mathcal{C} \notin \widetilde{A}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq X - A$ y tenemos $\mathcal{C} \in (X - A)^*$ y $(X - A)^* \cap \widetilde{A} = \emptyset$. En particular, si $\mathcal{A} \notin \widetilde{A}$ entonces $\mathcal{A} \in (X - A)^*$ y existe $j_0 \in J$ tal que $\phi(x_j) \in (X - A)^*$ si $j \geq j_0$ en J. En consecuencia, $x_j \notin A$ si $j \geq j_0$, lo cual no es cierto, de modo que $\mathcal{A} \in \widetilde{A}$. De la misma manera el conjunto $\widetilde{B} = \{\mathcal{C} \in w(X) :\ B \in \mathcal{C}\}$ es cerrado y contiene a $\mathcal{A}$. Como $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$ deducimos entonces la extendibilidad de $f \circ \phi^{-1}$. Luego tenemos la tesis. $\square$

5.15. Sobre la topología de Zariski de un anillo conmutativo con identidad. Espectro de Zariski.

Sea A un anillo conmutativo con identidad 1 y X la clase de ideales primos de A. Para $E \in \mathcal{P}(A)$ definimos $V(E) = \{p \in X :\ E \subseteq p\}$.

(i) Si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por E entonces $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$, donde $r(\mathfrak{a})$ es el radical de $\mathfrak{a}$. [71]

(ii) $V(\{0\}) = X,\ V(\{1\}) = \emptyset$.

(iii) Si $(E_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ entonces $V(\cup_{i\in I} E_i) = \cap_{i\in I} V(E_i)$.

(iv) Si $\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}$ son ideales de A entonces $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. [72]

(v) Si $f \in A$ sea $X_f = Sp(A) - V(\{f\})$. Entonces $\{X_f :\ f \in A\}$ es base de la topología de Zariski de A.

(vi) $X_f \cap X_g = X_{fg}$ si $f,\ g \in A$.

(vii) $X_f = \emptyset$ sii f es nilpotente.

(viii) $X_f = Sp(A)$ sii $f \in U(A)$.

(ix) $X_f = X_g$ sii $r(\langle f\rangle) = r(\langle g\rangle)$.

(x) El espectro de A, con la topología de Zariski, es compacto.

(xi) $\{p\}$ es cerrado en $Sp(A)$ sii p es maximal en A.

(xii) $\{p\}^- = V(p)$ si $p \in Sp(A)$.

(xiii) $q \in \{p\}^-$ en $Sp(A)$ sii $p \subseteq q$ en A.

(xiv) $Sp(A)$ es un espacio T_0.

(xv) $Sp(A)$ es *irreducible*, i.e. todo abierto no vacío en él es denso, sii el nilradical $\mathfrak{N}(A)$ es primo. [73]

Solución

[71] $r(\mathfrak{a}) = \{x \in A :\ \exists n,\ n \in \mathbb{N}\ /\ x^n \in \mathfrak{a}\}$.

[72] Por (i) - (iv) queda definida sobre X la llamada *topología de Zariski*. El espacio X, al que indicamos $Sp(A)$, munido de estra topología, se denomina *espectro* (de Zariski) de A. Si $U \subseteq Sp(A)$ entonces U será abierto sii existe $E \in \mathcal{P}(A)$ tal que $Sp(A) - U = V(E)$.

[73] $\mathfrak{N}(A) = \bigcap Sp(A)$ (cf. [4], Prop. 1.8, pág. 5).

(i) $r(\mathfrak{a})$ es la intersección de todos los ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$. ([4], Prop. 1.14, pág. 9). Luego $E \subseteq \mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$ y

$$V(r(\mathfrak{a})) \subseteq V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E).$$

Ahora, si $p \in V(E)$ entonces $p \supseteq \mathfrak{a}$ pues $p \supseteq E$ y $\mathfrak{a}$ es el ideal mínimo que contiene a E. Así $p \supseteq r(\mathfrak{a})$ y $p \in V(r(\mathfrak{a}))$, *i.e.* $V(E) \subseteq V(r(\mathfrak{a}))$.

(ii) - (iii) Triviales.

(iv) Como $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$ entonces

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab}).$$

Si $p \in V(\mathfrak{ab}) - V(\mathfrak{a})$ tenemos $\mathfrak{ab} \subseteq p$ y existe $f \in \mathfrak{a} - p$, de modo que si $g \in \mathfrak{b}$ entonces $fg \in p$. Como p es primo y $f \notin p$ entonces $g \in p$, o sea $\mathfrak{b} \subseteq p$ y $p \in V(\mathfrak{b})$, i.e. $V(\mathfrak{ab}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

(v) Sea $U \subseteq Sp(A)$ abierto, digamos $U = Sp(A) - V(\mathfrak{a})$. Si $p \in U$, como $\mathfrak{a} \nsubseteq p$ existe $f \in \mathfrak{a} - p$ y $p \in X_f$. Además $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\langle f \rangle)$ porque si q es un ideal primo que contiene a $\mathfrak{a}$ tenemos $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{a} \subseteq q$, es decir $q \in V(\langle f \rangle)$. Así $X_f \subseteq U$.

(vi) Sea $p \in Sp(A)$. Entonces

$$p \notin X_{fg} \Leftrightarrow p \in V(\langle fg \rangle) \Leftrightarrow \langle fg \rangle \subseteq p \Leftrightarrow f \in p \quad o \quad g \in p$$

$$\Leftrightarrow \langle f \rangle \subseteq p \quad o \quad \langle g \rangle \subseteq p \Leftrightarrow p \in V(\langle f \rangle) \quad o \quad p \in V(\langle g \rangle)$$

$$\Leftrightarrow p \notin X_f \quad o \quad p \notin X_g \Leftrightarrow p \notin X_f \cap X_g.$$

(vii) Si $X_f = \emptyset$ entonces f pertenece a cada ideal primo de A, es decir, es elemento del *nilradical* de A y f deviene nilpotente ([4], Prop. 1.7, page 5). Recíprocamente, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n = 0$ entonces f pertenece a cada ideal primo y $X_f = \emptyset$.

(viii) Si $X_f = Sp(A)$ entonces no hay ideal primo que contenga a $\langle f \rangle$. Luego no hay ideal maximal que contenga a f y $f \in U(A)$. La recíproca es evidente.

(ix) Si p es un ideal primo que contiene a $\langle f\rangle$ entonces $p \in V(\langle f\rangle)$ y, por hipótesis, $p \notin X_g$, de modo que $\langle g\rangle \subseteq p$. De la misma manera, todo ideal primo que contiene a $\langle g\rangle$ contiene a $\langle f\rangle$ y la condición es necesaria. Recíprocamente, si $p \in X_f - X_g$ entonces $\langle g\rangle \subseteq p$ y existe $h \in A$ tal que $fh \notin p$. Entonces $fh \notin r(\langle g\rangle)$, i.e. $fh \notin r(\langle f\rangle)$. Hay entonces un ideal primo q tal que $q \supseteq \langle f\rangle$ y $fh \notin q$, lo cual es contradictorio.

(x) Basta ver que si $(X_{f_i})_{i\in I}$ es cubrimiento de $Sp(A)$ entonces hay un subrecubrimiento finito. Si $Sp(A) = \cup_{i\in I} X_{f_i}$ entonces $\cap_{i\in I} V(\langle f_i\rangle) = \emptyset$. Por (iii) tenemos $V(\cup_{i\in I}\langle f_i\rangle) = \emptyset$ y, si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por $(f_i)_{i\in I}$, por (i) tenemos $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Luego no hay ideal primo, y por ello tampoco maximal, que contenga a $\mathfrak{a}$. Debe ser $\mathfrak{a} = A$ y existe $J \in \mathcal{P}_f(I)$ y $\{g_j\}_{j\in J}$ tal que $1 = \sum_{j\in J} f_j\ g_j$. Finalmente, si p es un ideal primo debe existir $j \in J$ tal que $f_j \notin p$, pues en caso contrario $1 \in p$. Así sería $p \in X_{f_j}$ y $\cup_{j\in J} X_{f_j} = Sp(A)$.

(xi) Si $p \in Sp(A)$ no es maximal en A existe q ideal maximal de A que contiene a p. Sea $f \in A$ tal que $q \in X_f$. Como $f \notin q$ entonces $f \notin p$ y $p \in X_f$, i.e. cada entorno de q contiene a p y $q \neq p$ y la condición es necesaria. Recíprocamente, si $q \neq p$ en $Sp(A)$ y p es ideal maximal entonces $p \nsubseteq q$ pues q es primo. Si $f \in p - q$ entonces $q \in X_f$ y $X_f \cap \{p\} = \emptyset$.

(xii) Como $\{p\} \subseteq V(p)$ resulta $\{p\}^- \subseteq V(p)$. Ahora, si $q \notin \{p\}^-$ sea $f \in A$ tal que $q \in X_f$ y $p \notin X_f$. Luego $f \in p - q$, i.e. $p \nsubseteq q$ y $q \notin V(p)$.

(xiii) Sigue de (xii).

(xiv) Si $p \neq q$ en $Sp(A)$ podemos suponer que existe $f \in p - q$. Luego $q \in X_f$ y $p \notin X_f$.

(xv) Supongamos $f,\ g \in A$, $fg \in \mathfrak{N}(A)$ y $f \notin \mathfrak{N}(A)$. Si X_g contiene algún elemento p entonces $g \notin p$ y, como $fg \in p$ y p es primo debe ser $f \in p$. Si $q \in Sp(A)$ no contiene a f resulta $q \in X_f$. Siendo X_f y X_g no vacíos, si $Sp(A)$ es irreducible ambos se intersecan en un conjunto no vacío. Por (vi) y (vii) sigue que fg no es nilpotente, lo que es una contradicción. Debe ser $X_g = \emptyset$ y, por (vii), $g \in \mathfrak{N}(A)$. Recíprocamente, si $f,\ g \in A - \mathfrak{N}(A)$ entonces $fg \notin \mathfrak{N}(A)$ y $X_f \cap X_g \neq \emptyset$ por (vii). $\square$

5.16. Subespacios irreducibles de un espacio topológico. Componentes irreducibles.

Sea X un espacio topológico.

(i) Si Y es un subespacio irreducible de X entonces cl Y es irreducible.

(ii) Todo subespacio irreducible de X está contenido en un subespacio irreducible maximal. [74]

(iii) Si X no es irreducible todo subespacio irreducible maximal es cerrado y estos cubren X. -¿Cuáles son las componentes irreducibles de un espacio de Hausdorff?-

(iv) Si A es un anillo conmutativo unitario y $p \in Sp(A)$ entonces $V(p)$ es irreducible. Además, si $V(p)$ es una componente irreducible entonces p es minimal.

Solución

(i) Si $U,\ V$ son abiertos en X tales que $U \cap \mathrm{cl}\ Y \neq \emptyset$ y $V \cap \mathrm{cl}\ Y \neq \emptyset$ entonces $U \cap Y \neq \emptyset$ y $V \cap Y \neq \emptyset$. Por ser Y irreducible resulta $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$, i.e. $U \cap V \cap \mathrm{cl}\ Y \neq \emptyset$.

(ii) Sea Y subespacio irreducible de X, $\mathfrak{F}$ la clase de subespacios irreducibles de X que contienen a Y ordenada parcialmente por inclusión. Dada una cadena $\mathcal{C} = \{Z_i\}_{i \in I}$ en $\mathfrak{F}$ escribimos $Z = \cup \mathcal{C}$. Entonces Z es un subespacio de X y contiene a Y. Dados abiertos $U,\ V$ tales que $U \cap Z \neq \emptyset$ y $V \cap Z \neq \emptyset$ existen $i_1,\ i_2 \in I$ tales que $U \cap Z_{i_1} \neq \emptyset$ y $V \cap Z_{i_2} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{C}$ es filtrante superiormente existe $i_0 \in I$ tal que $Z_{i_1} \cup Z_{i_2} \subseteq Z_{i_0}$ y $U \cap Z_{i_0} \neq \emptyset$ y $V \cap Z_{i_0} \neq \emptyset$. Como Z_{i_0} es irreducible $U \cap V \cap Z_{i_0} \neq \emptyset$ y por ello $U \cap V \cap Z \neq \emptyset$, i.e. Z deviene irreducible. Por el lema de Zorn existe $Z_Y \in \mathfrak{F}$ maximal. Evidentemente Z_Y debe ser una componente de X.

(iii) La afirmación es inmediata. En particular, si X es espacio de Hausdorff las componentes irreducibles son los conjuntos $\{x\}$, $x \in X$.

[74] Los subespacios irreducibles maximales son las denominadas *componentes irreducibles* de X.

(iv) Sea $p \in Sp(A)$, f, $g \in A$ tales que

$$V(p) \cap X_f \neq \emptyset \;\; y \;\; V(p) \cap X_g \neq \emptyset. \tag{154}$$

Si $V(p) \cap X_f \cap X_g = \emptyset$ entonces $V(p) \cap X_{fg} = \emptyset$ y $V(p) \subseteq V(\{fg\})$. En consecuencia $fg \in p$ y, por la primalidad de p, $f \in p$ o $g \in p$. Sin embargo, por (154) hay ideales primos q_1 y q_2 tales que

$$p \subseteq q_1, \; p \subseteq q_2, \; f \notin q_1 \;\; y \;\; g \notin q_2.$$

Por lo tanto $V(p) \cap X_f \cap X_g \neq \emptyset$ y $V(p)$ es irreducible. Si p no es minimal existe $q \in Sp(A)$ tal que $q \subsetneqq p$. Luego $V(p) \subsetneqq V(q)$ porque, en particular, $q \in V(q) - V(p)$. □

5.17. Sobre espectros de Zariski.

Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Con la notación del Problema 5.15:

(i) La aplicación $\phi^* : Sp(B) \to Sp(A)$, $\phi^*(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{q} \in Sp(B)$, está bien definida.

(ii) Si $a \in A$ entonces $(\phi^*)^{-1}(X_a) = Y_{\phi(a)}$, de modo que ϕ^* es continua.

(iii) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A resulta $(\phi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\phi(\mathfrak{a}))$.

(iv) Si $\mathfrak{b}$ es un ideal en B entonces $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} \subseteq V(\phi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

(v) Si ϕ es suryectiva entonces ϕ^* es un homeomorfismo de $Sp(B)$ sobre $V(\ker(\phi))$. [75]

(vi) $V(\ker(\phi)) = Sp(A)$ sii $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{N}$.

(vii) Determinar el espectro de Zariski del producto directo $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, donde $A_1, \ldots, A_n$ son anillos abelianos unitarios.

(viii) Si A posee algún idempotente no trivial su espectro de Zariski es desconexo.

[75] En particular, si $\phi : A \to A/\mathfrak{N}$ es la proyección natural al cociente de A con el nilradical resulta $V(\mathfrak{N}) = Sp(A)$ y $\mathfrak{N} = \ker(\phi)$. Luego $Sp(A)$ y $Sp(A/\mathfrak{N})$ son naturalmente homeomorfos.

(ix) Sea A un dominio de integridad con un único ideal primo $\mathfrak{p}$ no nulo y sea K su cuerpo de fracciones. Si $B = A/\mathfrak{p} \times K$ y $\phi : A \to B$ es la aplicación $\phi(a) = (\overline{a},\ a)$ entonces ϕ^* es biyectiva y no es homeomorfismo.

Solución

(i) Trivial.

(ii) Dado $\mathfrak{q} \in Sp(B)$ tenemos

$$\mathfrak{q} \in (\phi^*)^{-1}(X_a) \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in X_a$$

$$\Leftrightarrow a \notin \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \phi(a) \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in Y_{\phi(a)}.$$

(iii) Dado un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ y $\mathfrak{q} \in Sp(B)$ tenemos

$$\mathfrak{q} \in (\phi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a})$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \phi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in V(\phi(\mathfrak{a})).$$

(iv) Sea $\mathfrak{b}$ un ideal en B y $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})$. Como $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ resulta $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ y $\phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\phi^{-1}(\mathfrak{b}))$, i.e. $\phi^*(V(\mathfrak{b})) \subseteq V(\phi^{-1}(\mathfrak{b}))$, i.e.

$$\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} \subseteq V\left(\phi^{-1}(\mathfrak{b})\right).$$

(v) Dado $\mathfrak{q} \in Sp(B)$ evidentemente $\ker(\phi) \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ y $\phi^*(\mathfrak{q}) \in V(\ker(\phi))$. Por otra parte, si $\mathfrak{p} \in V(\ker(\phi))$ sea $\mathfrak{r} = \phi(\mathfrak{p})$. Si $b_1\, b_2 \in \mathfrak{r}$ existe $a \in \mathfrak{p}$ tal que $b_1\, b_2 = \phi(a)$. Como ϕ es homomorfismo suryectivo, si $\phi(a_1) = b_1$ y $\phi(a_2) = b_2$ entonces $\phi(a) = \phi(a_1\ a_2)$. Luego $a_1\ a_2 - a \in \ker(\phi)$ y, como $a \in \mathfrak{p}$ y $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{p}$, resulta $a_1\ a_2 \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo $a_1 \in \mathfrak{p}$ o $a_2 \in \mathfrak{p}$, i.e. $b_1 \in \mathfrak{r}$ o $b_2 \in \mathfrak{r}$ y $\mathfrak{r}$ es ideal primo. Como $\mathfrak{r} = \phi(\mathfrak{p})$ entonces $\mathfrak{p} \subseteq \phi^*(\mathfrak{r})$. Además si $c \in \phi^{-1}(\mathfrak{r})$ podemos escribir $\phi(c) = \phi(d)$ para algún $d \in \mathfrak{p}$. Así $c - d \in \ker(\phi)$ y $c \in \mathfrak{p}$ pues $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{p}$. Así $\phi^*(\mathfrak{r}) = \mathfrak{p}$ y ϕ^* es suryectiva. Ahora, si $\phi^*(\mathfrak{s}_1) = \phi^*(\mathfrak{s}_2)$ para $\mathfrak{s}_1,\ \mathfrak{s}_2 \in Sp(B)$, como ϕ es suryectiva dado $e \in \mathfrak{s}_1$ existe $f \in A$ tal que $\phi(f) = e$. Entonces $f \in \phi^{-1}(\mathfrak{s}_1)$, i.e. $f \in \phi^{-1}(\mathfrak{s}_2)$, i.e. $e \in \mathfrak{s}_2$. Podemos concluir evidentemente que $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$ y $\phi^* : Sp(B) \to V(\ker(\phi))$ es biyectiva, con inversa $\phi_* : V(\ker(\phi)) \to Sp(B),\ \phi_*(\mathfrak{t}) = \phi(\mathfrak{t}),\ \mathfrak{t} \in V(\ker(\phi))$. Finalmente, si $h \in B$ obtenemos

$$(\phi_*)^{-1}(Y_h) = V(\ker(\phi)) \cap X_g \tag{155}$$

donde $g \in \phi^{-1}(\{h\})$. En primer lugar, notemos que si $g_1,\ g_2 \in \phi^{-1}(\{h\})$ entonces

$$V(\ker(\phi)) \cap X_{g_1} = V(\ker(\phi)) \cap X_{g_2}. \tag{156}$$

De hecho, $g_1 - g_2 \in \ker(\phi)$ y si $\mathfrak{u} \in V(\ker(\phi)) \cap (X_{g_1} - X_{g_2})$ entonces $g_2 \in \mathfrak{u}$ y $g_1 \in \mathfrak{u} + \ker(\phi)$, o sea $g_1 \in \mathfrak{u}$ lo cual es contradictorio. Así $V(\ker(\phi)) \cap X_{g_1} \subseteq V(\ker(\phi)) \cap X_{g_2}$ y por simetría deducimos (156). Ahora, si $\mathfrak{v} \in V(\ker(\phi))$ y $g \in \phi^{-1}(\{h\})$ tenemos

$$\mathfrak{v} \in (\phi_*)^{-1}(Y_h) \Leftrightarrow h \notin \phi(\mathfrak{v}) \Leftrightarrow g \notin \mathfrak{v} \Leftrightarrow \mathfrak{v} \in V(\ker(\phi)) \cap X_g$$

y sigue (155) y la continuidad de ϕ_*.

(vi) Trivial.

(vii) Consideremos $n = 2$ y sean $\phi_i : A \to A_i,\ i = 1,\ 2$, las proyecciones naturales. Si $\mathfrak{p} \in V(\ker(\phi_1)) \cap V(\ker(\phi_2))$ y $(a_1, a_2) \in A$, como $(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$ entonces $(a_1, a_2) \in \mathfrak{p}$, o sea $\mathfrak{p} = A$, lo cual no es posible. En consecuencia $V(\ker(\phi_1)) \cap V(\ker(\phi_2)) = \emptyset$. Ahora, si $\mathfrak{p} \notin V(\ker(\phi_1))$ existe $b \in A_2$ tal que $(0, b) \notin \mathfrak{p}$ y, si $a \in A_1$, como $(a, 0) \cdot (0, b) = (0, 0)$ y $(0, 0) \in \mathfrak{p}$ debe ser $(a, 0) \in \mathfrak{p}$. Concluímos que $Sp(A) = V(\ker(\phi_1)) \cup V(\ker(\phi_2))$. Por (v), $V(\ker(\phi_1))$ es homeomorfo a $Sp(A_1)$ y $V(\ker(\phi_2))$ es homeomorfo a $Sp(A_2)$. Inductivamente, podemos concluir que $Sp(A)$ es unión disjunta de partes abiertas y cerradas homeomorfas a $Sp(A_i),\ i = 1,\ \ldots, n$.

(viii) Sea a un idempotente no trivial y $A_b = Sp(A) - V(\{b\})$ si $b \in A$. En particular, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que contiene a a entonces $\mathfrak{p} \in A_{1-a}$ pues $1 - a \notin \mathfrak{p}$ y $1 - a$ es idempotente. Así $A_{1-a} \neq \emptyset$ y, análogamente, $A_a \notin \emptyset$. Si $\mathfrak{q} \in Sp(A) - A_a$ tenemos $a \in \mathfrak{q}$ y, en consecuencia, $1 - a \notin \mathfrak{q}$. Luego $Sp(A) = A_a \cup A_{1-a}$ y

$$A_a \cap A_{1-a} = A_{a(1-a)} = A_0 = \emptyset,$$

resultando $Sp(A)$ desconexo.

(ix) Tenemos $Sp(B) = V(\ker(\phi_1)) \cup V(\ker(\phi_2))$ (unión disjunta). $\mathfrak{p}$ es maximal por ser el único ideal primo no nulo de A y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo. Por lo tanto $Sp(B) = \left\{\left\{\overline{0}\right\} \times K,\ A/\mathfrak{p} \times \{0\}\right\}$, $\phi^*(A/\mathfrak{p} \times \{0\}) = \{0\}$ y $\phi^*\left(\left\{\overline{0}\right\} \times K\right) = \mathfrak{p}$, resultando ϕ^* biyectiva. Dado $a \in A$ tenemos

$$A_a = \begin{cases} Sp(A) & si \quad a \notin \mathfrak{p}, \\ \\ \{\{0\}\} & si \quad a \in \mathfrak{p} - \{0\} \\ \\ \emptyset & si \quad a = 0, \end{cases} \tag{157}$$

constituyendo (157) la totalidad de abiertos de $Sp(A)$. Asimismo, si $a \in A$, $k \in K$ y $B_{(\overline{a},k)} = B - V(\{(\overline{a},k)\})$ la topología de $Sp(B)$ la constituyen los abiertos

$$B_{(\overline{a},k)} = \begin{cases} Sp(B) & si \quad a \notin \mathfrak{p},\ k \neq 0, \\ \\ \{A/\mathfrak{p} \times \{0\}\} & si \quad a \in \mathfrak{p},\ k = 0, \\ \\ \left\{\left\{\overline{0}\right\} \times K\right\} & si \quad a \notin \mathfrak{p},\ k = 0, \\ \\ \emptyset & si \quad a \in \mathfrak{p},\ k = 0. \end{cases}$$

En particular, $\phi^*\left[\left\{\left\{\overline{0}\right\} \times K\right\}\right] = \{\mathfrak{p}\}$ no es abierto en $Sp(A)$ y ϕ^* no es homeomorfismo. □

5.18. (Teorema de Stone) Todo retículo booleano es isomorfo al retículo de Boole de partes abiertas y cerradas de un espacio compacto separado.

Sea $(B, +, \cdot)$ un anillo de Boole, esto es, un anillo en el que $b + b = 0$ y $b \cdot b = b$ para cada $b \in B$.

(i) B es conmutativo.

(ii) B tiene una estructura de $\mathbb{Z}_2-$ álgebra.

(iii) Si X es un conjunto entonces $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo de Boole unitario isomorfo al anillo de Boole $\left(\mathbb{Z}_2^X, +, \cdot\right)$, en el que las operaciones son las naturales en las coordenadas.

(iv) El orden natural en el anillo de Boole $(B, +, \cdot)$ se define escribiendo $b \geq c$ sii $b \cdot c = c$. La relación $\geq$ ordena parcialmente a B de modo que $b \vee c = b + c + b \cdot c$ y $b \wedge c = b \cdot c$ para cada $b,\ c \in B$, donde $b \vee c$ (resp. $b \wedge c$) es el mínimo elemento de B (resp. el máximo elemento de B) que sigue a b y c (resp. que precede a b y c).

(v) Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son asociativas y mutuamente distributivas.

(vi) Hay una correspondencia biunívoca entre ideales maximales de B y homomorfismos no nulos de B en $\mathbb{Z}_2$.

(vii) Una parte I de B es un ideal sii $a \vee b \in I$ si a y b son elementos de I e I contiene a los precedentes de cada uno de sus elementos. [76]

(viii) Si $c \in B$ entonces $\{b \in B :\ b \leq c\}$ es un ideal y $\{b \in B :\ c \leq b\}$ es un filtro.

(ix) Si I es un ideal, F es un filtro disjunto con I e $I \cup F = B$ entonces hay un homomorfismo $h : B \to \mathbb{Z}_2$ tal que $h\ |_I \equiv \underline{0}$ y $h\ |_F \equiv \underline{1}$.

(x) Ídem al (ix) con I un ideal y F un filtro disjunto con I (teorema de Stone, cf. [44]).

(xi) No toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de todos los subconjuntos de un conjunto.

(xii) Todo ideal primo p de un anillo de Boole B con unidad e es maximal y B/p tiene dos elementos.

(xiii) Con la notación de los Problemas 5.15 y 5.17, si $b \in B$ entonces B_b es abierto y cerrado.

(xiv) Si $b_1,\ ...,\ b_n \in B$ existe $b \in B$ tal que $\cup_{i=1}^n B_{b_i} = B_b$.

(xv) Solamente los conjuntos $B_b,\ b \in B$, son abiertos y cerrados en el espectro de Zariski de B.

(xvi) $Sp(B)$ es compacto separado.

[76] Por *filtro* o *ideal dual* se entiende toda parte de B cerrada por $\wedge$ que contiene a los siguientes de cada uno de sus elementos.

(xvii) (Teorema de Stone) Todo *retículo booleano* es isomorfo al retículo de Boole de partes abiertas y cerradas de un espacio compacto separado. [77]

Solución

(i) Si $b,\ c \in B$ tenemos

$$(b+c)\cdot(b+c) = b\cdot b + b\cdot c + c\cdot b + c\cdot c = b + b\cdot c + c\cdot b + c = b + c$$

de modo que $b\cdot c + c\cdot b = 0$, i.e.

$$b\cdot c = b\cdot c + 0 = (b\cdot c + b\cdot c) + c\cdot b = 0 + c\cdot b = c\cdot b.$$

(ii) La aplicación binaria $\mathbb{Z}_2 \times B \to B,\ \underline{0}\cdot b = 0,\ \underline{1}\cdot b = b$ induce sobre B una estructura de $\mathbb{Z}_2-$ álgebra.

(iii) Evidentemente $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ y $\left(\mathbb{Z}_2^X, +, \cdot\right)$ son anillos de Boole unitarios. La aplicación

$$H : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{Z}_2^X, \quad H(A)(x) = \begin{cases} \underline{0} & si \quad x \notin A, \\ \\ \underline{1} & si \quad x \in A, \end{cases}$$

donde $A \in \mathcal{P}(X)$ y $x \in X$, define un homomorfismo biyectivo. En particular,

$$H^{-1} : \mathbb{Z}_2^X \to \mathcal{P}(X), \quad H^{-1}(f) = \{x \in X :\ f(x) = \underline{1}\} \quad si \quad f \in \mathbb{Z}_2^X.$$

(iv) - (v) Triviales.

(vi) Sea $h : B \to \mathbb{Z}_2$ un homomorfismo no nulo, $I = \ker(h)$. Evidentemente I es un ideal propio de B. Sea J un ideal tal que $I \subsetneq J$ y dado $b \in B$ veamos que $b \in J$. Podemos suponer que $b \notin I$. Si $c \in J - I$ tenemos

[77] Por *retículo booleano* entendemos toda estructura $L\,(\leq,\ ',\ 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge)$ en la cual un retículo L tiene un elemento minimal 0, otro maximal 1 y, si $a,\ b \in L$ denotamos

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \qquad a \vee b = \sup\{a, b\}.$$

Además, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son mutuamente distributivas y, para cada $a \in L$ existe $a' \in L$ tal que $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$.

$h(b) = h(c) = \underline{1}$, de modo que $h(b+c) = \underline{0}$ y el elemento $a = b + c$ pertenece a I. Entonces $b = a + c$ y $b \in J$. Luego I es maximal. Por otra parte, sea $\mathfrak{J}$ un ideal maximal de B y sea $\mathfrak{h} : B \to \mathbb{Z}_2$ la aplicación $\mathfrak{h}(b) = \underline{0}$ si $b \notin \mathfrak{J}$, $\mathfrak{h}(b) = \underline{1}$ si $b \in \mathfrak{J}$. Entonces $\mathfrak{h}$ un homomorfismo no nulo y $\mathfrak{J} = \ker(h)$.

(vii) Trivial.

(viii) Trivial.

(ix) Definimos $h : B \to \mathbb{Z}_2$, $h(b) = \underline{0}$ si $b \in I$, $h(b) = \underline{1}$ si $b \in F$. Si b y c pertenecen a I entonces $b + c \in I$ y

$$h(b+c) = \underline{0} = \underline{0} + \underline{0} = h(b) + h(c).$$

Si $b \in I$ y $c \in F$ entonces $b + c \in F$, ya que $a = b + c$ perteneciere a I el elemento $c = a + b$ pertenecería a $I \cap F$. Entonces

$$h(b) + h(c) = \underline{0} + \underline{1} = \underline{1} = h(b+c).$$

Supongamos que b y c pertenecen a F. Notamos que

$$(b \wedge c) \cdot (b + c) = b \cdot c + b \cdot c = 0$$

y $0 \in I$. Si $b+c \in F$ tendríamos $0 \in F$, i.e. $0 \in I \cap F$ lo que no es posible. Luego $b+c \in I$ y $h(b)+h(c) = \underline{1}+\underline{1} = \underline{0} = h(b+c)$. Por otra parte, si b o c pertenecen a I entonces $b \cdot c \in I$ y $h(b \cdot c) = \underline{0} = h(b) \,.\, h(c)$. Finalmente, si b y c pertenecen a F también $b \cdot c \in F$ y $h(b \cdot c) = \underline{1} = \underline{1} \,.\, \underline{1} = h(b)\, h(c)$.

(x) La familia de todos los ideales que contienen a I y son disjuntos con F contiene un miembro maximal $\mathfrak{J}$. Análogamente, hay un filtro $\mathfrak{F}$ que contiene a F, es disjunto de $\mathfrak{J}$ y es maximal con dichas propiedades. Por (ix) bastará ver que $\mathfrak{J} \cup \mathfrak{F} = B$. Supongamos que existe $c \in B - (\mathfrak{J} \cup \mathfrak{F})$. El mínimo ideal que contiene a $\mathfrak{J}$ y a c es

$$\mathfrak{C} = \{ b \in B : \; b \leq c \quad o \quad \exists d, \; d \in \mathfrak{J}, \; \text{t.q. } b \leq c \vee d \}.$$

En efecto, usando (vii) sigue que $\mathfrak{C}$ es un ideal. En particular, $c \in \mathfrak{C}$ y como $b \leq b \vee c$ para cada $b \in \mathfrak{J}$ entonces $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{C}$. Por otra parte, sea $\mathfrak{L}$ un ideal que contiene a c y a $\mathfrak{J}$, $b \in \mathfrak{C}$. Si $b \leq c$ entonces $b \in \mathfrak{L}$ por preceder a un elemento de $\mathfrak{L}$. Si $b \leq c \vee d$ para algún $d \in \mathfrak{J}$ nuevamente

b precede a un elemento de $\mathfrak{L}$ y $b \in \mathfrak{L}$. Entonces $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{L}$ y tenemos la minimalidad señalada de $\mathfrak{C}$. Ahora, como $I \subseteq \mathfrak{J} \subsetneqq \mathfrak{C}$ entonces $\mathfrak{C} \cap F \neq \emptyset$ por el carácter maximal de $\mathfrak{J}$. Si $b \in \mathfrak{C} \cap F$ debe existir $d \in \mathfrak{J}$ tal que $b \leq c \vee d$. En caso contrario $c \geq b$ y como $b \in F$ tendríamos $c \in F$, lo que no es cierto. En consecuencia $c \vee d \in F$ para cierto $d \in \mathfrak{J}$. Análogamente, el conjunto

$$\mathfrak{D} = \{b \in B : \; c \leq b \quad o \quad \exists d, \; d \in \mathfrak{F}, \text{ t.q. } c \wedge d \leq b\}$$

es un filtro, minimal tal que $c \in \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Como $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{D}$ por la maximalidad de $\mathfrak{F}$ existe $e \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{J}$. No puede ser $e \geq c$ pues $c \notin \mathfrak{J}$. Luego existe $f \in \mathfrak{F}$ tal que $c \wedge f \leq e$ y tenemos $c \wedge f \in \mathfrak{J}$. Finalmente, el elemento $g = (c \vee d) \wedge f = (c \wedge f) \vee (d \wedge f)$ pertenece a $\mathfrak{J}$ porque $c \wedge f \in \mathfrak{J}$, $d \wedge f$ precede a $d \in \mathfrak{J}$ y $\mathfrak{J}$ es un ideal. Además $g \in \mathfrak{F}$ pues $c \vee d \in F$, $F \subseteq \mathfrak{F}$, $f \in \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ es un filtro. Pero $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ y concluímos que $B = \mathfrak{J} \cup \mathfrak{F}$.

(xi) Sea $X = \{(0,0),(0,1)\} \cup \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $X_n = \{1/n\} \times [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos X como subespacio topológico del plano real. Supongamos que A es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de X. Probaremos que el conjunto $\{(0,0),(0,1)\}$ está contenido en A o es disjunto de A. Para ello, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(0,0) \in A$ y ver que $(0,1) \in A$. Sea U abierto en el plano tal que $(0,1) \in U$. Bastará probar que $(U \cap X) \cap A \neq \emptyset$. Fijado $n \in \mathbb{N}$ es fácil establecer que la aplicación $f_n : [0,1] \to X$, $f_n(t) = (1/n, t)$ es continua. Además, como A es abierto existe V abierto en el plano tal que $(0,0) \in V$ y $V \cap X \subseteq A$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap X_n \neq \emptyset$ si $n \geq n_0$. Entonces, el conjunto $f_n^{-1}(A)$ es no vacío, abierto y cerrado en $[0,1]$, y por la conexidad de este último tenemos $f_n^{-1}(A) = [0,1]$. Es claro ahora que $U \cap A \neq \emptyset$ ya que $X_n \subseteq A$ si $n \geq n_0$. Ahora, la clase $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos y cerrados de X es un álgebra de Boole con las operaciones de diferencia simétrica e intersección. Podemos considerar $\mathcal{B}$ como la unión de dos subclases disjuntas $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, a saber:

$$\mathcal{B}_1 = \{A \in \mathcal{B} : \; \{(0,0),(0,1)\} \subseteq A\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{A \in \mathcal{B} : \; \{(0,0),(0,1)\} \cap A = \emptyset\}.$$

Del razonamiento anterior, si $A \in \mathcal{B}_1$ y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $A \cap X_n \neq \emptyset$ debe ser $X_n \subseteq A$, i.e. para cada n se tiene $X_n \subseteq A$ o $X_n \cap A = \emptyset$. En consecuencia, cada elemento de $\mathcal{B}_1$ consiste de $\{(0,0),(0,1)\}$ y de la unión de todos salvo una cantidad finita de X_n´s. Por otra parte, cada miembro de $\mathcal{B}_2$ es la unión de una cantidad finita de X_n´s. En definitiva, $\mathcal{B}$ es infinito - numerable. En consecuencia $(\mathcal{B}, \triangle, \cap)$ no puede ser isomorfa a un álgebra del tipo $\left(\mathbb{Z}_2^Y, +, \cdot\right)$ por razones de cardinalidad.

(xii) Dado un ideal primo p de un álgebra de Boole unitaria B y $b \notin p$, como $(e+b)\cdot b = 0$ resulta $e+b \in p$. Si $c \in B$ tenemos $c = c\cdot(e+b)+c\cdot b$, o sea $B = p + \langle b \rangle$ y p es maximal. Ahora, si $b_1,\ b_2 \in B - p$ podemos escribir $b_2 = b_1 \cdot d + f$ para ciertos $f \in p$ y $d \notin p$. Luego $b_1 + b_2 = b_1 \cdot (e+d) + f$ y, como antes, $e + d \in p$. Así $b_1 + b_2 \in p$ y B/p tiene dos elementos.

(xiii) Si $b \in B$ entonces se sabe que B_b es abierto. Si p es un ideal primo y $p \in cl\ B_b$ veremos que existe $b \notin p$. Por hipótesis, dado $c \in B$ resulta $B_b \cap B_c \neq \emptyset$ si $p \in B_c$. Luego $b \cdot c$ no es nilpotente si $c \notin p$ o bien, como B es anillo booleano, $b \cdot c \neq 0$ si $c \notin p$. Si fuera $b \in p$ tendríamos $e + b \notin p$ y $b \cdot (e+b) = 0$ en contradicción con la hipótesis.

(xiv) Evidentemente basta probar la afirmación para $n = 2$. Sean $b_1,\ b_2 \in B$ y hagamos $b = b_1 + b_2 + b_1 \cdot b_2$. Si $p \in B_b - B_{b_1}$ entonces $b \notin p$ y $b_1 \in p$. Luego $b + b_2 \in p$ y, como $b \notin p$ tenemos $b_2 \notin p$, i.e. $p \in B_{b_2}$ y así $B_b \subseteq B_{b_1} \cup B_{b_2}$. Por otra parte, si $q \in B_{b_1}$ entonces $b_1 \notin q$. Si además $b \in q$ debe ser $b_2 \cdot (e + b_1) \notin q$. Pero $e + b_1 \in q$ de manera que $b \notin q$, es decir $B_{b_1} \cup B_{b_2} \subseteq B_b$.

(xv) Sea Y un subconjunto abierto y cerrado de $Sp(B)$. Como Y es abierto podemos escribir $Y = \cup_{b \in \mathfrak{B}} B_b$, donde $\mathfrak{B}$ es algún subconjunto de B. Como Y es cerrado y $Sp(B)$ es compacto entonces Y es compacto. Existe un subconjunto finito $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{B}$ tal que $Y = \cup_{b \in \mathfrak{C}} B_b$ y basta aplicar (xiv).

(xvi) Sabemos que $Sp(B)$ es compacto. Si $p,\ q \in Sp(B)$ y $p \neq q$, por (xii) existen $b_1 \in p - q$ y $b_2 \in q - p$. Entonces $q \in B_{b_1} - B_{b_2}$, $p \in B_{b_2} - B_{b_1}$, $B_{b_1} - B_{b_2}$ y $B_{b_2} - B_{b_1}$ son abiertos disjuntos.

(xvii) Sea $L = L\left(\leq,\ ',\ 0,\ 1,\ \vee,\ \wedge\right)$ un retículo de Boole, munido de las operaciones

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)\,, \qquad a \cdot b = a \wedge b$$

definidas para $a,\ b \in L$. $(L,\ +,\ \cdot)$ es un anillo de Boole e indicaremos $\mathcal{L}$ al retículo de Boole de partes abiertas y cerradas de su espectro de Zariski respecto al orden de inclusión. Sea

$$\Psi : L \to \mathcal{L}, \Psi\left(a\right) = L_a,\ a \in L.$$

Por (xiii) Ψ está bien definida y, si $\Psi\left(a\right) = \Psi\left(b\right)$ para ciertos $a,\ b \in L$ entonces $r\left(\langle a\rangle\right) = r\left(\langle b\rangle\right)$. Como a es idempotente entonces $a \in \langle b\rangle$. Luego $(1 + b) \cdot a = 0$ y resulta $a = a \cdot b$, i.e. $a \leq b$. Análogamente $b \leq a$ y Ψ es inyectiva. Por otra parte, si $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}$, por ser $\mathcal{Q}$ abierto, por Problema 3.14 (v) podemos escribir $\mathcal{Q} = \cup_{a\in L/L_a\subseteq\mathcal{Q}}\ L_a$. $\mathcal{Q}$ es compacto por ser cerrado en un espacio compacto separado, de modo que existe una parte finita F de L tal que $\mathcal{Q} = \cup_{a\in F}\ L_a$. Ahora por (xiv) existe $c \in L$ tal que $\mathcal{Q} = \Psi\left(c\right)$ y Ψ es suryectiva. Finalmente, es inmediato que si $d \leq e$ en L entonces $\Psi\left(e\right) \subseteq \Psi\left(d\right)$. $\square$

5.19. Grupos topológicos. Caracterización de abiertos y entornos de la identidad. Separabilidad. Normalidad. Homeomorfismos naturales. Sobre subgrupos de interior no vacío e invariancia de la componente de la identidad. Subgrupos normales discretos de un grupo conexo y centro. Caracterización de la continuidad y estructura de homomorfismos entre grupos topológicos. Grupos cociente y acciones definidas sobre ellos. Dados subgrupos invariantes J, H de G, $J \subseteq H$, H/J es un subgrupo de G/J homeomorfo a $p_{G,J}(H)$. La aplicación natural de G/J en G/H es un homomorfismo continuo, abierto y suryectivo.

Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico con elemento neutro e. Indicamos

$$\phi : G \times G \to G, \ \phi(a, b) = a \cdot b^{-1},$$

$$\pi : G \times G \to G, \ \pi(a, b) = a \cdot b, \quad \mathfrak{J} : G \to G, \ \mathfrak{J}(a) = a^{-1},$$

$$L_a : G \to G, \ L_a(b) = a \cdot b, \qquad R_b : G \to G, \ R_b(a) = a \cdot b,$$

donde $a, \ b \in G$.

(i) Las aplicaciones anteriores son continuas. En consecuencia, $\mathfrak{J}$, L_a y R_b son homeomorfismos. [78]

(ii) Sea $\mathcal{U}_e$ el sistema de entornos de la identidad y A una parte no vacía de G. Entonces A es abierto sii $a^{-1} \cdot A \in \mathcal{U}_e$ para cada $a \in A$ o, equivalentemente, sii $A \cdot a^{-1} \in \mathcal{U}_e$ para cada $a \in A$. Además

$$\text{cl } A = \cap \{U \cdot A : \ U \in \mathcal{U}_e\} = \cap \{A \cdot U : \ U \in \mathcal{U}_e\}.$$

[78] Dada una parte S de G indicaremos S^{-1}, $a \cdot S$, $S \cdot b$, etc., a los conjuntos $\mathfrak{J}(S)$, $L_a(S)$, $R_b(S)$, etc..

(iii) La familia $\mathcal{U}_e$ de entornos de la identidad tiene las siguientes propiedades: (1) Si $U,\ V \in \mathcal{U}_e$ entonces $U \cap V \in \mathcal{U}_e$. (2) Si $U \in \mathcal{U}_e$ y $U \subseteq V$ entonces $V \in \mathcal{U}_e$. (3) Si $U \in \mathcal{U}_e$ existe $V \in \mathcal{U}_e$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$. (4) Si $U \in \mathcal{U}_e$ y $a \in G$ entonces $a \cdot U \cdot a^{-1} \in \mathcal{U}_e$.

(iv) Dado un grupo $(G, \cdot)$ y una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de G que contienen al elemento neutro e en las condiciones (iii) hay una única topología τ de G de modo que $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico y $\mathcal{U}$ es la familia de entornos de e respecto a τ.

(v) Un grupo topológico es separado con solo ser T_0.

(vi) Un subgrupo S de un grupo topológico G es, con la topología relativa, un grupo topológico. Además, cl S es un subgrupo y si $S \lhd G$ entonces cl $S \lhd G$.

(vii) Un subgrupo S de interior no vacío es abierto y cerrado.

(viii) La componente de la identidad de un grupo topológico es un subgrupo invariante.

(ix) Un subgrupo normal discreto (con la topología relativa) de un grupo topológico conexo está contenido en el centro.

(x) Sea H un subgrupo invariante de G y consideremos el espacio cociente G/H de clases a izquierda $a \cdot H,\ a \in G$. G/H resulta de la partición inducida al considerar equivalentes elementos $a,\ b$ de G tales que $a^{-1} \cdot b \in H$. Indicando $p_{G,H} : G \to G/H$ a la proyección al cociente entonces G/H tiene una estructura de grupo topológico respecto a la cual $p_{G,H}$ es un homomorfismo continuo abierto.

(xi) Hay una acción natural de G sobre G/H, de modo que si $a \in G$ entonces la acción correspondiente de a sobre G/H es homeomorfismo.

(xii) Si $f : G \to J$ es un homomorfismo entre grupos topológicos entonces f es continuo sii $f^{-1}\left(\mathcal{U}_{e_J,J}\right) \subseteq \mathcal{U}_{e_G,G}$.

(xiii) Si $f : G \to J$ es un homomorfismo continuo de grupos topológicos y $f(G)$ se mune de la topología cociente entonces $f = h \circ g$, donde $g : G \to f(G)$ es un homomorfismo continuo abierto y $h : f(G) \to J$ es un homomorfismo continuo.

(xiv) Sea $J \subseteq H \subseteq G$, J, H subgrupos invariantes de G. Entonces H/J es un subgrupo de G/J homeomorfo a $p_{G,J}(H)$.

(xv) La aplicación $\mu : G/J \to G/H$, $\mu\left[p_{G,J}(a)\right] = p_{G,H}(a)$ para $a \in G$, es un homomorfismo continuo, abierto y suryectivo.

(xvi) $(G/J)\,/\,(H/J)$ es homeomorfo a G/H.

Solución

(i) ϕ es continua porque $(G, \cdot, \tau)$ es grupo topológico. Además

$$\mathfrak{J}\,(a) = a^{-1} = e \cdot a^{-1} = \phi(e, a) = \left[\phi \circ (e \times Id_G)\right](a)$$

para cada $a \in G$ de donde $\mathfrak{J} = \phi \circ (e \times Id_G)$ resulta continua. Ahora

$$\pi\,(a, b) = a \cdot \left(b^{-1}\right)^{-1} = \phi(a, b^{-1}) = \left[\phi \circ (Id_G \times \mathfrak{J})\right](a, b)$$

para $a,\ b \in G,\ i.e.\ \pi = \phi \circ (Id_G \times \mathfrak{J})$ es continua. Asimismo

$$L_a\,(b) = a \cdot b = \pi\,(a, b) = \left[\pi \circ (a \times Id_G)\right](b),$$

$$R_b\,(a) = a \cdot b = \pi\,(a, b) = \left[\pi \circ (Id_G \times b)\right](a)\,,$$

i.e. $L_a = \pi \circ (a \times Id_G)$ y $R_b = \pi \circ (Id_G \times b)$ devienen continuas y como $\mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{J}$, $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ y $(R_b)^{-1} = R_{b^{-1}}$ si $a,\ b \in G$ sigue (i).

(ii) Dado $a \in A$, como $a^{-1} \cdot A = L_{a^{-1}}\,(A)$ y $L_{a^{-1}}$ es homeomorfismo, entonces $a^{-1} \cdot A$ es abierto si A es abierto. Como $e \in a^{-1} \cdot A$ entonces $a^{-1} \cdot A \in \mathcal{U}_e$. Por otra parte, si $a^{-1} \cdot A \in \mathcal{U}_e$ para $a \in A$ entonces $A = L_a\,(a^{-1} \cdot A)$ resulta abierto. Ahora, si $B = \cap\{U \cdot A :\ U \in \mathcal{U}_e\}$ y $a \notin cl\ A$ existe $V \in \mathcal{U}_a$ tal que $A \cap V = \emptyset$. El conjunto $U = (L_a \circ \mathfrak{J})\,(V) = a \cdot V^{-1}$ es un entorno de e y $a \notin U \cdot A$, o sea $B \subseteq cl\ A$. Por otra parte, si $a \in cl\ A$ y $W \in \mathcal{U}_e$ entonces $W^{-1} \cdot a \in \mathcal{U}_a$ y $(W^{-1} \cdot a) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $a \in W \cdot A$. Siendo W arbitrario, $a \in B$. El resto es análogo.

(iii) (1), (2) y (4) son evidentes. Puesto que $e = e \cdot e$ y π es continua, dado $U \in \mathcal{U}_e$ existen $V_1,\ V_2 \in \mathcal{U}_e$ tales que $V_1 \cdot V_2 \subseteq U$. Escribiendo $V = V_1 \cap V_2^{-1}$ tenemos $V \in \mathcal{U}_e$ por (1) y porque $\mathfrak{J}$ es abierta. Además

$$V \cdot V^{-1} = \left(V_1 \cap V_2^{-1}\right) \cdot \left(V_1^{-1} \cap V_2\right) \subseteq V_1 \cdot V_2 \subseteq U$$

y sigue (3).

(iv) Trivial.

(v) Sean $a \neq b$ en G y supongamos que $a \notin cl\ \{b\}$. Por (ii) existe $U \in \mathcal{U}_e$ tal que $a \notin U \cdot b$ y por (iii)(3) existe $V \in \mathcal{U}_e$ tal que $V^{-1} \cdot V \subseteq U$. Supongamos que $c \cdot a = d \cdot b$ para $c,\ d \in V$. Entonces $a \cdot b^{-1} = c^{-1} \cdot d$ y $a \cdot b^{-1} \in U$ lo cual no es cierto, i.e. $(V \cdot a) \cap (V \cdot b) = \emptyset$.

(vi) Sigue de la continuidad de las aplicaciones introducidas en (i).

(vii) Dado $a \in S^o$ existe $W \in \mathcal{U}_a$ tal que $W \subseteq S$. Luego $a^{-1} \cdot W \subseteq S$, $a^{-1} \cdot W \in \mathcal{U}_e$ y $S = \cup_{b \in S} b \cdot (a^{-1} \cdot W)$ resulta abierto. Además

$$\cap \{U \cdot S :\ U \in \mathcal{U}_e\} \subseteq \left(a^{-1} \cdot W\right) \cdot S \subseteq S$$

y aplicamos (ii).

(viii) Si C_e es la componente de e en G entonces C_e es conexo. En consecuencia $C_e \times C_e$ también lo es (cf. [14], Th. 1.7, page 109) y los conjuntos $C_e \cdot C_e$ y C_e^{-1} son conexos y contienen a e. Luego ambos son subconjuntos de C_e y C_e es es un subgrupo de G. Si $a \in G$ también $(L_a \circ R_{a^{-1}})\,(C_e)$ es conexo y contiene a e de modo que $a \cdot C_e \cdot a^{-1} \subseteq C_e$.

(ix) Sea S un subgrupo normal discreto con la topología relativa de un grupo conexo G. Si $b \in S$ la aplicación $\sigma_b(a) = a \cdot b \cdot a^{-1}$ es continua entre G y S. Luego $\sigma_b(G)$ es conexo y $\sigma_b(G) \subseteq S$. Como S es discreto entonces $\sigma_b(G) = \{\sigma_b(e)\}$, o sea $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a \in G$. Así $S \subseteq C\,[G]$.

(x) Dados $a,\ b \in G$ definimos

$$p_{G,H}\,(a) \cdot p_{G,H}\,(b) = p_{G,H}\,(a \cdot b)\,. \tag{158}$$

Si $p_{G,H}\,(a) = p_{G,H}\,(\widetilde{a})$ y $p_{G,H}\,(b) = p_{G,H}(\widetilde{b})$ escribimos

$$(a \cdot b)^{-1} .(\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}) = b^{-1} \cdot \left(a^{-1} \cdot \widetilde{a}\right) \cdot \widetilde{b}$$

$$= (b^{-1} \cdot \widetilde{b}) \cdot \left[\widetilde{b}^{-1} \cdot \left(a^{-1} \cdot \widetilde{a}\right) \cdot \widetilde{b}\right],$$

i.e. $(a \cdot b)^{-1} .(\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}) \in H$ pues $H \lhd G$, $b^{-1} \cdot \widetilde{b}$ y $a^{-1} \cdot \widetilde{a}$ pertenecen a H. Por lo tanto la definición (158) es correcta. Es trivial que $(G/H, \cdot)$ es un grupo con elemento neutro $p_{G,H}\,(e) = H$ y $p_{G,H}\,(a)^{-1} = p_{G,H}\,(a^{-1})$ para

$a \in G$. Consideremos G/H munido de la topología cociente, de manera que $p_{G,H}$ resulta continua. Dado U abierto en G entonces $p_{G,H}(U)$ deviene abierto porque $p_{G,H}^{-1}[p_{G,H}(U)] = U \cdot H$ y $U \cdot H = \cup_{a \in H} U \cdot a$ es abierto en G. Así $p_{G,H}$ resulta abierta. Finalmente, escribiremos

$$P_{G,H} : G \times G \to \frac{G}{H} \times \frac{G}{H},\ P_{G,H}(a,b) = (p_{G,H}(a), p_{G,H}(b)),$$

$$\psi : \frac{G}{H} \times \frac{G}{H} \to \frac{G}{H},\ \psi(p_{G,H}(a), p_{G,H}(b)) = p_{G,H}(a) \cdot p_{G,H}(b)^{-1}$$

para $a,\ b \in G$. Si Δ es abierto en G/H entonces

$$\psi^{-1}(\Delta) = P_{G,H}\left[(p_{G,H} \circ \phi)^{-1}(\Delta)\right]$$

y, como $P_{G,H}$ es abierta y $p_{G,H} \circ \phi : G \times G \to G/H$ es continua entonces $\psi^{-1}(\Delta)$ es abierto, o sea ψ es continua y G/H es grupo topológico.

(xi) Si $a \in G$ definimos

$$\widehat{a} : G/H \to G/H,\ \widehat{a}(p_{G,H}(b)) = p_{G,H}(a \cdot b),\ b \in G.$$

Esta definición es correcta porque si $p_{G,H}(b) = p_{G,H}(\widetilde{b})$ entonces

$$(a \cdot b)^{-1} \cdot (a \cdot \widetilde{b}) = b^{-1} \cdot \widetilde{b}$$

y $b^{-1} \cdot \widetilde{b} \in H$. Es evidente que $\widehat{a}$ es un endomorfismo de G/H, que $\widehat{a^{-1}} = \widehat{a}^{-1}$ y que $\widehat{a} \circ p_{G,H} = p_{G,H} \circ L_a$. Si Δ es abierto en G/H tenemos $p_{G,H}^{-1}(\widehat{a}^{-1}(\Delta)) = L_{a^{-1}}\left(p_{G,H}^{-1}(\Delta)\right)$, i.e. $\widehat{a}^{-1}(\Delta)$ es abierto en G/H pues $p_{G,H}$ es continua y $L_{a^{-1}}$ abierta. Así cada $\widehat{a}$ resulta homeomorfismo.

(xii) La condición es obviamente necesaria. Recíprocamente, dado $a \in G$ y $V \in \mathcal{U}_{f(a),J}$ entonces $f(a)^{-1} \cdot V \in \mathcal{U}_{e_J,J}$. Como f es continuo en e_G y $f(e_G) = e_J$ existe $U \in \mathcal{U}_{e_G,G}$ tal que $U \subseteq f^{-1}\left[f(a)^{-1} \cdot V\right]$. Finalmente $a \cdot U \in \mathcal{U}_{a,G}$ y $a \cdot U \subseteq f^{-1}(V)$.

(xiii) Definimos $\widetilde{f} : G/\ker(f) \to f(G),\ \widetilde{f}\left(p_{G,\ker(f)}(a)\right) = f(a)$. Es fácil ver que $\widetilde{f}$ está bien definida y es un homomorfismo biyectivo. Considerando $f(G)$ con la topología cociente inducida por f, si Γ es abierto en $f(G)$ el conjunto $p_{G,\ker(f)}^{-1}\left[\widetilde{f}^{-1}(\Gamma)\right] = f^{-1}(\Gamma)$ es abierto en G, i.e. $\widetilde{f}^{-1}(\Gamma)$

es abierto en $G/\ker(f)$ y así $\widetilde{f}$ es continua. Más aún, si Ξ es abierto en $G/\ker(f)$ entonces $f^{-1}\left[\widetilde{f}(\Xi)\right] = p^{-1}_{G,\ker(f)}(\Xi)\cdot\ker(f)$ es abierto y $\widetilde{f}(\Xi)$ deviene abierto en $f(G)$, o sea $\widetilde{f}$ es abierta. Hacemos entonces $g = \widetilde{f}\circ p_{G,\ker(k)}$ y $h : f(G) \hookrightarrow J$ la inclusión. Si W es abierto en J entonces $h^{-1}(W) = W\cap f(G)$ y $f^{-1}[W\cap f(G)] = f^{-1}(W)$ es abierto, con lo que $W\cap f(G)$ es abierto en $f(G)$ y h es continua.

(xiv) Con la notación de (xiii) tenemos $p_{G,J}\mid_H = \widetilde{p_{G,J}\mid_H}\circ p_{H,J}$ y

$$\widetilde{p_{G,J}\mid_H} : H/J \to p_{G,J}(H)$$

es un homeomorfismo.

(xv) Como J es subgrupo de H entonces μ está bien definida y es claramente un homomorfismo suryectivo. Si Υ es abierto en G/H el conjunto $p^{-1}_{G,J}\left[\mu^{-1}(\Upsilon)\right] = p^{-1}_{G,H}(\Upsilon)$ es abierto y así $\mu^{-1}(\Upsilon)$ es abierto en G/J, i.e. μ es continua. Por otra parte, si Ψ es abierto en G/J tenemos $\mu(\Psi) = p_{G,H}\left[p^{-1}_{G,J}(\Psi)\right]$ y $\mu(\Psi)$ es abierto en G/H, o sea μ es abierta.

(xvi) Tenemos $\ker(\mu) = p_{G,J}(H)$ y como en (xiii) $(G/J)/\ker(\mu) \approx G/H$. Por (xv) sigue (xvi). $\square$

5.20. Espacios cocientes de Hausdorff no regulares y espacios cociente no separados. Productos, particiones, cocientes de espacios regulares. Si X es un espacio topológico en el que todo elemento tiene un entorno cerrado regular, es regular. Si X es regular, pares de puntos distintos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas. Topologías no regulares de $\mathbb{Z}^+$.

(i) En un espacio topológico regular X la clase $\mathfrak{P} = \{\mathrm{cl}\{x\} : x\in X\}$ es una partición. La proyección al cociente $X\to X/\mathfrak{P}$ deviene abierta y cerrada.

(ii) El producto de espacios regulares es regular.

(iii) Sea X espacio de Hausdorff regular no normal A, B subconjuntos cerrados no separables de X, $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Si $A \in \mathcal{P}(X)$, Ω es una partición de X y $\sim_\Omega$ es la relación inducida por Ω escribiremos

$$\mathrm{P}_\Omega[A] = \{s \in X : (\exists t), t \in A, s \sim_\Omega t\}.$$

(iii)(1) El conjunto $R = \Delta \cup A \times A$ es cerrado en $X \times X$.

(iii)(2) X/R es espacio de Hausdorff no regular.

(iii)(3) El conjunto $S = \Delta \cup (A \times A) \cup (B \times B)$ es cerrado en $X \times X$ pero X/S no es separado.

(iii)(4) La aplicación

$$\Upsilon : X \times X \to (X/S) \times (X/S), \ \Upsilon(x,y) = (p_S(x), \ p_S(y)),$$

donde $p_S : X \to X/S$ es la proyección al cociente, no es abierta.

(iv) Si X es un espacio topológico en el que todo elemento tiene un entorno cerrado regular, es regular.

(v) Si X es regular, pares de puntos distintos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas. La afirmación recíproca es falsa.

(vi)(1) Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ escribimos $U(a,b) = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}^+$. La familia $\mathfrak{B} = \{U(a,b) : a, b \in \mathbb{Z}^+, \text{ mcd}\{a,b\} = 1\}$ es base de una topología $\mathfrak{T}$ en $\mathbb{Z}^+$.

(vi)(2) $(\mathbb{Z}^+, \mathfrak{T})$ no es espacio regular.

Solución

(i) Sean $x, y \in X$ tales que existe $z \in \mathrm{cl}\{x\} - \mathrm{cl}\{y\}$. Sea U entorno abierto de z tal que $\{x,y\} \cap U = \{x\}$. Por ser X regular existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subseteq U$. Como $\mathrm{cl}\{x\} \subseteq V$ es $\mathrm{cl}\{x\} \subseteq U$ y, si $w \in \mathrm{cl}\{y\}$, no puede ser $w \in U$ pues $y \notin U$. Luego $\mathrm{cl}\{y\} \cap U = \emptyset$ y $\mathrm{cl}\{x\} \cap \mathrm{cl}\{y\} \subseteq U \cap \mathrm{cl}\{y\}$, i.e. $\mathrm{cl}\{x\} \cap \mathrm{cl}\{y\} = \emptyset$. En consecuencia $\mathfrak{P}$ es una partición de X. Si $A \in \mathcal{P}(X)$ por la observación anterior $\mathrm{cl}\{t\} \subseteq A$ si $t \in A$ y A es abierto o cerrado. Como

$$\mathrm{P}_\mathfrak{P}[A] = \cup_{t \in A} \mathrm{cl}\{t\} \subseteq A \subseteq \mathrm{P}_\mathfrak{P}[A]$$

$\mathrm{P}_\mathfrak{P}[A]$ resulta abierto o cerrado si A es abierto o cerrado respectivamente. Basta aplicar [23], Cap. 3, Teo. 10, pág. 116.

(ii) Trivial.

(iii)(1) Si $(x,y) \notin R$ es $x \neq y$ y por ser X separado hay entornos abiertos disjuntos U y V de x e y respectivamente. Luego $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ y, como $(x,y) \notin A \times A$, podemos asumir que $U \cap A = \emptyset$ o $V \cap A = \emptyset$. Luego $(U \times V) \cap (A \times A) = \emptyset$ y concluímos que $U \times V$ es entorno abierto de (x,y) disjunto con R.

(iii)(2) Tenemos $X/R = \{A\} \cup \{\{x\} : \ x \in X - A\}$. Si $x, \ y \in X - A$ son distintos hay entornos U y V de x e y respectivamente, disjuntos entre sí y con A. Como X es regular la proyección al cociente $p_R : X \to X/R$ es abierta y observamos que $p_R(U)$ y $p_R(V)$ son entornos abiertos disjuntos de $\{x\}$ e $\{y\}$ respectivamente. Asimismo, si $z \in X - A$ entonces $\{z\} \neq A$ en X/R y, por la regularidad de X, hay un entorno abierto W de z cuya clausura está contenida en $X - A$. $p_R(W)$ y $p_R(X - \operatorname{cl} W)$ son entornos abiertos disjuntos de $\{z\}$ y A en X/R respectivamente, con lo que sigue que X/R es separado. Ahora, como $A \subseteq X - B$ y B es cerrado $p_R\,(X - B)$ es entorno abierto de A en X/R. Sea Z subconjunto abierto de X/R al que pertenece A y veamos que $\operatorname{cl} Z - p_R\,(X - B) \neq \emptyset$, de donde deduciremos la no regularidad del cociente. Como

$$X/R - p_R\,(X - B) = p_R(B)$$

debemos ver que $p_R\,(B) \cap \operatorname{cl} Z \neq \emptyset$. Sino resulta $p_R\,(B) \subseteq X/R - \operatorname{cl} Z$, i.e. $B \subseteq p_R^{-1}\,(X/R - \operatorname{cl} Z)$. Pero $A \subseteq p_R^{-1}(Z)$ pues $A \in Z$ y

$$p_R^{-1}\,(X/R - \operatorname{cl} Z) \cap p_R^{-1}(Z) = \emptyset,$$

en contradicción con la no separabilidad de A y B.

(iii)(3) Si $(x,y) \notin S$ es $x \neq y$. Si $x \notin A \cup B$ hay entornos abiertos disjuntos U_1 y V_1 de x e y respectivamente de modo que $U_1 \subseteq X - (A \cup B)$. Luego $U_1 \times V_1$ es entorno abierto de (x,y) disjunto con S. Si $x \in A - B$ e $y \notin A$ hay entornos abiertos disjuntos U_2 y V_2 de x e y respectivamente tales que $U_2 \subseteq X - B$ y $V_2 \subseteq X - A$. Ahora $U_2 \times V_2$ es entorno abierto de (x,y) disjunto con S. Los casos restantes siguen cambiando los roles de x e y y S es cerrado. Ahora $X/S = \{A, \ B\} \cup \{\{z\} : \ z \in X - (A \cup B)\}$. Si $W, \ Y$ son entornos de A y B en X/S respectivamente, $p_S^{-1}\,(W)$ y $p_S^{-1}(Y)$ son entornos de A y B en X respectivamente. Luego $W \cap Y \neq \emptyset$ porque $p_S^{-1}\,(W) \cap p_S^{-1}(Y) \neq \emptyset$, i.e. X/S no es separado.

(iii)(4) $X \times X - S$ es abierto pero $\Upsilon(X \times X - S)$ no lo es. En efecto, $(A, B) \in \Upsilon(X \times X - S)$ porque $X \times X - S$ contiene a $A \times B$. Si W e Y son abiertos en X/S que contienen a A y B respectivamente, como $p_S^{-1}(W)$ y $p_S^{-1}(Y)$ son entornos de A y B en X respectivamente existe $x \in p_S^{-1}(W) \cap p_S^{-1}(Y)$. Supongamos $\Upsilon(x, x) = \Upsilon(u, v)$ para cierto $(u, v) \in X \times X - S$. Si $u \notin A \cup B$ obtenemos $u = x = v$, lo cual es contradictorio. Si $u \in A$ entonces $x \in A$ y como $p_S(x) = p_S(v)$ también $v \in A$, o sea $(u, v) \in A \times A$, lo cual es contradictorio. Asimismo no puede ser $u \in B$, i.e. $\Upsilon(x, x) \in W \times Y - \Upsilon(X \times X - S)$. Luego (A, B) no es punto interior de $\Upsilon(X \times X - S)$ y pertenece a dicho conjunto.

(iv) Sea $x \in X$, U abierto que contiene a x, V abierto que contiene a x con clausura regular. Como $U \cap V$ es entorno abierto de x en $\mathrm{cl}_X V$ existe un subconjunto Z de $\mathrm{cl}_X V$ tal que $x \in \mathrm{int}_{\mathrm{cl}_X V} Z$ y $\mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X V} Z \subseteq U \cap V$. Si S es abierto en X, $x \in S$ y $S \cap \mathrm{cl}_X V \subseteq Z$ entonces $S \cap V$ es subconjunto abierto de Z y contiene a x, i.e. $x \in Z^o$. Además $\mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X V} Z$ es cerrado por serlo en cuanto subespacio del subespacio cerrado $\mathrm{cl}_X V$. Como $Z \subseteq \mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X V} Z$ deducimos $\mathrm{cl}_X Z \subseteq \mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X V} Z \subseteq U$ y sigue la afirmación.

(v) La afirmación es evidente. Veamos que la afirmación recíproca es falsa, para lo cual indicamos

$$U_n(x) = \{x\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : \ |x - r| < 1/n\}, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mathcal{B} = \{U_n(x)\}_{x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}}$ y veamos que $\mathcal{B}$ es base de una topología τ sobre $\mathbb{R}$. Sean $x, \ y \in \mathbb{R}$, $n, \ m \in \mathbb{N}$, $z \in U_n(x) \cap U_m(y)$. Si $x = y$ entonces $U_n(x) \cap U_m(y) = U_{\text{máx}\{n,m\}}(x)$. Si $p \in \mathbb{N}$ es tal tal que

$$0 < \frac{1}{p} < \text{mín}\left\{z - \text{máx}\left\{x - \frac{1}{n}, \ y - \frac{1}{m}\right\}, \text{mín}\left\{x + \frac{1}{n}, \ y + \frac{1}{m}\right\} - z\right\}$$

resulta $U_p(z) \subseteq U_n(x) \cap U_m(y)$ y sigue la afirmación (cf. [23], Cap. 1, Teo. 11, pág. 60). Ahora, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es $\tau-$ cerrado, pues si $w \in \mathrm{cl}_\tau(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ y $q \in \mathbb{N}$, como $U_q(w) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ necesariamente dicha intersección es $\{w\}$, y ha de ser $w \notin \mathbb{Q}$, i.e. $\mathrm{cl}_\tau(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Si U es entorno de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y V es entorno de $\{0\}$ sea $s \in \mathbb{N}$ tal que $U_s(0) \subseteq V$ y $\iota \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $|\iota| < 1/s$. Como todo $\tau-$ entorno de ι interseca a $U_s(0)$ resulta $U \cap V \neq \emptyset$, de modo que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es espacio regular.

(vi)(1) Por el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$, dados $a,\ b \in \mathbb{Z}^+$ podemos asumir que $b < a$. En caso contrario $U(a,b) = U(a,r)$, donde r es el único resto no negativo menor que a de la división de b por a. En particular, $r > 0$ si $\operatorname{mcd}\{a,b\} = 1$. Asumiendo $b < a$ resulta

$$U(a,b) = \{b,\ a+b,\ 2a+b,\ ...\}.$$

Si además $c,\ d \in \mathbb{Z}^+$ son coprimos

$$U(a,b) \subseteq U(c,d) \Leftrightarrow b \geq d \ \text{ y } \ c \mid \operatorname{mcd}\{b-d, a\}. \tag{159}$$

En efecto, si $U(a,b) \subseteq U(c,d)$ hay enteros no negativos $n_1,\ n_2$ tales que $b = d + c \cdot n_1$ y $a + b = d + c \cdot n_2$, resultando $b \geq d$. Luego $b - d$ y a devienen divisibles por c y la condición es necesaria. Recíprocamente, existe n_3 entero no negativo tal que $b = d + c \cdot n_3$ por lo que $b \in U(c,d)$. Si $n_4 \in \mathbb{Z}^+$, como $a/c \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

$$b + a \cdot n_4 = d + c \cdot [n_3 + (a/c)],$$

i.e. $b + a \cdot n_4 \in U(c,d)$ y sigue (159). Ahora, sean $u,\ v,\ u',\ v' \in \mathbb{Z}^+$, $v < u,\ v' < u',\ w \in U(u,v) \cap U(u',v')$. Hay enteros no negativos $s,\ s'$ tales que $w = v + u \cdot s = v' + u' \cdot s'$. Luego $w \geq \operatorname{máx}\{v,v'\}$, $\operatorname{mcd}\{u \cdot s,\ \operatorname{mcm}\{u,u'\}\}$ es múltiplo de u pues u es divisor tanto de $u \cdot s$ como de $\operatorname{mcm}\{u,u'\}$, $\operatorname{mcd}\{u' \cdot s',\ \operatorname{mcm}\{u,u'\}\}$ es múltiplo de u' pues u' es divisor tanto de como de $u' \cdot s'$ como de $\operatorname{mcm}\{u,u'\}$ y concluímos que $U(\operatorname{mcm}\{u,u'\},\ w) \subseteq U(u,v) \cap U(u',v')$.

(vi)(2) Si p es primo positivo $\mathbb{Z}^+ \cdot p$ es $\mathfrak{T}-$ cerrado en $\mathbb{Z}^+$: si $n \in \mathbb{Z}^+ - \mathbb{Z}^+ \cdot p$ hay únicos enteros c y r tales que $n = p \cdot c + r$ y $0 < r < p$. Luego $n \in U(p,r)$ y $U(p,r) \cap \mathbb{Z}^+ \cdot p = \emptyset$. Bastará ver que $\{1\}$ y $\mathbb{Z}^+ \cdot 2$ no tienen entornos disjuntos. Precisamente, $U(1,1)$ es el único elemento de $\mathfrak{B}$ que contiene a 2 y $U(1,1) = \mathbb{Z}^+$. $\square$

5.21. Sobre topologías compacto - abiertas. Densidad de $C(X,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^X$ cuando X es espacio de Tijonov. Metrizabilidad de $C(X,Y)$ cuando X e Y son espacios de Hausdorff con base numerable y X es compacto. El espacio $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, considerado con la topología compacto abierta, es metrizable. Teorema de Arzelá - Ascoli.

(i)(1) Sean X, Y espacios topológicos, $C(X,Y)$ munido de la *topología compacto abierta.*[79] Si Y es espacio de Hausdorff el *embedding* natural $j: Y \to C(X,Y)$ es cerrado y el conjunto

$$\Sigma = \{(f,x,y): \ f(x) = y\}$$

es cerrado en $C(X,Y) \times X \times Y$.

(i)(2) Sea X espacio de Hausdorff localmente compacto, Y espacio topológico, F subespacio cerrado de Y. El conjunto $\Gamma = \{(f,x): \ f(x) \in F\}$ es cerrado en $C(X,Y) \times X$.

(i)(3) La evaluación $e: C(X,Y) \times X \to Y$ es continua si y solo si para todo espacio topológico Z y cada aplicación $\alpha: Z \times X \to Y$, la misma resulta continua si es continua la aplicación $\widehat{\alpha}$ inducida entre Z y $C(X,Y)$.

(ii) Si X es espacio de Tijonov, $C(X,\mathbb{R})$ es denso en $\mathbb{R}^X$.

(iii) Sean X, Y espacios de Hausdorff con base numerable, X compacto. $C(X,Y)$ es metrizable sii Y es regular.

(iv) El espacio $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, considerado con la topología compacto abierta, es metrizable.

---

[79] Si X, Y son espacios topológicos, $A \in \mathcal{P}(X)$, $B \in \mathcal{P}(Y)$, escribiremos

$$\mathcal{U}_Y^X(A,B) = \{f \in C(X,Y): \ f(A) \subseteq B\}.$$

La $c-$ ***topología*** (o ***topología compacto abierta***) sobre $C(X,Y)$ es aquella para la que los conjuntos $\mathcal{U}_Y^X(A,B)$, con A compacto y B abierto, constituyen una subbase. Salvo mención contraria, en este problema consideraremos espacios de funciones continuas con la $c-$ topología.

(v) Si $X,\ Y,\ Z$ son espacios topológicos,

$$C(X, C(Y \times Z)) \approx C\,(X,Y) \times C\,(X \times Z)\,.$$

(vi) (Teorema de Arzelá - Ascoli) Sean (Y,d) espacio métrico, X espacio localmente compacto de Hausdorff. Un subconjunto $\mathfrak{F}$ de $C(X,Y)$ es $c-$ relativamente compacto sii es *equicontinuo*[80] y $\mathfrak{F}\,(x)$ es relativamente compacto para cada $x \in X$.

Solución

(i)(1) Evidentemente j es inyectiva; sea $\{y_\nu\}_{\nu \in N}$ una red en Y que converge a un punto y_0. Si K es subconjunto compacto de $X,\ U$ es subconjunto abierto de Y y $j\,(y_0) \in \mathcal{U}_Y^X\,(K,U)$ entonces $y_0 \in U$. Existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_\nu \in U$ si $\nu \geq \nu_0$ de modo que $j\,(y_\nu) \in \mathcal{U}_Y^X\,(K,U)$ si $\nu \geq \nu_0$. Podemos concluir que j es continua. Sea C subconjunto cerrado de $Y,\ f \in C(X,Y) - j(C)$. Si $C = Y$ hay puntos distintos $x_1,\ x_2$ en X tales que $f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$. Como Y es separado hay abiertos disjuntos U_1 y U_2 que contienen a $f\,(x_1)$ y a $f\,(x_2)$ respectivamente. El conjunto $\mathfrak{W} = \mathcal{U}_Y^X\,(\{x_1\}, U_1) \cap \mathcal{U}_Y^X\,(\{x_2\}, U_2)$ es $c-$ abierto, contiene a f y es disjunto con $j\,(C)$. Si $C \subsetneqq Y$ aún $\mathfrak{W}$ es disjunto con $j\,(C)$ pues lo es con $j\,(Y)$. Si $f \in j(Y) - j(C)$ existe $\widetilde{y} \in Y - C$ tal que $f \equiv \widetilde{y}$. Como C es cerrado existe V abierto en Y tal que $V \cap C = \emptyset$ e $\widetilde{y} \in V$. Si H es compacto no vacío en X resulta $\mathcal{U}_Y^X\,(H,V) \cap j(C) = \emptyset$ y $f \in \mathcal{U}_Y^X\,(H,V)$, i.e. j deviene cerrada porque C es arbitrario. Ahora, si $(f,x,y) \notin \Sigma$ es $f(x) \neq y$ en Y. Si $V_1,\ V_2$ son abiertos disjuntos que contienen a $f(x)$ e y respectivamente el conjunto

$$\mathcal{U}_Y^X\,(\{x\}, V_1) \times \left[\bigcup_{g \in C(X,Y)} g^{-1}(V_1)\right] \times V_2$$

es entorno abierto de (f,x,y) disjunto con Σ.

(i)(2) Si $(f,x) \notin \Gamma$, como F es cerrado, hay un entorno abierto U de $f\,(x)$ disjunto con F. $f^{-1}(U)$ es abierto por la continuidad de f y contiene a x. Como X es espacio de Hausdorff localmente compacto hay un

[80] $\mathfrak{F}$ es *equicontinuo* si lo es en cada punto de X. Si $x \in X$ se dice que $\mathfrak{F}$ *es equicontinuo en* x si dado $\varepsilon > 0$ hay un entorno $U(x)$ de x tal que $f\,(U(x)) \subseteq B_{Y,d}\,(f(x), \varepsilon)$ para $f \in \mathfrak{F}$.

entorno precompacto V de x cuya clausura está contenida en $f^{-1}(U)$. En consecuencia $\mathcal{U}_Y^X(\operatorname{cl} V, U) \times V$ es entorno de (f, x) disjunto con Γ, y como (f, x) es arbitrario, Γ resulta cerrado.

(i)(3) Si $\alpha : Z \times X \to Y$ es una función escribimos

$$\widehat{\alpha}(z)(x) = \alpha(z, x), \ z \in Z, \ x \in X.$$

Supongamos $\widehat{\alpha} \in C(Z, C(X, Y))$ y que la evaluación es continua. Si $\{(z_a, x_a)\}_{a \in A}$ es una red que converge a (z_0, x_0) en $Z \times X$ entonces $\widehat{\alpha}(z_a) \to \widehat{\alpha}(z_0)$ en $C(X, Y)$ pues $z_a \to z_0$ en Z y $\widehat{\alpha}$ es continua. Como también $x_a \to x_0$ entonces $(\widehat{\alpha}(z_a), x_a) \to (\widehat{\alpha}(z_0), x_0)$ en $C(X, Y) \times X$ y por la continuidad de e tenemos

$$\alpha(z_0, x_0) = \widehat{\alpha}(z_0)(x_0) = e(\widehat{\alpha}(z_0), x_0)$$

$$= \lim_{a \in A} e(\widehat{\alpha}(z_a), x_a) = \lim_{a \in A} \alpha(z_a, x_a),$$

y sigue la continuidad de α. Recíprocamente, si $Z = C(X, Y)$ y $f \in Z$ entonces $\widehat{e}(f)(x) = e(f, x) = f(x)$ para $x \in X$, i.e. $\widehat{e}(f) = f$. Como f es arbitraria $\widehat{e} = \mathrm{Id}_{C(X,Y)}$ es continua y, por hipótesis, e es continua.

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$, $\{x_j\}_{1 \le j \le n}$ un subconjunto de n elementos de X, $I_1, \dots, I_n$ abiertos en $\mathbb{R}$. Como X es espacio de Tijonov hay funciones $f_j : X \to \mathbb{R}$ continuas tales que $0 \le f_j \le 1$, $f_j(x_j) = 1$, $f_j(x_k) = 0$ si $j \ne k$, donde $1 \le j, k \le n$. Seleccionando elementos $t_j \in I_j$, $1 \le j \le n$, sea $f = \sum_{j=1}^n t_j \, f_j$. Entonces $f \in C(X, \mathbb{R})$ y $f(x_j) \in I_j$ para cada j, de donde sigue (ii).

(iii) Asumiendo que $C(X, Y)$ es metrizable sea $\iota : Y \hookrightarrow C(X, Y)$ la aplicación natural que asigna a cada $y \in Y$ la función constante de X en Y cuya imágen es $\{y\}$. Si C es compacto y V abierto resulta $\iota^{-1}\left(\mathcal{U}_Y^X(C, V)\right) = V$, i.e. la preimágen de abiertos subbásicos es abierta, de donde ι es continua. Más aún, ι es abierta ya que X es compacto y $\iota(V) = \mathcal{U}_Y^X(X, V) \cap \iota(Y)$. Como ι es inyectiva deviene en un homeomorfismo entre Y e $\iota(Y)$. Si d es una distancia que metriza a $C(X, Y)$ munido de la $c-$ topología la relación

$$\delta(y_1, y_2) = d(\iota(y_1), \iota(y_2)), \ y_1, \ y_2 \in Y,$$

es una métrica sobre Y. Si V_0 es abierto en Y e $y_0 \in Y_0$ tenemos

$$\iota(y_0) \in \mathcal{U}_Y^X(X, V_0)$$

y existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{C(X,Y),d}(\iota(y_0), \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_Y^X(X, V_0),$$

donde $B_{C(X,Y),d}(\iota(y_0), \varepsilon)$ es la $d-$ bola en $C(X, Y)$ de centro $\iota(y_0)$ y radio ε. Luego $B_{Y,\delta}(y_0, \varepsilon) \subseteq V_0$, donde $B_{Y,\delta}(y_0, \varepsilon)$ es la $\delta-$ bola en Y de centro y_0 y radio ε. Si $\rho > 0$ e $y_1 \in B_{Y,\delta}(y_0, \rho)$ tenemos

$$\iota(y_1) \in B_{C(X,Y),d}(\iota(y_0), \rho).$$

Hay un entero positivo s, subconjuntos compactos $K_1, \ldots, K_s$ de X y subconjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_s$ de Y, de modo que el conjunto $\cap_{j=1}^{s} \mathcal{U}_Y^X(K_j, V_j)$ contiene a $\iota(y_1)$ y está contenido en $B_{C(X,Y),d}(\iota(y_0), \rho)$. Luego es fácil ver que $\cap_{j=1}^{s} V_j$ es entorno abierto de y_1 contenido en $B_{Y,\delta}(y_0, \rho)$. En definitiva, δ metriza la topología de Y y la condición es necesaria. Recíprocamente, si $f,\ g \in C(X, Y)$, $f \neq g$, sea $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Notando que $Y - \{f(x)\}$ es abierto porque $Y \in T_1$, $g \in \mathcal{U}_Y^X(\{x\}, Y - \{f(x)\})$, $f \notin \mathcal{U}_Y^X(\{x\}, Y - \{f(x)\})$ y $C(X, Y) \in T_1$. Si Y es regular bastará ver entonces que $C(X, Y)$ es regular de base numerable (cf. [23], Cap. 4, Teo. 17, pág. 147). Para la regularidad, si K es subconjunto compacto de X y U es abierto en Y el conjunto $\mathcal{U}_Y^X(K, \mathrm{cl}\, U)$ es cerrado, pues si $h \in C(X, Y) - \mathcal{U}_Y^X(K, \mathrm{cl}\, U)$ existe $z \in K$ y un entorno V de $h(z)$ disjunto con U, resultando $\mathcal{U}_Y^X(\{z\}, V)$ entorno de h disjunto con $\mathcal{U}_Y^X(K, \mathrm{cl}\, U)$. Ahora, si $k \in \mathcal{U}_Y^X(K, U)$, por la regularidad de Y hay, para cada $u \in K$, un abierto precompacto $W_{k(u)}$ entorno de $k(u)$, cuya clausura está contenida en U. Como $k(K)$ es compacto existe $F \in \mathcal{P}_f(K)$ tal que

$$k(K) \subseteq \bigcup\nolimits_{u \in F} W_{k(u)} \subseteq \bigcup\nolimits_{u \in F} \mathrm{cl}\, W_{k(u)} \subseteq U.$$

Entonces $k \in \mathcal{U}_Y^X\left(K, \cup_{u \in F} W_{k(u)}\right)$,

$$\mathcal{U}_Y^X\left(K, \bigcup_{u \in F} W_{k(u)}\right) \subseteq \mathcal{U}_Y^X\left(K, \mathrm{cl} \bigcup_{u \in F} W_{k(u)}\right) \subseteq \mathrm{cl}\ \mathcal{U}_Y^X(K, U)$$

y $\operatorname{cl}\mathcal{U}_Y^X\left(K,\cup_{u\in F}W_{k(u)}\right)\subseteq\operatorname{cl}\mathcal{U}_Y^X\left(K,U\right)$. Como los conjuntos $\mathcal{U}_Y^X\left(K,U\right)$ son abiertos subbásicos $C(X,Y)$ deviene regular. Por otra parte, sean $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, $\{U_n\}_{n\geq 1}$ bases numerables de abiertos de X e Y respectivamente. Con la notación anterior, si $l\in\mathcal{U}_Y^X\left(K,U\right)$ tenemos

$$l\left(K\right)\subseteq\bigcup_{n:\ U_n\subseteq U}U_n.$$

Por la compacidad de $l\left(K\right)$ existe $H\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que $l\left(K\right)\subseteq\cup_{n\in H}U_n$. Si $v\in K$ es $v\in l^{-1}(\cup_{n\in H}U_n)$ y existen un entero positivo $n\left(v\right)$ y un abierto precompacto T_v entorno de v en X tales que $Z_{n(v)}$ contiene a v y $Z_{n(v)}\subseteq T_v\subseteq\operatorname{cl}T_v\subseteq l^{-1}(\cup_{n\in H}U_n)$. En particular, $Z_{n(v)}$ es precompacto y existe $G\in\mathcal{P}_f\left(K\right)$ tal que $\cup_{v\in G}Z_{n(v)}\supseteq K$. Luego

$$l\in\mathcal{U}_Y^X\left(\bigcup_{v\in G}\operatorname{cl}Z_{n(v)},\ \bigcup_{n\in H}U_n\right),\ \mathcal{U}_Y^X\left(K,U\right)\supseteq\mathcal{U}_Y^X\left(\bigcup_{v\in G}\operatorname{cl}Z_{n(v)},\ \bigcup_{n\in H}U_n\right)$$

y $\left\{\mathcal{U}_Y^X\left(\cup_{v\in G}\operatorname{cl}Z_{n(v)},\ \cup_{n\in H}U_n\right)\right\}_{G\in\mathcal{P}_f(K),H\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})}$ es base numerable de $C\left(X,Y\right)$.

(iv) Si $f_1,\ f_2\in C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ sea

$$\rho\left(f_1,f_2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\ \frac{M_n\left(f_1-f_2\right)}{1+M_n\left(f_1-f_2\right)},$$

donde para cada $n\in\mathbb{N}$ escribimos

$$M_n\left(f\right)=\sup\left\{\left|f\left(t\right)\right|:\ \left|t\right|\leq n\right\},\ f\in C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right).$$

ρ define una métrica sobre $C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$. Sean $s\in\mathbb{N},\ K_1,\ \ldots,\ K_s$ subconjuntos compactos, $U_1,\ \ldots,\ U_s$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$,

$$\mathfrak{L}=\cap_{j=1}^{s}\mathcal{U}_{\mathbb{R},\mathbb{R}}\left(K_j,U_j\right).$$

Sea ν entero positivo tal que $\cup_{j=1}^{s}K_j\subseteq[-\nu,\nu]$, $0<\eta\leq 2^{-\nu}\delta/\left(1+\delta\right)$. Si $f\in\mathfrak{L}$ y $0<\delta<\min_{1\leq j\leq s}\operatorname{dist}\left(f\left(K_j\right),\mathbb{R}-U_j\right)$ es $B_\rho\left(f,\eta\right)\subseteq\mathfrak{L}$. En efecto, si $g\in B_\rho\left(f,\eta\right)$ tenemos

$$\rho\left(f,g\right)<\eta\Rightarrow 2^{-\nu}M_\nu\left(f-g\right)/\left(1+M_\nu\left(f-g\right)\right)<\eta$$

$$\Rightarrow\left(2^{-\nu}-\eta\right)M_\nu\left(f-g\right)<\eta\Rightarrow M_\nu\left(f-g\right)<\eta/\left(2^{-\nu}-\eta\right),$$

$$\left(\forall x\right),x\in K_j,\ \left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\leq M_\nu\left(f-g\right)<\eta/\left(2^{-\nu}-\eta\right)\leq\delta.$$

Si $1 \leq j \leq s,\ x \in K_j,\ y \in \mathbb{R} - U_j$ obtenemos

$$|g(x) - y| \geq |y - f(x)| - |f(x) - g(x)| \geq \operatorname{dist}(f(K_j), \mathbb{R} - U_j) - \delta.$$

Así $\operatorname{dist}(g(K_j), \mathbb{R} - U_j) \geq \operatorname{dist}(f(K_j), \mathbb{R} - U_j) - \delta > 0$ y $g(K_j) \subseteq U_j$, de donde sigue la afirmación. Sea ahora $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ r > 0$ y veamos que $B_\rho(F, r)$ es $c-$ abierto. Si $G \in B_\rho(F, r)$ sea $\kappa \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{1-\kappa} < r - \rho(F, G).$$

Sea $\mathcal{S} = \mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}([-\kappa, \kappa],\ (-s, s))$, donde s es un número positivo tal que $s/(1+s) < (r - \rho(F,G))/(2 - 2^{1-\kappa})$. Veamos que $G + \mathcal{S} \subseteq B_\rho(F, r)$. Precisamente, sea $L \in \mathcal{S},\ H = G + L$ y $t \in [-\kappa, \kappa]$. Entonces

$$\rho(G, H) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\ \frac{M_n(L)}{1 + M_n(L)}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\kappa} 2^{-n}\right)\ \frac{M_\kappa(L)}{1 + M_\kappa(L)} + 2^{-\kappa}$$

$$\leq \frac{s\left(1 - 2^{-\kappa}\right)}{1 + s} + (r - \rho(F, G))/2 < r - \rho(F, G),$$

de donde $\rho(F, H) \leq \rho(F, G) + \rho(G, H) < r$ como se afirmara.

(v) Si $\Theta : C(X, C(Y \times Z)) \to C(X, Y) \times C(X \times Z), \Theta f = (p_Y \circ f, p_Z \circ f)$, donde $f \in C(X, C(Y \times Z))$ y $p_Y,\ p_Z$ son las proyecciones naturales de $Y \times Z$ sobre Y y Z respectivamente, Θ está bien definida y es inyectiva. Sean $n_1,\ n_2$ enteros positivos, $\{K_j\}_{1 \leq j \leq n_1},\ \{H_k\}_{1 \leq k \leq n_2}$ conjuntos de subconjuntos compactos, $\{U_j\}_{1 \leq j \leq n_1},\ \{V_k\}_{1 \leq k \leq n_2}$ conjuntos de subconjuntos abiertos de Y y Z respectivamente. Los conjuntos

$$\mathfrak{P} = \bigcap_{j=1}^{n_1} \mathcal{U}_Y^X(K_j, U_j),\ \mathfrak{Q} = \bigcap_{k=1}^{n_2} \mathcal{U}_Z^X(H_k, V_k)$$

son $c-$abiertos y

$$\Theta^{-1}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}) = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n_1 \\ 1 \leq k \leq n_2}} \mathcal{U}_{Y \times Z}^X\left(K_j, p_Y^{-1}(U_j)\right) \cap \mathcal{U}_{Y \times Z}^X\left(H_k, p_K^{-1}(V_k)\right)$$

es abierto. Podemos concluir que Θ es continua y, si

$$\Psi : C\left(X,Y\right)\times C\left(X\times Z\right)\to C(X,C(Y\times Z)),$$

$$\Psi\left(f,g\right)\left(x\right)=\left(f(x),g(x)\right),\ x\in X,$$

Ψ está bien definida y $\Psi\circ\Theta=\mathrm{Id}_{C(X,C(Y\times Z))}$, $\Theta\circ\Psi=\mathrm{Id}_{C(X,Y)\times C(X\times Z)}$. Sea $n_3\in\mathbb{N}$, $\{C_h\}_{1\leq h\leq n_3}$ conjunto de subconjuntos compactos de X,

$$\{W_h\}_{1\leq h\leq n_3},\ \{T_h\}_{1\leq h\leq n_3}$$

conjuntos de subconjuntos abiertos de Y y Z respectivamente. Como

$$\Psi^{-1}\left(\bigcap_{h=1}^{n_3}\mathcal{U}^X_{Y\times Z}\left(C_h,W_h\times T_h\right)\right)=\bigcap_{h=1}^{n_3}\mathcal{U}^X_{Y}\left(C_h,W_h\right)\times\mathcal{U}^X_{Z}\left(C_h,T_h\right)$$

podemos concluir la continuidad de Ψ.

(vi) Para la suficiencia v.[14], Ch. XII, §7, Th. 6.4, page 267. Supon-gamos $\mathfrak{F}$ relativamente compacto y sean $x\in X,\ \varepsilon>0$. Como X es espacio localmente compacto de Hausdorff también lo es de Tijonov y, en particular, es completamente regular. Luego X es regular y si $f\in\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$, como $x\in f^{-1}\left(B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)\right)$, hay un compacto K_f que contiene a x en su interior contenido en $f^{-1}\left(B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)\right)$. Así $f\in\mathcal{U}^X_Y\left(K_f,B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)\right)$ y $\left\{\mathcal{U}^X_Y\left(K_f,B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)\right)\right\}_{f\in\mathfrak{F}}$ es cubri-miento abierto de $\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$. Por la compacidad de este conjunto existe $F\in\mathcal{P}_f\left(\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}\right)$ tal que $\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}\subseteq\cup_{f\in F}\ \mathcal{U}^X_Y\left(K_f,B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)\right)$. Si $U(x)=\cap_{f\in F}K^o_f$ y $g\in\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$ sea $f\in F$ tal que

$$g\in\mathcal{U}^X_Y\left(K_f,B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)\right).$$

Si $x'\in U(x)$ escribimos

$$d\left(g(x),g(x')\right)\leq d\left(g\left(x\right),f(x)\right)+d\left(f(x),g\left(x'\right)\right)<2\varepsilon$$

porque $g\left(U\left(x\right)\right)\subseteq g\left(K_f\right)\subseteq B_{Y,d}(f(x),\varepsilon)$. Así

$$g\left(U\left(x\right)\right)\subseteq B_{Y,d}(g(x),2\varepsilon)$$

si $g\in\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$ y por ser ε arbitrario $\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$ es equicontinuo. Finalmente, la continuidad de la evaluación $e_x : C(X,Y)\to Y$ sigue de la identidad $e_x^{-1}(V) = \mathcal{U}_Y^X(\{x\}, V)$, válida para cada abierto V de Y. Por la compacidad de $\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$ bastará verificar la inclusión

$$\mathrm{cl}_Y \; e_x(\mathfrak{F}) \subseteq e_x\left(\mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}\right).$$

Sea $y \in \mathrm{cl}_Y \; e_x(\mathfrak{F})$, digamos $y = \lim_{\lambda\in L} f_\lambda(x)$, donde $\{f_\lambda\}_{\lambda\in L}$ es una red de $\mathfrak{F}$. Existe una subred $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $\{f_\lambda\}_{\lambda\in L}$ convergente a cierto elemento $f_0 \in \mathrm{cl}_{C(X,Y)}\mathfrak{F}$. En consecuencia $y = \lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) = f_0(x)$ y sigue la afirmación. $\square$

6. Sobre Teoría de la Medida

6.1. Convergencia débil en $L^p(X, \Sigma, \mu)$, donde (X, Σ, μ) es un espacio de medida $\sigma-$ finita y $1 \leq p < \infty$. Continuidad de la aplicación $f \to |f|^p$.

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$ finita, $1 \leq p < \infty$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $L^p(X, \Sigma, \mu)$.

(i) Si $p > 1$, $f_n \underset{\rightarrow}{w} 0$ si y solo si $\int_E f_n \, d\mu \to 0$ para todo $E \in \Sigma$ de medida finita y el número $S = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p$ es finito.

(ii) Si $p = 1$, $f_n \underset{\rightarrow}{w} 0$ si y solo si $\int_E f_n \, d\mu \to 0$ para todo $E \in \Sigma$ y el número $S = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_1$ es finito.

(iii) Para $0 < p < +\infty$ la aplicación $L^p(X, \Sigma, \mu) \to L^1(X, \Sigma, \mu)$, $f \to |f|^p$, es continua.

Solución

(i) La condición es necesaria por el princípio de acotación uniforme y porque para cada entero positivo n resulta $\left|\int_E f_n \, d\mu\right| \leq \|f_n\|_p \, \mu(E)^{1/q}$ cuando E es un subconjunto medible de medida finita. Recíprocamente, si $\varepsilon > 0$ y $g \in L^q(X, \Sigma, \mu)$, $\varepsilon > 0$ por continuidad uniforme

$$\exists \delta,\ \delta > 0,\ tal\ que \int_E |g|^q \ d\mu < \varepsilon^q\ si\ E \in \Sigma\ y\ \mu(E) < \delta. \tag{160}$$

Además

$$\exists M,\ M > 0\ tal\ que\ \mu(\{|g| > M\}) < \delta. \tag{161}$$

Por otra parte, si $(X_k)_{k\geq 1}$ es una partición numerable disjunta medible de X con conjuntos de medida finita

$$\exists K,\ K \in \mathbb{N},\ tal\ que\ si\ E = \cup_{k=1}^{K} X_k\ entonces \int_{X-E} |g|^q < \varepsilon^q. \tag{162}$$

También existe una función simple s soportada en

$$F = \{x \in E : \ |g(x)| \leq M\}$$

tal que $|s-g| \leq \varepsilon$ uniformemente (cf. [49], Th. 4.13, pág. 54). Ahora

$$\left|\int_X f_n \; g \; d\mu\right| \leq \left|\int_{X-E} f_n \; g \; d\mu\right| + \left|\int_{E\cap\{|g|\geq M\}} f_n \; g \; d\mu\right| + \left|\int_F f_n \; g \; d\mu\right|. \tag{163}$$

Por (162)

$$\left|\int_{X-E} f_n \; g \; d\mu\right| \leq \int_{X-E} |f_n \; g| \; d\mu \leq \|f_n\|_p \left(\int_{X-E} |g|^q \; d\mu\right)^{1/q} \leq S \; \varepsilon, \tag{164}$$

por (160) y (161)

$$\left|\int_{E\cap\{|g|>M\}} f_n \; g \; d\mu\right| \leq \|f_n\|_p \left(\int_{\{|g|>M\}} |g|^q \; d\mu\right)^{1/q} \leq S \; \varepsilon \tag{165}$$

y

$$\begin{aligned} \left|\int_F f_n \; g \; d\mu\right| &\leq \left|\int_F f_n \; (g-s) \; d\mu\right| + \left|\int_F f_n \; s \; d\mu\right| \qquad (166) \\ &\leq \int_F |f_n \; (g-s)| \; d\mu + \left|\int_F f_n \; s \; d\mu\right| \\ &\leq \varepsilon \; S + \left|\int_F f_n \; s \; d\mu\right|. \end{aligned}$$

Por hipótesis de (166) resulta $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\int_F f_n \; g \; d\mu\right| \leq \varepsilon \; S$ y por (163) - (165) tenemos $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\int_X f_n \; g \; d\mu\right| \leq 3 \; S \; \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario sigue (i).

(ii) Sea $h \in L^\infty(X, \; \Sigma, \; \mu)$ y veamos que $\int_X f_n \; h \; d\mu \to 0$. Podemos suponer $h \neq 0$, $0 < \xi < \|h\|_\infty$, de modo que $\mu(\{|h| > \xi\}) > 0$. Si $(X_k)_{k\geq 1}$ es como en (i) tenemos $\{|h| > \xi\} = \cup_{k=1}^\infty \{|h| > \xi\} \cap X_k$. Luego existe un entero positivo H tal que $\mu(\{|h| > \xi\} \cap X_H) > 0$. No perdemos generalidad entonces si suponemos que $0 < \mu(\{|h| > \xi\}) < \infty$. Por lo tanto, hay alguna función simple t soportada en $\{|h| > \xi\}$ tal que

$|h-t| \leq \xi$ uniformemente (cf. [49], Th. 4.13, pág. 54). Tenemos

$$\left|\int_X f_n\ h\ d\mu\right| \leq \left|\int_{\{|h|\leq\xi\}} f_n\ h\ d\mu\right| + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n\ h\ d\mu\right|$$

$$\leq \xi\ \|f_n\|_1 + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n(h-t)\ d\mu\right| + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n t\ d\mu\right|$$

$$\leq \xi\ S + \xi\ \|f_n\|_1 + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n\ t\ d\mu\right|$$

$$\leq 2\ \xi\ S + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n\ t\ d\mu\right|.$$

Entonces por la hipótesis $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\int_X\ f_n\ h\ d\mu\right| \leq 2\ \xi\ S$ y como ξ es arbitrario la condición es suficiente. La condición es evidentemente necesaria.

(iii) Si $x \geq 0,\ y \geq 0$ se tiene

$$|x^p - y^p| \leq \begin{cases} |x-y|^p & si \quad 0 < p < 1, \\ \\ p\,|x-y|\,(x^{p-1} - y^{p-1}) & si \quad 1 \leq p < +\infty. \end{cases} \tag{167}$$

En efecto, la desigualdad correspondiente a $0 < p < 1$ es homogénea y equivalente a

$$1 - t^p \leq (1-t)^p\,,\ 0 \leq t \leq 1. \tag{168}$$

La función $\alpha\,(t) = (1-t)^p + t^p - 1,\ 0 < t < 1$, tiene derivada

$$\acute{\alpha}(t) = p\left[t^{p-1} - (1-t)^{p-1}\right],$$

nula para $t = 1/2$. Evidentemente $\acute{\alpha}(1/2) < 0$ y α alcanza su máximo valor en $t = 1/2$. Como $\alpha\,(0^+) = \alpha\,(1^-) = 0$ entonces $\alpha \geq 0$ y sigue (168). Si $1 \leq p < +\infty$ y $x \neq y$ en $[0, +\infty)$, por el teorema del valor medio existe ξ entre x e y tal que

$$|x^p - y^p| = p\ \ |x-y|\ \ \xi^{p-1} \leq p\ \ |x-y|\ \ \left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$$

y tenemos (167). Dadas $f,\ g \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, si $0 < p < 1$ podemos escribir

$$\int_X ||f|^p - |g|^p| \, d\mu \leq \int_X |f-g|^p \, d\mu,$$

de donde sigue la afirmación. Si $1 \leq p < +\infty$ resulta

$$\int_X ||f|^p - |g|^p| \, d\mu \leq p \int_X ||f| - |g|| \left(|f|^{p-1} + |g|^{p-1}\right) d\mu$$

$$\leq p \int_X |f-g| \left(|f|^{p-1} + |g|^{p-1}\right) d\mu$$

$$\leq p \, \|f-g\|_p \left[\|f\|_p^{p/q} + \|g\|_p^{p/q}\right],$$

e inmediatamente sigue la tesis. □

6.2. Sobre las $\sigma-$ álgebras de Borel y de Lebesgue.

Con la notación del Problema 5.12,

(i) Existe una función monótono - creciente continua $f : I \to I$ constante sobre cada componente de $I - T$.

(ii) La función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + x$, es un homeomorfismo entre $[0,1]$ y $[0,2]$.

(iii) $F(T)$ tiene medida de Lebesgue uno, i.e. $|F(T)| = 1$.

(iv) Existe $A \subseteq I$ medible Lebesgue tal que $F(A)$ no lo es.

(v) Probar que la $\sigma-$ álgebra de Lebesgue es estrictamente mayor que la de Borel.

Solución

(i) Consideremos las funciones continuas

$$f_1 : I \to I,\ f_1(x) = \begin{cases} (3x)/2 & si \quad 0 \leq x \leq 1/3, \\ 1/2 & si \quad 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ (3x-1)/2 & si \quad 2/3 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f_2 : I \to I,\ f_2(x) = \begin{cases} (9x)/4 & si \quad 0 \leq x \leq 1/9, \\ 1/4 & si \quad 1/9 \leq x \leq 2/9, \\ (9x-1)/4 & si \quad 2/9 \leq x \leq 3/9, \\ 1/2 & si \quad 3/9 \leq x \leq 6/9, \\ (9x)/4 - 1 & si \quad 6/9 \leq x \leq 7/9, \\ 3/4 & si \quad 7/9 \leq x \leq 8/9, \\ (9x-5)/4 & si \quad 8/9 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

....

Por construcción tendremos $f_2 = f_1$ sobre $I - T^1$, $f_3 = f_2$ sobre $I - T^2$, etc. y $|f_n - f_{n+1}| \leq 2^{-n-1}$ puntualmente para cada $n \geq 1$. Sea $f : I \to I$ la función $f = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + ...$ Entonces f es continua porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$ es uniformemente convergente. Además, como $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ para cada $x \in I$ y cada f_n es monótona creciente entonces f deviene monótona creciente. Finalmente, dado $N \geq 1$ tenemos $f_{N+1} = f_N$ sobre $I - T^N$. Como $T^1 \supseteq T^2 \supseteq ...$ y $f_{N+2} = f_{N+1}$ sobre $I - T^{N+1}$ entonces también $f_{N+2} = f_{N+1}$ sobre $I - T^N$. Así $f_N = f_{N+1} = ...$ sobre $I - T^N$, i.e. $f|_{I-T^N} = f_N$, i.e. f es constante en cada componente de $I - T$.

(ii) Como $F(0) = 0$ y $F(1) = 2$ entonces $F : [0,1] \to [0,2]$ es suryectiva. Como f es monótona creciente entonces F es inyectiva. Ahora sigue (ii) porque I es compacto Hausdorff y evidentemente F es continua.

(iii) Podemos escribir $I - T = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, donde

$$|S_1| = 1/3, \quad |S_2| = |S_3| = 1/9, \ |S_4| = ... = |S_7| = 1/(27), \ ...$$

Es fácil ver que

$$|F(S_1)| = 1/3, \quad |F(S_2)| = |F(S_3)| = 1/9,$$

$$|F(S_4)| = ... = |F(S_7)| = 1/(27), \ ...$$

Entonces $F(T)$ es cerrado y

$$|F(T)| = 2 - |F(I - T)| = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} |F(S_n)| = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

(iv) Como $F(T)$ tiene medida positiva contiene algún conjunto no medible (cf. [18], Th. 1.17, pág. 12). Como $F : I \to [0, 2]$ es biyectiva, existe entonces $A \subseteq I$ tal que $F(A) \subseteq F(T)$ y $F(A)$ es no medible. Como $A \subseteq T$ entonces A es medible pues $|T| = 0$.

(v) Notemos que $\chi_A \circ F^{-1} = \chi_{F(A)}$. Además A será boreliano sii χ_A es medible Borel. Pero si χ_A fuese medible Borel dado $a \in \mathbb{R}$ tendríamos

$$\left(\chi_A \circ F^{-1}\right)^{-1} \{(a, +\infty)\} = \left(F^{-1}\right)^{-1} \ (\{\chi_A > a\})$$

y $\chi_A \circ F^{-1}$ sería medible Lebesgue. Como $F(A)$ no es medible sigue (v). $\square$

6.3. Semiálgebras de conjuntos, álgebras generadas y extensión de ciertas funciones de conjunto dadas sobre las primeras. Caso de la semiálgebra de intervalos semiabiertos a izquierda de $\mathbb{R}$.

(i) Sea $\mathcal{C}$ una semiálgebra[81] de conjuntos y sea $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty)$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ si $\emptyset \in \mathcal{C}$. Entonces μ tiene una única extensión al álgebra

[81] Por *semiálgebra* entendemos una familia de conjuntos $\mathcal{C}$ cerrada por intersecciones en la que el complemento de cada miembro de $\mathcal{C}$ es unión disjunta finita de elementos de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es una semiálgebra el conjunto vacío y la familia de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{C}$ es un álgebra, denominada álgebra generada por $\mathcal{C}$.

generada por $\mathcal{C}$ si (a) Si un elemento $C \in \mathcal{C}$ es unión disjunta finita de una colección $\{C_i\} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\mu(C) = \sum \mu(C_i)$; (b) Si un elemento $C \in \mathcal{C}$ es unión disjunta numerable de una colección $\{C_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\mu(C) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(C_i)$.

(ii) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente continua a la derecha y $\mathcal{C}$ la semiálgebra de intervalos semiabiertos a izquierda de $\mathbb{R}$. Si escribimos $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$ entonces μ verifica la condición (a) de (i).

(iii) Si además $-\infty \leq a < b < +\infty$ y $(a, b] \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$ entonces

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)),$$

donde $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$. El resultado también tiene sentido para $b = +\infty$ si escribimos $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Solución

(i) Supongamos que un conjunto A es representable como unión finita disjunta de dos subcolecciones $\{C_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{D_j\}_{1 \leq j \leq m}$ de $\mathcal{C}$. Fijado i, como $C_i = \cup_{j=1}^{m} C_i \cap D_j$ por (a) obtenemos $\mu(C_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(C_i \cap D_j)$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(D_j)$$

y podemos definir $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$. Claramente μ deviene monótona respecto a la inclusión de modo que si además $\{C_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ es una colección numerable disjunta y $C = \cup_{i \geq 1} C_i$ entonces para cada $j \geq 1$ se tiene $\mu\left(\cup_{i=1}^{j} C_i\right) \leq \mu(C)$. Luego $\sum_{i=1}^{j} \mu(C_i) \leq \mu(C)$ y haciendo $j \to +\infty$ deducimos $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \leq \mu(C)$. Por (b) vemos entonces que μ es numerablemente aditiva sobre el álgebra generada por $\mathcal{C}$, o sea μ se extiende a una medida sobre dicha álgebra. La unicidad es inmediata.

(ii) Supongamos que

$$A = \cup_{i=1}^{n} (a_i, \ b_i] = \cup_{j=1}^{m} (c_j, \ d_j], \tag{169}$$

donde tanto $\{(a_i,\ b_i]\}_{1\leq i\leq n}$ como $\{(c_j,\ d_j]\}_{1\leq j\leq m}$ son familias disjuntas. Podemos suponer entonces

$$a_1 < b_1 \leq a_2 < ... \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n, \tag{170}$$

$$c_1 < d_1 \leq c_2 < ... \leq c_{m-1} < d_{m-1} \leq c_m < d_m.$$

Si $n = 1$ entonces $c_1 = a_1,\ d_m = b_1$, $b_j = c_{j+1}$ si $1 \leq j < m$ y

$$\sum_{j=1}^{m} F(d_j) - F(c_j) = F(d_m) - F(c_1) = F(b_1) - F(a_1).$$

Si $n > 1$ y asumimos el resultado cierto para $\leq n$ y cualquier m sea $A = \cup_{i=1}^{n+1}(a_i,\ b_i]$, con $b_n < a_{n+1}$. Por (169) y (170) tenemos $b_n = d_J$ y $(a_{n+1},\ b_{n+1}] = \cup_{m=J+1}^{m}(c_j,\ d_j]$ para un único $J \in \{1,\ ...\ ,\ m-1\}$. Por la hipótesis inductiva escribimos

$$\left(\sum_{j=1}^{J} + \sum_{j=J+1}^{m}\right)(F\,(d_j) - F(c_j)) = \sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i))$$

$$+ F(b_{n+1}) - F(a_{n+1})$$

y, por inducción, sigue (ii).

(iii) Podemos suponer que $S = \sum_{i=1}^{\infty}(F(b_i) - F(a_i))$ es finito. En primer lugar, si a y b son finitos, dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0,\ \eta_i > 0$ tales que

$$F(a+\delta) \leq F(a) + \varepsilon \quad y \quad F(b_i + \eta_i) \leq F(b_i) + \varepsilon$$

si $i = 1,\ 2,\ ...$ Como $[a+\delta, b] \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i + \eta_i)$ y $[a, b]$ es compacto existe un entero positivo N tal que

$$[a+\delta, b] \subseteq \cup_{i=1}^{N}(a_i,\ b_i + \eta_i)\,. \tag{171}$$

Podemos suponer que ningún intervalo de la sucesión $\{(a_i, b_i]\}_{i\geq 1}$ está contenido en otro de la misma sucesión. Usando (171), si

$$a_{i_1} < a + \delta < b < b_{i_1} + \eta_{i_1}$$

para cierto $i_1 \in \{1, \ ..., \ N\}$ por la monotonía de F resulta

$$F(b) - F(a+\delta) \leq F(b_{i_1}) + \varepsilon/2^{i_1} - F(a_{i_1}) \leq S + \varepsilon. \tag{172}$$

Si $a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1}$ pero $b \geq b_{i_1} + \eta_{i_1}$ existe $i_2 \in \{1, \ ..., \ N\}$ tal que $a_{i_2} < b_{i_1} + \eta_{i_1} < b_{i_2} + \eta_{i_2}$. En particular, notemos que $a_{i_1} \leq a_{i_2}$. Si $b \geq b_{i_2} + \eta_{i_2}$ existe $i_3 \in \{1, \ ..., \ N\}$ tal que $a_{i_3} < b_{i_2} + \eta_{i_2} < b_{i_3} + \eta_{i_3}$ y $a_{i_2} \leq a_{i_3}$. Continuando de esta manera, existirá $k \in \{1, \ ..., \ N\}$ tal que $b_{i_k} + \eta_{i_k} > b > a_{i_k}$ y $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq ... \leq a_{i_k}$. Entonces

$$F(b) - F(a+\delta) \leq F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) - F(a_{i_1}) \tag{173}$$

$$= F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) - F(a_{i_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(F(a_{i_{j+1}}) - F(a_{i_j}) \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \left(F(b_{i_j} + \eta_{i_j}) - F(a_{i_j}) \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \left(F(b_{i_j}) - F(a_{i_j}) + \varepsilon/2^{i_j} \right) \leq S + \varepsilon.$$

Por ser F monótona y continua a derecha si $\delta \to 0^+$ en (172) o (173) obtenemos $0 \leq F(b) - F(a) \leq S + \varepsilon$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario tenemos el resultado. Si $a = -\infty$ y b es finito para $K < 0$ tenemos $F(b) - F(K) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(F(b_i) - F(a_i) \right)$ y, como F es continua a derecha, basta hacer $K \to -\infty$. Análogamente se procede en el caso $b = +\infty$. $\square$

6.4. Algunas integrales de Riemann - Stieltjes.

Sea $F(x) = x + [x]\,,\ x \in [0, +\infty)$.

(i) Calcular $\int_0^2 x^2 \ dF(x)$.

(ii) Determinar los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $1/(1+x)^\alpha \in L^1\left([0,+\infty)\,,\ dF\right)$.

Solución

(i) Como $x \to x^2$ es continua sobre $[0,2]$ y $F \in BV\,[0,2]$ existe $\int_0^2 x^2\ dF(x)$ (cf. [6], Teorema 3.2, pág. 36). Si $N \in \mathbb{N}$ escribimos

$$(0,2] = \cup_{k=1}^{2^{N+1}} \left(\frac{k-1}{2^N},\ \frac{k}{2^N}\right], \qquad \varphi_N = \sum_{k=1}^{2^{N+1}} \left(\frac{k-1}{2^N}\right)^2\ \chi_{\left(\frac{k-1}{2^N},\ \frac{k}{2^N}\right]}.$$

Entonces

$$\int_0^2 \varphi_N\ dF = \sum_{k=1}^{2^{N+1}} \left(\frac{k-1}{2^N}\right)^2 \left[F\left(\frac{k}{2^N}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^N}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{1\le k\le 2^{N+1}-1 \\ k\neq 2^N}} \left(\frac{k-1}{2^N}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2^N}\right)^2 \left(1+\frac{1}{2^N}\right)$$

$$= \frac{1}{8^N} \sum_{\substack{1\le j\le 2^{N+1}-1 \\ j\neq 2^N-1}} \frac{1}{j^2} + o(N)$$

$$= \frac{\left(2^{N+1}-1\right)2^{N+1}\left(2^{N+2}-1\right)/6 - \left(2^N-1\right)^2}{8^N} + o(N)$$

$$= \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{2^{N+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{N+2}}\right) + o(N)$$

de donde $\lim_{N\to+\infty} \int_0^2 \varphi_N\ dF = 8/3$ y, como F es creciente, x^2 es acotada y Riemann - Stieltjes integrable, $\int_0^2 x^2\ dF(x) = 8/3$ (cf. [6], Teorema 3.3, pág. 37).

(ii) Fijado $N \in \mathbb{N}$ hacemos ahora

$$\psi_{k,N} = \sum_{j=1}^{2^k} \left(1+\frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha}\ \chi_{\left(\frac{(j-1)N}{2^k},\ \frac{jN}{2^k}\right]},\ \ k\ge 1.$$

Entonces

$$\int_0^N \psi_{k,N}\ dF =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha}\ \left[F\left(\frac{jN}{2^k}\right) - F\left(\frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)\right]$$

$$= \frac{2N}{\left(1 + \left(2^k - 1\right)\ N/2^k\right)^{\alpha}} +$$

$$+ \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\frac{2^k h}{N} \le j < \frac{2^k (h+1)}{N}} \left[\left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{jN}{2^k}\right)^{-\alpha}\right] \left(h + \frac{jN}{2^k}\right). \tag{174}$$

Por (174) tenemos

$$\underline{\text{lím}}_{k\to+\infty} \int_0^N \psi_{k,N}\ dF \ge \frac{2N}{(1+N)^{\alpha}},$$

de manera que $1/(1+x)^{\alpha} \notin L^1\left([0,+\infty)\,,\ dF\right)$ si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$ en (174) y hacemos $N = 2^n$ obtenemos

$$\int_0^{2^n} \psi_{k,2^n}\ dF \ge \sum_{h=0}^{2^n-1} \sum_{2^{k-n} h \le j < 2^{k-n}(h+1)} \frac{2^{n-k}\ \left(h + j2^{n-k}\right)}{\left(1 + (j-1)2^{n-k}\right)\left(1 + j2^{n-k}\right)}$$

$$\ge 2\ \sum_{h=0}^{2^n-1} \frac{h}{(h+2)\left(h + 2 - 2^{n-k}\right)}.$$

Por lo tanto

$$\underline{\text{lím}}_{k\to+\infty} \int_0^{2^n} \psi_{k,2^n}\ dF \ge 2\ \sum_{h=0}^{2^n-1} \frac{h}{(h+2)^2}$$

y evidentemente $1/(1+x) \notin L^1\left([0,+\infty)\,,\ dF\right)$. Si $x > 0,\ \varepsilon > 0,\ \alpha > 1$ resulta

$$x^{-\alpha} - (x+\varepsilon)^{-\alpha} = \alpha \int_x^{x+\varepsilon} x^{-\alpha-1}\ dx \le \alpha\ \varepsilon\ x^{-\alpha-1} \tag{175}$$

y por (174) y (175):

$$\sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\frac{2^k h}{N} \leq j < \frac{2^k (h+1)}{N}} \left[\left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{jN}{2^k}\right)^{-\alpha} \right] \left(h + \frac{jN}{2^k}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\alpha N}{2^k} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\frac{2^k h}{N} \leq j < \frac{2^k (h+1)}{N}} \left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha-1} \left(h + \frac{jN}{2^k}\right) \tag{176}$$

$$\leq \alpha \sum_{h=0}^{N-1} \frac{2h+1}{(h+1-N/2^k)^{\alpha+1}}.$$

Como $x \to 1/(1+x)^\alpha$ es continua sobre $[0,N]$ y $F \in BV\,[0,N]$, usando (174) y (176) deducimos

$$\int_0^N \frac{1}{(1+x)^\alpha}\; dF(x) = \overline{\text{lím}}_{k\to+\infty} \int_0^N \psi_{k,N}\; dF \tag{177}$$

$$\leq \frac{2N}{(1+N)^\alpha} + \alpha \sum_{h=0}^{N-1} \frac{2h+1}{(h+1)^{\alpha+1}}.$$

En definitiva $1/(1+x)^\alpha \in L^1\left([0,+\infty)\,,\; dF\right)$ sii $\alpha > 1$, en cuyo caso

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^\alpha}\; dF(x) \leq \alpha \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2h+1}{(h+1)^{\alpha+1}}. \qquad \square$$

6.5. Anillos, semianillos y álgebras de conjuntos. Todo semianillo cerrado por uniones finitas es anillo. Si $\mathcal{S}$ es semianillo y $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$, el $\sigma-$ anillo generado por $\mathcal{S}$ coincide con el generado por $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Si X es un conjunto no vacío, $\mathcal{K}$ es una familia de subconjuntos de X cerrada por uniones e intersecciones finitas, $\mathcal{A}$ es la clase de uniones finitas disjuntas de miembros de $\mathcal{K}$ o de conjuntos del tipo $K-H,\ K,\ H \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ es el álgebra generada por $\mathcal{K}$.

(i) Dar ejemplos de anillos y álgebras de conjuntos. [82]

(ii) Dar ejemplos de semianillos. [83]

(iii) Mostrar que todo semianillo cerrado por uniones finitas es un anillo.

(iv) Si $\mathcal{S}$ es semianillo y $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$, $S(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = S(\mathcal{S})$, i.e. el $\sigma-$ anillo generado por $\mathcal{S}$ coincide con el generado por $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. [84]

(v) Sea X conjunto no vacío, $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos de X cerrada por uniones e intersecciones finitas, $\mathcal{A}$ la clase de uniones finitas disjuntas de miembros de $\mathcal{K}$ o de conjuntos del tipo $K-H,\ K,\ H \in \mathcal{K}$. $\mathcal{A}$ es el álgebra $\mathfrak{a}(\mathcal{K})$ generada por $\mathcal{K}$.

Solución

(i1) Si $X = \mathbb{R}^n$ sea $\mathcal{A}_n$ la clase de uniones finitas de conjuntos del tipo $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$, donde $-\infty < a_i < b_i < +\infty,\ 1 \leq i \leq n$. En particular,

[82] Dado un conjunto X llamamos *anillo* a toda clase no vacía de partes de X cerrada por uniones finitas y diferencias. Denominamos *álgebra* a toda clase no vacía de partes de X cerrada por uniones finitas y complementos.

[83] Llamamos *semianillo* de partes de un conjunto X a toda clase $\mathcal{S}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ es cerrada por intersecciones y dados $A,\ B \in \mathcal{S}$ tales que $A \subseteq B$ existen $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ en $\mathcal{S}$ tales que $A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = B$ y $A_i - A_{i-1} \in \mathcal{S}$ si $1 \leq i \leq n$.

[84] Por $\sigma-$ anillo de partes de un conjunto X entendemos toda clase no vacía cerrada por diferencias y uniones numerables.

es fácil ver que $\mathcal{A}_1$ es un anillo y, evidentemente, no es álgebra. Como para conjuntos $A,\ B,\ C$ se verifican las identidades

$$A \times B - C \times D = (A - C) \times B \cup A \times (B - D)\,,$$

$$(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C, \quad A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$$

entonces $\mathcal{A}_n$ es anillo en general.

(i2) Si X es no numerable, la clase de partes numerables de X es otro ejemplo de anillo que no es álgebra.

(i3) Si X es no numerable, la clase de partes de X que son numerables o tienen complemento numerable es un álgebra (por lo tanto anillo).

(i4) Sea E una parte no vacía de X y sea $\mathcal{A}(E)$ el anillo generado por E. Entonces $\mathcal{A}(E) = \{\emptyset, E\}$ y $\mathcal{A}(E)$ no es un álgebra.

(i5) Sea E una parte no vacía de X y sea $\mathcal{A}_E$ el anillo generado por las partes F de X que contienen a E. Ahora

$$\mathcal{A}_E = \{F \in \mathcal{P}(X) : \ E \subseteq F \text{ o } F \cap E = \emptyset\}\,. \tag{178}$$

En efecto, si $F,\ G \in \mathcal{P}(X)$, $E \subseteq F$ o $E \subseteq G$ entonces $E \subseteq F \cup G$. Si F y G son disjuntos con E también lo es su unión. Como

$$E \subseteq F,\ E \subseteq G \Rightarrow (F - G) \cap E = \emptyset,$$

$$E \subseteq F,\ E \cap G = \emptyset \Rightarrow E \subseteq F - G,$$

$$E \cap F = \emptyset,\ E \subseteq G \Rightarrow (F - G) \cap E = \emptyset,$$

$$E \cap F = E \cap G = \emptyset \Rightarrow (F - G) \cap E = \emptyset$$

el miembro derecho en (178) es un anillo que contiene a toda parte de X que contenga a E. Además, si una parte F de X contiene a E entonces pertenece a $\mathcal{A}_E$ mientras que si es disjunta con E entonces $E \subseteq X - F$. En este caso $X - F \in \mathcal{A}_E$ y, como $X \in \mathcal{A}_E$ entonces $F \in \mathcal{A}_E$. En definitiva es válida (178) y $\mathcal{A}_E$ es un álgebra.

(i6) Suponiendo que X tiene más de dos elementos, sea D la clase de todos sus subconjuntos con exactamente dos elementos y $\mathcal{A}_D$ el anillo generado por D. Ahora si $x_1,\ x_2,\ x_3$ son elementos distintos de X tenemos $\{x_1, x_2\} \cap \{x_1, x_3\} = \{x_1\}$, es decir, $\mathcal{A}_D$ debe contener los conjuntos de un solo elemento. En consecuencia $\mathcal{P}_f(X) \subseteq \mathcal{A}_D$ y, como $D \subseteq \mathcal{P}_f(X)$ entonces $\mathcal{A}_D = \mathcal{P}_f(X)$. En este caso $\mathcal{A}_D$ será álgebra si y solo si X es finito.

(ii1) Si X es un conjunto la clase formada por el conjunto vacío y los conjuntos de un solo punto es un semianillo.

(ii2) En la recta real, la clase de intervalos del tipo $[a, b)$, con $a < b$, es un semianillo.

(ii3) Sea $\mathfrak{R}$ un reticulado de partes de un conjunto X. [85] Sea $\mathcal{S}$ la clase de conjuntos del tipo $E - F$, donde $E,\ F$ son elementos de $\mathfrak{R}$ y $F \subseteq E$. Evidentemente $\emptyset \in \mathcal{S}$ y, si $E_1 - F_1,\ E_2 - F_2$ pertenecen a $\mathcal{S}$ entonces

$$(E_1 - F_1) \cap (E_2 - F_2) = (E_1 \cap E_2) - (E_1 \cap F_2 \cup E_2 \cap F_1),$$

$$E_1 \cap F_2 \cup E_2 \cap F_1 \subseteq E_1 \cap E_2,$$

$$E_1 \cap F_2 \cup E_2 \cap F_1 \in \mathfrak{R},\ E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{R}$$

y $(E_1 - F_1) \cap (E_2 - F_2) \in \mathcal{S}$. Supongamos que $E_1 - F_1,\ E_2 - F_2$ pertenecen a $\mathcal{S}$ y $E_1 - F_1 \subseteq E_2 - F_2$. Entonces

$$E_1 - F_1 \subseteq E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2 \subseteq E_2 - F_2,$$

y $(E_2 - F_2) - (E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2)$, $(E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2) - (E_1 - F_1)$ y $E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2$ pertenecen a $\mathcal{S}$ porque

$$E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2 \subseteq E_2 - F_2,$$

$$E_1 - F_1 \subseteq E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2,$$

$$E_2 - F_2 \subseteq E_1 \cap E_2,$$

[85] Por *reticulado* entendemos toda clase de conjunto que contiene al vacío y es cerrada por uniones e intersecciones finitas.

y además

$$(E_2 - F_2) - (E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2) = E_2 - (E_1 \cup F_2),$$

$$(E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2) - (E_1 - F_1) = (E_2 \cap F_1) - F_2,$$

y por ser $\mathfrak{R}$ un reticulado $\mathcal{S}$ es un semianillo. Notemos que, en general, $\mathcal{S}$ no es un anillo. P. ej. si $\mathfrak{R}$ consiste del conjunto vacío y de las semirrectas $(c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{S}$ contiene al conjunto vacío y a los intervalos del tipo $(a, b]$, $a < b$ en $\mathbb{R}$, o sea $\mathcal{S}$ no es cerrado por uniones finitas.

(iii) Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de un conjunto X y sea $\mathcal{R}$ la clase de uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$. Evidentemente $\mathcal{R}$ es cerrada por intersecciones y uniones finitas disjuntas. Si $E_1,\ F_1 \in \mathcal{S}$ y $E_1 \subseteq F_1$ entonces $F_1 - E_1 \in \mathcal{R}$. En efecto, existen

$$G_0 = E_1 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_n = F_1$$

en $\mathcal{S}$ tales que $G_i - G_{i-1} \in \mathcal{S}$ si $1 \leq i \leq n$. Además

$$F_1 - E_1 = \cup_{i=1}^{n} (G_i - G_{i-1}),$$

donde la unión es disjunta. Sea ahora $E_2 \in \mathcal{S}$, $F_2 \in \mathcal{R}$, $E_2 \subseteq F_2$ y veamos que $F_2 - E_2 \in \mathcal{R}$. Podemos escribir $F_2 = \cup_{j=1}^{m} H_j$, donde la unión es disjunta y $\{H_j\}_{1 \leq j \leq m} \subseteq \mathcal{S}$. Entonces

$$F_2 - E_2 = \cup_{j=1}^{m} \cap_{k=1}^{m} (H_j - (E_2 \cap H_k))$$

$$= \cup_{j=1}^{m} H_j - (E_2 \cap H_j)$$

y, por la observación anterior y la naturaleza de los elementos de $\mathcal{R}$ sigue la afirmación. A continuación, sea $E_3 \in \mathcal{R}$, $F_3 \in \mathcal{R}$, $E_3 \subseteq F_3$. Escribimos $E_3 = \cup_{k=1}^{p} K_k$, $F_3 = \cup_{l=1}^{q} L_l$, donde $\{K_k\}_{1 \leq k \leq p}$ y $\{L_l\}_{1 \leq l \leq q}$ son subfamilias disjuntas de $\mathcal{S}$. Entonces

$$F_3 - E_3 = \cup_{l=1}^{q} \cap_{k=1}^{p} (L_l - L_l \cap K_k),$$

la unión es disjunta; $L_l - L_l \cap K_k \in \mathcal{R}$ para cada k, l porque $L_l \cap K_k \subseteq L_l$, $\mathcal{S}$ es cerrado por intersecciones y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$; $\cap_{k=1}^{p} (L_l - L_l \cap K_k) \in \mathcal{S}$ pues

$\mathcal{S}$ es cerrado por intersecciones. En consecuencia $F_3 - E_3 \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones finitas disjuntas entonces, por la naturaleza de sus elementos, es cerrado por uniones. En definitiva $\mathcal{R}$ es un anillo y contiene a $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, esto es, al anillo generado por $\mathcal{S}$. Como todo elemento de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es unión de miembros de $\mathcal{S}$ (cf. [19], Chapter I, Sec. 5, Th. B) entonces $\mathcal{R} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ y, en particular, sigue (iii).

(iv) Evidentemente $S(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \supseteq S(\mathcal{S})$. Además si $E \in S(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ hay una sucesión D de partes de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ tal que $E \in S(D)$ (cf. [19], Chapter I, Sec. 5, Th. D). Como cada elemento de D puede cubrirse con un número finito de elementos de $\mathcal{S}$ (cf. [19], Chapter I, Sec. 5, Th. B) entonces $D \subseteq S(\mathcal{S})$, de donde $S(D) \subseteq S(\mathcal{S})$ y $E \in S(\mathcal{S})$.

(v) Evidentemente $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{a}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones finitas. Bastará ver que $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Sean

$$A_l = \bigcup_{i=1}^{n_l} K_i^l - H_i^l,\ H_i^l \subseteq K_i^l,\ \{H_i,\ K_i\}_{1\leq i\leq n_l} \subseteq \mathcal{K},\ l = 1,\ 2,$$

donde las uniones son disjuntas y eventualmente algunos $H_i^{l\prime}s$ pueden ser vacíos. $A_1,\ A_2 \in \mathcal{A}$ y

$$A_1 - A_2 = \bigcup_{\substack{1\leq i\leq n_1,\\ J\in\mathcal{P}(\{1,\dots,n_2\})}} B_{i,J},$$

$$B_{i,J} \doteq K_i^1 \bigcap \cap_{j\in J} H_j^2 - \left(H_i^1 \bigcup \cup_{k\in\{1,\dots,n_2\}-J} K_k^2\right).$$

Por ser $\mathcal{K}$ cerrado por uniones e intersecciones finitas, cada $B_{i,J}$ es diferencia de miembros de $\mathcal{K}$ y es realizable como miembro de $\mathcal{A}$. Si $1 \leq i,\ l \leq n_1,\ J,\ L \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n_2\})$, como

$$B_{i,J} \cap B_{l,L} \subseteq \left(K_i^1 - H_i^1\right) \cap \left(K_l^1 - H_l^1\right)$$

sigue que $i = l$ si $B_{i,J} \cap B_{l,L} \neq \emptyset$. Si además existiese $h \in J - L$ entonces $H_h^2 - K_h^2 \neq \emptyset$, lo cual no es cierto. Luego $J \subseteq L$ y, por la misma razón, $L \subseteq J$, i.e. $L = J$. Entonces $\{B_{i,J}\}$ es disjunta y $A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$. $\square$

6.6. Medidas sobre la $\sigma-$ álgebra generada por un $\sigma-$ anillo de partes de un conjunto X que no es $\sigma-$ álgebra. Medidas semifinitas. Medidas saturadas. Integración de funciones localmente medibles.

(i) Sea $\mathcal{R}$ un $\sigma-$ anillo de partes de un conjunto X que no es $\sigma-$ álgebra y sea $A(\mathcal{R})$ la $\sigma-$ álgebra generada por $\mathcal{R}$.

(a) $A(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$ y $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^c = \emptyset$, donde $\mathcal{R}^c = \{E : \ E^c \in \mathcal{R}\}$.

(b) Si μ es una medida sobre $\mathcal{R}$ sea $\overline{\mu}(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{R}$ y $\overline{\mu}(E) = \infty$ si $E \in \mathcal{R}^c$. Entonces $\overline{\mu}$ es una medida sobre $A(\mathcal{R})$.

(c) Si μ es una medida sobre $\mathcal{R}$ sea $\underline{\mu}(E) = \sup\{\mu(F) : \ F \in \mathcal{R}, \ F \subseteq E\}$ si $E \in \mathcal{R}^c$ y $\underline{\mu}(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{R}$. También $\underline{\mu}$ es una medida sobre $A(\mathcal{R})$.

(ii) Sea $(X, \ \mathcal{B}, \ \mu)$ un espacio de medida.

(a) Si μ es $\sigma-$ finita entonces es *semifinita y saturada.*[86]

(b) Sea $\mathcal{C}$ la colección de partes localmente medibles de X. Si $E \in \mathcal{C}$ definimos $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{B}$ y $\widetilde{\mu}(E) = +\infty$ si $E \notin \mathcal{B}$. Entonces $(X, \ \mathcal{C}, \ \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida saturada.

(c) Si μ es semifinita y $E \in \mathcal{C}$ sea $\widehat{\mu}(E) = \sup\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{B}, \ B \subseteq E\}$. Entonces $(X, \ \mathcal{C}, \ \widehat{\mu})$ es un espacio de medida saturada y $\widehat{\mu}$ extiende a μ.

(iii)(a) Una función f es *localmente medible*[87] sii es $\widetilde{\mu}-$ medible.

(iii)(b) Si f es localmente medible y no negativa a.e. μ se define

$$\int_X f \ d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f, \\ \varphi - simple}} \int_X \varphi \ d\mu.$$

[86] Decimos que una medida es *semifinita* si todo conjunto medible, de medida infinita, contiene subconjuntos medibles de medida arbitrariamente grande. μ es *saturada* $\mathcal{B}$ contiene a todo subconjunto *localmente medible* de X. Si $E \subseteq X$, E es *localmente medible* si $E \cap F \in \mathcal{B}$ toda vez que $F \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < +\infty$.

[87] Una función es *localmente medible* si lo es su restricción a cada subconjunto medible de medida finita.

Si μ es semifinita entonces $\int_X f \ d\mu = \int_X f \ d\widetilde{\mu}$.

Solución

(i)(a) Debe ser $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^c = \emptyset$ pues $\mathcal{R}$ no es $\sigma-$ álgebra. Bastará ver que el conjunto $R = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$ es $\sigma-$ álgebra pues $A(\mathcal{R}) \supseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$. Veremos que

$$\mathcal{R} - \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R}^c - \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R} - \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R}^c - \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^c, \tag{179}$$

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c,\ \mathcal{R}^c \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c. \tag{180}$$

La primer inclusión es inmediata. Si $E_1 \in \mathcal{R}^c$ y $F_1 \in \mathcal{R}^c$ entonces $E_1^c - F_1^c = F_1 - E_1$ y $E_1^c - F_1^c \in \mathcal{R}$ porque E_1^c y F_1^c pertenecen a $\mathcal{R}$. Así $F_1 - E_1 \in \mathcal{R}$ y, análogamente, $E_1 - F_1 \in \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R}^c - \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}$. Si $E_2 \in \mathcal{R}$ y $F_2 \in \mathcal{R}^c$ resulta

$$E_2 - F_2 = E_2 - E_2 \cap F_2, \quad E_2 \cap F_2 = E_2 - F_2^c,$$

$E_2 - F_2^c \in \mathcal{R}$ porque $\{E_2,\ F_2^c\} \subseteq \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es cerrado por diferencias obtenemos $E_2 - F_2 \in \mathcal{R}$. Además, $E_2^c \in \mathcal{R}^c$, $F_2 - E_2 = E_2^c \cap F_2$ y $\mathcal{R}^c$ es cerrado por intersecciones. En efecto, si $\{E_3,\ F_3\} \subseteq \mathcal{R}^c$ resulta $(E_3 \cap F_3)^c = E_3^c \cup F_3^c$, $E_3^c \cup F_3^c \in \mathcal{R}$ porque $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones y así $E_3 \cap F_3 \in \mathcal{R}^c$. En definitiva, R es cerrado por diferencias. Obviamente $\mathcal{R} \cup \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. Si $E_4 \in \mathcal{R}$, $F_4 \in \mathcal{R}^c$ tenemos $F_4^c - E_4 = (E_4 \cup F_4)^c$ y $F_4^c - E_4 \in \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c$. Ahora, si $\{E_5,\ F_5\} \subseteq \mathcal{R}^c$ resulta $(E_5 \cup F_5)^c = E_5^c \cap F_5^c$ y $\mathcal{R}$ es cerrado por intersecciones. Ciertamente, si $\{E_6,\ F_6\} \subseteq \mathcal{R}$ entonces

$$E_6 \cap F_6 = E_6 \cup F_6 - E_6 \triangle F_6.$$

Como $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones y diferencias $E_6 \cap F_6 \in \mathcal{R}$. Luego $\mathcal{R}^c \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c$ y sigue (180). Finalmente, como $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones numerables, por (180) bastará ver que si $\{G_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{R}^c$ entonces $\cup_{n=1}^{\infty} G_n \in R$. Como $\mathcal{R}^c$ es cerrado por uniones finitas podemos suponer que la sucesión $\{G_n\}_{n\geq 1}$ es creciente. Tenemos

$$\cup_{n=1}^{\infty} G_n = G_1 \cup \cup_{n=1}^{\infty} (G_{n+1} - G_n)$$

y, por (179), $\{G_{n+1} - G_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$. Luego $\cup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{R}^c \cup \mathcal{R}$ y, por (180), $\cup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{R}^c$.

(i)(b) Basta ver que $\overline{\mu}$ es $\sigma-$ aditiva. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq A(\mathcal{R})$ una sucesión disjunta, $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y veamos que $\overline{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n)$. Podemos suponer que $\{E_n\}_{n\geq 1} \cap \mathcal{R}^c \neq \emptyset$ por lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) = \infty$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^c$ son cerrados por uniones numerables, por (180) deducimos que $E \in \mathcal{R}^c$ y $\overline{\mu}(E) = \infty$.

(i)(c) Veamos que $\underline{\mu}(G \cup H) = \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H)$ si $G \in A(\mathcal{R})$ y $H \in \mathcal{R}^c$. En efecto, si $G \in \mathcal{R}$ es $G \cup H \in \mathcal{R}^c$. Si $J \in \mathcal{R}$ y $J \subseteq H$ entonces $G \cap J = \emptyset$ en $\mathcal{R}$ y

$$\mu(G \cup J) = \mu(G) + \mu(J) \leq \underline{\mu}(G \cup J).$$

Como J es arbitrario $\underline{\mu}(G \cup H) \geq \mu(G) + \underline{\mu}(H)$. Si $L \in \mathcal{R}$ y $L \subseteq G \cup H$ entonces $L = G \cap L \cup H \cap L$. Sabemos que $G \cap L \in \mathcal{R}$ pues $\mathcal{R}$ es cerrado por intersecciones y $H \cap L = L - H^c$ pertenece a $\mathcal{R}$ por ser diferencia de miembros de $\mathcal{R}$. Luego

$$\mu(L) = \mu(G \cap L) + \mu(H \cap L) \leq \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H) \tag{181}$$

y por ser L arbitrario sigue la afirmación en este caso. Si $G \in \mathcal{R}^c$ tenemos $G \cap L \in \mathcal{R}$ y se verifica también (181), con lo que

$$\underline{\mu}(G \cup H) \leq \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H).$$

Para la desigualdad contraria podemos suponer que $\underline{\mu}(G)$ y $\underline{\mu}(H)$ son positivos. Sean $0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{\underline{\mu}(G),\ \underline{\mu}(H)\right\}$, $K_G,\ K_H \in \mathcal{R}$ tales que $\mu(K_G) > \underline{\mu}(G) - \varepsilon$, $\mu(K_H) > \underline{\mu}(H) - \varepsilon$, $K_G \subseteq G$ y $K_H \subseteq H$. Entonces $K_G \cup K_H \in \mathcal{R}$, $K_G \cup K_H \subseteq G \cup H$ y

$$\underline{\mu}(G \cup H) \geq \mu(K_G \cup K_H)$$

$$= \mu(K_G) + \mu(K_H) > \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H) - 2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario tenemos la afirmación. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^c$ son cerrados por uniones numerables bastará ver entonces que si $\{F_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{R}^c$ es una sucesión disjunta y $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces $\underline{\mu}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(F_n)$. En particular, ya sabemos que $\underline{\mu}$ es $\sigma-$ finita sobre $\mathcal{R}^c$. Si $L \in \mathcal{R}$ y $L \subseteq F$ resulta $L = \cup_{n=1}^{\infty}(F_n \cap L)$ y, para cada n, $F_n \cap L \in \mathcal{R}$. Por lo tanto

$$\mu(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap L) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(F_n)$$

y, por ser L arbitrario, $\underline{\mu}(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(F_n)$. Para la desigualdad contraria, como $\underline{\mu}$ es monótona podemos suponer que $\underline{\mu}(F_n) < +\infty$ para todo n. Si $N \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \underline{\mu}(F_n) = \underline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) \leq \underline{\mu}(F)$$

y haciendo $N \to +\infty$ sigue (i)(c).

(ii)(a) Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de conjuntos de $\mathcal{B}$ de medida finita cuya unión es X, $Y \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(Y) = +\infty$. Como

$$Y = \cup_{n=1}^{\infty} X_n \cap Y \quad y \quad X_n \cap Y \uparrow$$

entonces $\lim_{n\to+\infty} \mu(X_n \cap Y) = +\infty$ y μ es semifinita. Además, si Y es localmente medible entonces $Y \in \mathcal{B}$ porque $X_n \cap Y \in \mathcal{B}$ para cada n.

(ii)(b) Evidentemente $\mathcal{C}$ es una $\sigma-$ álgebra y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, de manera que $\widetilde{\mu}$ está bien definida. Además $\widetilde{\mu}$ es no negativa y $\widetilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ una sucesión disjunta y $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Si $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ entonces

$$\widetilde{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E_n) \tag{182}$$

pues $\widetilde{\mu}\,|_{\mathcal{B}} = \mu$. Si $\{E_n\}_{n\geq 1} \nsubseteq \mathcal{B}$ el miembro derecho en (182) es infinito. Deberá ser $\widetilde{\mu}(E) = +\infty$ porque, en caso contrario, para cada n tendríamos $E_n = E_n \cap E$ y $E_n \in \mathcal{B}$ por su local medibilidad. Concluímos que $\widetilde{\mu}$ es una medida. Sea G una parte $\widetilde{\mu}-$ localmente medible de X y veamos que $G \in \mathcal{C}$. En efecto, si $F \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < +\infty$ entonces $\widetilde{\mu}(F) < +\infty$ y $F \cap G \in \mathcal{C}$. Si fuera $F \cap G \notin \mathcal{B}$ sería $\widetilde{\mu}(F \cap G) = +\infty$ lo que no es posible. Luego $F \cap G \in \mathcal{B}$ y sigue (ii)(b).

(ii)(c) Es inmediato que $\mathcal{C}$ es una $\sigma-$ álgebra que contiene a $\mathcal{B}$ y que $\widehat{\mu}$ extiende a μ. Sean $B_1,\ B_2 \in \mathcal{C}$ disjuntos y veamos que

$$\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) = \widehat{\mu}(B_1) + \widehat{\mu}(B_2).$$

Podemos suponer que $\widehat{\mu}(B_1)$ y $\widehat{\mu}(B_2)$ son finitos. Si $\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) = +\infty$ existe $E \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(B_1 \cup B_2)$ tal que $\mu(E) = +\infty$ o hay una sucesión

$\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{P}\,(B_1 \cup B_2)$ de conjuntos de medida finita tales que para $n \in \mathbb{N}$ es $\mu\,(E_n) > n$. Por la semifinitud de μ la segunda posibilidad se da seguramente. Si $n \in \mathbb{N}$ es

$$E_n = B_1 \cap E_n \cup B_2 \cap E_n, \quad B_1 \cap E_n \in \mathcal{B},\; B_2 \cap E_n \in \mathcal{B},$$

de modo que $n < \mu\,(B_1 \cap E_n) + \mu\,(B_2 \cap E_n)$, i.e. $\mu\,(B_1 \cap E_n) > n/2$ o $\mu\,(B_2 \cap E_n) > n/2$. Como n es arbitrario $\widehat{\mu}(B_1)$ y $\widehat{\mu}(B_2)$ no pueden ser ambos finitos, contrariamente a la hipótesis, i.e. $\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) < +\infty$. Ahora, si $G \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}\,(B_1 \cup B_2)$ entonces $G = B_1 \cap G \cup B_2 \cap G$ y como $\mu\,(G) < +\infty$ es $\{B_1 \cap G,\; B_2 \cap G\} \subseteq \mathcal{B}$. Así

$$\mu\,(G) = \mu\,(B_1 \cap G) + \mu\,(B_2 \cap G) \leq \widehat{\mu}(B_1) + \widehat{\mu}(B_2),$$

y como G es arbitrario $\widehat{\mu}(B_1)+\widehat{\mu}(B_2) \geq \widehat{\mu}\,(B_1 \cup B_2)$. Podemos suponer $\mu\,(B_1)$ y $\mu\,(B_2)$ positivos, y si $\varepsilon > 0$ sean $G_1,\; G_2 \in \mathcal{B}$ partes de B_1 y B_2 respectivamente tales que $\mu\,(G_i) > \widehat{\mu}\,(B_i) - \varepsilon/2,\; i = 1,\; 2$. Entonces $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}\,(B_1 \cup B_2)$,

$$\widehat{\mu}\,(B_1 \cup B_2) \geq \mu\,(G_1 \cup G_2)$$

$$= \mu\,(G_1) + \mu(G_2) > \widehat{\mu}\,(B_1) + \widehat{\mu}\,(B_2) - \varepsilon$$

y, siendo ε arbitrario, sigue la afirmación. En consecuencia $\widehat{\mu}$ es finitamente aditiva y es claramente monótona, de donde sigue fácilmente que $\widehat{\mu}$ es $\sigma-$ aditiva. Evidentemente todo conjunto $\widehat{\mu}-$ localmente finito es $\mu-$ localmente finito y por lo tanto, pertenece a $\mathcal{C}$, i.e. $(X,\; \mathcal{C},\; \widehat{\mu})$ es espacio de medida saturada.

(iii)(a) Trivial.

(iii)(b) Como $\widehat{\mu}$ extiende a μ es $\int_X f\; d\mu \leq \int_X f\; d\widehat{\mu}$. Ahora podemos suponer $\int_X f\; d\widehat{\mu} > 0$ y $\int_X f\; d\mu < +\infty$. Sea $0 < r < \int_X f\; d\widehat{\mu}$ y φ una función $\widehat{\mu}-$ simple tal que $\varphi \leq f$ y $\int_X \varphi\; d\widehat{\mu} > r$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} s_j\; \varkappa_{E_j},$$

con $s_j \in (0, +\infty)$ y $E_j \in \mathcal{C}$ disjuntos, $1 \leq j \leq n$. Fijado j, $\widehat{\mu}\,(E_j) < +\infty$ pues $\int_X f\; d\mu < +\infty$ y hay un subconjunto $\mu-$ medible F_j de E_j de modo que

$$\int_X f \ d\mu \geq \sum_{j=1}^{n} s_j \ \mu(F_j) > r.$$

Como r es arbitrario sigue la tesis. □

6.7. Sobre $\sigma-$ anillos hereditarios, medidas exteriores y subconjuntos no medibles (Lebesgue) de $\mathbb{R}$. Un conjunto de funciones integrables que se identifica con el espacio $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(i) En los apartados siguientes se consideran funciones de conjunto μ^*, definidas sobre $\sigma-$ anillos *hereditarios*[88] $\mathcal{H}$ de partes de un conjunto no vacío X. Decidir en qué casos se trata de medidas exteriores.

(i)(1) Fijado $x \in X$, para $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ y para $A \in \mathcal{H}$ es: $\mu^*(A) = 0$ si $x \notin A$ y $\mu^*(A) = 1$ si $x \in A$.

(i)(2) X es un conjunto de cien objetos dispuestos en un cuadro de diez filas y diez columnas. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ y, si $A \in \mathcal{H}$, sea $\mu^*(A)$ el número de columnas que contienen elementos de A.

(i)(3) Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si $A \in \mathcal{H}$ sea

$$\mu^*(A) = \overline{\text{lím}}_{k\to\infty} \frac{\sharp\left[A \cap \{1, ..., k\}\right]}{k}.$$

(i)(4) X es arbitrario, $\mathcal{H}$ la clase de partes numerables de X y $\mu^*(A) = \sharp A$.

(ii) Dadas $\{\mu_k^*\}_{k\geq 1}$ y $\{c_k\}_{k\geq 1}$, sucesiones de medidas exteriores sobre $\mathcal{H}$ y de $(0, +\infty)$ respectivamente, la función de conjunto $\mu^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \ \mu_k^*$ es una medida exterior sobre $\mathcal{H}$.

(iii) Sean μ_1^*, μ_2^* medidas exteriores finitas sobre $\mathcal{P}(X)$, $\mu^* = \mu_1^* + \mu_2^*$. Sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}$ las $\sigma-$ álgebras asociadas a μ_1^*, μ_2^* y μ^* por el proceso de Carathéodory respectivamente. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

[88] Una clase no vacía de conjuntos es *hereditaria* si contiene a los subconjuntos de cada uno de sus miembros.

(iv) Sea $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ la función definida para $A \subseteq \mathbb{R}$: $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable; $\mu^*(A) = 1$ si A es no numerable y existe un intervalo acotado I tal que $A - I$ es numerable; $\mu^*(A) = +\infty$ en los demás casos. Entonces μ^* es medida exterior. Determinar los conjuntos μ^*-medibles según el proceso de Carathéodory.

(v) Sea (X, d) un espacio métrico y c un número real fijo. Para cada subconjunto A de X se define

$$\mu_c^*(A) = \sup_{\varepsilon>0} \left\{ \inf_{\{A_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{P}(X):\ A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ \operatorname{diam}(A_k)<\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_k))^c \right\}.$$

Probar que μ_c^* es medida exterior.

(vi) Sea m la medida de Lebesgue en en $\mathbb{R}$ y m^* la medida exterior asociada. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida exterior positiva contiene algún subconjunto no medible.

(vii) Consideremos $\mathbb{N}$ con la topología discreta, μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mu(\{n\}) = 1$ para $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\mathcal{J}_\mu(\mathbb{N})$ de funciones integrables se identifica con el espacio $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (v. 6.19).

Solución

(i)(1) Evidentemente μ^* es medida exterior.

(i)(2) Sean $A_1,\ A_2 \in \mathcal{H}$ y $c_1,\ \dots\ ,\ c_{10}$ las columnas en las que podemos arreglar los elementos de X. Sean $c_{i_1},\ \dots\ ,\ c_{i_{\mu^*(A_1)}}$ y $c_{j_1},\ \dots\ ,\ c_{j_{\mu^*(A_2)}}$ las columnas que contienen elementos de A_1 y A_2 respectivamente. Podemos suponer $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ y que hay exactamente s columnas que contienen elementos de A_1 y de A_2. Entonces

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - s \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Inductivamente sigue que μ^* es finitamente subaditiva. Evidentemente μ^* es monótona. Como para toda parte A de X es $0 \leq \mu^*(A) \leq 10$ y $\mu^*(A) = 0$ sii $A = \emptyset$ entonces μ^* es medida exterior.

(i)(3) En este caso μ^* no es medida exterior, ya que si para cada entero positivo n es $A_n = \{n\}$ entonces $\mu^*(\cup A_n) = \mu^*(\mathbb{N}) = 1$ y, para cada n, $\mu^*(A_n) = 0$.

(ii) Evidentemente μ^* es monótona y $\mu^*(\emptyset) = 0$. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \ \mu_j^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{j=1}^{k} c_j \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j^*\left(A_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j \ \mu_j^*\left(A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right)$$

y, por ser k arbitrario, μ^* es medida exterior.

(iii) Sea $E \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, \ A \in \mathcal{P}(X)$. Entonces

$$\mu^*(A) = \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{2} \left[\mu_i^*(A \cap E) + \mu_i^*(A - E)\right] = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E),$$

de modo que $E \in \mathcal{A}$. Por otra parte, si $F \notin \mathcal{A}_1$ existirá $B \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\mu_1^*(B) < \mu_1^*(B \cap F) + \mu_1^*(B - F)$. Por lo tanto

$$\mu^*(B) = \mu_1^*(B) + \mu_2^*(B) < \mu_1^*(B \cap F) + \mu_1^*(B - F) + \mu_2^*(B)$$

$$\leq \mu_1^*(B \cap F) + \mu_1^*(B - F) + \mu_2^*(B \cap F) + \mu_2^*(B - F)$$

$$= \mu^*(B \cap F) + \mu^*(B - F),$$

i.e. $F \notin \mathcal{A}$.

(iv) Claramente $\mu^*(\emptyset) = 0$. Sean $A, \ B$ partes no vacías de $\mathbb{R}$, $A \subseteq B$. Si B es numerable entonces A también lo es y $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 0$. Si B es no numerable y existe algún intervalo acotado I tal que $B - I$ es numerable también $A - I$ resulta numerable. Si A es numerable $\mu^*(A) = 0 < 1 = \mu^*(B)$. Si A es no numerable $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 1$ y concluímos que μ^* es monótona. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes no vacías de $\mathbb{R}$ y veamos que $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Podemos suponer que la serie anterior es finita y que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es no numerable. Por la definición de μ^* ha de existir $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que $\mu^*(A_n) = 1$ si $n \in F$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sharp F$. Además $\cup_{n \in \mathbb{N}-F} A_n$ es numerable y, para cada $n \in F$, existe un intervalo acotado J_n tal que $A_n - J_n$ es numerable. Si J es un intervalo acotado tal que $\cup_{n \in F} J_n \subseteq J$, como

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n - J \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}-F} A_n \bigcup \cup_{n \in F} (A_n - J_n)$$

el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n - J$ deviene numerable y $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \leq \sharp F$. Por otra parte, sea $\mathcal{M}$ la $\sigma-$ álgebra de conjuntos μ^* medibles según el proceso de Carathéodory. Veamos que un conjunto no vacío E pertenece a $\mathcal{M}$ sii no hay algún intervalo L tal que $L \cap E$ y $L - E$ son no numerables. En efecto, si hubiere un tal intervalo sería

$$1 = \mu^*(L) < \mu^*(L \cap E) + \mu^*(L - E) = 2,$$

con lo que $E \notin \mathcal{M}$. Recíprocamente, si E no es medible existirá $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(C) < \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C - E)$. Necesariamente

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap E) = \mu^*(C - E) = 1,$$

$C, C \cap E$ y $C - E$ son no numerables y existe un intervalo K tal que $C - K$ es numerable. Tenemos entonces $C \subseteq K \cup N$, donde N es algún subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Como

$$C \cap E \subseteq K \cap E \cup N \cap E, \quad C - E \subseteq K - E \cup N - E$$

los conjuntos $K \cap E$ y $K - E$ son no numerables.

(v) Fijado $\varepsilon > 0$ escribiremos

$$\mu_{c,\varepsilon}^*(A) = \inf_{\{A_k\}_{k \geq 1} \in \mathcal{P}(X):\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ \operatorname{diam}(A_k) < \varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_k))^c,$$

con $A \subseteq X$. Notamos que $\mu_{c,\varepsilon}^*(\emptyset) = 0$ y $\mu_{c,\varepsilon}^*$ es monótona: si $A \subseteq B$ y $\{B_k\}_{k \geq 1}$ es una sucesión de partes de X de diámetro menor que ε cuya unión es B entonces $A = \cup_{k \geq 1} A \cap B_k$ y $\operatorname{diam}(A \cap B_k) \leq \operatorname{diam}(B_k) < \varepsilon$ para todo k. Entonces

$$\mu_{c,\varepsilon}^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A \cap B_k))^c \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_k))^c$$

y, por ser $\{B_k\}_{k\geq 1}$ arbitraria, $\mu^*_{c,\varepsilon}(A) \leq \mu^*_{c,\varepsilon}(B)$. Sea $\{C_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes de X, $C = \cup_{n\geq 1} C_n$. Para ver que $\mu^*_{c,\varepsilon}$ es $\sigma-$ subaditiva podemos suponer que $\sum_{n\geq 1} \mu^*_{c,\varepsilon}(C_n)$ es finita. Si $\delta > 0$ para cada n hay una partición $\{C_{n,m}\}_{m\geq 1}$ de C_n por conjuntos de diámetro menor que ε tal que $\sum_{m=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(C_{n,m}))^c \leq \mu^*_{c,\varepsilon}(C_n) + 2^{-n}\delta$. Luego $\{C_{n,m}\}_{n\geq 1, m\geq 1}$ es partición de C en conjuntos de diámetro menor que ε y

$$\mu^*_{c,\varepsilon}(C) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(C_{n,m}))^c$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*_{c,\varepsilon}(C_n) + 2^{-n}\delta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{c,\varepsilon}(C_n) + \delta.$$

Como δ es arbitrario cada $\mu^*_{c,\varepsilon}$ es medida exterior. Como $\mu^*_c = \sup_{\varepsilon>0} \mu^*_{c,\varepsilon}$ bastará probar la $\sigma-$ subaditividad de μ^*_c. Sea $\{D_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y supongamos, sin perder generalidad, que $\mu^*_c(D) > 0$, con $D = \cup_{n\geq 1} D_n$. Si $0 < \zeta < \mu^*_c(D)$ existe $\xi > \zeta$ tal que

$$\zeta < \mu^*_{c,\xi}(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{c,\xi}(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_c(D_n)$$

y, por ser ζ arbitrario, $\mu^*_c(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_c(D_n)$.

(vi) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m^*(A) > 0$ y supongamos, sin perder genera-lidad[89], que $A \subseteq [0,1)$. Si $x,\ y \in [0,1)$ escribimos $x \dot{+} y = x + y$ si $x + y < 1$ y $x \dot{+} y = x + y - 1$ si $x + y \geq 1$. Por el axioma de elección, hay un subconjunto P de $[0,1)$ que contiene un representante de cada clase del espacio cociente $[0,1)/\mathbb{Q}$. Sea $\{r_n\}_{n\geq 0}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ tal que $r_0 = 0$ y sea $P_n = P \dot{+} r_n,\ n \geq 0$. Entonces $[0,1) = \bigcup_{n\geq 0} P_n$, donde la unión es disjunta, y por la invariancia por traslaciones de la medida exterior, $m^*(P_n) = m^*(P)$ para cada n. Necesariamente, P es no medible. Suponiendo que todo subconjunto de A es medible para cada n escribimos $E_n = A \cap P_n$. En particular, E_n es un subconjunto medible de P_n y, puesto que la operación $\dot{+}$ es asociativa, $E_n \dot{+} (1 - r_n) \subseteq P$. La medida

[89]Como $A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A \cap [m, m+1)$ y $m^*(A) > 0$, por la $\sigma-$ subaditividad de la medida exterior existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m^*(A \cap [m, m+1)) > 0$.

de Lebesgue es inva-riante por $\dot{+}-$ traslaciones (cf. [41], Ch. 3, §4, Lemma 16, pág. 63) de modo que $m(E_n \dot{+} (1 - r_n)) = m(E_n)$. Sea $n \geq 0$ fijo y $m \geq 0$, $F_n = E_n \dot{+} (1 - r_n)$ y $F_{nm} = F_n \dot{+} r_m$. Entonces $\{F_{nm}\}_{m \geq 0}$ es una familia disjunta de conjuntos medibles, $m(F_{nm}) = m(F_n)$ para todo m y $m(\cup_{m \geq 0} F_{nm}) = \sum_{m \geq 0} m(F_n) \leq 1$, de modo que $m(F_n) = 0$. Luego $m(E_n) = 0$ para todo n y resulta $m^*(A) = 0$, lo cual no es cierto.

(vii) Sea $u \in \mathcal{J}_\mu(\mathbb{N})$, i.e. $\mu_*(u)$ y $\mu^*(u)$ son iguales y finitas. Hay una función $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con soporte finito tal que $\mu^*(|u - v|) \leq 1$ (cf. [11], Ch. XIII, §7, 13.7.2, page 121). Como $|u - v|$ es continua y acotada inferiormente deducimos que $\langle w, \mu \rangle \leq 1$ toda vez que w es una función de soporte finito y $w \leq |u - v|$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(n) = 0$ si $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$. Definimos $w_p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $w_p(n) = |u(n)|$ si $n_0 < n \leq p + n_0$ y $w_p(n) = 0$ en otro caso. En consecuencia

$$\langle w_p, \mu \rangle = \int_{\mathbb{N}} w_p(n) \; d\mu(n) = \sum_{n=n_0+1}^{p+n_0} |u(n)| \leq 1$$

y, como p es arbitrario, $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$ sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n > n_1} |u(n)| \leq \varepsilon$. Definimos $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $s(n) = u(n)$ si $1 \leq n \leq n_1$, $s(n) = 0$ en otro caso. Si $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tiene soporte finito y $t \leq |u - s|$ obtenemos

$$\langle t, \mu \rangle = \int_{\mathbb{N}} t(n) \; d\mu(n)$$

$$= \left(\sum_{n:\ t(n) \neq 0,\ 1 \leq n \leq n_1} + \sum_{n:\ t(n) \neq 0,\ n > n_1} \right) t(n) \leq \sum_{n > n_1} |u(n)| \leq \varepsilon.$$

Como t es arbitraria $\mu^*(|u - s|) \leq \varepsilon$ y $u \in \mathcal{J}_\mu(\mathbb{N})$. $\square$

6.8. Un espacio de medida asociado a una colección dada.

Sea $\{(X_a,\ \mathcal{B}_a,\ \mu_a)\}_{a\in A}$ una colección de espacios de medida, donde $\{X_a\}_{a\in A}$ es una familia disjunta. Consideramos $(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$, donde

$$X = \cup_{a\in A} X_a,$$

$$\mathcal{B} = \{Y \in \mathcal{P}(X) :\ (\forall a \in A),\ X_a \cap Y \in \mathcal{B}_a\},$$

$$\mu(Y) = \sum_{a\in A} \mu_a (X_a \cap Y),\quad Y \in \mathcal{B}.$$

(i) $(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$ es un espacio de medida.

(ii) μ es $\sigma-$ finita si y solo si, salvo una cantidad numerable de μ_a's $\sigma-$ finitas, las demás son nulas.

Solución

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Si $Y \in \mathcal{B}$ y $a \in A$ entonces $X_a \cap (X - Y) = X_a - X_a \cap Y$ pertenece a $\mathcal{B}_a$, de modo que $X - Y \in \mathcal{B}$. Si $(Y_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ también $(\cup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap X_a = \cup_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap X_a)$ pertenece a $\mathcal{B}_a$ y, por ser a arbitrario, $\cup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \mathcal{B}$, i.e. $\mathcal{B}$ es una $\sigma-$ álgebra. Evidentemente $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Con la notación anterior, si $(Y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{B}$ podemos escribir[90]

$$\mu\left(Y_1 \cup Y_2\right) = \sum_{a\in A} \mu_a\left(\left(Y_1 \cup Y_2\right) \cap X_a\right) \tag{185}$$

$$= \sum_{a\in A} \left[\mu_a\left(Y_1 \cap X_a\right) + \mu_a\left(Y_2 \cap X_a\right)\right] = \mu\left(Y_1\right) + \mu\left(Y_2\right).$$

Por (185) vemos que μ es finitamente aditiva y observando su monotonía, si $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ tenemos

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{m} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu\left(Y_n\right) \leq \mu\left(Y\right)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(Y_n\right) \leq \mu\left(Y\right)$. Notar que si $\mu\left(Y\right) = +\infty$ entonces para cada $r \in \mathbb{N}$ existe $A_r \in \mathcal{P}_f\left(A\right)$ tal que

$$r \leq \sum_{a\in A_r} \mu_a\left(Y \cap X_a\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a\in A_r} \mu_a\left(Y_n \cap X_a\right).$$

[90]Sean $\{s_i\}_{i\in I}$ y $\{t_i\}_{i\in I}$ subfamilias de $[0,+\infty]$, $s = \sum_{i\in I} s_i$, $t = \sum_{i\in I} t_i$. Entonces

$$\sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right) = \sum_{i\in I} s_i + \sum_{i\in I} t_i. \tag{183}$$

La identidad (183) es inmediata si algún sumando es no finito. Si suponemos que todos los sumandos son finitos, como (183) se verifica cuando las sumas son finitas resulta válida la desigualdad $\leq$. Bastará ver que

$$\sum_{i\in I} s_i + \sum_{i\in I} t_i \leq \sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right). \tag{184}$$

Podemos suponer que el miembro derecho en (184) es finito. Si $F,\ G \in \mathcal{P}_f(I)$ entonces

$$\sum_{i\in F} s_i + \sum_{j\in G} t_j = \sum_{k\in F\cap G} \left(s_k + t_k\right) + \sum_{i\in F-G} s_i + \sum_{j\in G-F} t_j$$

$$\leq \sum_{k\in F\cap G} \left(s_k + t_k\right) + \sum_{k\in F\triangle G} \left(s_k + t_k\right)$$

$$= \sum_{k\in F\cup G} \left(s_k + t_k\right) \leq \sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right)$$

y concluímos la validez de (184).

Más aún, para cada $r \in \mathbb{N}$ existe $k_r \in \mathbb{N}$ tal que

$$r \leq \sum_{n=1}^{k_r} \sum_{a \in A_r} \mu_a \left(Y_n \cap X_a \right) \leq \sum_{n=1}^{k_r} \mu \left(Y_n \right)$$

resultando $\sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(Y_n \right) = +\infty$ y podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(Y_n \right)$ y $\mu \left(Y \right)$ son finitos. Si $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu \left(Y_n \right) \leq \varepsilon$. Entonces

$$\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(Y_n \right) - \sum_{n=1}^{n_0} \mu \left(Y_n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(Y_n \right) - \mu \left(\cup_{n=1}^{n_0} Y_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(Y_n \right) - \mu \left(Y \right)$$

y, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, μ es $\sigma-$ aditiva.

(ii) Sea $\left\{ \widetilde{X}_n \right\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ sucesión disjunta de conjuntos de medida finita tal que $\cup_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n = X$, $\widetilde{A} = \{ a \in A : \ \mu_a \neq 0 \}$. Entonces $\widetilde{A} \subseteq \cup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$, donde $A_{n,m} = \left\{ a \in A : \ \mu_a \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right) \geq 1/m \right\}, \quad n, m \in \mathbb{N}$. Como $\mu \left(\widetilde{X}_n \right) \geq \sum_{a \in \cup_m A_{n,m}} \mu_a \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right)$, $A_{n,m}$ debe ser finito para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Así $\widetilde{A}$ es numerable y si $a \in \widetilde{A}$ tenemos

$$\cup_{n=1}^{\infty} \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right) = X_a, \quad \mu_a \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right) \leq \mu \left(\widetilde{X}_n \right) < +\infty$$

y μ_a es $\sigma-$ finita. La suficiencia es inmediata. □

6.9. Caracterización de funciones medibles sobre espacios de medida completa. Completación de espacios de medida.

(i) Si $(X, \ \Sigma, \ \mu)$ es un espacio de medida, hay un espacio de medida completa $(X, \ \Sigma^c, \ \mu^c)$ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^c$, μ^c extiende a μ y todo elemento $E \in \Sigma^c$ es de la forma $E = F \cup W$, donde $F \in \Sigma$ y W es parte de algún conjunto de Σ de $\mu-$ medida nula.

(ii) Si $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ es un espacio de medida completa, $f,\ g$ son funciones de X en $\overline{\mathbb{R}}$, f es $\mu-$ medible y $f = g$ a.e. μ entonces g es $\mu-$ medible. Este resultado es, en general, falso.

(iii) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f es μ^c- medible sii existe $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ función $\mu-$ medible y un conjunto $E \in \Sigma$ tal que $\mu(X - E) = 0$ y $f\mid_E = g\mid_E$.

Solución

(i) La clase Σ^c de conjuntos del tipo $E = F \cup W$, donde $F \in \Sigma$ y Z es parte de algún conjunto de Σ de $\mu-$ medida nula, contiene a $\emptyset$. Sea $E_i = F_i \cup W_i$, con $F_i \in \Sigma$ y $W_i \subseteq Z_i$ y $\mu(Z_i) = 0$ en $\Sigma,\ i = 1,\ 2$. Podemos escribir $E_1 - E_2 = F_3 \cup W_3$, donde

$$F_3 = F_1 - (F_2 \cup Z_2),$$

$$W_3 = (F_1 - F_2) \cap (Z_2 - W_2) \cup W_1 - (F_2 \cup W_2).$$

Entonces $F_3 \in \Sigma$, $W_3 \subseteq Z_1 \cup Z_2$ y $Z_1 \cup Z_2 \in \Sigma$ tiene medida nula, i.e. $E_1 - E_2 \in \Sigma^c$. Evidentemente $(X,\ \Sigma^c,\ \mu^c)$ es espacio de medida completa.

(ii) Si Z es la parte de X sobre la que $f \neq g$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\{g < \alpha\} = \{g < \alpha\} \cap Z \cup \{g < \alpha\} - Z.$$

El conjunto $\{g < \alpha\} - Z \in \Sigma$, pues

$$\{g < \alpha\} - Z = \{f < \alpha\} - Z,$$

$\{f < \alpha\} \in \Sigma$ por la medibilidad de f, $Z \in \Sigma$ por tener medida nula y Σ es cerrada por diferencias. Además $\{g < \alpha\} \cap Z \in \Sigma$ por la completitud de la medida y, por lo tanto, $\{g < \alpha\} \in \Sigma$. Como α es arbitrario g es medible. En particular, sea

$$X = \{a, b, c\}, \quad \Sigma = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b, c\},\ X\},$$

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{b, c\}) = 0,\ \mu(\{a\}) = \mu(X) = 1.$$

Como $\{b\} \notin \Sigma$, $\{b\} \subseteq \{b,c\}$ y $\mu(\{b,c\}) = 0$ entonces (X, Σ, μ) es un espacio de medida no completa. La función $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $g(a) = 0$, $g(b) = -g(c) = 1$ es no medible, pues $\{g > 0\} = \{b\}$ y $\{b\} \notin \Sigma$. Si $f \equiv 0$ es la función idénticamente nula entonces f es medible y $\{f \neq g\} = \{b,c\}$ tiene $\mu-$ medida cero, i.e. $f = g$ a.e. μ.

(iii) Si $r \in \mathbb{Q}$ y f es μ^c- medible podemos escribir $\{f < r\} = E_r \cup W_r$, con $E_r \in \Sigma$ y W_r contenido en algún conjunto $Z_r \in \Sigma$ de medida nula. Análogamente, $\{f = +\infty\} = E_{+\infty} \cup W_{+\infty}$ donde $E_{+\infty} \in \Sigma$ y $W_{+\infty}$ es parte de algún conjunto $Z_{+\infty} \in \Sigma$ de medida nula. Si $E = \cup_{r \in \mathbb{Q}\cup\{+\infty\}} E_r$ y $Z = \cup_{r \in \mathbb{Q}\cup\{+\infty\}} Z_r$ entonces $X = E \cup Z$ y $\mu(Z) = 0$. Definimos $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $g\,|_E = f$ y $g\,|_Z \equiv +\infty$. Tenemos $E,\ Z \in \Sigma$ y $\mu(X - E) = 0$ pues $X - E \subseteq Z$. Además, si $-\infty < s \leq +\infty$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{Q}}$ es una sucesión creciente convergente a s entonces

$$\{g < s\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{g < r_n\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{g < r_n\} \cap E = \cup_{n=1}^{\infty} \{f < r_n\},$$

i.e. $\{g < s\} \in \Sigma$. Finalmente,

$$\{g = -\infty\} = \cap_{r \in \mathbb{Q}} \{g < r\} = \cap_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\}$$

y $\{g = -\infty\} \in \Sigma$ porque Σ es $\sigma-$ álgebra. Concluímos que g es $\mu-$ medible y la condición es necesaria. La suficiencia sigue de (ii). $\square$

6.10. Sobre sucesiones decrecientes de medidas.

Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida y $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de medidas sobre $\mathcal{B}$. Entonces $\mu = \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ es una medida, siendo este resultado falso, en general, para sucesiones decrecientes.

Solución

Evidentemente μ está bien definida, es no negativa, monótona y finitamente aditiva. Sea $\{E_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{B}$ y $E = \cup_{m \geq 1} E_m$. Entonces

$$\mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(E) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} \mu_n\left(\cup_{m=1}^{p} E_m\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} \sum_{m=1}^{p} \mu_n(E_m) \leq \lim_{p \to +\infty} \sum_{m=1}^{p} \mu(E_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m).$$

Podemos suponer que $\mu(E) < +\infty$ y que $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) > \delta$, $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=1}^{p} \mu(E_m) > \delta$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ es

$$\delta < \sum_{m=1}^{p} \mu_n(E_m) = \mu_n\left(\cup_{m=1}^{p} E_m\right) \leq \mu\left(\cup_{m=1}^{p} E_m\right) \leq \mu(E)$$

y, como δ es arbitrario, μ es una medida. Ahora sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ y, para $n \in \mathbb{N}$ e $I \in \mathcal{P}(X)$, $\mu_n(I) = \natural\left(I \cap \{1, \ldots, n\}\right)/n$. $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de medidas sobre X pero $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$ no es medida. En efecto, sea $I_{2n-1} = \{2n-1, 2n\}$, $n \geq 1$. Entonces $\{I_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión disjunta de partes de X,

$$\cup_{n\geq 1} I_{2n-1} = X, \ \mu(X) = 1 \ \ y \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_{2n-1}) = +\infty. \ \square$$

6.11. Primer principio de Littlewood o caracterización de subconjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Son equivalentes[91]:

(i) E es medible.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$ hay un abierto O tal que $O \supseteq E$ y $m^*(O - E) < \varepsilon$, donde m^* indica la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

(iii) Dado $\varepsilon > 0$ hay un cerrado $C \subseteq E$ tal que $m^*(E - C) < \varepsilon$.

(iv) Hay un conjunto G de tipo G_δ tal que $E \subseteq G$ y $m^*(G - E) = 0$.

[91] Con referencia a la teoría de funciones de una variable real J. E. Littlewood señalaba: ¨*The extent of knowledge required is nothing like so great as is sometimes supposed. There are three principles, roughly expressible in the following terms: Every (measurable) set is nearly a finite union of intervals; every (measurable) function is nearly continuous; every convergent sequence of (measurable) functions is nearly uniformly convergent. Most of the results of the theory are fairly intuitive applications of these ideas, and the student armed with them should be equal to most ocasions when real variable theory is called for. If one of the principles would be the obvious means to settle the problem if it were* quite *true, it is natural to ask if the* nearly *is near enough, and for a problem that is actually solvable it generally is* ¨. En este problema se establece el primer principio de Littlewood; el segundo en el Problema 6.12 en dos formas, una de ellas el teorema de Lusin. El tercer principio es el conocido Teorema de Egoroff (cf. [19], Ch. IV, Sec. 21, Th. A, page 88).

(v) Hay un conjunto F de tipo F_σ tal que $F \subseteq E$ y $m^*(E - F) = 0$.

Si $m^*(E) < +\infty$ las afirmaciones anteriores son equivalentes a

(vi) Dado $\varepsilon > 0$ hay un conjunto U, que es union finita de intervalos abiertos, tal que $m^*(U \vartriangle E) < \varepsilon$.

Solución

$[(i) \Rightarrow (ii)]$ Sea E medible de medida finita, $\varepsilon > 0$. Existe una sucesión de intervalos $\{I_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ tal que $E \subseteq \cup_{\nu=1}^\infty I_\nu$ y $\sum_{\nu=1}^\infty \operatorname{long}(I_\nu) < m(E) + \varepsilon/2$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Si I_ν tiene extremos $a_\nu,\ b_\nu$, con $a_\nu < b_\nu$, el conjunto $O = \cup_{\nu=1}^\infty \left(a_\nu - \varepsilon 2^{-\nu-2}, b_\nu + \varepsilon 2^{-\nu-2}\right)$ es abierto, contiene a E y

$$m(O) \leq \sum_{\nu=1}^\infty \left(\operatorname{long}(I_\nu) + \varepsilon 2^{-\nu-1}\right) = \sum_{\nu=1}^\infty \operatorname{long}(I_\nu) + \varepsilon/2 < m(E) + \varepsilon.$$

En consecuencia, como E tiene medida finita,

$$\varepsilon > m(O) - m(E) = m(O - E).$$

$[(ii) \Leftrightarrow (vi)]$ Asumiendo (ii), $O \vartriangle E = O - E$ pues $O \supseteq E$. Como O es abierto se realiza como unión numerable disjunta de intervalos abiertos y basta observar la monotonía de la medida exterior. Recíprocamente, si $m^*(E) < +\infty$ existe un abierto O de medida finita que contiene a E. Sea U union finita de intervalos abiertos, tal que $m^*(U \vartriangle E) < \varepsilon/2$. Indicando

$$\Lambda_1 = (U \triangle E) \cap O,\ \Lambda_2 = (U \cap O \cup \Lambda_1) - E.$$

obtenemos

$$m^*(\Lambda_1) \leq m^*(U \vartriangle E) < \varepsilon/2, \quad m^*(\Lambda_2) \leq m^*(U \triangle E) + m^*(\Lambda_1 - E) < \varepsilon.$$

Como $E \subseteq U \cap O \cup \Lambda_1$ resulta $E = (U \cap O \cup \Lambda_1) - \Lambda_2$. Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$ hay conjuntos $S_n,\ \Lambda_{n,1},\ \Lambda_{n,2}$ tales que $E = (S_n \cup \Lambda_{n,1}) - \Lambda_{n,2}$, S_n es unión finita de intervalos abiertos y tanto $\Lambda_{n,1}$ como $\Lambda_{n,2}$ tienen medida exterior menor que $1/n$. Si O_n es abierto que contiene a $\Lambda_{n,1}$ y $m^*(O_n) < 1/n$ escribimos $G = \cap_{n \in \mathbb{N}} (S_n \cup O_n)$. Ahora G es de tipo G_δ, contiene a E y para cada n es

$$m^*(G - E) \leq m^*(S_n - E) + m^*(O_n - E) \leq m^*(\Lambda_{n,2}) + 1/n < 2/n,$$

i.e. $G - E$ tiene medida nula. E resulta medible pues $E = G - (G - E)$.

En general, $[(i) \Rightarrow (ii)]$: Sea E medible de medida infinita, $\varepsilon > 0$. Por la σ - finitud de la medida, podemos escribir $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, con cada E_n medible de medida finita. Hay conjuntos abiertos O_n tales que $O_n \supseteq E_n$ y $m(O_n - E_n) < \varepsilon 2^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia el conjunto $O = \cup_{n=1}^{\infty} O_n$ es abierto, contiene a E y

$$m(O - E) = m\left[\cup_{n=1}^{\infty} O_n - E_n\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n - E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n-1} = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

$[(ii) \Rightarrow (iv)]$ Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe G_n abierto tal que $G_n \supseteq E$ y $m^*(G_n - E) < 2^{-n}$. El conjunto $G = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es G_δ, contiene a E y para cada n es

$$m^*(G - E) \leq m^*(G_n - E) < 2^{-n},$$

de donde sigue (iv). Ahora:

$[(iv) \Rightarrow (i)]$ Podemos escribir $E = G - (G - E)$, G es medible por ser G_δ, $G - E$ es medible por tener medida nula y ser completa la medida de Lebesgue.

$[(i) \Rightarrow (iii)]$ Si E es medible también lo es $\mathbb{R} - E$. Como $[(i) \Leftrightarrow (ii)]$, dado $\varepsilon > 0$ existe O abierto tal que $O \supseteq \mathbb{R} - E$ y $m[O - (\mathbb{R} - E)] < \varepsilon$. Escribiendo $C = \mathbb{R} - O$ entonces C es un subconjunto cerrado de E y

$$m(E - C) = m[O - (\mathbb{R} - E)] < \varepsilon.$$

$[(iii) \Rightarrow (v)]$ Por hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$ hay un cerrado $F_n \subseteq E$ tal que $m^*(E - F_n) < 2^{-n}$. El conjunto $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ es un subconjunto F_σ de E y

$$m^*(E - F) \leq m^*(E - F_n) < 2^{-n}$$

para todo n, siguiendo (v). Ahora:

$[(v) \Rightarrow (i)]$ Podemos escribir $E = F \cup (E - F)$, F es medible por ser F_σ, $E - F$ es medible por tener medida nula y ser completa la medida de Lebesgue. □

6.12. Teorema de Lusin y segundo principio de Littlewood.

Sea $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible (Lebesgue), finita a.e..

(i) Dado $\varepsilon > 0$ existe M tal que $|f| \leq M$ salvo un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$.

(ii) Hay una función simple φ tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ excepto donde $|f(x)| \geq M$. Si $m \leq f \leq M$ entonces podemos seleccionar φ tal que $m \leq \varphi \leq M$.

(iii) Si φ es una función simple sobre $[a, b]$ hay una función de salto g sobre $[a, b]$ tal que $g(x) = \varphi(x)$ salvo un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$. Si $m \leq \varphi \leq M$ podemos seleccionar g tal que $m \leq g \leq M$.

(iv) Dada una función de salto g sobre $[a, b]$ hay una función continua h tal que $g(x) = h(x)$ salvo un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$. Si $m \leq g \leq M$ podemos seleccionar g tal que $m \leq h \leq M$.

(v) Hay funciones g de saltos y h continua sobre $[a, b]$ tales que $|f - g| \leq \varepsilon$ y $|f - h| \leq \varepsilon$ salvo conjuntos de medida menor que $\varepsilon/3$. Estas funciones pueden ser tales que $m \leq g \leq M$ y $m \leq h \leq M$ si $m \leq f \leq M$.

(vi) (Teorema de Lusin) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, hay una función continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $m\left(\{x \in [a, b] : \ f(x) \neq g(x)\}\right) < \delta$.

Solución

(i) Por hipótesis el conjunto

$$\{x \in [a, b] : \ |f(x)| = +\infty\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, b] : \ |f(x)| > n\}$$

tiene medida de Lebesgue nula, y puesto que $[a, b]$ tiene medida finita tenemos

$$\lim_{n \to \infty} m(\{x \in [a, b] : \ |f(x)| > n\}) = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe entonces M tal que

$$m(\{x \in [a, b] : \ |f(x)| > M\}) \leq \varepsilon/3.$$

(ii) Consideremos un número positivo N mayor que el valor M anterior. Si $f \geq 0$ a.e. escribimos

$$\varphi_n = N \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \, \chi_{\left\{x \in [a,b] : \ \frac{(k-1)N}{2^n} \leq f(x) < \frac{kN}{2^n}\right\}}, \ n \geq 1.$$

Las funciones anteriores son simples y $0 \leq \varphi_n \leq f$ para cada n. Por otra parte, $0 \leq f - \varphi_n \leq N/2^n$ para todo n sobre $f^{-1}\{[0,N)\}$. En general, escribimos $f = f^+ - f^-$ y, nuevamente, dado $\varepsilon > 0$ hay funciones simples φ^+ y φ^- tales que $0 \leq f^+ - \varphi^+ \leq \varepsilon/2$ y $0 \leq f^- - \varphi^- \leq \varepsilon/2$ sobre $(f^+)^{-1}\{[0,N)\} \cap (f^+)^{-1}\{[0,N)\}$. [92] Entonces

$$\left|f - (\varphi^+ - \varphi^-)\right| \leq \left(f^+ - \varphi^+\right) + \left(f^- - \varphi^-\right) \leq \varepsilon$$

excepto cuando $|f| \geq N$, esto es, fuera de un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$. Es claro el resto.

(iii) Consideremos una función simple $\varphi = \sum_{p=1}^{P} \alpha_p \, \chi_{E_p}$. Dado $\varepsilon > 0$ para cada $p = 1, \ldots, P$ hay un conjunto U_p, el que es unión disjunta de intervalos, de modo que $m\left(E_p \bigtriangleup U_p\right) \leq \varepsilon/(3P)$ (V. Problema 6.11, (vi)). La función $g = \sum_{p=1}^{P} \alpha_p \, \chi_{U_p}$ es una función de saltos y

$$m\left(\{g \neq \varphi\}\right) \leq \sum_{p=1}^{P} m\left(E_p \bigtriangleup U_p\right) \leq \varepsilon/3$$

y sigue (iii).

(iv) Sea $g = \sum_{k=1}^{s} \beta_k \, \chi_{I_k}$ una función de salto. Evidentemente podemos suponer $s > 1$ y que los intervalos $I_1, \ldots, I_s$ están ordenados de manera que I_k está a la izquierda de I_{k+1} si $1 \leq k < s$. También escribimos $\beta_k = 0$ si $I_k \subseteq g^{-1}\left(\{0\}\right)$ y tenemos $[a,b] = \cup_{k=1}^{s} I_k$. Si $1 < k < s$ consideramos intervalos $J_k = [a_k, b_k]$ centrados en el punto medio de I_k de modo que $m(I_k - J_k) < \varepsilon/(3s)$. Además consideramos $b_1 \in I_1$, $a_s \in I_s$ tales que $b_1 > \sup\ I_1 - \varepsilon/(3s)$, $a_s < \inf\ I_s + \varepsilon/(3s)$, y escribimos $J_1 = [a, b_1]$, $J_s = [a_s, b]$. Definimos

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in \cup_{k=1}^{s} J_k \\ \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{a_k - b_{k-1}}(x - b_{k-1}) + \beta_{k-1} & si \quad b_{k-1} \leq x \leq a_k,\ 2 \leq k \leq s. \end{cases}$$

[92] Notar que $\{x \in [a,b] : \ |f(x)| < N\} \subseteq (f^+)^{-1}\{[0,N)\} \cap (f^-)^{-1}\{[0,N)\}$.

Entonces h es continua y si inf $I_k = x_{k-1}$ y sup $I_k = x_k$, $1 \leq k \leq s$, tenemos

$$m\{h \neq g\} \leq \sum_{k=2}^{s} (a_k - b_{k-1}) = a_s - b_1 + \sum_{k=2}^{s-1} (a_k - b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} [(a_k - x_{k-1}) + (x_k - b_k)] + \sum_{k=2}^{s-1} (x_{k-1} - x_k) - x_1 + x_{s-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} m(I_k - J_k) < \varepsilon/3.$$

Claramente sigue entonces (iv).

(v) Sigue de los puntos anteriores.

(vi) Si $n \in \mathbb{N}$ sea $h_n \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ tal que $m(\{|f - h_n| \geq 2^{-n}\}) \leq 2^{-n}$. Si L es el conjunto de puntos x de $[a,b]$ en los que $\{h_n(x)\}_{n\geq 1}$ no converge a $f(x)$ podemos escribir

$$L = \cup_{i=1}^{\infty} \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}. \tag{186}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$m\left(\cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}\right) = \lim_{j\to+\infty} m\left(\cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}\right), \tag{187}$$

pues estamos trabajando con conjuntos medibles de medida finita. Si $k \geq j \geq \log_2 i$ es $\{|f - h_k| \geq 1/i\} \subseteq \left\{|f - h_k| \geq 2^{-k}\right\}$ para cada k, i.e.

$$m\left(\cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} m(\{|h_k - f| \geq 1/i\}) \tag{188}$$

$$\leq \sum_{k=j}^{\infty} m\left(\left\{|f - h_k| \geq 2^{-k}\right\}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k}.$$

Por (187) y (188) resulta $m\left(\cap_{j=1}^{\infty}\cup_{k=j}^{\infty}\{|h_k - f| \geq 1/i\}\right) = 0$ para cada i y, por (186), $f = \lim_{n\to+\infty} h_n$ a.e.. Por el teorema de Egoroff, dado $\delta > 0$ hay un subconjunto medible A de $[a,b]$ de medida menor que $\delta/2$ al exterior del cual $h_n \xrightarrow{o} f$. Por el Problema 6.11 hay un cerrado $B \subseteq [a,b]-A$ tal que $m([a,b]-(A\cup B)) < \delta/2$. Por ser límite uniforme de funciones continuas $f\mid_C$ es continua. Existe $g \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ tal que $g\mid_C = f$, la cual puede construirse observando que $[a,b]-B$ es abierto. Por ello, hay un abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $[a,b]-B = U\cap[a,b]$. Hay además intervalos abiertos disjuntos, en cantidad numerable, cuya unión es U. Podemos definir g de forma que coincide con f sobre B y cuya gráfica consiste de los segmentos que unen las imágenes, por f, de los extremos de los intervalos que componen U en $[a,b]$. Finalmente, como

$$\{f \neq g\} \subseteq [a,b]-B \subseteq A \cup [a,b]-(A\cup B)$$

tenemos

$$m(\{f\neq g\}) \leq m(A\cup[a,b]-(A\cup B))$$

$$\leq m(A) + m([a,b]-(A\cup B)) < \delta$$

y sigue la tesis. □

6.13. Cada función $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue es idéntica a.e. a una función medible Borel. Sobre acotación y convergencia uniforme de sucesiones de funciones medibles, finitas y convergentes a.e., definidas en subconjuntos medibles de la recta real de medida positiva. Sucesiones convergentes en espacios de funciones esencialmente acotadas. Si (X,Σ,μ) es espacio de medida finita, $f_n \to f$ a.e. en $L^p(X,\Sigma,\mu)$ y $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ resulta $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(0<p<\infty)$.

(i) Toda función $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue es idéntica a.e. a una función medible Borel.

(ii) Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles, finitas a.e., definidas sobre un subconjunto medible E de $\mathbb{R}$ de medida positiva, de modo que existe $\lim_{n\to+\infty} f_n$ a.e.. Existe un subconjunto medible F de E de medida positiva tal que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es acotada sobre F.

(iii) Sea (X, Σ, μ) espacio de medida $\sigma-$ finita, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones finitas a.e. que converge a una función finita f. Existe una sucesión de conjuntos medibles $\{E_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\mu\left(E - \cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ y $f_n \overset{o}{\to} f$ en cada E_n.

(iv) En un espacio de medida (X, Σ, μ), una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ converge a una función $f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ sii $f_n \overset{o}{\to} f$ a.e..

(v) Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita, $0 < p < +\infty$, $f_n \to f$ a.e. en $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$. [93]

Solución

(i) Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible Lebesgue y dados $r,\ s \in \mathbb{Q},\ r < s$, sea $E_{r,s} = \{r < f < s\}$. Como $E_{r,s}$ es medible Lebesgue existe un conjunto $G_{r,s}$ de tipo G_δ que lo contiene tal que el conjunto $N_{r,s} = G_{r,s} - E_{r,s}$ tiene medida nula. En consecuencia, el conjunto $N = \cup_{r<s,\ r,s\in\mathbb{Q}} N_{r,s}$ tiene medida nula y, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un boreliano B_n de medida de Lebesgue menor que $1/n$ tal que $B_n \supseteq N$. El conjunto $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ es boreliano, tiene medida nula y contiene a N. La función $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g = f\ \varkappa_{\mathbb{R}-B}$ es igual a.e. a f y es boreliana. En efecto, sean $x < y$ en

[93]V. también Problema 3.30 (vi). Si H es espacio de Hilbert, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en H, $f \in H$, $f_n \overset{w}{\to} f$ y $\|f_n\| \to \|f\|$ es inmediato que $f_n \to f$ en H (cf. [29]).

$\mathbb{R}$ y veamos que $\{x < g < y\}$ es boreliano. Tenemos

$$\{x < g < y\} = \{x < g < y\} \cap B \cup \{x < g < y\} - B,$$

$$\{x < g < y\} \cap B = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \notin (x, y), \\ \\ B & si \quad 0 \in (x, y), \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \{x < g < y\} - B &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} \{r < g < s\} - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} \{r < f < s\} - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} E_{r,s} - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} (G_{r,s} - N_{r,s}) - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} G_{r,s} - (N_{r,s} \cup B) \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} G_{r,s} - B \end{aligned}$$

y sigue la afirmación.

(ii) El conjunto

$$Z = \{x \in E : \exists n,\ n \geq 1/\ f_n(x) = \infty\} \cup \left\{x \in E : \ (-\exists) \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right\}$$

tiene medida nula. Podemos escribir

$$E - Z = \cup_{p=1}^{\infty} \{x \in E - Z : \ (\forall n) \ |f_n(x)| \leq p\}.$$

Como $E - Z$ tiene medida positiva algún miembro de la unión anterior, necesariamente medible, ha de tener medida positiva.

(iii) Suponiendo válida la afirmación para espacios de medida finita, si E tiene medida no finita escribimos $E = \cup_{m=1}^{\infty} \widetilde{E_m}$, donde cada $\widetilde{E_m}$ es medible y de medida finita. Fijado m hay una sucesión $\left\{\widetilde{E}_{m,p}\right\}_{p\geq 1}$

de subconjuntos medibles de $\widetilde{\widetilde{E_m}}$ tal que $\mu\left(\widetilde{\widetilde{E_m}} - \cup_{p=1}^{\infty}\widetilde{E}_{m,p}\right) = 0$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre cada $\widetilde{E}_{m,p}$. Por lo tanto

$$\mu\left(E - \cup_{m,p}\widetilde{E}_{m,p}\right) = \mu\left(\cup_{m=1}^{\infty}\left(\widetilde{\widetilde{E_m}} - \cup_{p=1}^{\infty}\widetilde{E}_{m,p}\right)\right) = 0$$

y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre $\widetilde{E}_{m,p}$. Supondremos entonces que E tiene medida finita. Aplicando sucesivamente el teorema de Egoroff: hay un subconjunto medible A_1 de E tal que $\mu(A_1) < 1$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre el conjunto $E_1 = E - A_1$. Hay un conjunto $A_2 \in \Sigma$ contenido en A_1 tal que $\mu(A_2) < 1/2$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre el conjunto $E_2 = A_1 - A_2$. Inductivamente se definen entonces sucesiones $\{A_i\}_{i\geq 0}$, $\{E_j\}_{j\geq 1}$ de conjuntos medibles, donde $A_0 = E$, $E_j = A_{j-1} - A_j$ si $j \geq 1$, $\mu(A_i) < 1/i$ si $i \geq 1$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre cada E_j. Finalmente, basta observar que para todo n resulta

$$\mu\left(E - \cup_{j=1}^{\infty}E_j\right) \leq \mu\left(E - \cup_{j=1}^{n}E_j\right)$$

$$= \mu\left(E - (E - A_n)\right) = \mu(A_n) < 1/n,$$

y sigue la tesis.

(iv) La condición es claramente suficiente. Por otra parte, si $\|f_n - f\|_{\infty} \to 0$ para cada entero positivo p existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_p$ entonces $\|f_n - f\|_{\infty} < 1/p$. Luego el conjunto $Z = \cup_{p=1}^{\infty}\cup_{n=n_p}^{\infty}\{|f_n - f| \geq 1/p\}$ tiene medida nula y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre $X - Z$.

(v) Dado $\varepsilon > 0$, si $f \in L^p(X,\Sigma,\mu)$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f|^p\,d\mu < \varepsilon$ si $E \in \Sigma$ y $\mu(E) < \delta$. Como X tiene medida finita, por el teorema de Egoroff existe $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \delta$, tal que $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre $X - A$. Por el lema de Fatou tenemos

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_{X-A}|f_n|^p\,d\mu \geq \int_{X-A}|f|^p\,d\mu = \int_X |f|^p\,d\mu - \int_A |f|^p\,d\mu,$$

de donde deducimos

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\int_A |f_n|^p\,d\mu \leq \int_X |f|^p\,d\mu - \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_{X-A}|f_n|^p\,d\mu \qquad (189)$$

$$\leq \int_A |f|^p\,d\mu < \varepsilon.$$

Por otra parte, si $\gamma_p = \text{máx}\left\{1,\ 2^{p-1}\right\}$ es válida la desigualdad[94]

$$|\alpha - \beta|^p \le \gamma_p\ \left(|\alpha|^p + |\beta|^p\right),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}. \tag{190}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n = \gamma_p\ \left(|f|^p + |f_n|^p\right) - |f - f_n|^p$ es medible y no negativa. Por el lema de Fatou escribimos

$$2\gamma_p \int_A |f|^p \, d\mu \le \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A F_n d\mu \tag{191}$$

$$= \gamma_p \int_A |f|^p \, d\mu + \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A \left(\gamma_p \, |f_n|^p - |f - f_n|^p\right) d\mu.$$

---

[94]Por la homogeneidad de la inecuación (190), bastará ver la desigualdad siguiente:

$$\frac{|1+z|^p}{1+|z|^p} \le \text{máx}\left\{1,\ 2^{p-1}\right\},\ z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que podemos suponer $p \neq 1$ y $z \neq 0$. Usando coordenadas polares, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\frac{\left(1+2r\cos\theta + r^2\right)^{p/2}}{1+r^p} \le \text{máx}\left\{1,\ 2^{p-1}\right\},\ r>0,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Fijado $r > 0$ la función $g(\theta) = 1 + 2r\cos\theta + r^2,\ 0 \le \theta < 2\pi$, alcanza un valor máximo para $\theta = 0$, de manera que

$$\frac{\left(1+2r\cos\theta + r^2\right)^{p/2}}{1+r^p} \le \frac{(1+r)^p}{1+r^p},\ r>0.$$

Consideremos la función $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(r) = (1+r)^p / (1+r^p)$. Si $p > 1$ calculamos

$$h'(r) = \frac{p\,(1+r)^{p-1}\left(1-r^{p-1}\right)}{\left(1+r^p\right)^2}.$$

Observando los signos de la derivada anterior deducimos que h alcanza un máximo absoluto en $r = 1$ y $h(1) = 2^{p-1}$. Si $0 < p < 1$ tenemos

$$h'(r) = \frac{p\,(1+r)^p\left[(1+r)^{p-1} - r^{p-1}\right]}{\left(1+r^p\right)^2},$$

i.e. h tiene derivada negativa y, siendo decreciente, h alcanza su valor máximo en cero y $h(0) = 1$. Queda así probada la desigualdad (190).

De (189) y (191) resulta

$$\gamma_p \int_A |f|^p \, d\mu \le \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A (\gamma_p \, |f_n|^p - |f - f_n|^p) \, d\mu \tag{192}$$

$$\le \overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A \gamma_p \, |f_n|^p \, d\mu + \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A (-\,|f - f_n|^p) d\mu$$

$$< \varepsilon \; \gamma_p - \overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n|^p \, d\mu.$$

Como $\int_{X-A} |f - f_n|^p \;\; d\mu \to 0$ podemos escribir

$$\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_X |f - f_n|^p \;\; d\mu \le \overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n|^p \;\; d\mu$$

$$\le \left(\varepsilon - \int_A |f|^p \, d\mu \right) \; \gamma_p \le \varepsilon \; \gamma_p$$

y, como ε es arbitrario, sigue la tesis. □

6.14. Caracterización de funciones acotadas Riemann integrables. Funciones reales semicontinuas.

(i) Toda función real acotada semicontinua inferiormente (resp. semicontinua superiormente) sobre un intervalo $[a, b]$ es límite de una sucesión creciente de funciones escalera semicontinuas inferiormente (resp. es límite de una sucesión decreciente de funciones escalera semicontinuas superiormente).

(ii) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada resulta

$$\underline{R} \int_a^b f = \int_a^b \underline{\text{lím}} \; f, \quad \overline{R} \int_a^b f = \int_a^b \overline{\text{lím}} \; f, \tag{193}$$

donde

$$\underline{R}\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi : \ \varphi \le f,\ \varphi - \ escalera\right\},$$

$$\overline{R}\int_a^b f = \inf\left\{\int_a^b \psi : \psi \ge f,\ \psi - \ escalera\right\}.$$

(iii) Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre $[a,b]$ sii es continua a.e..

Solución

(i) Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada semicontinua inferiormente. Dado un entero positivo n indicaremos

$$x_{n,j} = a + (j/2^n)(b-a),\ 0 \le j \le 2^n,$$

y definimos $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$F_n(x) = \begin{cases} \inf_{x_{n,0} \le y < x_{n,1}} F(y) & si \quad x_{n,0} \le x < x_{n,1} \\ \inf_{x_{n,j-1} < y < x_{n,j}} F(y) & si \quad x_{n,j-1} < x < x_{n,j},\ 1 < j < 2^n, \\ \inf_{x_{n,2^n-1} < y \le x_{n,2^n}} F(y) & si \quad x_{n,2^n-1} < x \le x_{n,2^n}, \end{cases}$$

$$F_n(x_{n,j}) = \text{mín}\left\{\inf_{x_{n,j-1} < y < x_{n,j}} F(y),\ \inf_{x_{n,j} < y < x_{n,j+1}} F(y)\right\},\ 1 \le j < 2^n - 1. \tag{194}$$

Por (194), cada F_n es función escalera semicontinua inferiormente.

$$x_{n,j-1} = x_{n+1,2j-2} < x < x_{n+1,2j-1} \quad o \quad x_{n+1,2j-1} < x < x_{n+1,2j} = x_{n,j},$$

obteniendo en ambos casos que $F_n(x) \le F_{n+1}(x)$. Si $x = x_{n,j}$ para ciertos $n,\ j$, supondremos que n es mínimo con dicha propiedad. Dado $k \in \mathbb{N}$ veremos que

$$F_k(x) \le F_{k+1}(x). \tag{195}$$

Si $n=1$ y $j=0$ o $j=2$ tal desigualdad es inmediata. Además

$$x_{1,1} = x_{k,2^{k-1}} = x_{k+1,2^k},$$

$$F_k(x_{1,1}) = \text{mín}\left\{ \inf_{x_{k,2^{k-1}-1}<y<x_{k,2^{k-1}}} F(y)\,, \inf_{x_{k,2^{k-1}}<y<x_{k,2^{k-1}+1}} F(y) \right\},$$

$$F_{k+1}(x_{1,1}) = \text{mín}\left\{ \inf_{x_{k+1,2^k-1}<y<x_{k+1,2^k}} F(y)\,, \inf_{x_{k+1,2^k}<y<x_{k+1,2^k+1}} F(y) \right\},$$

$$x_{k,2^{k-1}-1} < x_{k+1,2^k-1} < x_{1,1} < x_{k+1,2^k+1} < x_{k,2^{k-1}+1},$$

de modo que $F_k(x_{1,1}) \leq F_{k+1}(x_{1,1})$. Suponiendo $1 \leq k < n$, por el carácter mínimo de n existe un único h, $1 \leq h \leq 2^k$, tal que

$$x_{k,h-1} = x_{k+1,2h-2} < x_{n,j} < x_{k,h} = x_{k+1,2h}. \tag{196}$$

Si $k = n-1$ entonces $j = 2h-1$,

$$F_k(x_{n,j}) = \text{mín}_{x_{k,h-1}<y<x_{k,h}} F(y)\,, \tag{197}$$

$$F_{k+1}(x_{n,j}) = F_{k+1}(x_{k+1,2h-1})\,,$$

$$= \text{mín}\left\{ \inf_{x_{k,h-1}<y<x_{k+1,2h-1}} F(y), \inf_{x_{k+1,2h-1}<y<x_{k,h}} F(y) \right\}$$

y, por (196) y (197), sigue (195). Si $k < n-1$ ha de ser

$$x_{k+1,2h-2} < x_{n,j} < x_{k+1,2h-1} \quad o \quad x_{k+1,2h-1} < x_{n,j} < x_{k+1,2h} \tag{198}$$

y (195) sigue ahora de (196), (198) y las definiciones de F_k y F_{k+1}. Finalmente, si $k \geq n$ resulta $x_{n,j} = x_{k,2^{k-n}j} = x_{k+1,2^{k-n+1}j}$ y basta razonar como en los casos anteriores. Probado que $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones escalera semicontinuas inferiormente probamos que $F = \text{lím}_{n\to+\infty} F_n$ puntualmente. Si $x_0 \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$ es $F(x_0) - \varepsilon < \underline{\text{lím}}_{z\to x_0} F(z)$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$F(x_0) - \varepsilon < F(z) \quad si \quad z \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,. \tag{199}$$

Sea $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)/2^{r_0} < \delta$, $r \geq r_0$ en $\mathbb{N}$, $1 \leq s \leq 2^r$ el único entero tal que $x_{r,s-1} \leq x_0 \leq x_{r,s}$. Por (199), las presentes condiciones y la definición de F_r podemos concluir que $F_r(x_0) \geq F(x_0) - \varepsilon$ y queda probada nuestra afirmación. La demostración para funciones acotadas semicontinuas superiormente sigue análogamente.

(ii) Probaremos la primer identidad pues la segunda sigue análogamente. Como f es acotada su límite inferior es semicontinuo inferiormente o, equivalentemente, para todo $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\underline{\text{lím}}\ f > r\}$ es abierto. Luego $\underline{\text{lím}}\ f$ es medible, pues se realiza como límite de una sucesión creciente de funciones escalera semicontinuas inferiormente. En consecuencia, está definida la integral de Lebesgue en (193). Fijada una función escalera φ sobre $[a,b]$ tal que $\varphi \leq f$ resulta $\varphi \leq \underline{\text{lím}}\ f$ salvo un número finito de puntos, de modo que $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \underline{\text{lím}}\ f$. Como φ es arbitraria $\underline{R}\int_a^b f \leq \int_a^b \underline{\text{lím}}\ f$. Por otra parte, si $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones escalera sci que converge a $\underline{\text{lím}}\ f$ en todo punto, por el teorema de convergencia monótona tenemos

$$\int_a^b \underline{\text{lím}}\ f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n \leq \underline{R}\int_a^b f$$

y tenemos (i).

(ii) f es continua a.e. sii $\overline{\text{lím}}\ f = \underline{\text{lím}}\ f$ a.e., y basta considerar (ii). □

6.15. Sobre el gráfico de funciones medibles (Lebesgue) no negativas. Teorema de Tonelli y subconjuntos no medibles en espacios producto. El álgebra de Banach de medidas complejas Borel - regulares sobre $\mathbb{R}$ y subconjuntos de medidas discretas, continuas y absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue.

(i) Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ medible Lebesgue,

$$A(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < f(x)\right\},$$

$A(f)$ es medible, $\int_{\mathbb{R}} f = |A(f)|$ es la medida bidimesional de $A(f)$, graf(f) es medible y tiene medida nula.

(ii) Sea χ_1 el primer ordinal no numerable, X un conjunto de cardinal χ_1, Ξ la $\sigma-$ álgebra de partes numerables o de complemento numerable de X. Sea $\mu : \Xi \to \{0,1\}$, $\mu(A) = 0$ o 1 según $A \in \Xi$ sea numerable o no numerable respectivamente. Si $A = \{(\alpha,\beta) \in X \times X : \ \alpha < \beta\}$ entonces

$$\int_X \varkappa_A(\alpha,\beta) \ d\mu(\alpha) \neq \int_X \varkappa_A(\alpha,\beta) \ d\mu(\beta),$$

pero no es aplicable el teorema de Tonelli.

(iii) Sea E subconjunto de $[0,1]\times[0,1]$ tal que E_x y $[0,1]-E^y$ son numerables para todo $x, \ y \in [0,1]$. Entonces E es no medible en el espacio producto. [95]

(iv) Sea $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de medidas complejas de Borel regulares sobre $\mathbb{R}$, con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$ para cada $\mu \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Para $\mu, \ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ y $E \subseteq \mathbb{R}$ boreliano definimos

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)\left(\Phi^{-1}(E)\right),$$

donde $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = x + y$. Si $\mu, \ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ entonces $\mu \times \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$, $\|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\| \|\lambda\|$ y $\mu * \lambda$ es la única medida de Borel ν sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$(\forall f), \ f \in C_0(\mathbb{R}) : \ \int_{\mathbb{R}} f \ d\nu = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) \ d(\mu \times \lambda).$$

Entonces que $(\mathrm{MB}(\mathbb{R}), \|\circ\|, *)$ deviene en álgebra de Banach abeliana unitaria.

(v) El subconjunto de medidas discretas es una subálgebra de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$.

(vi) El subconjunto de medidas continuas es un ideal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$.

(vii) El subconjunto $\mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$ de medidas absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue es un ideal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$ que es algebraicamente isométricamente isomorfo a $L^1_{dx}(\mathbb{R})$, donde dx es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

[95] En general, si $X, \ Y$ son conjuntos no vacíos, $S \subseteq X \times Y$, $x \in X, \ y \in Y$, escribimos

$$S_x = \{y \in Y : \ (x,y) \in S\}, \ S^y = \{x \in X : \ (x,y) \in S\}.$$

Solución

(i) La función $F : \mathbb{R}\times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y - f(x)$, es medible. En efecto, $F = p_2 - f\circ p_1$, donde $p_1,\ p_2$ son las proyecciones de $\mathbb{R}\times (0,\infty)$ sobre $\mathbb{R}$ y $(0,\infty)$ respectivamente. Estas proyecciones son medibles pues son continuas. Basta observar que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ entonces $p_1^{-1}(E)$ también lo es, ya que $p_1^{-1}(E) = E\times(0,\infty)$ es producto de conjuntos medibles. Como

$$A(f) = \{(x,y)\in \mathbb{R}\times (0,\infty) :\ F(x,y) < 0\}$$

entonces $A(f)$ resulta medible. Por el teorema de Tonelli escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}}\int_0^{f(x)} dy\ dx = \int\int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \varkappa_{A(f)}(x,y)\, d(x\times y) = |A(f)|\,.$$

$\operatorname{graf}(f)$ es medible porque $\operatorname{graf}(f) = F^{-1}\{0\}$. Si $n\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ los conjuntos $U_{n,\varepsilon} = \{(x,y) :\ |x| < n/2,\ |F(x,y)| < \varepsilon/(n2^{n+1})\}$ son abiertos en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ y cubren a $\operatorname{graf}(f)$. Además, por el teorema de Tonelli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_{n,\varepsilon}| = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-n/2}^{n/2}\int_{f(x)-\varepsilon/(n2^{n+1})}^{f(x)+\varepsilon/\left(n2^{n+1}\right)} 1\ dy\ dx = \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario $|\operatorname{graf}(f)| = 0$.

(ii) Si $\alpha\in X$ el conjunto $A_\alpha = \{\beta\in X :\ \alpha<\beta\}$ es no numerable de complemento numerable, i.e. $A_\alpha\in\Xi$. Asimismo, si $\beta\in X$ el conjunto $A^\beta = \{\alpha\in X :\ \alpha<\beta\}$ es numerable, de modo que pertenece a Ξ.

$$\int_X \varkappa_A(\alpha,\beta)\ d\mu(\beta) = \mu(A_\alpha) = 1,\ \int_X \varkappa_A(\alpha,\beta)\ d\mu(\alpha) = \mu\left(A^\beta\right) = 0.$$

El teorema de Tonelli no es aplicable pues (X,Ξ,μ) no es espacio de medida finita.

(iii) Si $x,\ y\in[0,1]$ obtenemos

$$\int_0^1 \varkappa_E(x,y)\ dx = \int_0^1 \varkappa_{E^y}(x)\ dx = 1,$$

$$\int_0^1 \varkappa_E(x,y)\ dy = \int_0^1 \varkappa_{E_x}\ (x,y)\ dy = 0.$$

Como el espacio producto con la medida de Lebesgue es espacio de medida finita, del teorema de Tonelli concluímos que E es necesariamente no medible.

(iv) $(\mathrm{MB}(\mathbb{R}), \|\circ\|, *)$ es espacio de Banach, en cuanto se realiza, por el teorema de representación de funcionales lineales continuas sobre $C_0(\mathbb{R})$, como dual sobre $\mathbb{C}$ de un espacio normado. Si $\mu,\ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ entonces $\mu * \lambda$ está bien definida porque Φ es función continua y, por ello, boreliana. Evidentemente $\mu * \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ y, si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una partición disjunta de subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$ tenemos (cf. [43], Ch. 7, Th. 7.6 - Def. 7.7, page 148)

$$\sum_{n=1}^{m} |(\mu * \lambda)(E_n)| = \sum_{n=1}^{m} \left|(\mu \times \lambda)\left(\Phi^{-1}(E_n)\right)\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left|\int_{\mathbb{R}} \lambda\left(\Phi^{-1}(E_n)_x\right)\ d\mu(x)\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left|\int_{\mathbb{R}} \lambda(E_n - x)\ d\mu(x)\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{m} |\lambda(E_n - x)|\ d|\mu|(x) \leq \|\lambda\|\,\|\mu\|.$$

Siendo $\{E_n\}_{n\geq 1}$ arbitraria, $\|\mu * \lambda\| \leq \|\lambda\|\,\|\mu\|$. Si $g \in C_c(\mathbb{R})$ escribimos

$$\langle g, \Lambda\rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)\ d(\mu \times \lambda).$$

Λ está bien definida, es lineal y $|\langle g, \Lambda\rangle| \leq \|g\|_\infty \|\mu * \lambda\|$ para cada $g \in C_c(\mathbb{R})$. Por ser $C_c(\mathbb{R})$ denso en $C_0(\mathbb{R})$ el operador Λ se extiende naturalmente a $C_0(\mathbb{R})$ y, con abuso de notación,

$$\Lambda \in C_0(\mathbb{R})^* \quad y \quad \|\Lambda\| \leq \|\mu * \lambda\|.$$

Más aún, si $g \in C_0(\mathbb{R})$ existe $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ (v. Problema 5.6(ii)). Como la convergencia es uniforme y $\mu * \lambda$ es medida finita, por el teorema de Lebesgue obtenemos

$$\langle g, \Lambda \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle g_n, \Lambda \rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) \ d(\mu \times \lambda).$$

Basta finalmente invocar el teorema de representación de Riesz de funcionales sobre $C_0(\mathbb{R})$ (cf. [43], Ch. 6, Th. 6.19, page 139). La conmutatividad de $*$ sigue aplicando el teorema de Fubini. Finalmente, si $\mu \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$. $f \in C_0(\mathbb{R})$ y δ es la medida de Borel concentrada en $\{0\}$ por el teorema de Fubini

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) \ d(\mu * \delta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \ d\mu(x) \ d\delta(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \ d\mu(x).$$

Por lo anterior deducimos que $\mu * \delta = \mu$ y sigue (iii).

(v) El subconjunto de medidas discretas de Borel es un subespacio lineal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Dadas $\mu, \ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$, $\mu * \lambda$ es discreta si μ y λ lo son. En efecto, sean A y B subconjuntos borelianos numerables de $\mathbb{R}$ en los que se concentran μ y λ respectivamente. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es boreliano, por el teorema de Fubini escribimos

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu\left(\Phi^{-1}(E)^t\right) \ d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu(E-t) \ d\lambda(t) = \int_B \int_{(E-t)\cap A} 1 \, d\mu(s) \ d\lambda(t)$$

$$= \int\int_{(E\cap(A+B))\times B} 1 \ d(\mu \times \lambda).$$

En consecuencia $\mu * \lambda$ está concentrada en el conjunto numerable $A+B$.

(vi) El subconjunto de medidas continuas de Borel es un subespacio lineal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Si μ es una medida continua de Borel, $\lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ es

$$(\mu * \lambda)(\{x\}) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x-t\}) \ d\lambda(t) = 0$$

y siendo x arbitrario $\mu * \lambda$ resulta continua.

(vii) Es claro que $\mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$ es subespacio lineal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Sean

$$\lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R}), \mu \in \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R}),$$

$E \subseteq \mathbb{R}$ boreliano de medida de Lebesgue nula. Entonces

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(E-t) \ d\lambda(t) = 0$$

pues la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones y $\mu \ll dx$. Como E es arbitrario $\mu * \lambda \ll dx$. Sea

$$\Pi : \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R}) \to L^1_{dx}(\mathbb{R}), \ \Pi(\mu) = d\mu/dx,$$

esto es, la derivada de Radon - Nikodym de μ respecto a la medida de Lebesgue. Si $\mu_1, \ \mu_2 \in \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ y $F \subseteq \mathbb{R}$ es boreliano tenemos

$$\left(\int_F a \ \frac{d\mu_1}{dx} + \frac{d\mu_2}{dx}\right) \ dx = a \int_F \frac{d\mu_1}{dx} \ dx + \int_F \frac{d\mu_2}{dx} \ dx$$

$$= (a\mu_1 + \mu_2)(F) = \int_F \frac{d(a\mu_1 + \mu_2)}{dx} \ dx.$$

Como F es arbitrario $\Pi(a\mu_1 + \mu_2) = a\Pi(\mu_1) + \Pi(\mu_2)$ y Π resulta lineal. Además

$$\int_F d(\mu_1 * \mu_2)/dx \ dx = (\mu_1 * \mu_2)(F) \tag{200}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu_1(F-t) \ d\mu_2(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_F \frac{d\mu_1}{dx}(x-t) \ dx \ \frac{d\mu_2}{dt}(t) \ dt.$$

Por el teorema de Tonelli

$$\int\int_{\mathbb{R}\times F} \left| \frac{d\mu_1}{dx}(x-t) \frac{d\mu_2}{dt}(t) \right| d(t \times x) \leq \|\mu_1\| \|\mu_2\| < \infty$$

y, por el teorema de Fubini aplicado en (200) obtenemos

$$\int_F d(\mu_1 * \mu_2)/dx \; dx = \int_F \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_1}{dx}(x-t) \; \frac{d\mu_2}{dt}(t)\, dt\, dx$$

$$= \int_F \frac{d\mu_1}{dx} * \frac{d\mu_2}{dt} \; dx.$$

Por lo tanto $\Pi(\mu_1 * \mu_2) = \Pi(\mu_1) * \Pi(\mu_2)$. Si $\mu \in \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$ es

$$\|\Pi(\mu)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |d\mu/dx| \; dx = \|\mu\|$$

(cf. [43], Ch. 6, Th. 6.13, page 134). Por otra parte si $f \in L^1_{dx}(\mathbb{R})$ entonces $f\ dx \in \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$ y $\Pi(f\ dx) = f$. Por el teorema de la función abierta Π deviene isomorfismo isométrico. $\square$

6.16. Medidas sobre $(0, +\infty)$ no extendibles a una medida sobre $\mathbb{R}$. Convergencias débil y en norma de medidas reales sobre $[0,1]$. Sucesiones equirepartidas respecto a una medida definida sobre un espacio compacto. Sobre la no continuidad de la aplicación natural $C_{\mathbb{C}}(X) \times \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathbb{C}$ siendo X espacio compacto separado infinito. Local debil compacidad del cono de medidas positivas sobre un espacio compacto.

(i) La medida dx/x sobre $(0, +\infty)$ no es extendible a una medida sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Si $t \in [0,1]$ indicamos δ_t a la medida (de Dirac) concentrada en $\{t\}$. Entonces $\delta_0 - \delta_{1/n} \ \underset{\rightarrow}{w}\ 0$ y $\left|\delta_0 - \delta_{1/n}\right| \ \underset{\rightarrow}{w}\ 2\delta_0$.

(iii) $(1 - \sin(nx))\, dx \ \underset{\rightarrow}{w}\ dx$ pero $(1 - \sin(nx))\, dx \nrightarrow dx$ en norma en $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}([0,1])$. [96]

[96] En general, si X es un espacio localmente compacto indicamos $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}(X)$, $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$ a los espacios de funcionales lineales acotadas sobre $C_0(X)$, reales y complejas, respectivamente.

(iv) Sea X espacio compacto, μ medida positiva sobre X de norma uno, $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión en X. Para que $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ esté *equirepartida respecto a* μ, i.e. $(\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n})/n \underset{\rightarrow}{w} \mu$, es necesario y suficiente que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_k(x_j) \to \int_X f_k \, d\mu \tag{201}$$

para cada k, donde $(f_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión total en $C_{\mathbb{C}}(X)$.

(v) Sea X espacio compacto Hausdorff infinito. Considerando $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$ munido de la topología débil, la aplicación

$$\Xi : C_{\mathbb{C}}(X)\times \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathbb{C}, \quad \Xi(f,\mu) = \int_X f \, d\mu$$

no es continua. [97]

(vi) Si X es compacto, el espacio de medidas positivas $\mathrm{M}_{+}(X)$, con la topología débil, es localmente compacto.

Solución

(i) Si n es entero no menor que 2 definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx) & si \quad |x| \leq \pi/(2n) \\ 1 & si \quad \pi/(2n) \leq |x| \leq 1 \\ 2-x^2 & si \quad 1 \leq |x| \leq \sqrt{2} \\ 0 & si \quad \sqrt{2} \leq |x|. \end{cases}$$

[97] Aplicando el principio de acotación uniforme, si

$$\{f\}\cup\{f_a\}_{a\in A} \subseteq C_{\mathbb{C}}(X), \ \{\mu\}\cup\{\mu_a\}_{a\in A} \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X),$$

$$\lim_{a\in A} \|f_a - f\| = 0, \quad \mu_a \underset{\rightarrow}{w} \mu$$

entonces $\langle f_a,\mu_a\rangle \to \langle f,\mu\rangle$. Este hecho, junto a (v), determinan la no metrizabilidad de la topología débil de $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$. Precisamente, la propiedad anterior establece la continuidad puntual de Ξ. Dicha continuidad, junto a la separabilidad que induciría la metrizabilidad, implicarían la continuidad de Ξ contrariamente a (v).

Entonces $\{f_n\}_{n\geq 2} \subseteq C_c(\mathbb{R})$ y $\|f_n\|_\infty \leq 1$ para todo n. Si μ fuere una medida sobre $\mathbb{R}$ que extiende a dx/x, para todo n tendríamos

$$\|\mu\| \geq \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \ d\mu \right| > 2 \int_{\pi/(2n)}^{1} \frac{dx}{x} = 2 \ \ln(2n/\pi),$$

lo cual es imposible.

(ii) La primer afirmación es evidente. Por otra parte, $\delta_0 - \delta_{1/n}$ es una medida real y, evidentemente,

$$\left(\delta_0 - \delta_{1/n}\right)^+ = \delta_0, \ \left(\delta_0 - \delta_{1/n}\right)^- = \delta_{1/n},$$

de manera que $\left|\delta_0 - \delta_{1/n}\right| = \delta_0 + \delta_{1/n}$ y $\left|\delta_0 - \delta_{1/n}\right| \ \underset{\rightarrow}{w} \ 2\delta_0$.

(iii) Si $p \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ es una función polinómica sigue fácilmente que

$$\langle p, (1 - \sin(nx))\, dx\rangle \to \langle p, dx\rangle.$$

En general, basta considerar la densidad de las funciones polinómicas en $C_{\mathbb{R}}[0,1]$. Por otra parte, si $n \geq 4$ tenemos

$$\|\sin(nx) \ dx\| = \int_0^1 |\sin(nx)| \ dx = \frac{1}{n}\int_0^n |\sin(nx)| \ dx$$

$$= (2/n) \ [n/\pi] + \frac{(-1)^{[n/\pi]}}{n} \int_{[n/\pi]\pi}^{n} \sin(nx) \ dx$$

$$= (2/n) \ [n/\pi] + \left(1 + (-1)^{[n/\pi]+1} \cos n\right)/n$$

$$> 2/\pi + \left((-1)^{[n/\pi]+1} \cos n\right)/n.$$

Luego $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \|\sin(nx) \ dx\| \geq 2/\pi$ y sigue (iii).

(iv) La necesidad es inmediata. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión total en $C_{\mathbb{C}}(X)$ y asumamos válida (201) para cada k. Sean $f \in C_{\mathbb{C}}(X)$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$

tal que $\|f-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\|_{\infty} \leq \varepsilon/3$ para ciertas constantes $\{a_k\}_{1\leq k\leq m}$ en $\mathbb{C}$. Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_0$ en $\mathbb{N}$ es

$$\left|\left\langle \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k,\ \frac{\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n}}{n}\right\rangle - \int_X \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\ d\mu\right| \leq \varepsilon/3.$$

Entonces

$$\varepsilon \geq 2\left\|f-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\right\|_{\infty} + \varepsilon/3$$

$$\geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f(x_j)-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k(x_j)\right| + \left|\int_X \left(f-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\right)\ d\mu\right| +$$

$$+\left|\left\langle \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k,\ \frac{\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n}}{n}\right\rangle - \int_X \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\ d\mu\right|$$

$$\geq \left|\left\langle f,\ \frac{\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n}}{n}\right\rangle - \int_X f\ d\mu\right|.$$

Como ε y f son arbitrarios sigue la afirmación.

(v) Si Ξ es continua, como $\Xi(0,0)=0$ existen $\zeta>0$, $\mathcal{F}\in\mathcal{P}_f(C_{\mathbb{C}}(X))$ tales que $B(0,\zeta)\times\mathfrak{Q}\subseteq\div^{-1}[D(0,1)]$, donde

$$\mathfrak{Q}=\cap_{g\in\mathcal{F}}\{\eta\in \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X):\ \ |\langle g,\eta\rangle|<1\}.$$

Como X es compacto Hausdorff infinito $C_{\mathbb{C}}(X)$ tiene dimensión infinita.[98] Sea $S=\mathrm{cl}\,(\mathrm{gen}_{\mathbb{C}}\mathcal{F})$, $f\notin S$, $f_0=\zeta f/(2\|f\|_{\infty})$,

$$s: S\bigoplus\mathbb{C}\cdot f_0\to\mathbb{C},\quad s(h+a\cdot f_0)=2a,\ h\in S,\ a\in\mathbb{C}.$$

Claramente s está bien definida, es lineal y si $a\neq 0$ tenemos

$$\|h+a\cdot f_0\|=|a|\,\|h/a+f_0\|\geq|a|\ \mathrm{dist}\,(f_0,S),$$

[98]Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión inyectiva de puntos de X sea $f_j:X\to[0,1]$ continua tal que $f_j(x_{2j-1})=0,\ f_j(x_{2j})=1,\ j\in\mathbb{N}$. Entonces $\{f_j\}_{j\geq 1}$ es linealmente independiente.

i.e. $|s(h+a\cdot f_0)|\leq[2/\operatorname{dist}(f_0,S)]\,\|h+a\cdot f_0\|$, desigualdad válida también para $a=0$. Por el teorema de Hahn - Banach existe una extensión $\mu\in\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$ de s. En particular, $\mu\in\mathfrak{Q}$ pues $\langle g,\mu\rangle=0$ si $g\in\digamma$. Pero $\|f_0\|=\zeta/2$ y $\Xi(f_0,\mu)=2$, una contradicción por la cual deducimos (v).

(vi) La aplicación $\Psi:\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)\to\mathbb{C}$, $\langle\mu,\Psi\rangle=\langle 1,\mu\rangle$ es lineal y $w-$ continua. Luego $\Psi\,|_{\mathrm{M}_+(X)}$: $\mathrm{M}_+(X)\to[0,+\infty)$ es $w-$ continua. Si $\mu_0\in\mathrm{M}_+(X)$ hay un entorno débil V de μ_0 tal que $V\cap\mathrm{M}_+(X)\subseteq\Psi^{-1}[0,2\|\mu_0\|)$. En consecuencia, si $f\in C_{\mathbb{C}}(X)$ y $\mu\in V\cap\mathrm{M}_+(X)$ escribimos

$$|\langle f,\mu\rangle|\leq\|\mu\|\,\|f\|=\langle\mu,\Psi\rangle\,\|f\|\leq 2\,\|\mu_0\|\,\|f\|,$$

i.e. $\sup_{\mu\in V\cap\mathrm{M}_+(X)}|\langle f,\mu\rangle|<+\infty$. Por el teorema de acotación uniforme $V\cap\mathrm{M}_+(X)$ deviene acotado en norma y, por lo tanto, es débilmente acotado en $\mathrm{M}_+(X)$. Por el teorema de Banach - Alaoglu, como $\mathrm{M}_+(X)$ es débilmente separado y la clausura de conjuntos acotados es acotada, deducimos que $\mathrm{M}_+(X)$ es localmente compacto. $\square$

6.17. Funciones de Rademacher e independencia estocástica. Caracterización de la convergencia de series $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,f_n(x)$, en las que $\{c_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales y $\{f_n\}_{n\geq 0}$ son las funciones de Rademacher. Sobre integración del producto de funciones estocásticamente independientes en espacios de probabilidad. Lema de Borel - Catelli. Sobre una medida en el espacio producto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. El espacio $L^p_{\mathbb{C}}([0,1],dx)$, $1\leq p\leq\infty$, y espacios de Lebesgue asociados a cierta partición de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Un sistema ortonormal no total de $L^2_{\mathbb{C}}([0,1],dx)$.

(i)(1) Consideremos las funciones de Rademacher:

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ \ f_n=\sum_{i=1}^{2^n}(-1)^i\ \varkappa_{[(i-1)/2^n,i/2^n)},\ n\in\mathbb{N}_0. \tag{202}$$

En particular, dos cualesquiera de $f_1,\ f_2$ y $f_1 \cdot f_2$ son *estocásticamente independientes*[99], no siéndolo conjuntamente.

(i)(2) Si $\{c_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ f_n(x)$ converge o diverge a.e. si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ converge o diverge respectivamente.

(ii)(1) Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $f,\ g$ funciones integrables, no nulas, independientes, $B \subseteq \mathbb{R}$ boreliano. Entonces

$$\int_{f^{-1}(B)} fg\ d\mu = \int_{f^{-1}(B)} f\ d\mu\ \int_X g\ d\mu.$$

(ii)(2) (lema de Borel - Catelli) Si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos independientes, $\mu(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n) = 0$ sii $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty$.

(iii) Consideremos $\{0,1\}$ con la topología discreta. Sea μ medida sobre $\mathcal{P}(\{0,1\})$ tal que $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2$. En el espacio compacto $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sea μ_X la medida producto, definida sobre la $\sigma-$ álgebra generada por partes de X del tipo $A_1 \times A_2 \times ...$ en las que, salvo un número finito de $n\acute{}\, s$, $A_n = \{0,1\}$ (cf. [19], Ch. VII, §38, Th. B, page 154).

(iii)(1) La aplicación $\pi : X \to [0,1]\,,\ \pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n,\ x \in X$, es continua.

(iii)(2) Si $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es medible y tiene $\mu-$ medida nula.

(iii)(3) El conjunto Y de elementos x de X para los que $x_n = 1$ salvo finitos $n\acute{}\, s$ es medible de medida nula.

[99] Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y Θ es un conjunto de funciones medibles, se dice que Θ es *estocásticamente independiente* (o simplemente *independiente*) si para todo $F \in \mathcal{P}_f(\Theta)$ y para conjuntos borelianos $\{B_f\}_{f\in F}$ en $\mathbb{C}$ es

$$\mu\left(\bigcap_{f\in F} \{x \in X : f(x) \in B_f\}\right) = \prod_{f\in F} \mu\{x \in X : f(x) \in B_f\}.$$

(iii)(4) [100]Si $x \in X - Y$ sea $\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$. Entonces π define una correspondencia biyectiva entre $X - Y$ y $[0,1)$. Si $0 \leq a < b \leq 1$ el conjunto $\pi^{-1}([a,b))$ es medible y $\mu(\pi^{-1}([a,b))) = b - a$.

(iv)(1) Identifiquemos los elementos $x,\ x' \in X$ tales que $\pi(x) = \pi(x')$. El espacio cociente, al que por abuso de notación indicaremos X, deviene compacto con la topología cociente y es homeomorfo a $[0,1]$ vía la aplicación π. Asimismo, podemos suponer que la medida producto es completa. Si $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ y $L^p_{\mathbb{C}}(X, d\mu)$ son isométricamente isomorfos.

(iv)(2) Para $n \in \mathbb{N}$ indicamos $\pi_n : X \to \{0,1\}$ a la proyección canónica a la $n-$ ésima coordenada. Con la notación (i)(1), $f_n(t) = 1 - 2\pi_n(\pi^{-1}(t))$ si t no es de la forma $k/2^m$, $k,\ m \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq k \leq 2^m$, $f_n(t) = 0$ en otro caso[101]. Las funciones $\{f_n\}_{n \geq 0}$ forman un sistema ortonormal no total de $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$.

Solución

(i)(1) Indicaremos $g_1 = f_1,\ g_2 = f_2,\ g_3 = f_1 \cdot f_2$. Entonces

$$g_1 = -\varkappa_{[0,1/2)} + \varkappa_{[1/2,1)}, \tag{203}$$

$$g_2 = -g_3 = -\varkappa_{[0,1/4)} + \varkappa_{[1/4,1/2)} - \varkappa_{[1/2,3/4)} + \varkappa_{[3/4,1)}.$$

Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es boreliano e $i = 1,\ 2,\ 3$ resulta $g_i^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\{-1,0,1\})$ y

[100]En este punto consideramos $X - Y$ como subespacio de medida de X.

[101]Si $n \in \mathbb{N}$ es fácil ver que $f_n(t) = -\operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$, $t \in [0,1]$.

tenemos el siguiente arreglo:

$\boxed{\mathcal{P}(\{-1,0,1\})}$	$\boxed{g_1^{-1}(B)}$	$\boxed{g_2^{-1}(B)}$	$\boxed{g_3^{-1}(B)}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{-1\}$	$\left[0,\frac{1}{2}\right)$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$	$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\left[\frac{1}{2},1\right)$	$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right)$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right)$
$\{-1,0\}$	$\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\cup\{1\}$	$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\cup\{1\}$
$\{-1,1\}$	$[0,1)$	$[0,1)$	$[0,1)$
$\{0,1\}$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$
$\{-1,0,1\}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$

Si m es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, del arreglo anterior sigue que las medidas de las preimágenes de cualquier boreliano de $\mathbb{R}$ por $g_1,\ g_2$ o g_3 son $0,\ 1/2, 1$. Observamos que en cada columna hay básicamente dos subconjuntos de medida $1/2$ iguales, salvo conjuntos de medida nula. Si $B_1,\ B_2,\ B_3$ son borelianos en $\mathbb{C}$ y

$$m\left(\{g_i\in B_i\}\right)=m\left(\{g_j\in B_j\}\right)=1/2,\ 1\leq i<\ j\leq 3,$$

la condición de independencia sigue del análisis de tres casos (salvo conjuntos de medida nula). Si $m\left(g_i^{-1}\left(B_j\right)\right)=0$ para algún par de índices se verifica claramente, en todo caso, la condición de independencia. Si $m\left(\{g_i\in B_i\}\right)=1$, como $m\left(\{g_i\notin B_i\}\right)=0$ tenemos

$$\begin{aligned} m\left(\{g_j\in B_j\}\right) &= m\left(\{g_i\in B_i\}\cap\{g_j\in B_j\}\right) \\ &= m\left(\{g_i\in B_i\}\right)\cdot m\left(\{g_j\in B_j\}\right) \end{aligned}$$

y sigue así la primera parte. Finalmente, como

$$0 = m\left(x \in [0,1] : \{g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)\} \subseteq [0,1]\right),$$

$$1/8 = m\left(\{g_1 \in [0,1]\}\right) \cdot m\left(\{g_2 \in [0,1]\}\right) \cdot m\left(\{g_3 \in [0,1]\}\right),$$

$\{g_1,\ g_2,\ g_3\}$ no es estocásticamente independiente.

(i)(2) La sucesión $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funciones de Rademacher es estocásticamente independiente. En efecto, sean $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}_0)$, $\{B_n\}_{n\in F}$ subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ y veamos que

$$m\left(\bigcap_{n\in F} f_n^{-1}(B_n)\right) = \prod_{n\in F} m\left(f_n^{-1}(B_n)\right). \tag{204}$$

Si para algún $n \in F$ el conjunto $\{-1,0,1\} \cap B_n$ es vacío o $\{0\}$ ambos miembros en (204) son nulos. Si $\{-1,1\} \subseteq B_n$ o $\{-1,0,1\} \subseteq B_n$ entonces $m\left(f_n^{-1}(B_n)\right) = 1$. Podemos suponer $\sharp\left(\{-1,1\} \cap B_n\right) = 1$ para cada $n \in F$. Si $k \in \mathbb{N}$ es inmediato que

$$m\left(\{f_k = 1\}\right) = m\left(\{f_k = -1\}\right) = 2^{-1}.$$

Entonces, si $\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_k \in \{-1,1\}$ y $n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N}$ es

$$2^{-2} = m\left(\{f_{n_1} = \varepsilon_1,\ f_{n_2} = \varepsilon_2\}\right),$$

$$2^{-3} = m\left(\{f_{n_1} = \varepsilon_1,\ f_{n_2} = \varepsilon_2,\ f_{n_3} = \varepsilon_3\}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2^{-k} = m\left(\{f_{n_1} = \varepsilon_1,\ \dots,\ f_{n_k} = \varepsilon_k\}\right).$$

Entonces

$$m\left(\bigcap_{n\in F} f_n^{-1}(B_n)\right) = 2^{-\sharp F} = \prod_{n\in F} 2^{-1} = m\left(\bigcap_{n\in F} f_n^{-1}(B_n)\right).$$

Tenemos $\int_0^1 f_n\ dm = 0$ y $\sigma^2(f_n) = 1$ para cada n (i.e. cada f_n tiene *varianza* uno[102]). En general, si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones independientes sobre un espacio de probabilidad (X, Σ, μ) y existe $c > 0$ tal que $|g_n| \leq c$ a.e. $[\mu]$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge a.e. $[\mu]$ sii las series $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n\ d\mu$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ son convergentes (cf. [19], Ch. IX, Sec. 46, Th. D, page 199), de donde sigue (i)(2).

(ii)(1) fg es integrable porque f y g son independientes e integrables.[103] Además $\varkappa_{f^{-1}(B)} = \varkappa_B \circ f$ es medible, $f \cdot \varkappa_{f^{-1}(B)}$ es evidentemente integrable. Como $\varkappa_B \circ f$ y g son independientes [104] obtenemos

$$\int_{f^{-1}(B)} fg\ d\mu = \int_X \left(f \cdot \varkappa_{f^{-1}(B)}\right) \cdot g\ d\mu$$

$$= \int_X f \cdot \varkappa_{f^{-1}(B)}\ d\mu \int_X g\ d\mu = \int_{f^{-1}(B)} f\ d\mu \int_X g\ d\mu.$$

(ii)(2) $\{\varkappa_{E_n}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones independientes, para lo cual basta ver que para cualquier par de subconjuntos disjuntos finitos F y G de $\mathbb{N}$ es

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F,\ j\in G} E_i - E_j\right) = \prod_{i\in F,\ j\in G} \mu(E_i)\left(1 - \mu(E_j)\right).$$

Fijados F y G, en un primer caso, como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos independientes podemos suponer $G \neq \emptyset$. Si $G = \{j_1\}$ te-

[102] Si (X, Σ, μ) es un espacio de probabilidad y $f : X \to \mathbb{R}$ es integrable, se define la *varianza* de f como $\sigma^2(f) = \int_X \left(f - \int_X f\ d\mu\right)^2 d\mu$.

[103] Si $f_1,\ f_2$ son funciones independientes, su producto es integrable sii ambas lo son, en cuyo caso $\int_X f_1 \cdot f_2\ d\mu = \int_X f_1\ d\mu = \int_X f_2\ d\mu$ (cf. [19], Ch. IX, Sec. 45, Th. A, page 193).

[104] Sean $\{f_{i,j} :\ 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n_i\}$ conjunto de funciones independientes, $\{\phi_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq k\}$ funciones borelianas,

$$f_i(x) = \phi_i(f_{i,1}(x),\ \dots,\ f_{i,n_i}(x)),\ x \in X,\ 1 \leq i \leq k.$$

Entonces $f_1,\ \dots,\ f_k$ son independientes (cf. [19], Ch. IX, Sec. 45, Th. B, page 193).

nemos

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F} E_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i\in F\cup\{j_1\}} E_i \bigcup \bigcap_{i\in F} E_i - E_{j_1}\right)$$

$$= \mu\left(\bigcap_{i\in F\cup\{j_1\}} E_i\right) + \mu\left(\bigcap_{i\in F} E_i - E_{j_1}\right),$$

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F} E_i - E_{j_1}\right) = \prod_{i\in F}\mu\left(E_i\right) - \prod_{i\in F\cup\{j_1\}}\mu\left(E_i\right)$$

$$= \left(1-\mu\left(E_{j_1}\right)\right)\prod_{i\in F}\mu\left(E_i\right).$$

Supongamos el resultado cierto para $\sharp G < n_1,\ n_1 > 1$, y sea G un subconjunto de n_1 enteros positivos, digamos $G = \{j_s\}_{1\leq s\leq n_1}$. Como

$$\bigcap_{\substack{i\in F,\\ 1\leq k\leq n_1-1}} E_i - E_{j_k} = \bigcap_{\substack{i\in F,\\ 1\leq k\leq n_1}} E_i - E_{j_k} \bigcup \bigcap_{\substack{i\in F\cup\left\{j_{n_1}\right\},\\ 1\leq k\leq n_1-1}} E_i - E_{j_k}$$

y la unión es disjunta, por la hipótesis inductiva tenemos

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F,\ 1\leq k\leq n_1} E_i - E_{j_k}\right) = \prod_{i\in F,\ 1\leq k\leq n_1}\mu\left(E_i\right)\ \left(1-\mu\left(E_{j_k}\right)\right),$$

y sigue el paso inductivo. En segundo lugar, si $G = \{j_1,\ j_2\},\ F = \emptyset$, tenemos

$$X - E_{j_1} = \left(X - E_{j_1}\right)\cap\left(X - E_{j_2}\right)\cup E_{j_2} - E_{j_1},$$

$$1-\mu\left(E_{j_1}\right) = \mu\left(\left(X - E_{j_1}\right)\cap\left(X - E_{j_2}\right)\right) + \mu\left(E_{j_2}\right) - \mu\left(E_{j_1}\cap E_{j_2}\right)$$

$$= \mu\left(\left(X - E_{j_1}\right)\cap\left(X - E_{j_2}\right)\right) + \mu\left(E_{j_2}\right) - \mu\left(E_{j_1}\right)\mu\left(E_{j_2}\right).$$

Luego

$$\mu\left((X-E_{j_1})\cap(X-E_{j_2})\right)=1-\mu\left(E_{j_1}\right)-\mu\left(E_{j_2}\right)+\mu\left(E_{j_1}\right)\mu\left(E_{j_2}\right)$$

$$=\left(1-\mu\left(E_{j_1}\right)\right)\left(1-\mu\left(E_{j_2}\right)\right).$$

Asumamos que $\mu\left(\cap_{j\in G}X-E_j\right)=\pi_{j\in G}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right)$ si $\sharp G<n_2$ y sea ahora $G=\left\{E_{k_j}\right\}_{1\leq j\leq n_2}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcap_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}E_j^c\right)=\mu\left(\bigcap_{j\in G}E_j^c\right)+\mu\left(\bigcap_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}E_{k_{n_2}}-E_j\right).$$

Por la hipótesis inductiva y el primer caso es

$$\mu\left(\bigcap_{j\in G}E_j^c\right)=\prod_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right)-$$

$$-\mu\left(E_{k_{n_2}}\right)\prod_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right)$$

$$=\prod_{j\in G}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right),$$

y sigue la hipótesis inductiva. Ahora, si $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_n\right)<+\infty$, como para cada n es $\sigma^2\left(\varkappa_{E_n}\right)=\mu\left(E_n\right)-\mu\left(E_n\right)^2$ resulta $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2\left(\varkappa_{E_n}\right)<+\infty$. En consecuencia, como $\{\varkappa_{E_n}\}_{n\geq 1}$ es acotada $\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{E_n}$ converge a.e. $[\mu]$ (cf. [19], Ch. IX, Sec. 46, Th. D, page 199). Como $\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty}E_n$ es el conjunto de puntos en los que $\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{E_n}$ no converge la condición es suficiente. Por otra parte, si $\mu\left(\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty}E_n\right)=0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{E_n}$ converge a.e. y $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_n\right)<+\infty$ (cf. [19], Ch. IX, Sec. 46, Th. D, page 199).

(iii)(1) Si $u<t$ en $\mathbb{R}$ sea $x\in\pi^{-1}\left((u,t)\right)$, donde *a fortiori* es $0<t$, $u<1$. Sea $s\in\mathbb{Q}$ tal que $\pi(x)<s<t$ y sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $s+2^{-n-1}<t$ y

$\sum_{k=1}^{n} x_k/2^k > u$. Si $y \in \{x_1\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2,\ ...\}}$ tenemos

$$u < \sum_{k=1}^{n} x_k/2^k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k/2^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k/2^k$$

$$= \pi\left(y\right) \leq \pi\left(x\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} < s + 2^{-n-1} < t.$$

Luego $\{x_1\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2,\ ...\}}$ es entorno de x contenido en $\pi^{-1}\left(u,t\right)$ y π es continua pues $x,\ u,\ t$ son arbitrarios.

(iii)(2) $\{x\}$ es subconjunto medible de X pues

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2\ ,\ ...\}}.$$

Como dicha intersección es decreciente y X es espacio de medida finita

$$\mu\left(\{x\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left[\{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2\ ,\ ...\}}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0.$$

(iii)(3) Si $Y = \cup_{m=0}^{\infty} Y_m$, con $Y_m = \{x \in X :\ \sharp x^{-1}\left(\{0\}\right) = m\}$, cada Y_m es evidentemente numerable y, por (iii)(2), de medida nula.

(iii)(4) Es fácil ver que cada aplicación $\pi_n\left(x\right) = x_n,\ x \in X - Y,\ n \in \mathbb{N}$ es medible. Luego $\pi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\pi_n$ resulta medible. Ahora,

$$\pi^{-1}\left([0,1/2)\right) = \{0\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ ...\}}\ \ y\ \ \pi^{-1}\left([1/2,1]\right) = \{1\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ ...\}}.$$

Dados enteros positivos $k,\ h$ indicaremos

$$I_{k,h} = \begin{cases} \left[\left(k-1\right)/2^h, k/2^h\right) & si \quad 1 \leq k < 2^h \\ \left[\left(2^h - 1\right)/2^h, 1\right] & si \quad k = 2^h. \end{cases}$$

En particular, $\pi^{-1}(I_{1,1}) = \{0\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ \dots\}}$, $\pi^{-1}(I_{2,1}) = \{1\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ \dots\}}$. Si $l > 1$, para cada $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2^l\}$ quedan determinados, unívocamente, intervalos $\{I_{k_j,h_j}\}_{1 \le j \le l}$ tales que

$$I_{i,l} = I_{k_l,h_l} \subsetneq I_{k_{l-1},h_{l-1}} \subsetneq \dots \subsetneq I_{k_1,h_1}.$$

Para cada $k,\ h$ es $\pi^{-1}(I_{k,h}) \subseteq \left\{x \in X :\ x_h = ((-1)^k + 1)/2\right\}$, de modo que

$$\pi^{-1}(I_{i,l}) = \prod_{j=1}^{l} \left\{ \frac{(-1)^{k_j} + 1}{2} \right\} \times \{0,1\}^{\{l+1,\ l+2,\ \dots\}}.$$

Por lo tanto

$$\mu\left[\pi^{-1}(I_{i,l})\right] = 2^{-l} = m(I_{i,l}), \tag{205}$$

donde m es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, siendo (205) válida aún si $l = 1$. Sea $\Gamma = \{r/2^s,\ r,\ s \in \mathbb{N} : 0 \le r/2^s \le 1\}$, $0 < b < 1$, $\{b_p\}_{p \ge 1}$ una sucesión creciente en Γ que converge a b. Entonces

$$m([0,b)) = m\left(\cup_{p=1}^{\infty}[0,b_p)\right) = \lim_{p \to +\infty} m[0,b_p) \tag{206}$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \mu\left[\pi^{-1}([0,b_p))\right] = \mu\left[\pi^{-1}([0,b))\right].$$

Análogamente, si $0 < a < 1$ y $\{a_q\}_{q \ge 1} \subseteq \Gamma$ es tal que $a_q \downarrow a$ escribimos

$$m((a,1]) = 1 - m[0,a] = 1 - m\left(\cap_{q=1}^{\infty}[0,a_q)\right) \tag{207}$$

$$= 1 - \lim_{q \to +\infty} m([0,a_q)) = 1 - \lim_{q \to +\infty} \mu\left[\pi^{-1}([0,a_q))\right]$$

$$= 1 - \mu\left[\pi^{-1}([0,a))\right] = \mu\left[\pi^{-1}(a,1]\right].$$

Como $a,\ b$ son arbitrarios, de (206) y (207) sigue la afirmación.

(iv)(1) Sea $\Phi : L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx) \to L^p_{\mathbb{C}}(X, d\mu)$, $\Phi(f) = f \circ \pi$, $f \in L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$. Φ está bien definida ya que si $f \in L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ está definida $f \circ \pi$ y es medible: si $B \subseteq \mathbb{C}$ es boreliano, $(f \circ \pi)^{-1}(B) = \pi^{-1}(f^{-1}(B))$. Además

$f^{-1}(B)$ es medible porque $f^{-1}(B)$ es medible Lebesgue en $[0,1]$. Como π es continua $\pi^{-1}(G)$ es de clase G_δ si $G \subseteq [0,1]$ es de clase G_δ. En particular, observamos que todo abierto de X es medible (cf. [19], Ch. VII, Sec. 38, Th. A, page 155) de modo que todo conjunto de clase G_δ también lo es. Como por (iii)(4) $\mu \circ \pi^{-1}$ se identifica con la medida de Lebesgue en $[0,1]$, la preimágen por π de conjuntos de medida nula tiene μ^*- medida nula, donde μ^* es la medida exterior inducida por μ. La completación de μ coincide con μ^* sobre la clase de conjuntos μ^*- medibles (cf. [19], Ch. III, §13, Th. C, page 56), de modo que podemos asumir que la preimágen por π de conjuntos de medida nula tiene medida nula. En consecuencia $f \circ \pi$ deviene medible, en consideración a la estructura general de conjuntos medibles Lebesgue. Además, si $1 \leq p < \infty$ tenemos

$$\int_X |f(\pi(x))|^p \ d\mu(x) = \int_0^1 |f(t)|^p \ d\left(\mu\pi^{-1}\right)(t)$$

y, por (iii)(4), $d\left(\mu\pi^{-1}\right)(t) = dt$, i.e. Φ es una isometría. Dada ahora $g \in L^p_{\mathbb{C}}(X, d\mu)$ entonces $g \circ \pi^{-1} : [0,1] \to \mathbb{C}$ es medible. Como

$$\int_0^1 \left|g\left(\pi^{-1}(t)\right)\right|^p \ dt = \int_X |g(x)|^p \ d\mu(x)$$

resulta $g \circ \pi^{-1} \in L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ y $\Phi\left(g \circ \pi^{-1}\right) = g$, i.e. Φ es un isomorfismo. Si $p = \infty$, $h \in L^\infty_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ resulta $\|\Phi(h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Podemos suponer $h \neq 0$ y, si $0 < t < \|h\|_\infty$ el conjunto $\{s \in [0,1] : |h(s)| > t\}$ es medible Lebesgue y tiene medida positiva. Por las observaciones anteriores, $\pi^{-1}(\{|h| > t\})$ es medible y

$$\mu\left(\pi^{-1}(\{|h| > t\})\right) = \mu(\{|\Phi(h) > t|\}) = m(\{|h| > t\}),$$

de donde $t \leq \|\Phi(h)\|_\infty$. Como t y h son arbitrarios Φ deviene isométrica. La suryectividad de Φ sigue como en el caso anterior.

(iv)(2) Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $n \in \mathbb{N}_0$ veremos que $\langle \cos(2k\pi t), f_n(t) \rangle = 0$. Evidentemente podemos suponer $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos

$$-\int_0^1 \cos(2k\pi t) \cdot f_n(t) \ dt = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left(\int_{(j-1)/2^n}^{(2j-1)/2^n} - \int_{(2j-1)/2^n}^{j/2^{n-1}} \right) \cos(2k\pi t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2k\pi} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left(2 \ \sin \frac{k\pi\,(2j-1)}{2^{n-1}} - \sin \frac{k\pi\,(j-1)}{2^{n-2}} - \sin \frac{k\pi j}{2^{n-2}} \right)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2^{n-2}} \right) \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \sin \frac{k\pi\,(2j-1)}{2^{n-1}}.$$

Sea $c_n = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \sin\left(k\pi\,(2j-1)/2^{n-1}\right), \ n \in \mathbb{N}$. Evidentemente $c_1 = 0$ y, si $n > 1$, podemos escribir

$$c_n = \sum_{l=1}^{2^{n-2}} \left(\sin \frac{k\pi\,(4l-3)}{2^{n-1}} + \sin \frac{k\pi\,(4l-1)}{2^{n-1}} \right)$$

$$= 2 \ \cos \frac{k\pi}{2^{n-2}} \sum_{l=1}^{2^{n-2}} \sin \frac{k\pi\,(2l-1)}{2^{n-2}} = 2 \ \cos \frac{k\pi}{2^{n-2}} \ c_{n-1}.$$

Por lo tanto, inductivamente sigue que $c_n = 0$ para todo n y sigue la afirmación. Como $\|\cos(2k\pi t)\|_2 = 1/\sqrt{2\pi}$ el sistema $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es no total. Además, si $n, \ m, \ i, \ j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $1 \leq j \leq 2^{m+n}$, cada intervalo $[(i-1)/2^n, \ i/2^n)$ es unión disjunta de 2^m intervalos $[(j-1)/2^{m+n}, \ j/2^{m+n})$. Por (202) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ deviene enseguida conjunto ortonormal. $\square$

6.18. Un teorema de Kakutani - Markoff

(Teorema de Kakutani - Markoff, cf. [26], [22]) Sea X un espacio compacto, Γ un conjunto no vacío de funciones continuas sobre X. Si Γ es conmutativo para la composición existe $\mu \in \mathrm{M}(X)$ tal que $\widetilde{u}(\mu) = \mu$ para toda $u \in \Gamma$, donde $\widetilde{u}(\mu) \in \mathrm{M}(X)$ es la medida naturalmente inducida sobre X por cada $u \in \Gamma$ y $\mu \in \mathrm{M}(X)$.[105]

Solución

Si $u \in \Gamma$ consideremos

$$\widetilde{u} : \mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(X), \ \langle g, \widetilde{u}(\mu) \rangle = \langle g \circ u, \mu \rangle, \ \mu \in \mathrm{M}(X), \ g \in C(X).$$

[105] En particular, μ se dice que es una *medida invariante respecto a* Γ.

Evidentemente, $\widetilde{u}$ es lineal y débilmente continua. Sea

$$\Gamma' = \{\Lambda_{u,n} : \ u \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}\},$$

donde para $u \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}$ escribimos $\Lambda_{u,n} = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{u^{i-1}}$. Sea Γ'' el conjunto de composiciones (en número finito) de elementos de Γ'. Si K es el cono de medidas positivas sobre X de masa total uno entonces K es convexo y débilmente compacto. Además, si $u \in \Gamma$ entonces $\widetilde{u}(K) \subseteq K$ y, por la convexidad de K, $\Lambda_{u,n}(K) \subseteq K$ si $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia K es Γ'' invariante. Si $\Xi = \{\vartheta(K) : \ \vartheta \in \Gamma''\}$ entonces Ξ es una *base de filtros* en K, pues si $\vartheta_1, \ \vartheta_2 \in \Gamma''$ existe $\vartheta_0 \in \Gamma''$ tal que $\vartheta_0(K) \subseteq \vartheta_1(K) \cap \vartheta_2(K)$. Para ello, basta hacer $\vartheta_0 = \vartheta_1 \circ \vartheta_2$, observar que ϑ_1 y ϑ_2 conmutan y $\vartheta_j(K) \subseteq K, \ j = 1, \ 2$. Fijado $\vartheta \in \Gamma''$ el conjunto $\vartheta(K)$ es subconjunto débilmente compacto de K, como sigue considerando redes en K y la estructura de elementos de Γ''. Como Ξ tiene la propiedad de intersección finita y K es débilmente compacto $\cap \ \Xi \neq \emptyset$. Si $\mu_0 \in \cap \ \Xi$, $n \in \mathbb{N}, \ u \in \Gamma$ existe $\mu \in K$ tal que $\mu_0 = \Lambda_{u,n}(\mu)$. Si $f \in C(X)$ escribimos

$$|\langle f, \ \widetilde{u}(\mu_0) - \mu_0 \rangle| = |\langle f \circ u - f, \ \mu_0 \rangle| = |\langle f \circ u - f, \ \Lambda_{u,n}(\mu) \rangle|$$

$$= 1/n \ \left| \left\langle f \circ u - f, \ \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{u^j}(\mu) \right\rangle \right|$$

$$= \left| \frac{\langle f \circ u^n - f, \mu \rangle}{n} \right| \leq 2 \|f\| / n,$$

de donde $\|\widetilde{u}(\mu_0) - \mu_0\| \leq 2/n$ y, como n es arbitrario, sigue que $\widetilde{u}(\mu_0) = \mu_0$. □

6.19. Funciones compresibles e incompresibles sobre un espacio localmente compacto. Teorema de recurrencia de Poincaré.

Sea X espacio localmente compacto, Σ la $\sigma-$ álgebra de conjuntos medibles respecto a una medida positiva μ sobre $X, \ u : X \to X$ una función continua tal que $\mu(u^{-1}(Z)) = 0$ si $Z \in N_\mu$, donde N_μ es la subclase de

Σ de conjuntos de medida nula.[106] Si n es un entero no negativo y $A \subseteq X$ denotaremos $u^{-n}(A)$ al conjunto $(u^n)^{-1}(A)$. También escribiremos

$$A_{ent} = \cup_{n=0}^{\infty} u^{-n}(A),\ A_{ret} = A \cap u^{-1}(A_{ent}),\ A_{ret\ \inf} = A \bigcap \cap_{n=0}^{\infty} u^{-n}(A_{ent}). \tag{208}$$

Diremos que un conjunto medible A *es de clase* ω respecto a u si $\{u^{-n}(A)\}_{n\geq 0}$ es sucesión disjunta, en cuyo caso escribiremos $A \in \omega[u]$. u se dirá *incompresible* si para cada $A \in \Sigma$ tal que $u^{-1}(A) \subseteq A$ resulta $A - u^{-1}(A) \in N_\mu$. u se dirá *compresible* si no es incompresible.

(i) Son equivalentes: (a) $\omega[u] \subseteq N_\mu$. (b) Si $A \in \Sigma,\ A - A_{ret} \in N_\mu$. (c) u es incompresible. (d) Si $A \in \Sigma,\ A - A_{ret\ \inf} \in N_\mu$.

(ii) u es compresible sii existe $f : X \to \mathbb{R}$ función medible tal que $f \circ u \geq f$ y $\mu(\{f \circ u > f\}) > 0$. [107]

(iii) (Teorema de recurrencia de Poincaré) Si X es compacto y u es invariante respecto a μ entonces u es incompresible.

(iv) Si X tiene una base numerable de abiertos y u es incompresible existe $Z \in N_\mu$ tal que para todo $x \notin Z$ y todo entorno U de x en X es $u^n(x) \in U$ para infinitos enteros positivos $n' s$.

Solución

[106] Sea $\mathcal{S}_i(X)$ (resp. $\mathcal{S}_s(X)$) la clase de funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinuas y acotadas inferiormente (resp. semicontinuas y acotadas superiormente) por alguna función continua. Si $f \in \mathcal{S}_i(X)$ (resp. $f \in \mathcal{S}_s(X)$) escribimos $\mu^*(f) = \sup_{g\in C(X):\ g\leq f} \langle g, \mu\rangle$ (resp. $\mu_*(f) = \inf_{g\in C(X):\ g\geq f} \langle g, \mu\rangle$). Además, si $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función arbitraria definimos $\mu^*(h) = \inf_{f\in\mathcal{S}_i(X):\ f\geq h} \mu^*(f)$ (resp. $\mu_*(h) = \sup_{f\in\mathcal{S}_s(X):\ f\leq h} \mu_*(f)$). Entonces

$$N_\mu = \{Z \in \mathcal{P}(X) :\ \mu^*(\varkappa_Z) = 0\}$$

y Σ contiene a los subconjuntos de X que son unión disjunta de un conjunto de N_μ y de una sucesión de subconjuntos compactos (cf. [11], Ch. XIII, §9, page 134). Por ello, en las condiciones presentes, $u^{-1}(A) \in \Sigma$ para cada $A \in \Sigma$. Si $B \subseteq X$ se indica $\mu^*(B) = \mu^*(\varkappa_B)$, $\mu_*(B) = \mu_*(\varkappa_B)$ (*medidas exterior e interior de* B respectivamente). *A fortiori*, si $B \in \Sigma$ ambas cantidades coinciden y se denota $\mu(B)$ al valor común (cf. [11], Ch. XIII, §7, page 123).

[107] Sea u compresible, n entero positivo mayor que uno, $f : X \to \mathbb{R}$ función medible tal que $f \circ u \geq f$ y $\mu(\{f \circ u > f\}) > 0$. Como $f \circ u^n \geq f \circ u^{n-1} \geq ... \geq f$ tenemos $\{f \circ u > f\} \subseteq \{f \circ u^n > f\}$ y, por lo tanto, u^n será compresible.

$[(a) \Rightarrow (c)]$ Si $\mu\left(u^{-1}(A) - A\right) = 0$ para cada $A \in \Sigma$ tal que $A \subseteq u^{-1}(A)$ entonces u es incompresible. En efecto, si $B \in \Sigma$ es tal que $u^{-1}(B) \subseteq B$ entonces $X - B \subseteq X - u^{-1}(B)$ y $X - u^{-1}(B) = u^{-1}(X - B)$. En consecuencia $\mu\left(u^{-1}(X - B) \cap B\right) = 0$ y, como

$$u^{-1}(X - B) \cap B \supseteq B - u^{-1}(B)$$

es $\mu\left(B - u^{-1}(B)\right) = 0$. Ahora, si u es compresible existe $C \in \Sigma$ tal que $C \subseteq u^{-1}(C)$ y $\mu\left(u^{-1}(C) - C\right) > 0$. Sea $D = u^{-1}(C) - C$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in D \cap u^{-p}(D)$. Como $C \subseteq u^{-1}(C)$ y $D \subseteq u^{-1}(C)$ es $u^{p}(x) \in C \cap D$, lo que es imposible porque $C \cap D = \emptyset$. Si además $n \in \mathbb{N}_0$ resulta

$$u^{-n}(D) \cap u^{-n-p}(D) = u^{-n}\left(D \cap u^{-p}(D)\right) = \emptyset.$$

Como D es medible $D \in \omega[u]$. Pero $\mu(D) > 0$ contradice (a).

(i) $[(c) \Rightarrow (b)]$ Si $A \in \Sigma$ por (208) es $u^{-1}(A_{ent}) \subseteq A_{ent}$. Luego

$$A_{ent} - u^{-1}(A_{ent}) \in N_\mu$$
$$y$$
$$A - A_{ret} = A - u^{-1}(A_{ent}) \subseteq A_{ent} - u^{-1}(A_{ent}),$$

de donde $A - A_{ret} \in N_\mu$. $[(b) \Rightarrow (a)]$ Si $A \in \omega[u]$, como $\{u^{-n}(A)\}_{n \geq 0}$ es sucesión disjunta podemos escribir

$$A - A_{ret} = \cap_{n=1}^{\infty}\left(A - u^{-n}(A)\right) = A, \tag{209}$$

y por hipótesis resulta $A \in N_\mu$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Observar que la identidad (209) es válida si $A \in \omega[u]$.

$[(a) \Rightarrow (d)]$ Podemos escribir $A - A_{ret\ \inf} = \cup_{m=0}^{\infty} B_m$, donde

$$B_m = \cap_{n=m}^{\infty}\left(A - u^{-n}(A)\right),\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Fijado m tenemos $B_m \in \omega[u]$, pues es medible y, si $r \in \mathbb{N}_0$,

$$u^{-r}(B_m) = \cap_{n=m}^{\infty}\left(u^{-r}(A) - u^{-n-r}(A)\right),$$

de manera que $\{u^{-r}(B_m)\}_{r \geq 0}$ es una sucesión inyectiva. Por la hipótesis deducimos que $A - A_{ret\ \inf} \in N_\mu$.

$[(d) \Rightarrow (b)]$ Notar que $A - A_{ret\ \inf} \supseteq A - A_{ret}$.

(ii) Si u es compresible sea $A \in \Sigma$ tal que $A \subseteq u^{-1}(A)$ y $\mu\left(u^{-1}(A) - A\right) > 0$. Entonces

$$\varkappa_A(u(x)) = 1 = \varkappa_A(x) \quad si \quad x \in A,$$

$$\varkappa_A\left(u\left(x\right)\right) \geq 0 = \varkappa_A(x) \quad si \quad x \notin A$$

y basta considerar $f = \varkappa_A$. Recíprocamente, por hipótesis existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\mu\left(\{f < r < f \circ u\}\right) > 0$. Como $f \circ u \geq f$ es

$$u^{-1}\left(\{f > r\}\right) \supseteq \{f > r\}\,.$$

Si u fuese incompresible $\mu\left(u^{-1}\left(\{f > r\}\right) - \{f > r\}\right) = 0$. Pero

$$\{f < r < f \circ u\} \subseteq u^{-1}\left(\{f > r\}\right) - \{f > r\}\,,$$

y u es necesariamente compresible.

(iii) Por la compacidad de X y el teorema de Markoff - Kakutani hay alguna medida invariante respecto a u. Si μ es $u-$ invariante entonces $\langle f \circ u, \mu\rangle = \langle f, \mu\rangle$ para cada $f \in C(X)$. Sea C compacto tal que $C \subseteq u^{-1}(C)$. $\varkappa_C$ y $\varkappa_{u^{-1}(C)}$ son scs porque C y $u^{-1}(C)$ son cerrados (cf. [11], Ch. XII, 12.7.4, page 25). Podemos escribir

$$\mu\left(C\right) = \mu_*\left(\varkappa_C\right) = \inf_{g \in C(X):\ g \geq \varkappa_C} \langle g, \mu\rangle = \inf_{g \in C(X):\ g \geq \varkappa_C} \langle g \circ u, \mu\rangle$$

$$\geq \inf_{h \in C(X):\ h \geq (\varkappa_C) \circ u} \langle h, \mu\rangle = \mu_*\left(\varkappa_{u^{-1}(C)}\right) = \mu\left(u^{-1}(C)\right) \geq \mu\left(C\right).$$

Como $\mu\left(u^{-1}\left(Z\right)\right) = 0$ si $Z \in N_\mu$, de la estructura de los elementos de Σ concluímos que $\mu\left(u^{-1}(A)\right) = \mu\left(A\right)$ si $A \in \Sigma$. Si $A \subseteq u^{-1}(A)$ y $A \in \Sigma$, como μ es finita $u^{-1}(A) - A \in N_\mu$ y u es incompresible.

(iv) Sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de abiertos de X, $Z = \cup_{n=1}^{\infty} V_n - (V_n)_{ret\ \inf}$. Si u es incompresible $Z \in N_\mu$. Sea $x \notin Z$, $U \subseteq X$ entorno de x, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{n_0}$ y $V_{n_0} \subseteq U$. Como

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n - \overline{\lim}_{m \to +\infty}\ u^{-m}\left(V_n\right)$$

es $x \in \overline{\lim}_{m \to +\infty}\ u^{-m}\left(V_{n_0}\right)$ y sigue (iv). $\square$

6.20. Una medida boreliana no regular en el plano real.

Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$ con la siguiente topología λ: un subconjunto es abierto si y solo si su intersección con cada recta vertical es abierta en dicha recta respecto a la topología usual de $\mathbb{R}$. Luego $(\mathbb{R}^2, \lambda)$ es espacio de Hausdorff localmente compacto y, si $f \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$, hay un conjunto finito $F_f \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - F_f \times \mathbb{R}$. La relación

$$\Lambda f = \sum_{x \in F_f} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\ dy,\ f \in C_c\left(\mathbb{R}^2, \lambda\right),$$

define un operador $\Lambda \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)_+^*$. La única medida de Borel μ que realiza a Λ según el teorema representación de F. Riesz es *no regular.* [108]

Solución

Claramente λ es una topología separada; $\{x\} \times (y-1, y+1)$ es entorno $\lambda-$ abierto de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con clausura $\{x\} \times [y-1, y+1]$ compacta. Si $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es $\lambda-$ compacto, como $\{\{x\} \times \mathbb{R}\}_{x \in \mathbb{R}:\ (\exists y \mathbb{R})/(x,y) \in K}$ es cubrimiento $\lambda-$ abierto de K, existe $G \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R})$ tal que $K \subseteq \cup_{x \in G} \{x\} \times \mathbb{R}$. Por ello Λ está bien definida y es un funcional lineal positivo sobre $C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$. Sea μ la medida de Borel asociada, $V \in \lambda$ tal que $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq V$. Si $x \in \mathbb{R}$ sea $0 < \varepsilon_x < 1$ tal que $\{x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \subseteq V$ y $W = \cup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)$, de modo que $W \in \lambda$ y $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq W \subseteq V$. Como $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x : 1/(n+1) < \varepsilon_x < 1/n\}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $I = \{x : 1/(n_0+1) < \varepsilon_x < 1/n_0\}$ es infinito (más aún, no numerable). Si $F \in \mathcal{P}_f(I)$ sea $f \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp}(f) \subseteq \cup_{x \in F} \{x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)$ y $f(x, y) = 1$ si $|y| \leq \varepsilon_x/2$ y $x \in F$. Entonces (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.14, (1), page 43)

$$\mu(V) \geq \mu(W) \geq \Lambda f \geq \sum_{x \in F} \varepsilon_x > (\sharp F) / (n_0 + 1)$$

y, como F es arbitrario, $\mu(V) = +\infty$. Así $\mu(\mathbb{R} \times \{0\}) = +\infty$ porque V es arbitrario (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.14, (c), page 42). Por otra parte, si C

[108] Una medida positiva μ definida sobre la $\sigma-$ álgebra de Borel de conjuntos de un espacio de Hausdorff localmente compacto X es *regular* si, para cada conjunto de Borel E de X, se verifica

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) :\ U \supseteq E,\ U - \text{ abierto}\}$$

$$= \sup\{\mu(K) :\ K \subseteq E,\ K - \text{ compacto}\}.$$

es subconjunto compacto de $\mathbb{R}\times \{0\}$ deducimos, por la observación sobre la estructura de conjuntos $\lambda-$ compactos, que C se reduce a un número finito de puntos. Como $\mu(C) = \inf\{\Lambda g : \ g \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)\}$ (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.14, (7), page 44), si $(a,0) \in C$ y $\delta > 0$ sea $g \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$, $0 \leq g \leq 1$,

$$\operatorname{supp}(g) \subseteq \{a\} \times [-\delta/2, \delta/2].$$

Entonces $\mu(\{(a,0)\}) \leq \Lambda g \leq \delta$ y como δ es arbitrario $\mu(\{(a,0)\}) = 0$. Luego $\mu(C) = 0$ y, como $\mathbb{R}\times \{0\}$ es boreliano, μ es no regular. □

Referencias

[1] R. Adams: *Sobolev spaces.* Acad. Press, USA, 1975.

[2] M. Ahues, A. Largillier & B. Limaye: *Spectral computations for bounded operators.* Chapman & Hall/CRC. Appl. Math. **18**, 2001.

[3] R. Arens: *Note on convergence in topology.* Math. Mag., **23**, 229 - 234, 1950.

[4] M. Atiyah & I. Macdonald: *Introduction to commutative algebra.* Addison - Wesley Publ. Co., 1969, G. B..

[5] S. Banach: *Théorie des operations linéaires.* Monografie Mat., Vol. 1, Warsawa, 1932.

[6] J. Cerdá: *Análisis real.* Edicions de la Universitat de Barcelona. 1996.

[7] J. Clarkson: *Uniformly convex spaces.* Trans. A. M. S. **40**, 396 - 414, 1936.

[8] J. Conway: *Functions of one complex variable.* N. Y.. Springer - Verlag, 1978.

[9] J. Conway: *A course in functional analysis.* 2nd. ed., Springer - Verlag, N. Y., 1990.

[10] C. Cowen & B. Maccluer: *Composition operators on spaces of analytic functions.* CRC Press, 1995, USA..

[11] J. Dieudonné: *Treatise on analysis.* Volume II, Acad. Press Inc., London, 1976.

[12] J. Dieudonné: *Fundamentos de análisis moderno.* Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

[13] R. Douglas: *Banach algebra techniques in operator theory.* 2nd. ed., Springer - Verlag, N. Y., 1998.

[14] J. Dugundji: *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston. 1973.

[15] N. Dunford: *Spectral theory I, convergence to projections.* Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 1943, 185 - 217.

[16] P. Duren: *Theory of H^p spaces.* Dover Publ. Inc., Canadá, 2000.

[17] I. Gel ´fand & N. Vilenkin: *Generalized functions. Appl. of harminic analysis.* Vol. 4, Acad. Press, U.K., 1964.

[18] R. Gordon: *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* Graduate Studies in Math., Vol. 4, American Math. Soc.. 1994, USA..

[19] P. Halmos: *Measure Theory.* D. Van Nostrand Co., 1964, USA..

[20] P. Halmos: *A Hilbert space problem book.* 2nd. ed. N. Y.: Springer - Verlag, 1982.

[21] R. Kadison & J. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras.* Vol. I. Graduate Studies in Math., Vol. 15. Amer. Math. Soc., 1997.

[22] S. Kakutani: *Two fixed point theorems concerning bicompact convex sets.* Proc. Imp. Akad., Tokio **14**, 1938, 242 - 245.

[23] J. Kelley: *Topología general.* EUDEBA, 1975.

[24] A. Kolmogorov & S. Fomin: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Ed. MIR, Moscú, 1975.

[25] A. Kilbas, O. Marichev & S. Samko: *Fract. integrals and derivatives.* Gordon and Breach Sc. Publ., Amsterdam, 1993.

[26] A. Markoff: *Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **10** (1936), 311 - 314.

[27] S. Lipschutz: *Teoría y problemas de álgebra lineal.* McGraw - Hill, México, 1979.

[28] D. Milman: *On some criteria for the regularity of spaces of type (B).* Dokl. Akad. Nauk SSSR **20**, 243 - 246, 1938.

[29] W. Novinger: *Mean convergence for L^p spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., **34**, 627 - 628, 1972.

[30] W. Orlicz: *Beitrage zur theorie der orthogonalent wicklungen.* II, Studia Math. **1**, 241 - 255, 1929.

[31] C. Peña: *Integración fraccionaria iterada.* Actas del 2do. Congreso Dr. A. Monteiro. Dpto. de Matemáticas - Inst. de Matemáticas. UNSur, BB, Argentina, 1993, págs. 79 - 93.

[32] C. Peña: *On Hadamard algebras.* Le Matematiche, volume LV, fascicolo I, 43 - 54. Catania, Italia, 2000.

[33] C. Peña: *Closed principal ideals on Hadamard rings.* International Journal of Appl. Math., Vol. 4, no. 1, Bulgaria, 23 - 26, 2000.

[34] C. Peña: *Elements of sequence algebras.* Novi Sad Journal of Math., Vol. 31, no 2, Yugoslavia, 2001.

[35] C. Peña: *A non denseness result.* Actas del VI Congreso Dr. A. Monteiro. Dpto. de Matemáticas - Inst. de Matemáticas. UNSur, BB, Argentina, 2001.

[36] C. Peña: *On Hadamard - Dirichlet algebras.* Acta Math. Univ. Comenianae. Vol. LXXI, **1**, Slovak Republic, 9 - 17, 2002.

[37] B. Pettis: *Linear functionals and completely additive set functions.* Duke Math. J., **4**, 552 - 565, 1938.

[38] B. Pettis: *A proof that every uniformly convex space is reflexive.* Duke Math. J. **5**, 249 - 253, 1939.

[39] A. Pietsch: *Eigenvalues and s - numbers.* Cambridge University Press, 1987.

[40] M. Reed & B. Simon: *Methods of modern mathematical physics. I: Functional analysis.* Acad. Press, Inc.. UK, 1980.

[41] H. Royden: *Real Analysis.* MACMILLAN Publ. Co., Inc., N.Y., 1968.

[42] W. Rudin: *Functional analysis.* McGraw - Hill, Inc., 1979.

[43] W. Rudin: *Real and complex analysis.* McGraw - Hill Series in Higher Math., 1974.

[44] M. Stone: *Topological representations of distributive lattices and browerian logics.* Časopis Pěst. Mat. Fys., **67**, 1937, 1 - 27.

[45] F. Treves: *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Acad. Press. N. Y. - London, 1967.

[46] J. von Neumann, Math. Ann., vol. 102, 370 - 427, 1930.

[47] W. Veech: *A second course in complex analysis.* W. A. Benjamin, Inc., N. Y., Amsterdam, 1967.

[48] H. Wallman: *Lattices and topological spaces.* Ann. of Math., (2), **42**, (1941), 687 - 697.

[49] R. Wheeden & A. Zygmund: *Measure and integral. An introduction to real analysis.* Marcel Dekker Inc., N. Y., 1977.